ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE RENOUARD

Analyticité et sommabilité « de Borel » des fonctions de Schwinger du modèle de Yukawa en dimension $d = 2$. II. La « limite adiabatique »

Annales de l'I. H. P., section A, tome 31, nº 3 (1979), p. 235-318
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__31_3_235_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré Section A :
Vol. XXXI, n° 3, 1979, p. 235-318. *Physique théorique.*

Analyticité et sommabilité « de Borel » des fonctions de Schwinger du modèle de Yukawa en dimension $d = 2$. II. La « limite adiabatique »

par

Pierre RENOUARD

Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France
Équipe de Recherche du C. N. R. S., n° 174

RÉSUMÉ. — On présente une version modifiée de la « Cluster expansion » de Glimm-Jaffe-Spencer, que l'on applique à la démonstration d'une propriété de sommabilité de Borel pour les fonctions de Schwinger du modèle de Yukawa « sans cut-off » en dimension deux ; on établit que, comme fonctions de la constante de couplage, elles admettent un prolongement holomorphe dans un domaine de la forme $\{ \lambda \in \mathbb{C} ; | \mathrm{Arg}. \lambda^2 | < \pi/4, | \lambda | < a \}$, dont la dérivée $n^{\text{ème}}$ est majorée par $bc_\varepsilon^n(n\,!)^{7/6+\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$.

ABSTRACT. — We use a modified version of the « Cluster expansion » of Glimm-Jaffe-Spencer to proove a summability property of Borel type for the Schwinger functions of the Yukawa_2 model without cut-off; we show that, as functions in the coupling constant, they have an analytic continuation in a domain of the form $\{ \lambda \in \mathbb{C} ; | \mathrm{Arg}. \lambda^2 | < \pi/4, | \lambda | < a \}$, such that the n^{th} derivative is bounded by $bc_\varepsilon^n(n\,!)^{7/6+\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$.

INTRODUCTION

La méthode de « Cluster expansion » de J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer joue un rôle central dans l'étude de la « limite adiabatique » des modèles de Théorie quantique des champs dans le cas de « couplage faible » (et les situations qui s'y ramènent). La complication de sa formulation « classique » la rend cependant d'un usage d'autant plus incommode qu'elle se superpose à la complexité intrinsèque du modèle étudié. C'est pourquoi il nous a semblé utile de la clarifier :

— d'une part en donnant une formulation abstraite (c'est-à-dire indépendante de tout modèle et même de toute application éventuelle à la Théorie des champs) de ses principes fondamentaux [Appendice A],

— d'autre part en proposant une règle assez systématique de mise en œuvre de ces principes [§ 1 et Appendice D] qui élimine bon nombre de difficultés (de justification mais surtout de calcul) propres à la construction usuelle.

Typiquement, sont données des (familles de) fonctions

$$\Lambda \mapsto S_j(\Lambda) = Z_j(\Lambda)/Z_0(\Lambda),$$

où Λ est une union finie de mailles d'un réseau dans R^d; les énoncés généraux [théorèmes A.3, A.4 et A.6] réduisent la démonstration de l'existence de limites lorsque $\Lambda \to \mathbf{R}^d$ et l'étude de propriétés (« cluster fort ») de ces limites à la démonstration de l'existence d'un prolongement $(\Lambda, s) \mapsto Z_j(\Lambda, s)$, où s est un paramètre convenable [voir A.1], tel que $Z_j(\Lambda, \mathbf{1}) = Z_j(\Lambda)$ et vérifiant les propriétés énoncées dans les définitions A.3, A.4 et A.6. On s'efforce d'utiliser la liberté de choix dont on dispose dans la construction de ce prolongement pour simplifier autant que faire se peut les vérifications nécessaires.

Dans les différents modèles de la Théorie des champs (en dimension $d=2$) les fonctions Z_j sont les fonctions de Schwinger non normalisées « à volume fini », elles sont définies par des intégrales $Z_j(\Lambda) = \int_{\mathscr{S}'} F_j(\Lambda, \omega)\mu(d\omega)$, on propose un prolongement de la forme $Z_j(\Lambda, s) = \int_{\mathscr{S}'} G_j(\Lambda, s, \omega)\nu(d\omega)$, où, contrairement à la construction « usuelle », ν est une mesure fixe (on a choisi la mesure gaussienne centrée dont la covariance est l'identité sur $L^2(\mathbf{R}^2)$, mais on pourrait tout aussi bien — par simple changement de variables — travailler avec la mesure « libre » μ, de covariance $(-\Delta+m^2)^{-1}$), et où les fonctions G_j ne sont pas « plus compliquées » que leurs homologues habituelles (et en particulier, suivant une idée de J. Magnen et R. Sénéor [*8*], ne dépendent du paramètre s que par l'intermédiaire de coefficients numériques « universels » [Appendice B]). Comme l'essentiel des vérifications consiste à contrôler les dérivées d'ordre arbitraire, relativement à s, des fonctions Z_j, le calcul est ainsi simplifié — sans contrepartie — de tout ce qui, dans la formulation habituelle, provient des dérivées de la mesure; et d'autre part, les justifications (« régularité à l'infini », dérivabilité, ...) sont obtenues par des méthodes élémentaires de théorie de l'intégration (notamment sans qu'il soit nécessaire d'introduire des régularisations des fonctions G_j).

On utilise cette version modifiée de la « Cluster expansion » pour établir une propriété de sommabilité de Borel pour les fonctions de Schwinger du modèle de Yukawa en dimension deux (sans « cut-off »), considérées comme fonctions de la constante de couplage : après avoir introduit le prolongement évoqué ci-dessus [§ 1 et Appendice C], on montre que ces fonctions admettent un prolongement analytique dans un domaine de la forme $D = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Arg.} \lambda^2| < \pi/4, |\lambda| < a \}$, [§ 2], et que leurs dérivées successives admettent une majoration de la forme $|d^n/d\lambda^n S_\lambda| \leq a b_\varepsilon^n (n!)^{7/6+\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \lambda \in \bar{D}$ (1) [§ 3] (bien que les arguments du § 2 puissent être considérés comme un cas particulier de ceux du § 3, on a préféré, pour la clarté de l'exposé, les présenter séparément, fût-ce au prix de quelques redites).

Je remercie MM. J. Magnen, J. Lascoux et R. Sénéor pour d'utiles discussions.

1. CONSTRUCTION D'UN PROLONGEMENT DES FONCTIONS $\Lambda \mapsto Z_{\lambda,\Lambda}^{(r,t)}$

Étant donné un réseau à mailles carrées, de pas $l > 0$, dans l'espace euclidien E de dimension deux, on désigne par $\mathscr{X}_0$ l'ensemble des unions finies de mailles et — suivant les notations de [10] — pour $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $r, t \in \mathbf{N}$, on note $Z_{\lambda,\Lambda}^{(r,t)}$, $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}$ (2) le prolongement analytique des fonctions de Schwinger non normalisées « à volume fini », introduit en [10], théorème I, et on pose

$$S_{\lambda,\Lambda}^{(r,t)} = Z_{\lambda,\Lambda}^{(r,t)} / Z_{\lambda,\Lambda}^{(0,0)}, \qquad \text{si} \qquad Z_{\lambda,\Lambda}^{(0,0)} \neq 0.$$

Suivant [1], [8], on va étudier la convergence, lorsque Λ tend vers E (3), des familles de fonctions $(S_{\lambda,\Lambda}^{(r,t)})_{\Lambda \in \mathscr{X}_0}$, et les propriétés de leurs limites $S_\lambda^{(r,t)}$ en utilisant la méthode de « Cluster expansion » de Glimm-Jaffe-Spencer [4], [5], [3].

On a rappelé les fondements formels de cette méthode à l'appendice A (4).

La première étape — traitée dans ce paragraphe — consiste à construire, pour chaque fonction $\Lambda \mapsto Z_{\lambda,\Lambda}^{(r,t)} \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}_0}$, un prolongement

$$(\Lambda, s) \mapsto Z_{\lambda,\Lambda,s}^{(r,t)} \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}_0 \times S_0} \quad (5).$$

(1) On corrige ici une erreur matérielle commise dans [10], voir la note (42), p. 266.

(2) On se limite au cas $\sigma = 0$ et on note $Z_{\lambda,\Lambda}^{(r,t)}$ pour $Z_{\lambda,0,\mathbf{1}_\Lambda}^{(r,t)}$.

(3) $\mathscr{X}_0$ étant ordonné par inclusion.

(4) On utilise dans la suite des définitions et notations qui y sont introduites.

(5) On donne (sans justification) à l'appendice D les éléments de la construction analogue pour le modèle $\lambda P(\Phi)_2$.

1.1. On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel topologique réel $\mathcal{S}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$, par $\mathcal{S}'$ son dual, par $\mathcal{A}$ la tribu sur $\mathcal{S}'$ engendrée par les fonctions linéaires

$$\omega \mapsto \langle \omega, f \rangle, \quad (\omega \in \mathcal{S}'), \quad f \in \mathcal{S}$$

et par $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{S}', \mathcal{A})$ la mesure dont la transformée de Fourier $\hat{\nu}$ est

$$(1.1.1) \qquad \hat{\nu}(f) \equiv \int_{\mathcal{S}'} e^{i\langle \omega, f \rangle} \nu(d\omega) = e^{-\frac{1}{2}\| f \|_2^2}, \qquad \forall f \in \mathcal{S},$$

(où $\| \cdot \|_2$ est la norme dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{E})$).

On utilisera essentiellement les deux propriétés suivantes de ν :

a) Si pour $m > 0$, $\mu_m \in \mathcal{M}^1(\mathcal{S}', \mathcal{A})$ est définie par

$$(1.1.2) \qquad \hat{\mu}_m(f) = e^{-\frac{1}{2}\| \Sigma_m^{-1/2} f \|_2^2}, \qquad \forall f \in \mathcal{S},$$

(où $\Sigma_m = (-\Delta + m^2)$), alors pour tout $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1(\mathcal{S}', \mu_m)$ on a $\mathrm{F} \circ \Sigma_m^{-1/2} \in \mathrm{L}^1(\mathcal{S}', \nu)$ et

$$(1.1.3) \qquad \int_{\mathcal{S}'} \mathrm{F}(\Sigma_m^{-1/2}\omega)\nu(d\omega) = \int_{\mathcal{S}'} \mathrm{F}(\omega)\mu_m(d\omega).$$

b) Pour chaque ouvert $\mathrm{U} \subset \mathrm{E}$. Soit $\mathcal{A}(\mathrm{U})$ la tribu sur $\mathcal{S}'$ engendrée par les fonctions équivalentes mod. ν aux fonctions

$$\omega \mapsto \langle \omega, f \rangle, \quad (\omega \in \mathcal{S}'), \quad f \in \mathcal{S}, \quad \operatorname{supp} f \subset \mathrm{U}.$$

Si U_1 et U_2 sont des ouverts disjoints et si $\mathrm{F}_j \in \mathrm{L}^1(\mathcal{S}', \mathcal{A}(\mathrm{U}_j), \nu)$, $j = 1, 2$, alors F_1 et F_2 sont des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire que $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2 \in \mathrm{L}^1(\mathcal{S}', \nu)$ et

$$(1.1.4) \qquad \mathrm{E}_\nu[\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2] = \mathrm{E}_\nu[\mathrm{F}_1] \,.\, \mathrm{E}_\nu[\mathrm{F}_2].$$

1.2. D'après la propriété 1.1 (*a*), ci-dessus, on peut facilement remplacer les intégrales relatives à μ_m qui interviennent dans la définition des fonctions de Schwinger « à volume fini » par des intégrales relatives à ν, on est ainsi amené à introduire des notations suivantes :

— Le processus $\Phi : \mathcal{S} \to \mathrm{L}^1(\mathcal{S}', \nu)$ est tel que, pour tout $f \in \mathcal{S}$, $\Phi(f)$ est la classe mod. ν de la fonction $\omega \mapsto \langle \omega, \Sigma_m^{-1/2} f \rangle$, $(\omega \in \mathcal{S}')$ (6),

— Ω est la classe mod. ν de la fonction constante égale à 1,

— si $\mathrm{X} \in \mathcal{X}_0$ et $k \in \mathcal{S}$, $\mathbf{K}_{\mathrm{X},k} : \mathcal{S}' \to \mathcal{C}_\delta$, $(\delta > 2)$, est définie par

$$(1.2.1) \qquad \mathbf{K}_{\mathrm{X},k}(\omega) = \mathrm{K}(\mathbf{1}_\mathrm{X} \,.\, \Sigma_m^{-1/2}(\omega * k)), \qquad \forall \omega \in \mathcal{S}',$$

(où K est défini en [*10*] (1.4.2)); d'après [*10*], proposition 1.6 si $(k_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est un échelon unité, la famille $(\mathbf{K}_{\mathrm{X},k_j})_{j\in\mathbf{N}}$ admet une limite, notée $\mathbf{K}_\mathrm{X}$, dans $\mathrm{L}^p_{\mathcal{C}_\delta}(\mathcal{S}', \nu)$, $p \in [1 + \infty]$, $\delta > 2$,

---

(6) Φ n'est donc pas le processus canonique.

D'autre part, chaque symbole désigne non pas « la même » fonction sur $\mathcal{S}'$ que dans [*10*], mais son image par l'application $\omega \mapsto \Sigma_m^{-1/2}\omega$.

— on définit $\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathbf{K}_{\mathrm{X}}^{2} \in \mathrm{L}^{1}(\mathscr{S}', \nu)$ par

$$(1.2.2)\quad \int_{\mathscr{S}'} \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathbf{K}_{\mathrm{X}}^{2}(\omega) e^{i\langle\omega, f\rangle} \nu(d\omega) = -\left((\mathbf{1}_{\mathrm{X}} . \Sigma_m^{-1/2} f), \mathrm{B}(\mathbf{1}_{\mathrm{X}} . \Sigma^{-1/2} f)\right)\hat{\nu}(f), \ \forall f \in \mathscr{S}$$

où B est l'opérateur de convolution défini par

$$\widehat{\mathrm{B}h}(p) = \mathrm{B}(p)\hat{h}(p), \qquad \forall p \in \mathrm{E}, \qquad h \in \mathscr{S},$$

avec

$$(1.2.3)\quad \mathrm{B}(p) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{\mathrm{E}} \left[\frac{\frac{|p|^2}{4} - |q|^2 + \varepsilon_{\Gamma} \mathrm{M}^2}{\left(\left|q + \frac{p}{2}\right|^2 + \mathrm{M}^2\right)\left(\left|q - \frac{p}{2}\right|^2 + \mathrm{M}^2\right)} + \frac{1}{|q|^2 + \mathrm{M}^2} \right] dq,$$

(où $\varepsilon_{\Gamma} = 1$ si $\Gamma = 1$ et $\varepsilon_{\Gamma} = -1$ si $\Gamma = i\gamma_5$) ; enfin on pose

$$(1.2.4)\quad \det_{\mathrm{ren}}(\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_{\mathrm{X}}) = e^{-\frac{\lambda^2}{2} \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}} \mathbf{K}_{\mathrm{X}}^{2}} \det{}_3(\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_{\mathrm{X}}), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

1.3. Pour mettre en œuvre la propriété 1.1(*b*) on utilisera une décomposition des fonctions $\mathbf{K}_{\mathrm{X}}$ déduite du lemme suivant :

Soient $\mathrm{X} \in \mathscr{X}_0$, $h \in \mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{E})$, $k \in \mathscr{S}$, on pose

$$(1.3.1)\quad \mathbf{K}_{(\mathrm{X},h),k}(\omega) = \mathrm{K}(\mathbf{1}_{\mathrm{X}} . \Sigma_m^{-1/2}(h . (\omega * k))), \qquad \forall \omega \in \mathscr{S},$$

(de sorte que $\mathbf{K}_{\mathrm{X},k} = \mathbf{K}_{(\mathrm{X},\mathbf{1}),k}$), on a :

LEMME. — i) *Soit $\delta > 2$, il existe $c_1(\mathrm{X}, \delta) > 0$, telle que si*

$$\mu \equiv \min\{m, \mathrm{M}\} \geq l^{-1} \ ([7]),$$

$$(1.3.2)\quad \| \mathbf{K}_{(\mathrm{X},h),k} \|_{\mathrm{L}^{p}_{\mathscr{C}_\delta}} \leq c_1(\mathrm{X}, \delta)\sqrt{p}\, \mu^{-\frac{2}{3}\frac{\delta - 2}{\delta^2}} \| h \|_{\infty} \| k \|_{1}, \ \forall p \in [1, +\infty[.$$

et, pour tout $\xi > 0$ il existe $c_2(\mathrm{X}, \delta, \xi) > 0$, telle que

$$(1.3.3)\quad \| \mathbf{K}_{(\mathrm{X},h),k} \|_{\mathrm{L}^{p}_{\mathscr{C}_\delta}} \leq c_2(\mathrm{X}, \delta, \xi)\sqrt{p} \| h \|_{\infty} \| k \|_{1} e^{-(1-\xi) m d[\mathrm{X}, \mathrm{supp}\, h]},$$

si $\quad d[\mathrm{X}, \mathrm{supp}\, h] \geq l,$

où d est la distance euclidienne dans E.

ii) *Soient $\delta > 2$ et $p \in [1, +\infty[$, si $(k_j)_{j \in \mathbf{N}}$ est un échelon unité, $(k_j \in \mathscr{D}(\mathrm{E}), \forall j \in \mathbf{N})$, $(\mathbf{K}_{(\mathrm{X},h),k_j})_{j \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^{p}_{\mathscr{C}_\delta}(\mathscr{S}', \nu)$, dont la limite, notée $\mathbf{K}_{(\mathrm{X},h)}$ est indépendante de l'échelon unité choisi.*

iii) *De plus on suppose qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta > 1$, tels que si $0 \leq \varepsilon < \alpha$,*

$$(-\Delta + l^{-2})^{-\beta\varepsilon/2} \mathrm{M}(h)(-\Delta + l^{-2})^{\varepsilon/2}$$

---

[7] Dans la suite cette condition sera toujours (explicitement ou non) supposée vérifiée (l est le pas du réseau supposé fixé).

définit un opérateur borné dans $L^2(E)$ ([8]), *et l'on pose*

$$\| h \|_{\beta,\varepsilon} = \sup_{0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon} \| (-\Delta + l^{-2})^{-\beta\varepsilon'/2} M(h)(-\Delta + l^{-2})^{\varepsilon'/2} \| .$$

Pour $k \in \mathscr{D}(E)$ *vérifiant* $\int_E k(x)dx = 1$ *et* $\varkappa > 0$, *on pose* $k_\varkappa(x) = \varkappa^2 k(\varkappa x)$, $\forall x \in E$, *alors si* $\sigma\beta < \frac{2}{3}\left(\frac{\delta - 2}{3\delta}\right)^2$, *il existe* $\varepsilon_0 \in]0, \alpha[$ *et* $c_3(X, \delta, k, \sigma) > 0$, *tels que*

$$(1.3.4) \quad \| \mathbf{K}_{(X,h)} - \mathbf{K}_{(X,h),k_\varkappa} \|_{L^p_{\mathscr{C}_\delta}} \leq c_3(X, \delta, k, \sigma)\sqrt{p} \| h \|_{\beta,\varepsilon_0} \varkappa^{-\sigma}, \qquad \forall \varkappa > 0.$$

Démonstration. — *a*) Si pour $f \in \mathscr{S}$, $\underline{N}^{(2)}(f)$ et $\underline{N}^{(4)}(f)$ désignent respectivement les fonctions

$$\omega \mapsto N^{(2)}_{\frac{3\delta-2}{4\delta}}(\mathbf{1}_X . \Sigma_m^{-1/2}(h . (\omega * f)))$$

et

$$\omega \mapsto N^{(4)}_{\frac{\delta-1}{2\delta}}(\mathbf{1}_X . \Sigma_m^{-1/2}(h . (\omega * f))), \qquad \omega \in \mathscr{S}' \text{ ([9])}$$

on a d'après [*10*], (2.3.5),

$$(1.3.5) \quad \| \mathbf{K}_{(X,h),f} \|_\delta \leq \psi_{X,h,f} \equiv c_1 \underline{N}^{(2)}(f)^{\frac{4-\delta}{\delta}} \underline{N}^{(4)}(f)^{\frac{2\delta-4}{\delta}}, \qquad (2 < \delta \leq 4).$$

D'après l'inégalité de Hölder (si $p \geq 4$),

$$\| \psi_{X,h,f} \|_p \leq c_1 \| \underline{N}^{(2)}(f)^{\frac{4-\delta}{\delta}} \|_{\frac{p\delta}{4-\delta}} \| \underline{N}^{(4)}(f)^{\frac{2\delta-4}{\delta}} \|_{\frac{p\delta}{2\delta-4}}$$

$$= c_1 \| \underline{N}^{(2)}(f)^2 \|_{p/2}^{\frac{4-\delta}{\delta}} \| \underline{N}^{(4)}(f)^4 \|_{p/4}^{\frac{\delta-2}{2\delta}},$$

or $\underline{N}^{(j)}(f)^j \in \bigoplus_{n=0}^{j} \mathfrak{F}_n$, $j = 1, 2$, où $\mathfrak{F}_n \subset \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \nu)$ désigne l'espace à n particules ([10]), donc il existe $c(\delta) > 0$ telle que

$$(1.3.6) \quad \| \psi_{X,h,f} \|_p \leq c(\delta)\sqrt{p}(E_\nu[\underline{N}^{(2)}(f)^2])^{\frac{4-\delta}{2\delta}} (E_\nu[\underline{N}^{(4)}(f)^4])^{\frac{\delta-2}{2\delta}}.$$

b) Si $\operatorname{Re} z > 0$, $\tau > 0$ on désigne par $G^{(z)}_\tau$ la transformée de Fourier

---

([8]) $M(h)$ est l'opérateur de multiplication par h.
Si $Y \in \mathscr{X}_0$, les fonctions $\mathbf{1}_Y$ et $\mathbf{1}_{E \setminus Y}$ possèdent cette propriété avec $\alpha = 1$, $\beta > 3$, en particulier

$$\| \mathbf{1}_Y \|_{\beta,\varepsilon} \leq c_r(\beta, \varepsilon) \| \mathbf{1}_Y \|_{\mathscr{B}^{r,\varepsilon}}, \quad \text{si } \frac{1}{1 - \frac{\beta-1}{2}\varepsilon} > r > \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

([9]) Voir [*10*], (2.3.2), (2.3.3), on rappelle que :

$$N^{(2n)}_t(h)^{2n} = \frac{2}{(2n)^{4n}} \int_{E^{2n}} \hat{h}(p_1 - p_2) \dots \hat{\hat{h}}(p_{2n} - p_1) \prod_{j=1}^{2n} \frac{dp_j}{(|p_j|^2 + M^2)^t}, \qquad t > \frac{1}{2n}.$$

([10]) D'après l'inégalité d'hypercontractivité de Nelson et l'équivalence des normes L^1 et L^2 sur $\mathfrak{F}_n$, on a

$$\| F \|_p \leq p^{n/2} \| F \|_2 \leq c(n)p^{n/2} \| F \|_1, \qquad \forall F \in \mathfrak{F}_n, \ \forall p \in [1, +\infty[.$$

de la fonction $p \mapsto \frac{1}{(2\pi)^2}(|p|^2+\tau^2)^{-z}, p \in \mathrm{E}$; on a $\mathrm{G}_\tau^{(z)} \in \mathrm{L}^q(\mathrm{E})$ si $\mathrm{Re}\, z > 1 - \frac{1}{q}$ en effet ([11]), $\mathrm{G}_\tau^{(z)}$ admet la représentation intégrale (déduite, par prolongement analytique, de [7], (3.53), p. 286) ([12]),

$$(1.3.7) \qquad \mathrm{G}_\tau^{(z)}(x) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\alpha \rho^{-z}\left(\frac{1}{2\pi}\mathrm{K}_0(\sqrt{\tau^2+\rho}\,|x|)\right)d\rho, \qquad \mathrm{Re}\, z < 1,$$

d'où l'on déduit

$$(1.3.8) \quad \left\| \frac{\mathrm{G}_\tau^{(z)}}{\sin \pi z} \right\|_q \leq \frac{1}{2\pi^2}\left(\int_\mathrm{E} \mathrm{K}_0(|u|)^q du\right)^{1/q} \int_0^\infty \rho^{-\mathrm{Re}\, z}(\tau^2+\rho)^{-\frac{1}{q}} d\rho = c(q)\tau^{-2\left(\mathrm{Re}\, z - 1 + \frac{1}{q}\right)}.$$

On pose

$$(1.3.9) \qquad \mathrm{W}^{(2)}(x_1, x_2) = 2\, \mathbf{1}_\mathrm{X}(x_1)\mathbf{1}_\mathrm{X}(x_2)\left(\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{3\delta-2}{4\delta}\right)}(x_1 - x_2)\right)^2,$$

et

$$(1.3.10) \quad \mathrm{W}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2\left(\prod_{j=1}^4 \mathbf{1}_\mathrm{X}(x_j)\right)\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}(x_1-x_2)\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}(x_2-x_3)\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}(x_3-x_4)\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}(x_4-x_1),$$

on a d'une part $\| \mathrm{W}^{(2)} \|_{q_1} \leq 2 \| \mathbf{1}_\mathrm{X} \|_{q_1} \| \mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{3\delta-2}{4\delta}\right)} \|_{2q_1}^2$, donc

$$(1.3.11) \quad \| \mathrm{W}^{(2)} \|_{q_1} \leq c(\mathrm{X}, q_1)\mathrm{M}^{-2\left(\frac{1}{q_1} - \frac{\delta+2}{2\delta}\right)}, \qquad \forall q_1 \in \left[1, \frac{2\delta}{\delta+2}\right[,$$

et d'autre part,

$$| \mathrm{W}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) | \leq 2\, \mathbf{1}_\mathrm{X}(x_1)\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}(x_1-x_2)\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}(x_2-x_3)\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}(x_3-x_4)\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}(x_4-x_1),$$

donc,

$$\| \mathrm{W}^{(4)} \|_{q_2} \leq 2\left(\left\{ \left(\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}\right)^{q_2} * \left(\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}\right)^{q_2} * \left(\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}\right)^{q_2} * \left(\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}\right)^{q_2} \right\}(0) \cdot \int_\mathrm{X} dx_1 \right)^{1/q_2}$$

$$\leq 2\left(\left\| \left(\mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)}\right)^{q_2} \right\|_{\frac{4}{3}}^4 \| \mathbf{1}_\mathrm{X} \|_1 \right)^{1/q_2} = 2 \| \mathbf{1}_\mathrm{X} \|_{q_2} \| \mathrm{G}_\mathrm{M}^{\left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)} \|_{\frac{4}{3}q_2}^4,$$

([11]) Si $q \geq 2$, ceci résulte plus simplement de l'inégalité de Hansdorff-Young.

([12]) K_0 est la fonction de Bessel modifiée, on a

$$\mathrm{G}_\tau^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{K}_0(\tau |x|), \qquad \forall x \in \mathrm{E}.$$

d'après l'inégalité de Young, donc

$$(1.3.12)\quad \| W^{(4)} \|_{q_2} \leq c(X, q_2) M^{-4\left(\frac{3}{2q_2} - \frac{\delta+1}{\delta}\right)}, \qquad \forall q_2 \in \left[1, \frac{3\delta}{2\delta+2}\right[.$$

c) Pour $\operatorname{Re} z > 0$, on pose

$$(1.3.13)\quad F^{(z)}_{X,h,f}(x_1, x_2) = \mathbf{1}_X(x_1)\mathbf{1}_X(x_2)\int_{E^2} G^{(z)}_m(x_1 - y_1)G^{(z)}_m(y_2 - x_2)h(y_1)h(y_2)f*\check{f}(y_1 - y_2)dy_1dy_2,$$

alors pour tout $f \in \mathcal{D}$, on a

$$(1.3.14)\quad E_\nu[\underline{N}^{(2)}(f)^2] = \int_{E^2} W^{(2)}(x_1, x_2)F^{(1/2)}_{X,h,f}(x_1, x_2)dx_1dx_2,$$

et

$$(1.3.15)\quad E_\nu[\underline{N}^{(4)}(f)^4] = \int_{E^4} W^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)\big[2F^{(1/2)}_{X,h,f}(x_1, x_2)F^{(1/2)}_{X,h,f}(x_3, x_4) + F^{(1/2)}_{X,h,f}(x_1, x_3)F^{(1/2)}_{X,h,f}(x_2, x_4)\big]dx_1dx_2dx_3dx_4.$$

D'abord si $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, on a

$$(1.3.16)\quad |F^{(z)}_{X,h,f}(x_1, x_2)| \leq \| h \|^2_\infty(|G^{(z)}_m| * |G^{(z)}_m| * |f| * |\check{f}|)(x_1 - x_2),$$

donc, d'après l'inégalité de Young,

$$(1.3.17)\quad \| F^{(z)}_{X,h,f} \|_\infty \leq \| G^{(z)}_m \|^2_2 \| h \|^2_\infty \| f \|^2_1 \leq c_1 m^{-4\left(\operatorname{Re} z - \frac{1}{2}\right)} \| h \|^2_\infty \| f \|^2_1, \qquad \left(\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\right),$$

puis si $\operatorname{Re} z > \frac{1}{4}$, soient

$$(1.3.18)\quad T^{(z)}_{X,h}(u, v) = h(u)h(v)\int_E G^{(\bar{z})}_m(u - y)\mathbf{1}_X(y)G^{(z)}_m(y - v)dy, \qquad (u, v \in E),$$

et

$$(1.3.19)\quad T^{(z)}_{X,h,f} = (f \otimes \check{f}) * T^{(z)}_{X,h},$$

on a

$$(1.3.20)\quad \| F^{(z)}_{X,h,f} \|_2 \leq \| T^{(z)}_{X,h,f} \|^{1/2}_2 \| T^{(\bar{z})}_{X,h,\check{f}} \|^{1/2}_2,$$

or si $\varepsilon < \frac{2}{\beta}\left(\operatorname{Re} z - \frac{1}{4}\right)$ et $m \geq l^{-1}$, (1.3.21) $\| T^{(z)}_{X,h,f} \|_2$

$$\leq \| (-\Delta + l^{-2})^{-\frac{\varepsilon}{2}} f \|_1^2 \| [(-\Delta + l^{-2})^{\varepsilon/2} \otimes (-\Delta + l^{-2})^{\varepsilon/2}] T^{(z)}_{X,h} \|_2$$

$$\leq \| (-\Delta + l^{-2})^{-\frac{\varepsilon}{2}} f \|_1^2 \| h \|^2_{\beta,\varepsilon}$$

$$\left(\int_{E^2} \left| \int_E G_m^{\left(z - \frac{\beta\varepsilon}{2}\right)}(u - y) \mathbf{1}_X(y) G_m^{\left(z - \beta\frac{\varepsilon}{2}\right)}(y - v) dy \right|^2 du dv \right)^{1/2}$$

$$\leq \| (-\Delta + l^{-2})^{-\frac{\varepsilon}{2}} f \|_1^2 \| h \|^2_{\beta,\varepsilon} \| \mathbf{1}_X \|_4^2 \| \hat{G}_m^{\left(z - \beta\frac{\varepsilon}{2}\right)} \|_4^2$$

(la dernière inégalité d'après [*12*], lemme 2.1), donc, d'après (1.3.20)

(1.3.22) $\| F^{(z)}_{X,h,f} \|_2 \leq \| \mathbf{1}_X \|_2 \| \hat{G}_m^{\left(z - \beta\frac{\varepsilon}{2}\right)} \|_4^2 \| h \|^2_{\beta,\varepsilon} \| (-\Delta + l^{-2})^{-\frac{\varepsilon}{2}} f \|_1^2$

$$\leq c_2(X)_m^{-4\left(\mathrm{Re}\, z - \frac{\beta\varepsilon}{2} - \frac{1}{4}\right)} \| h \|^2_{\beta,\varepsilon} \| (-\Delta + l^{-2})^{-\frac{\varepsilon}{2}} f \|_1^2, \quad \left(\mathrm{Re}\, z - \frac{\beta\varepsilon}{2} < \frac{1}{4} \right),$$

alors, en appliquant le théorème d'interpolation de Stein à la fonction analytique $z \mapsto F^{(z)}_{X,h,f}$, $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2q} < \mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2} + \frac{1}{2q} \right)$, on obtient d'après (1.3.17) et (1.3.22), si $q \in [2, +\infty[$ et $\varepsilon < \frac{1}{\beta q}$,

(1.3.23) $\| F^{(1/2)}_{X,h,f} \|_q$

$$\leq c_3(X, q) m^{-2\frac{q-2}{q^2}} \| h \|^2_{\beta,\varepsilon} \| f \|_1^{2\left(1 - \frac{2}{q}\right)} \| (-\Delta + l^{-2})^{-\frac{\varepsilon}{2}} f \|_1^{4/q}.$$

Donc, si $\mu = \min \{ m, M \}$, on a d'après (1.3.11), (1.3.14), (1.3.23) et l'inégalité de Hölder,

(1.3.24) $E_\nu[\underline{N}^{(2)}(f)^2]$

$$\leq c'(X, q_1) \mu^{-2\frac{\delta-2}{\delta^2}} \| h \|^2_{\beta,\varepsilon_1} \| f \|_1^{2\left(1 - \frac{2}{q_1'}\right)} \| (-\Delta + l^{-2})^{-\frac{\varepsilon_1}{2}} f \|_1^{4/q_1'},$$

avec $\varepsilon_1 < \frac{\delta - 2}{2\beta\delta}$, $q_1 \in \left] \frac{1}{1 - \beta\varepsilon_1}, \frac{2\delta}{\delta + 2} \right[$,
et de même, d'après (1.3.12), (1.3.15), (1.3.23),

(1.3.25) $E_\nu[\underline{N}^{(4)}(f)^4]$

$$\leq c'(X, q_2) \mu^{-\frac{8}{3}\frac{\delta-2}{\delta^2}} \| h \|^4_{\beta,\varepsilon_2} \| f \|_1^{4\left(1 - \frac{2}{q_2'}\right)} \| (-\Delta + l^{-2})^{-\frac{\varepsilon_2}{2}} f \|_1^{8/q_2'},$$

avec $\varepsilon_2 < \frac{\delta - 2}{3\beta\delta}$, $q_2 \in \left] \frac{1}{1 - \beta\varepsilon_2}, \frac{3\delta}{2\delta + 2} \right[$.

Alors d'une part, d'après (1.3.6), (1.3.24), (1.3.25) avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$,

(1.3.26) $$\| \psi_{X,h,f} \|_p \leq c_1(X, \delta) \mu^{-\frac{2}{3}\frac{\delta-2}{\delta^2}} \| h \|_\infty \| f \|_1, \qquad \forall p \in [1, +\infty[,$$

(d'où (1.3.2) d'après (1.3.5)) et d'autre part, en substituant $k_\varkappa - k_{\varkappa'}$ à f dans (1.3.6), (1.3.24), (1.3.25), et compte tenu de l'inégalité

$$(1.3.27)\qquad \| (-\Delta + l^{-2})^{-\varepsilon/2}(k_\varkappa - \delta_0) \| \leq c''(k)\varkappa^{-\varepsilon/3}$$

(d'après [1], lemme VII.9) on obtient, si $\sigma < \dfrac{2}{3\beta}\left(\dfrac{\delta - 2}{3\delta}\right)^2$,

$$(1.3.28)\qquad \| \psi_{X,h,(k_\varkappa - k_{\varkappa'})} \|_p \leq c(X, \delta, k, \sigma)\sqrt{p\mu}^{\,-\frac{2}{3}\frac{\delta - 2}{\delta^2}} \| h \|_{\beta,\varepsilon_0} \min \{ \varkappa, \varkappa' \}^{-\sigma},$$

avec $\varepsilon_0 > \dfrac{9\delta}{2\delta - 4}\sigma$,

d'où l'on déduit (1.3.4) puisque, d'après (1.3.5),

$$(1.3.29)\qquad \| \mathbf{K}_{(X,h),k_\varkappa} - \mathbf{K}_{(X,h),k_{\varkappa'}} \|_\delta = \| \mathbf{K}_{(X,h),(k_\varkappa - k_{\varkappa'})} \|_\delta \leq \psi_{X,h,(k_\varkappa - k_{\varkappa'})}.$$

d) Soit maintenant $D = d[X, \operatorname{supp} h]$, et soit $\xi \in]0, 1[$, on pose

$$(1.3.30)\qquad A_D^{(z)} = e^{(1-\xi)mD}\mathbf{1}_{\{x;|x| \geq D\}}G_m^{(z)}.$$

On peut substituer $e^{-(1-\xi)mD}A_D^{(z)}$ à $G_m^{(z)}$ dans (1.3.13) et (1.3.18), on peut donc substituer $e^{-2(1-\xi)mD} \| A_D^{(z)} \|_2^2$ à $\| G_m^{(z)} \|_2^2$ dans (1.3.17) :

$$(1.3.31)\qquad \| F_{X,h,f}^{(z)} \|_\infty \leq e^{-2(1-\xi)mD} \| A_D^{(z)} \|_2^2 \| h \|_\infty^2 \| f \|_1^2, \quad \left(\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\right),$$

et $e^{-2(1-\xi)mD} \| A_D^{(z)} \|_{4/3}^2$ à $\| \widehat{G_m^{(z)}} \|_4^2$ dans (1.3.22) avec $\varepsilon = 0$:

$$(1.3.32)\qquad \| F_{X,h,f}^{(z)} \|_2 \leq e^{-2(1-\xi)mD} \| \mathbf{1}_X \|_2 \|A_D^{(z)} \|_{4/3}^2 \| h \|_\infty^2 \| f \|_1^2, \quad \left(\operatorname{Re} z > \frac{1}{4}\right).$$

Mais, d'autre part, il existe une constante $a(\xi) > 0$, telle que

$$\frac{1}{2\pi} K_0(u) \leq a(\xi)\, e^{-\left(1 - \frac{\xi}{4}\right)u}, \qquad \forall u \geq 1,$$

donc, d'après la représentation intégrale (1.3.7), on a, si $|x| \geq l$, $m \geq l^{-1}$

$$(1.3.33)\qquad \left| \frac{G_m^{(z)}(x)}{\sin \pi z} \right| \leq \frac{a(\xi)}{\pi} \int_0^\infty \rho^{-\operatorname{Re} z} e^{-\left(1 - \frac{\xi}{4}\right)\sqrt{m^2 + \rho}\,|x|} d\rho \leq c(\xi, \operatorname{Re} z) e^{-\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)m|x|},$$

donc si $0 < \operatorname{Re} z < 1$, il existe une constante $c'(r, \xi, \operatorname{Re} z)$, telle que

$$(1.3.34)\qquad \left\| \frac{A_D^{(z)}}{\sin \pi z} \right\|_r \leq c'(r, \xi, \operatorname{Re} z), \qquad \forall D \geq l, \quad r \geq 1.$$

Alors, d'après (1.3.31), (1.3.32), (1.3.34) et le théorème d'interpolation de Stein appliqué à la fonction analytique

$$z \mapsto \frac{F^{(z)}_{X,h,f}}{(\sin \pi z)^2}, \quad \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2q} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2} + \frac{1}{2q}\right),$$

on obtient, pour $q \in [2, +\infty[$,

(1.3.35) $$\| F^{(1/2)}_{X,h,f} \|_q \leq c''(X, q, \xi) e^{-2(1-\xi)mD} \| h \|^2_\infty \| f \|_1 ,$$

alors, d'après (1.3.6), (1.3.11), (1.3.12), (1.3.14), (1.3.15) et (1.3.35), on a

(1.3.36) $$\| \psi_{X,h,f} \|_p \leq c'''(X, \delta, \xi) \sqrt{p} e^{-(1-\xi)mD} \| h \|_\infty \| f \|_1 ,$$

si $D = d[X, \operatorname{supp} h] \geq l$, (1.3.3) en résulte d'après (1.3.5). □

1.4. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des centres de mailles du réseau, on désigne par Δ_α la maille de centre $\alpha \in \mathscr{R}$, par $\chi_\alpha \in L(\mathscr{K})$ le projecteur orthogonal défini par $\chi_\alpha = |C|^{1/2} M(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}) |C|^{-1/2}$, par $\mathscr{A}_\alpha$, (resp. $\mathscr{A}^{(\varepsilon)}_\alpha$, $\varepsilon > 0$), la tribu sur $\mathscr{S}'$ engendrée par les fonctions équivalentes mod. v aux fonctions

$$\omega \mapsto \langle \omega, f \rangle, (\omega \in \mathscr{S}'), f \in \mathscr{S}, \operatorname{supp} f \subset \Delta_\alpha$$

(resp. $\operatorname{supp} f \subset \Delta_\alpha + \{ x ; |x| < \varepsilon l \}$) [13]; on a $\mathscr{A}_\alpha = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{A}^{(\varepsilon)}_\alpha$.

Pour $\alpha, \beta \in \mathscr{R}$, on pose $\mathbf{K}_{\alpha,\beta} = \mathbf{K}_{(\Delta_\alpha, \mathbf{1}_{\Delta_\beta})}$ [14], on a

LEMME. — *Soit* $\delta' \in \left]2 - \frac{2}{17}, 2\right[$, *il existe des constantes* $a > 0$, $\theta > 0$, $\eta > 0$ *et des fonctions positives* $F_\beta \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\beta, v)$, $\beta \in \mathscr{R}$, *vérifiant*

(1.4.1) $$\| F_\beta \|_p \leq a\sqrt{p}, \qquad \forall \beta \in \mathscr{R}, \qquad \forall p \in [1, +\infty[,$$

et telles que, si $\mu = \min \{ m, M \} \geq l^{-1}$,

(1.4.2) $$\| \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_\delta \leq \mu^{-\theta} e^{-\eta\mu[\alpha,\beta]} F_\beta, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{R}, \qquad \left(\delta = \frac{\delta'}{\delta' - 1}\right),$$

et

(1.4.3) $$\| \chi_{\gamma_1} \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \chi_{\gamma_2} \|_{\delta'} \leq \mu^{-\theta} e^{-\eta\mu([\alpha,\beta] + [\alpha,\gamma_1] + [\alpha,\gamma_2])} F_\beta, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{R}, (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathscr{R}^2 \backslash (\alpha, \alpha),$$

où on a posé $[\alpha, \beta] = d[\Delta_\alpha, \Delta_\beta]$, $\alpha, \beta \in \mathscr{R}$.

Démonstration. — *a*) Dans (1.3.5) on pose $X = \Delta_\alpha$, $h = \mathbf{1}_{\Delta_\beta}$ et on substitue à f une unité approchée $(k_j)_{j \in \mathbf{N}}$ telle que $\operatorname{supp} h_j \subset \{ x ; |x| < l/j \}$, $\forall j \in \mathbf{N}$,

---

[13] On rappelle que $\widehat{C\psi}(p) = \frac{\not p + M}{|p|^2 + M^2} \hat{\psi}(p)$, $\widehat{|C| \psi}(p) = (|p|^2 + M^2)^{-1/2} \hat{\psi}(p)$, $(p \in E)$, voir [*10*], 1.3.

On conviendra de noter $\mathscr{A}^+_\alpha$ pour $\mathscr{A}^{(1/2)}_\alpha$.

[14] Voir 1.3.

le second membre a une limite $\psi_{\alpha,\beta} \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\beta, \nu)$, et, d'après (1.3.26) et (1.3.36), il existe des constantes $c > 0$, $\theta > 0$, $\eta > 0$, telles que

(1.4.4) $$\| \psi_{\alpha,\beta} \|_p \leq c\sqrt{p}\mu^{-\theta} e^{-2\eta\mu[\alpha,\beta]}, \qquad \forall p \in [1, +\infty[$$

alors

$$F_\beta = \mu^\theta \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} e^{\eta\mu[\alpha,\beta]} \psi_{\alpha,\beta}$$

vérifie (1.4.1) et (1.4.2).

b) Pour établir (1.4.3) on part des inégalités

(1.4.5) $$\| \mathbf{K}_{\alpha,\beta}\chi_\gamma \|_1 \leq b e^{-2\eta \mathrm{M}[\alpha,\gamma]} \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta} | \mathrm{C} |^{3/2} \|_2 \| | \mathrm{C} |^2 \chi_\gamma \|_2 , \qquad | \alpha - \gamma | > \sqrt{2}l$$

(d'après [*12*], lemme 2.1 et théorème 2.2) et

(1.4.6) $$\| \mathbf{K}_{\alpha,\beta}\chi_\gamma \|_\xi \leq \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta} | \mathrm{C} |^{\rho - 1/2} \|_4 \| | \mathrm{C} |^{-\rho} \chi_\alpha | \mathrm{C} |^{1/2} \chi_\gamma | \mathrm{C} |^{-\rho} \|_4 \| | \mathrm{C} |^{\rho} \chi_\gamma \|_{\frac{2}{2-\xi}} ,$$
$$\frac{1}{16} > \rho > \frac{2 - \xi}{\xi} , \quad 0 < | \alpha - \gamma | \leq \sqrt{2}l$$

(d'après [*12*], lemme 2.1 et théorème 2.4 (*b*)), ainsi que des inégalités analogues concernant $\chi_\gamma \mathbf{K}_{\alpha,\beta}$ et de

(1.4.7) $$\| \mathrm{K}(h) | \mathrm{C} |^{3/2} \|_2^2 \leq \mathrm{M}^2 \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{\mathrm{E}^2} | \hat{h}(p - q) |^2 \frac{dp}{(| p |^2 + \mathrm{M}^2)^{1/2}} \frac{dq}{(| q |^2 + \mathrm{M}^2)},$$

(1.4.8) $$\| \mathrm{K}(h) | \mathrm{C} |^{\rho - 1/2} \|_4^4 \leq \frac{2}{(2\pi)^8} \int_{\mathrm{E}^4} \hat{h}(p_1 - p_2) \dots \hat{\bar{h}}(p_4 - p_1)$$
$$\frac{dp_1}{(| p_1 |^2 + \mathrm{M}^2)^{1/2}} \frac{dp_2}{(| p_2 |^2 + \mathrm{M}^2)^\rho} \frac{dp_3}{(| p_3 |^2 + \mathrm{M}^2)^{1/2}} \frac{dp_4}{(| p_4 |^2 + \mathrm{M}^2)^\rho}, \quad \rho > 0 .$$

La fin de la démonstration est alors semblable à celle de (1.4.2), suivant une variante de l'argument 1.3 ci-dessus. □

1.5. Soient $\Gamma \in \mathscr{C}$ ([15]) et $\tau > 0$, on désigne par $\Sigma_{\tau,\Gamma}$, ($\Sigma_{\tau,\phi} = \Sigma_\tau$), l'extension de Friedrichs de l'opérateur positif $(\mathrm{L}_\Gamma + \tau^2)$ défini sur le domaine $\mathrm{D}(\mathrm{L}_\Gamma) = \{ \psi \in \mathscr{D}(\mathrm{E}) ; \operatorname{supp} \psi \cap \Gamma = \varnothing \}$, dense dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{E})$, par

$$\mathrm{L}_\Gamma \psi = - \Delta\psi , \qquad \forall \psi \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_\Gamma) .$$

Suivant l'idée de [*8*], pour $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathscr{R}$, on pose

(1.5.1) $$\tilde{\mathrm{H}}_\Gamma(\alpha ; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \prod_{j=1}^{3} \frac{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_{\tau,\Gamma}^{-1} \mathbf{1}_{\Delta_{\beta_j}})}{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_\tau^{-1} \mathbf{1}_{\Delta_{\beta_j}})}, \qquad \forall \Gamma \in \mathscr{C} ,$$

où $\tau \geq l^{-1}$ sera choisi ultérieurement.

([15]) Voir A.1, A.2.

D'autre part, suivant [4], § 3, pour $s \in S$ on pose

$$(1.5.2) \qquad A_\Gamma(s) = \prod_{a\in\Gamma} s_a \prod_{b\in\Gamma'} (1 - s_b).$$

Soit $S_0 = \left\{ s \in S ; \sum_{\Gamma\in\mathscr{C}} A_\Gamma(s) = 1 \right\}$ ([16]), si $s \in S_0$, α, β_1, β_2, $\beta_3 \in \mathscr{R}$, on pose

$$(1.5.3) \qquad H(s \mid \alpha ; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sum_{\Gamma\in\mathscr{C}} A_\Gamma(s)\tilde{H}_{\Gamma'}(\alpha ; \beta_1, \beta_2, \beta_3) \ ([17])$$

[Série convergente puisque, d'après [4] Proposition 7.1,

$$0 \leq \tilde{H}_\Gamma(\alpha ; \beta_1, \beta_2, \beta_3) \leq 1].$$

Soient alors $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in S_0$, on définit $\mathbf{K}_\Lambda(s) \in L^p_{\mathscr{C}_\delta}(\mathscr{S}', \nu)$, $(\delta > 2, p \in [1, +\infty[)$, par

$$(1.5.4) \qquad \mathbf{K}_\Lambda(s) = \sum_{\substack{\alpha\in\underline{\Lambda} \\ \beta_j\in\mathscr{R}}} H(s \mid \alpha ; \beta_1, \beta_2, \beta_3)\chi_{\beta_1}\mathbf{K}_{\alpha,\beta_2}\chi_{\beta_3}, \qquad (\underline{\Lambda} = \Lambda \cap \mathscr{R}),$$

[la série est convergente d'après le lemme 1.4 et l'inégalité

$$0 \leq H(s \mid \alpha ; \beta_1, \beta_2, \beta_3) \leq 1 ;$$

et d'après (1.3.3) on a $\mathbf{K}_\Lambda(\mathbf{1}) = \mathbf{K}_\Lambda$].

On utilisera les notations suivantes :

$$D_{\alpha,\beta}(s) = H(s \mid \alpha ; \alpha, \beta, \alpha)\chi_\alpha\mathbf{K}_{\alpha,\beta}\chi_\alpha,$$

$$D_\alpha(s) = \sum_{\beta\in\mathscr{R}} D_{\alpha,\beta}(s),$$

$$R_{\alpha,\beta}(s) = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathscr{R}^2\setminus(\alpha,\alpha)} H(s \mid \alpha ; \gamma_1, \beta, \gamma_2)\chi_{\gamma_1}\mathbf{K}_{\alpha,\beta}\chi_{\gamma_2},$$

$$R_\alpha(s) = \sum_{\beta\in\mathscr{R}} R_{\alpha,\beta}(s),$$

$$\mathbf{K}_{\alpha,\beta}(s) = D_{\alpha,\beta}(s) + R_{\alpha,\beta}(s),$$

$$\mathbf{K}_\alpha(s) = \sum_{\beta\in\mathscr{R}} \mathbf{K}_{\alpha,\beta}(s) = D_\alpha(s) + R_\alpha(s),$$

$$D_\Lambda(s) = \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} D_\alpha(s), \quad R_\Lambda(s) = \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} R_\alpha(s),$$

([16]) Pour tout $s \in S$, on a évidemment $0 \leq \sum_{\Gamma\in\mathscr{C}} A_\Gamma(s) \leq 1$; S_0 ainsi défini est « saturé » (voir A.1).

([17]) On étudie quelques propriétés de ces coefficients à l'appendice B.

donc

$$\mathbf{K}_\Lambda(s) = \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} \mathbf{K}_\alpha(s) = \mathrm{D}_\Lambda(s) + \mathrm{R}_\Lambda(s),$$

(si $s = \mathbf{1}$, on omettra l'indice s).

1.6. On définit $\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}} \{ \mathbf{K}_{\alpha,\beta_1} . \mathbf{K}_{\alpha,\beta_2} \} \in \mathfrak{F}_2$ ([18]) par

$$(1.6.1) \quad \int_{\mathscr{S}'} \mathrm{Tr}_{\mathrm{reg}} \{ \mathbf{K}_{\alpha,\beta_1} . \mathbf{K}_{\alpha,\beta_2} \} (\omega) e^{i\langle\omega,f\rangle} v(d\omega)$$
$$= - ((\mathbf{1}_{\Delta_\alpha} . \Sigma_m^{-1/2}(\mathbf{1}_{\Delta_{\beta_1}} f)), \mathrm{B}(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha} . \Sigma_m^{-1/2}(\mathbf{1}_{\Delta_{\beta_2}} f))) . \hat{v}(f), \qquad \forall f \in \mathscr{S}, ([19])$$

on a :

LEMME. — *Il existe des constantes* $a > 0$, $\theta > 0$, $\eta > 0$ *et des fonctions positives* $\mathrm{F}_\beta = \bigcap_{1 \leq p < \infty} \mathrm{L}^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\beta, v)$, $\beta \in \mathscr{R}$ ([20]), *vérifiant*

$$(1.6.2) \qquad \| \mathrm{F}_\beta \|_p \leq a\sqrt{p}, \qquad \forall \beta \in \mathscr{R},\ \forall p \in [1, +\infty[,$$

et telles que, si $\mu = \min \{ m, \mathrm{M} \} \geq l^{-1}$

$$(1.6.3) \quad | \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}} \{ \mathbf{K}_{\alpha,\beta_1} . \mathbf{K}_{\alpha,\beta_2} \} |$$
$$\leq \mu^{-2} \theta e^{-\eta\mu([\alpha,\beta_1] + [\alpha,\beta_2])} \mathrm{F}_{\beta_1} \mathrm{F}_{\beta_2}, \qquad \forall \alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathscr{R},$$

avec $[\alpha, \beta] = d[\Delta_\alpha, \Delta_\beta]$.

Démonstration. — Soit $\mathrm{M}_\beta \in \mathrm{L}(\mathrm{L}^2(\mathrm{E}, \mathbf{R}))$, $(\beta \in \mathscr{R})$, l'opérateur de multiplication par $\mathbf{1}_{\Delta_\beta}$, et soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{32}\right[$, on pose

$$(1.6.4) \qquad \mathrm{B}_{\alpha,\beta} = \mathrm{M}_\beta \Sigma_m^{-1/2} \mathrm{M}_\alpha \mathrm{B} \Sigma_{l^{-1}}^{-\varepsilon}, \qquad \alpha, \beta \in \mathscr{R}\ ([21]),$$

et

$$(1.6.5) \qquad \mathrm{C}_{\alpha,\beta} = \Sigma_{l^{-1}}^{\varepsilon} \mathrm{M}_\alpha \Sigma_m^{-1/2} \mathrm{M}_\beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathscr{R},$$

de sorte que, d'après (1.6.1), pour tous $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathscr{R}$, $f \in \mathscr{S}$,

$$(1.6.6) \quad \int_{\mathscr{S}'} \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}} \{ \mathbf{K}_{\alpha,\beta_1} . \mathbf{K}_{\alpha,\beta_2} \} (\omega) e^{i\langle\omega,f\rangle} v(d\omega) = - (f, \mathrm{B}_{\alpha,\beta_1} . \mathrm{C}_{\alpha,\beta_2} f) \hat{v}(f).$$

([18]) $\mathfrak{F}_n \in \mathrm{L}^2(\mathscr{S}', v)$ est l'espace à n particules et Π_n la projection orthogonale sur $\mathfrak{F}_n$.

([19]) La définition de B est rappelée en 1.2.

([20]) On utilise, sous perte de généralité, les mêmes symboles qu'au lemme 1.4 ; il est clair en effet que, chacun des deux énoncés étant établi séparément, on peut trouver des constantes et des fonctions qui les vérifient simultanément.

([21]) B est défini en 1.2.

a) Si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, on a

$$(1.6.7) \qquad B_{\alpha,\beta} = M_\beta \Sigma_m^{-1/2} M_\alpha \Sigma_{l^{-1}}^{-\varepsilon'} . \left(B\Sigma_{l^{-1}}^{-(\varepsilon-\varepsilon')}\right),$$

or, d'une part, d'après [*12*], lemme 2.1, $M_\beta \Sigma_m^{-1/2} M_\alpha \Sigma_{l^{-1}}^{-\varepsilon'}$ est de Hilbert-Schmidt pour tous $\alpha, \beta \in \mathscr{R}$ et il existe des constantes $c' > 0, \theta > 0$ telles que,

$$(1.6.8) \qquad \| M_\beta \Sigma_m^{-1/2} M_\alpha \Sigma_{l^{-1}}^{-\varepsilon'} \|_2 \leq c'_1 m^{-2\theta}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{R}$$

et d'autre part $M_\beta \Sigma_m^{-1}$ et $\Sigma_m^{-1} M_\alpha \Sigma_l^{-\varepsilon'}$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt donc, d'après [*12*], théorème 2.2, il existe $c''_1 > 0$, $\eta > 0$ tels que

$$(1.6.9) \quad \| M_\beta \Sigma_m^{-1/2} M_\alpha \Sigma_{l^{-1}}^{-\varepsilon'} \|_1 \leq c''_1 m^{-2\theta} e^{-2\eta m[\alpha,\beta]}, \quad \text{si} \quad |\alpha - \beta| > \sqrt{2}l,$$

enfin $B\Sigma_{l^{-1}}^{-(\varepsilon-\varepsilon')}$ est borné uniformément pour $M \geq l^{-1}$, (d'après [*11*], A.II), donc,

$$(1.6.10) \qquad \| B_{\alpha,\beta} \|_2 \leq c_1 m^{-2\theta} e^{-2\eta m[\alpha,\beta]}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{R}.$$

b) On suppose d'abord $0 < |\alpha - \beta| \leq \sqrt{2}l$, avec $\varepsilon < \rho < \dfrac{1}{32}$,

$$\begin{aligned}(1.6.11) \quad C_{\alpha,\beta} = {} & [\Sigma_{l^{-1}}^{\varepsilon}, M_\alpha]\Sigma_m^{-1/4+\varepsilon} . \Sigma_m^{-1/4-\varepsilon} M_\beta \\ & + M_\alpha . [M_\alpha, \Sigma_m^{-1/4+\varepsilon}]\Sigma_{l^{-1}}^{\varepsilon} . \Sigma_m^{-1/4-\varepsilon} M_\beta \\ & + M_\alpha \Sigma_m^{-1/4+\varepsilon} \Sigma_{l^{-1}}^{-\rho} . \Sigma_{l^{-1}}^{\rho} M_\alpha \Sigma_m^{-1/4-\varepsilon} \Sigma_{l^{-1}}^{\varepsilon} M_\beta ,\end{aligned}$$

alors, avec des bornes indépendantes de $m \geq l^{-1}$, on a

$$\Sigma^{-1/4-\varepsilon} \in \mathscr{C}_4(L^2) \quad \text{et} \quad M_\alpha \Sigma_m^{-1/4+\varepsilon} \Sigma_{l^{-1}}^{-\rho} \in \mathscr{C}_4(L^2), \qquad (\rho > \varepsilon),$$

d'après [*12*], lemme 2.1, puis

$$[\Sigma_{l^{-1}}^{\varepsilon}, M_\alpha]\Sigma_m^{-1/4+\varepsilon} \in \mathscr{C}_4(L^2),$$

d'après [*12*], lemme 2.3 (*b*),

$$[M_\alpha, \Sigma_m^{-1/4+\varepsilon}]\Sigma_{l^{-1}}^{\varepsilon} \in \mathscr{C}_4(L^2),$$

d'après [*12*], lemme 2.3 (*a*) et

$$\Sigma_{l^{-1}}^{\rho} M_\alpha \Sigma_m^{-1/4-\varepsilon} \Sigma_{l^{-1}}^{\varepsilon} M_\beta \in \mathscr{C}_4(L^2),$$

d'après [*12*], théorème 2.4 (*b*), donc $C_{\alpha,\beta}$ est de Hilbert-Schmidt et il existe $c'_2 > 0$ telle que si $m \geq l^{-1}$,

$$(1.6.12) \qquad \| C_{\alpha,\beta} \|_2 \leq c'_2, \qquad \text{si} \qquad 0 < |\alpha - \beta| \leq \sqrt{2}l,$$

d'autre part, $\Sigma_{l^{-1}}^{\varepsilon} M_\alpha \Sigma_m^{-1}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt [puisque $\mathbf{1}_{\Delta_\alpha} \in \mathscr{K}^{2\varepsilon}(E)$], donc, d'après [*12*], théorème 2.2, il existe $c''_2 > 0$, $\eta > 0$ tels que

$$(1.6.13) \qquad \| C_{\alpha,\beta} \|_1 \leq c_2 e^{-2\eta m[\alpha,\beta]}, \qquad \text{si} \qquad |\alpha - \beta| > \sqrt{2}l,$$

donc,

(1.6.14) $\quad \| C_{\alpha,\beta} \|_2 \leq c_2 e^{-2\eta m[\alpha,\beta]}, \qquad \text{si} \qquad \alpha \neq \beta .$

c) Maintenant, si A est un opérateur à trace, auto-adjoint, positif dans $L^2(E, \mathbf{R})$, la fonction $G_A \in \mathscr{F}_0 \oplus \mathscr{F}_2$ définie par

(1.6.15) $$\int_{\mathscr{S}'} G_A(\omega) e^{i\langle \omega, f \rangle} \nu(d\omega) = [\operatorname{Tr} A - (f, Af)] \hat{\nu}(f), \qquad \forall f \in \mathscr{S}$$

est positive puisque le second membre définit une fonction de type positif sur $\mathscr{S}$ [en effet, si $(\mu_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $\mu_i \geq 0$ est la suite des valeurs propres de A, $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $e_i \in L^2(E, \mathbf{R})$, $\| e_i \| = 1$, une suite correspondante de vecteurs propres, et si $x_i = (f, e_i)$, on a

$$[\operatorname{Tr} A - (f, Af)] \hat{\nu}(f) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \mu_i (1 - x_i^2) e^{-\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbf{N}} x_j^2},$$

or les fonctions sur **R**

$$u \mapsto (1 - u^2) e^{-\frac{1}{2}u^2} = \int_{\mathbf{R}} v^2 e^{-\frac{1}{2}v^2} e^{iuv} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}}$$

et

$$u \mapsto e^{-\frac{1}{2}u^2} = \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{2}v^2} e^{iuv} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}}$$

sont de type positif, donc les fonctions définies sur $l^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ par

$$x \mapsto (1 - x_i^2) e^{-\frac{1}{2}x_i^2}, \quad (i \in \mathbf{N}) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x_j^2}, \quad (j \in \mathbf{N})$$

sont de type positif donc

$$x \mapsto (1 - x_i^2) e^{-\frac{1}{2}x_i^2} \prod_{j \neq i} e^{-\frac{1}{2}x_j^2}$$

est de type positif comme limite simple de produits de fonctions de type positif donc

$$\sum_{i\in\mathbf{N}} \mu_i (1 - x_i^2) e^{-\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbf{N}} x_j^2}$$

est de type positif puisque $\mu_i \geq 0$, $\forall i \in \mathbf{N}$].

Donc, supposant $\alpha \neq \beta_2$, si pour $u, v \in \mathbf{R}^2$ on pose

(1.6.16) $\quad A[u, v] = (u_1 B_{\alpha,\beta_1} + u_2 C^*_{\alpha,\beta_2})(v_1 B^*_{\alpha,\beta_1} + v_2 C_{\alpha,\beta_2}),$

et si l'on définit $Z^{[u,v]}_{\alpha;\beta_1,\beta_2} \in \mathscr{F}_0 \oplus \mathscr{F}_2$ par

(1.6.17) $$\int_{\mathscr{S}'} Z^{[u,v]}_{\alpha;\beta_1,\beta_2}(\omega) e^{i\langle \omega, f \rangle} \nu(d\omega) = \operatorname{Tr} A[u, v] - (f, A[u, v] f)] \hat{\nu}(f), \qquad \forall f \in \mathscr{S},$$

on a

$$(1.6.18) \qquad Z^{[u,u]}_{\alpha;\beta_1,\beta_2} \geq 0, \qquad \forall u \in \mathbf{R}^2,$$

donc, d'après (1.6.6) et l'inégalité de Schwarz,

$$(1.6.19) \quad |\operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \{ \mathbf{K}_{\alpha,\beta_1}.\mathbf{K}_{\alpha,\beta_2} \} + \operatorname{Tr} \{ \mathrm{B}_{\alpha,\beta_1}.\mathrm{C}_{\alpha,\beta_2} \} \Omega | \leq \psi^{(1)}_{\alpha,\beta_1}.\psi^{(2)}_{\alpha,\beta_2}, \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta_2,$$

où on a posé

$$\psi^{(1)}_{\alpha,\beta_1} = (Z^{[(1,0),(1,0)]}_{\alpha,\beta_1,\beta_2})^{1/2} \qquad \text{et} \qquad \psi^{(2)}_{\alpha,\beta_2} = (Z^{([0,1],[0,1])}_{\alpha,\beta_1,\beta_2})^{1/2}.$$

Or on a, d'après (1.6.10)

$$(1.6.20) \quad \| (\psi^{(1)}_{\alpha,\beta})^2 \|_1 = \mathrm{E}_\nu[(\psi^{(1)}_{\alpha,\beta})^2] = \operatorname{Tr} \{ \mathrm{B}_{\alpha,\beta}.\mathrm{B}^*_{\alpha,\beta} \} \leq c_1^2 m^{-4\theta} e^{-4\eta m[\alpha,\beta]}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{R},$$

de même, d'après (1.6.14),

$$(1.6.21) \quad \| (\psi^{(2)}_{\alpha,\beta})^2 \|_1 = \operatorname{Tr} \{ \mathrm{C}^*_{\alpha\beta}.\mathrm{C}_{\alpha\beta} \} \leq c_2^2 e^{-4\eta m[\alpha,\beta]}, \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta,$$

et si l'on pose $\psi^{(3)}_\alpha = | \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \{ \mathbf{K}_{\alpha,\alpha}.\mathbf{K}_{\alpha,\alpha} \} |^{1/2}$, d'après (1.6.10)

$$(1.6.22) \quad \| (\psi^{(3)}_\alpha)^2 \|_1 \leq \| (\psi^{(3)}_\alpha)^2 \|_2 = \| \mathrm{B}_{\alpha,\alpha}.\mathrm{C}_{\alpha,\alpha} \|_2 \leq c_3^2 m^{-2\theta}, \qquad \forall \alpha \in \mathscr{R},$$

donc si l'on définit $\mathrm{F}_\beta \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} \mathrm{L}^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\beta, \nu)$ [22] par,

$$(1.6.23) \quad \mathrm{F}_\beta = m^{2\theta} \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} e^{\eta m[\alpha,\beta]} \psi^{(1)}_{\alpha,\beta} + \sum_{\alpha \neq \beta} e^{\eta m[\alpha,\beta]} \psi^{(2)}_{\alpha,\beta} + m^\theta \psi^{(3)}_\beta + c_1 c_2 \Omega,$$

F_β vérifie (1.6.2) [d'après l'inégalité d'hypercontractivité de Nelson [23]] et (1.6.3) résulte de (1.6.19) [puisque $\operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \{ \mathbf{K}_{\alpha,\beta_1}.\mathbf{K}_{\alpha,\beta_2} \}$ est symétrique en β_1, β_2]. □

On pose successivement (grâce aux lemmes 1.4 et 1.6) :

$$(1.6.24) \quad \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \{ \mathrm{D}_{\alpha,\beta_1}.\mathrm{D}_{\alpha,\beta_2} \} = \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \{ \mathbf{K}_{\alpha,\beta_1}.\mathbf{K}_{\alpha,\beta_2} \} - \Pi_2 \operatorname{Tr} \{ \mathrm{D}_{\alpha,\beta_1}.\mathrm{R}_{\alpha,\beta_2} + \mathrm{R}_{\alpha,\beta_1}.\mathrm{D}_{\alpha,\beta_2} + \mathrm{R}_{\alpha,\beta_1}.\mathrm{R}_{\alpha,\beta_2} \},$$

$$(1.6.25) \quad \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \{ \mathrm{D}_{\alpha,\beta_1}(s).\mathrm{D}_{\alpha,\beta_2}(s) \} = \mathrm{H}(s \mid \alpha; \alpha, \beta_1, \alpha) \mathrm{H}(s \mid \alpha; \alpha, \beta_2, \alpha) \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \{ \mathrm{D}_{\alpha,\beta_1}.\mathrm{D}_{\alpha,\beta_2} \},$$

$$(1.6.26) \qquad \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \mathrm{D}_\alpha(s)^2 = \sum_{\beta_1,\beta_2 \in \mathscr{R}} \operatorname{Tr}^{:}_{\text{reg}} \{ \mathrm{D}_{\alpha,\beta_1}(s).\mathrm{D}_{\alpha,\beta_2}(s) \},$$

---

[22] On note que toutes les fonctions du second membre de (1.6.23) sont $\mathscr{A}_\beta$-mesurables.
[23] Voir note [10], p. 240.

(1.6.27) $$\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathrm{D}_\Lambda(s)^2 = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathrm{D}_\alpha(s)^2 ,$$

(1.6.28) $$\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathbf{K}_\Lambda(s)^2 = \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathrm{D}_\Lambda(s)^2 + \Pi_2 \mathrm{Tr}\, \{ 2\mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{R}_\Lambda(s) + \mathrm{R}_\Lambda(s)^2 \}$$ [24].

1.7. Pour $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{S}_0$, on pose

(1.7.1) $$\det_{\mathrm{ren}}(\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)) = e^{-\frac{\lambda^2}{2} \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}} \mathbf{K}_\Lambda(s)^2} \det_3(\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)) , \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

on a

PROPOSITION. — *Pour tout* $p \in [1, +\infty[$, *il existe des constantes* $\rho_p > 0$, $a_p \geq 1$ (*indépendantes de m et* M) *telles que pour tout* $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, \rho_p\right)$ [25], $r \in \mathbf{N}$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{S}_0$,

(1.7.2) $$\| \, \| \Lambda^r([\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1}) \det_{\mathrm{ren}}(\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)) \| \, \|_p \leq e^{9r} a_p^{|\Lambda|} .$$

La démonstration, un peu longue, est donnée à l'appendice C.

Soient alors $r \in \mathbf{N}$, $t \in \mathbf{N}$ et $u_j \in \mathscr{K}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{E}) \otimes \mathrm{V}$, $v_j \in \mathscr{K}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{E}) \otimes \mathrm{V}'$, $1 \leq j \leq r$, $f_k \in \mathscr{K}^{-1}(\mathrm{E})$, $1 \leq k \leq t$, on suppose qu'il existe $\Delta_j^{(f)}$, $\Delta_j^{(\bar{f})}$, $\Delta_k^{(b)} \in \mathscr{X}_0^1$ tels que $\mathrm{supp}.(\,|\,\mathrm{C}\,|^{-1/2}\mathrm{C}u_j) \subset \Delta_j^{(f)}$, $\mathrm{supp}.(\,|\,\mathrm{C}\,|^{1/2}v_j) \subset \Delta_j^{(\bar{f})}$, $1 \leq j \leq r$, $\mathrm{supp}\,(\Sigma_m^{-1/2} f_k) \subset \Delta_k^{(b)}$, $1 \leq k \leq t$ [26].

Pour $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, soient $\mathrm{I}_\Lambda^{(x)} = \{ j \,;\, \Delta_j^{(x)} \subset \Lambda \}$, $x = f, \bar{f}, b$.

Si $|\,\mathrm{I}_\Lambda^{(f)}\,| = |\,\mathrm{I}_\Lambda^{(\bar{f})}\,|$ on pose $r_\Lambda = |\,\mathrm{I}_\Lambda^{(f)}\,|$ et on désigne par $\varepsilon_\Lambda \in \{ -1, +1 \}$ la signature de la permutation σ_Λ de $\{ 1, \ldots, r \}$ définie par $\sigma_\Lambda(\mathrm{I}_\Lambda^{(f)}) = \mathrm{I}_\Lambda^{(\bar{f})}$, $\sigma_\Lambda(j) \geq \sigma_\Lambda(k)$ si $j \geq k$ et si, ou bien $j \in \mathrm{I}_\Lambda^{(f)}$ et $k \in \mathrm{I}_\Lambda^{(f)}$, ou bien $j \notin \mathrm{I}_\Lambda^{(f)}$ et $k \notin \mathrm{I}_\Lambda^{(f)}$.

Alors pour $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a\right)$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{S}_0$, on pose

(1.7.3) $$\mathrm{Z}^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j , \bigwedge_{j=1}^{r} v_j , \bigvee_{k=1}^{t} f_k \right)$$
$$= \varepsilon_\Lambda \mathrm{E}_\nu \Bigg[\Big\langle \bigwedge_{j \in \mathrm{I}_\Lambda^{(f)}} |\,\mathrm{C}\,|\, \bar{v}_j , \Lambda^{r_\Lambda}([\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1}) \bigwedge_{j' \in \mathrm{I}_\Lambda^{(\bar{f})}} \mathrm{C}u_{j'} \Big\rangle_{\mathscr{K}^{\otimes r_\Lambda}}$$
$$. \prod_{k \in \mathrm{I}_\Lambda^{(b)}} \Phi(f_k) \,.\, \det_{\mathrm{ren}} (\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)) \Bigg],$$

si $|\,\mathrm{I}_\Lambda^{(f)}\,| = |\,\mathrm{I}_\Lambda^{(\bar{f})}\,|$, et zéro sinon.

---

[24] On vérifie que pour $s = \mathbf{1}$, cette définition coïncide avec (1.2.2).

[25] Pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $\rho > 0$, on a posé $\mathrm{D}(\alpha, \rho) = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, |\,\mathrm{Arg}\, z^2\,| < 2\alpha, |\,z\,| < \rho \}$.

[26] On sait que l'on peut sans perte de généralité imposer ces conditions puisque tout $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}, \mathrm{V})$ (resp. $v \in \mathscr{S}(\mathrm{E}, \mathrm{V}')$, resp. $f \in \mathscr{S}$) est somme d'une série convergente (dans $\mathscr{K}^{-1/2}(\mathrm{E}) \otimes \mathrm{V}$, resp. $\mathscr{K}^{-1/2}(\mathrm{E}) \otimes \mathrm{V}'$, resp. $\mathscr{K}^{-1}(\mathrm{E})$) de telles distributions (les estimations (2.7.1) et (3.0.1) permettant d'opérer terme à terme).

Pour condenser cette écriture, on adoptera les notations suivantes : pour $A \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \nu)$ et $B \in \mathscr{C}_1^{(r)}$, $r \in \mathbf{N}$, ($\mathscr{C}_1^{(r)} \in L(\mathscr{H}^{\otimes r})$ est l'idéal des opérateurs à trace), on pose

$$(1.7.4) \qquad Y_{\lambda,\Lambda,s}(A, B) = A.\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^r([I + \lambda K_\Lambda(s)]^{-1}).B\,\}\,\det_{\mathrm{ren}}(I + \lambda K_\Lambda(s)),$$

alors, avec

$$f \equiv \bigvee_{k=1}^{t} f_k\,, \quad u \equiv \bigwedge_{j=1}^{r} u_j\,, \quad v \equiv \bigwedge_{j=1}^{r} v_j\,,$$

on note

$$(1.7.5) \qquad A_\Lambda(f) = \prod_{k \in I_\Lambda^{(b)}} \Phi(f_k)\,,$$

et

$$(1.7.6) \quad B_\Lambda(u, v) = \begin{cases} \varepsilon_\Lambda \left\langle \left(\bigwedge_{j' \in I_\Lambda^{(\bar f)}} | C | \bar v_{j'} \right), . \right\rangle_{\mathscr{H}^{\otimes r_\Lambda}} . \left(\bigwedge_{j \in I_\Lambda^{(f)}} C u_j \right), & \text{si} \quad | I_\Lambda^{(f)} | = | I_\Lambda^{(\bar f)} |, \\ 0 & , \ \text{sinon,} \end{cases}$$

on a donc

$$(1.7.7) \quad Z^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j\,, \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'}\,, \bigvee_{k=1}^{t} f_k \right) \equiv Z^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}(u, v, f) = E_\nu\,[Y_{\lambda,\Lambda,s}(A_\Lambda(f), B_\Lambda(u, v))]\,.$$

En outre on pose (27)

$$(1.7.8) \qquad S^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}(u, v, f) = \frac{Z^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}(u, v, f)}{Z^{(0,0)}_{\lambda,\Lambda,s}}\,, \quad \text{si} \quad Z^{(0,0)}_{\lambda,\Lambda,s} \neq 0\,.$$

2. EXISTENCE DES FONCTIONS ANALYTIQUES $\lambda \mapsto S_\lambda^{(r,t)}$

Dans ce paragraphe on montre le

THÉORÈME I (28). — *Il existe une constante* $\mu_0 \geq l^{-1}$, *et, si*

$$\mu = \min\,\{\,m, M\,\} \geq \mu_0$$

une constante $a_0 > 0$ *telles que* $Z^{(0,0)}_{\lambda,\Lambda} \neq 0$, $\forall \Lambda \in \mathscr{X}_0$, $\forall \lambda \in D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$, *et, pour*

(27) Avec cette définition $S^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,1}(u, v, f)$ ne coïncide avec la fonction donnée $S^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda}(u, v, f)$ que si $\Delta_j^{(x)} \subset \Lambda$, $\forall j$, $\forall x = f, \bar f, b$; ce qui importe est qu'elles ont même limite lorsque Λ tend vers E.

(28) Les notations sont celles de [*10*] rappelées au paragraphe 1.

tous $r,\ t \in \mathbf{N}$, $u_j \in \mathscr{S}(\mathrm{E}, \mathrm{V})$, $v_j \in \mathscr{S}(\mathrm{E}, \mathrm{V}')$, $1 \leq j \leq r$, $f_k \in \mathscr{S}$, $1 \leq k \leq t$, *la famille*

$$\left(\mathrm{S}_{\lambda,\Lambda}^{(r,t)}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j,\ \bigwedge_{j'-1}^{r} v_{j'},\ \bigwedge_{k=1}^{t} f_k\right)\right)_{\Lambda \in \mathscr{X}_0}$$

est bornée uniformément pour $\Lambda \in \mathscr{X}_0$ *et* $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$ *et converge lorsque* $\Lambda \to \mathrm{E}$, ($\mathscr{X}_0$ *étant ordonné par inclusion*), *uniformément pour* $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$; *sa limite*

$$\mathrm{S}_{\lambda}^{(r,t)}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j,\ \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'},\ \bigvee_{j=1}^{t} f_k\right)$$

dépend analytiquement de $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$, *elle est continue au bord.*

Par un argument classique de « Scaling » ([29]) on en déduit le

COROLLAIRE. — *On suppose* $m > 0$ *et* $\mathrm{M} > 0$ *fixés* ([30]), *il existe* $a_0 > 0$ *tel que les conclusions du théorème ci-dessus soient vraies pour tout* $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$ *dès que* l *est convenablement choisi (assez grand).*

Remarques. — La convergence ci-dessus est établie dans le cas λ réel dans [*1*] et [*8*] où l'on montre en outre que — dans ce cas — la famille de fonctions $(\mathrm{S}_{\lambda}^{(r,t)})_{r,t \in \mathbf{N}}$ vérifie les axiomes d'Osterwalder-Schrader [*9*], en particulier chaque fonction $\mathrm{S}_{\lambda}^{(r,t)}$ est invariante euclidienne pour λ réel, il en est donc de même, par prolongement analytique, pour $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$ ([31]). D'autre part, on déduit facilement de la proposition 2.1, ci-dessous et des théorèmes A.4 et A.6 que la famille $(\mathrm{S}_{\lambda}^{(r,t)})_{r,t \in \mathbf{N}}$ possède les propriétés usuelles de « cluster » (et de « cluster fort » [*2*]), uniformément pour $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$.

([29]) C'est-à-dire en raison de l'égalité (où l'on explicite les paramètres de masse m et M) :

$$\mathrm{Z}_{\lambda,\Lambda;m,\mathrm{M}}^{(r,t)}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} u_j,\ \bigwedge_{j'=1}^{r} v_{j'},\ \bigvee_{k=1}^{t} f_k\right) = \xi^r \mathrm{Z}_{\xi\lambda,\xi^{-1}\Lambda;\xi m,\xi\mathrm{M}}^{(r,t)}\left(\bigwedge_{j=1}^{r} \mathrm{S}_{\xi}^{-1} u_j,\ \bigwedge_{j'=1}^{r} \mathrm{S}_{\xi}^{-1} v_{j'},\ \bigvee_{k=1}^{t} \mathrm{S}_{\xi}^{-1} f_k\right)$$

où pour $\xi > 0$, S_ξ est la transformation de « Scaling » définie par

$$\mathrm{S}_\xi \mathrm{F}(x) = \xi^{-2}\mathrm{F}(\xi^{-1}x), \quad \forall x \in \mathrm{E}, \qquad \text{et} \qquad \xi^{-1}\Lambda = \{ x \in \mathrm{E} ; \xi x \in \Lambda \} .$$

([30]) Ici sans restriction (dans cet énoncé l n'est pas supposé donné *a priori*).

([31]) Cette invariance euclidienne sera aussi un corollaire de la sommabilité de Borel (la série de Taylor à l'origine étant manifestement invariante).

2.1. Le théorème I résulte [32], d'après le théorème A.4, de la

PROPOSITION. — *Il existe* $\mu_0 \geq l^{-1}$, *et, si* $\mu = \min\{m, \mathrm{M}\} \geq \mu_0$, $\tau \geq l^{-1}$ [33] *et* $a_0 > 0$ *tels que pour tout* $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$,

i) *la fonction* $(\Lambda, s) \mapsto \mathrm{Z}^{(0,0)}_{\lambda,\Lambda,s}$ *soit une fonction de partition (définition* A.3*)*,

ii) *chaque fonction* $(\Lambda, s) \mapsto \mathrm{Z}^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$ — *définie en* (1.7.3), (1.7.7) *lui soit subordonnée (définition* A.4*)*.

Pour établir cette proposition, seule la démonstration de F. P. *v* (définition A.3) et F. S. *iv* (définition A.4) est longue (et fait l'objet des sections 2.2 à 2.7), en effet on vérifie :

∗ F. P. *i* et F. S. *i* (découplage en $s = 0$) :

Soient $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{S}_0$, $\Gamma \in \mathscr{C}_1$ et $(\mathrm{X}_i)_{1 \leq i \leq p}$ comme dans la définition A.2, alors si $\alpha \in \underline{\mathrm{X}}_i = \mathrm{X}_i \cap \mathscr{R}$ et $\mathrm{C} \subset \Gamma$ on a

$$(2.1.1) \qquad (\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma^{-1}_{\tau,\mathrm{C}'}\mathbf{1}_{\Delta_\beta}) = (\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma^{-1}_{\tau,(\mathrm{C}\cap\mathrm{X}_i)'}\mathbf{1}_{\Delta_\beta}), \qquad \forall \beta \in \mathscr{R},$$

et

$$(2.1.2) \qquad (\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma^{-1}_{\tau,\mathrm{C}'}\mathbf{1}_{\Delta_\beta}) = 0, \qquad \text{si} \quad \beta \notin \underline{\mathrm{X}}_i,$$

donc d'une part (si $\alpha \in \underline{\mathrm{X}}_i$)

$$(2.1.3) \quad \mathrm{H}(\mathbf{1}_\Gamma s \mid \alpha; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sum_{\mathrm{C} \subset \Gamma} \mathrm{A}_\mathrm{C}(\mathbf{1}_\Gamma s) \prod_{j=1}^{3} \frac{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma^{-1}_{\tau,\mathrm{C}'}\mathbf{1}_{\Delta_{\beta_j}})}{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_\tau^{-1}\mathbf{1}_{\Delta_{\beta_j}})}$$
$$= \sum_{\substack{\mathrm{C}_1 \subset \Gamma\cap\mathrm{X}_i \\ \mathrm{C}_2 \subset \Gamma\cap\mathrm{X}_i'}} \mathrm{A}_{\mathrm{C}_1}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap\mathrm{X}_i}s)\mathrm{A}_{\mathrm{C}_2}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap\mathrm{X}_i'}s) \prod_{j=1}^{3} \frac{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma^{-1}_{\tau,\mathrm{C}_1'}\mathbf{1}_{\Delta_{\beta_j}})}{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_\tau^{-1}\mathbf{1}_{\Delta_{\beta_j}})}$$
$$= \mathrm{H}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap\mathrm{X}_i}s \mid \alpha; \beta_1, \beta_2, \beta_3), \qquad \forall \beta_j \in \mathscr{R},\ j = 1, 2, 3$$

$\left(\text{puisque} \displaystyle\sum_{\mathrm{C}_2 \subset \Gamma\cap\mathrm{X}_i'} \mathrm{A}_{\mathrm{C}_2}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap\mathrm{X}_i'}s) = \sum_{\mathrm{C}\in\mathscr{C}} \mathrm{A}_\mathrm{C}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap\mathrm{X}_i'}s) = 1\right)$ et d'autre part

$$(2.1.4) \qquad \mathrm{H}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap\mathrm{X}_i}s \mid \alpha; \beta_1, \beta_2, \beta_3) \neq 0 \quad \text{seulement si} \quad \beta_j \in \underline{\mathrm{X}}_i,\ j = 1, 2, 3.$$

Alors d'après (1.5.4) et (2.1.3)

$$(2.1.5) \quad \mathbf{K}_\Lambda(\mathbf{1}_\Gamma s) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{\substack{\alpha \in \underline{\Lambda \cap \mathrm{X}_i} \\ \beta_j \in \mathscr{R}}} \mathrm{H}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap\mathrm{X}_i}s \mid \alpha; \beta_1, \beta_2, \beta_3)\chi_{\beta_1}\mathbf{K}_{\alpha,\beta_2}\chi_{\beta_3}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \mathbf{K}_{\Lambda\cap\mathrm{X}_i}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap\mathrm{X}_i}s)$$

---

[32] Compte tenu de (2.7.1) pour « reconstituer » les éléments de $\mathscr{S}$, voir note [26], p. 252.

[33] τ est le paramètre introduit dans la définition des coefficients H, en (1.5.1).

et d'après (2.1.4)

$$(2.1.6) \qquad \mathbf{K}_{\Lambda\cap X_i}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap X_i}s)\,.\,\mathbf{K}_{\Lambda\cap X_j}(\mathbf{1}_{\Gamma\cap X_j}s) = 0\,, \quad \text{si} \quad i \neq j\,,$$

d'autre part, d'après (1.6.28) et (2.1.3),

$$(2.1.7) \qquad \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathbf{K}_\Lambda(\mathbf{1}_\Gamma s)^2 = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathbf{K}_{\Lambda\cap X_i}(\mathbf{1}_{\Gamma\Lambda X_i}s)\,.$$

On déduit alors de (1.7.4), (1.7.5), (1.7.6), (2.1.5), (2.1.6) et (2.1.7) que

$$(2.1.8) \qquad \mathrm{Y}_{\lambda,\Lambda,\mathbf{1}_\Gamma s}(\mathrm{A}_\Lambda(\boldsymbol{f}), \mathrm{B}_\Lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Y}_{\lambda,\Lambda\cap X_i,\mathbf{1}_{\Gamma\Lambda X_i}s}(\mathrm{A}_{\Lambda\cap X_i}(\boldsymbol{f}), \mathrm{B}_{\Lambda\cap X_i}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$$

et d'après (2.1.4), que

$$(2.1.9) \qquad \mathrm{Y}_{\lambda,\Lambda\cap X_i,\mathbf{1}_{\Gamma\Lambda X_i}s}(\mathrm{A}_{\Lambda\cap X_i}(\boldsymbol{f}), \mathrm{B}_{\Lambda\cap X_i}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) \quad \text{est } \mathscr{A}(X_i)\text{-mesurable } (^{34}),$$

ces variables aléatoires sont donc deux à deux indépendantes d'après (1.1.4), donc, d'après (1.7.7) et (2.1.8),

$$(2.1.10) \qquad \mathrm{Z}^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,\mathbf{1}_\Gamma s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Z}^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda\cap X_i,\mathbf{1}_{\Gamma\cap X_i}s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})\,,$$

* F. P. *ii* et F. S. *ii* (régularité à l'infini) :

De la régularité à l'infini des fonctions $s \mapsto \mathrm{H}(s \mid \alpha\,; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (proposition B.2), on déduit d'abord (d'après les lemmes 1.4 et 1.6) que

$$\mathrm{Y}_{\lambda,\Lambda,s}(\mathrm{A}_\Lambda(\boldsymbol{f}), \mathrm{B}_\Lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \lim_{\substack{\mathrm{C}\in\mathscr{C}\\ \mathrm{C}\to\mathscr{B}}} \mathrm{Y}_{\lambda,\Lambda,\mathbf{1}_{\mathrm{C}}s}(\mathrm{A}_\Lambda(\boldsymbol{f}), \mathrm{B}_\Lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))\,, \qquad \nu\text{-p. p.}\,,$$

puis, d'après la majoration (C.6.2), uniforme en $s \in \mathrm{S}_0$, que $s \mapsto \mathrm{Z}^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$ est régulière à l'infini, d'après le théorème de Lebesgue,

* F. P. *iii* = évident,

* F. P. *iv* – la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{Z}^{(0,0)}_{\lambda,\Delta,0}$, indépendante de $\Delta \in \mathscr{X}^1_0$, est continue et $\mathrm{Z}^{(0,0)}_{0,\Delta,0} = 1$, donc ($m$ et M étant fixés) (35), il existe $a_0 > 0$ tel que

$$(2.1.11) \qquad |\,\mathrm{Z}^{(0,0)}_{\lambda,\Delta,0}\,| \geq \frac{1}{2}\,, \qquad \forall \lambda \in \overline{\mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}\,,$$

* F. P. *vi* = évident (d'après (1.7.2)),

(34) Pour $X \in \mathscr{X}$ (X étant supposé ouvert), $\mathscr{A}(X)$ est défini en 1.1 (*b*).

(35) Pour respecter l'ordre logique : on détermine d'abord (en 2.7) $\tau \geq l^{-1}$, $\mu_0 \geq l^{-1}$ et $a_1 > 0$ tels que, si $\min\{m, \mathrm{M}\} \geq \mu_0$, (A.3.2) et (A.4.1) soient vérifiés, pour tout $\lambda \in \overline{\mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_1\right)}$, avec K_1 et K_2 satisfaisant $\mathrm{K}_2 > a_2(\mathrm{K}_1 + \log 2)$, on fixe alors m et M — vérifiant la condition — et on choisit $a_0 \leq a_1$, de sorte que (2.1.11) soit vérifiée, ce qui entraîne (A.1.3).

$*$ F. S. *iii* = évident, avec

$$Y_{Z^{(r,t)}|Z^{(0,0)}} = \bigcup_{j=1}^{r} (\Delta_j^{(f)} \cup \Delta_j^{(\bar{f})}) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{t} \Delta_k^{(b)} \right).$$

2.2. Le calcul des dérivées successives des fonctions $s \mapsto Z_{\lambda,\Lambda,s}^{(r,t)}$ va s'appuyer sur l'application itérée du

LEMME. — *Soient* $X \in \mathscr{C}_1^{(u)}$, $(u \in \mathbf{N})$ *et* $b \in \mathscr{B}$, *on a, avec* $\partial^{(b)} = \dfrac{\partial}{\partial s^b}$ *(et les notations de* [*10*] A.2),

$$(2.2.1) \quad \partial^{(b)}[\mathrm{Tr}\{\Lambda^u([I + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1})X\}\det_3(I + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s))]$$
$$= [\mathrm{Tr}\{\Lambda^u([I + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1})\mathscr{M}^{\left[\partial^{(b)}\left(\frac{\lambda^2}{2}\mathbf{K}_\Lambda(s)^2 - \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)\right)\right]}X\}$$
$$+ \mathrm{Tr}\{\Lambda^{u+1}([I + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1})\mathscr{C}^{\left[\partial^{(b)}\left(\frac{\lambda^3}{3}\mathbf{K}_\Lambda(s)^3\right)\right]}X\}] \,.\, \det_3(I + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)).$$

Démonstration. — On a (en posant ici $K(s) = \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)$),

$$(2.2.2) \quad \partial^{(b)}[\mathrm{Tr}\{\Lambda^u([I + K(s)]^{-1})X\}\det_3(I + K(s))]$$
$$= [-\mathrm{Tr}\{\Lambda^u([I + K(s)]^{-1}).\mathscr{M}^{[\partial^{(b)}K(s).[I+K(s)]^{-1}]}X\}$$
$$+ \mathrm{Tr}\{[I + K(s)]^{-1}.\partial^{(b)}K(s).K(s)^2\}\mathrm{Tr}\{\Lambda^u([I + K(s)]^{-1})X\}]$$
$$.\det_3(I + K(s)),$$

donc, d'après les égalités $[I + K(s)]^{-1} = I - K(s) + K(s)^2[I + K(s)]^{-1}$ et $\Lambda^u(R)\mathscr{M}^{[AR]}X = \mathscr{M}^{[RA]}(\Lambda^u(R)X)$ (d'après [*10*], (A.1.4), (A.1.5), (A.2.1))

$$(2.2.3) \quad \partial^{(b)}[\mathrm{Tr}\{\Lambda^u([I + K(s)]^{-1})X\}\det_3(I + K(s))]$$
$$= [\mathrm{Tr}\{\Lambda^u([I + K(s)]^{-1})\mathscr{M}^{[\partial^{(b)}K(s).(K(s)-I)]}X\}$$
$$- \mathrm{Tr}\{\mathscr{M}^{[[I+K(s)]^{-1}.\partial^{(b)}K(s).K(s)^2]}(\Lambda^u([I + K(s)]^{-1})X)\}$$
$$+ \mathrm{Tr}\{[I + K(s)]^{-1}.\partial^{(b)}K(s).K(s)^2\}\mathrm{Tr}\{\Lambda^u([I + K(s)]^{-1})X\}]$$
$$.\det_3(I + K(s))$$
$$= [\mathrm{Tr}\{\Lambda^u([I + K(s)]^{-1})\mathscr{M}^{[\partial^{(b)}K(s).(K(s)-I)]}X\}$$
$$+ \mathrm{Tr}\{\mathscr{C}^{[[I+K(s)]^{-1}.\partial^{(b)}K(s).K(s)^2]}(\Lambda^u([I + K(s)]^{-1})X)\}]$$
$$.\det_3(I + K(s)),$$

la seconde égalité d'après [*10*], (A.3.3), on déduit alors (2.2.1) de (2.2.3) d'après l'égalité $\mathscr{C}^{[RA]}(\Lambda^u(R)X) = \Lambda^{u+1}(R)\mathscr{C}^{[A]}X$ (déduite de [*10*], (A.1.4), (A.2.2)). □

2.3. On utilisera d'autre part la notion d'opérateur « $\mathscr{R}$-localisé » introduite ci-après.

Pour chaque $r \in \mathbf{N}$, soit $\mathbf{W}^{(r)} = \left\{ w \in \mathbf{N}^{\mathscr{R}} ; \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} w(\alpha) = r \right\}$, et pour $w \in \mathbf{W}^{(r)}$ soit $\chi_w^{(r)} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes r})$ le projecteur orthogonal défini par

$$\chi_w^{(r)} = \frac{r!}{\prod_{\alpha \in \mathscr{R}} w(\alpha)!} \bigwedge_{\alpha \in \mathscr{R}} (\wedge^{w(\alpha)}(\chi_\alpha)), \tag{2.3.1}$$

alors $(\chi_w^{(r)})_{w \in \mathbf{W}^{(r)}}$ est une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux et de somme $\mathbf{1}_r$ (l'identité sur $\mathscr{K}^{\otimes r}$).

DÉFINITION. — *On dira que* $\mathrm{X} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes r})$ *est* $\mathscr{R}$*-localisé s'il existe un élément (évidemment unique si* $\mathrm{X} \neq 0$*),* $w_{\mathrm{X}} \in \mathbf{W}^{(r)}$ *tel que* $\chi_{w_{\mathrm{X}}}^{(r)}\mathrm{X} = \mathrm{X}$ [36].

On a alors

LEMME. — *Soient* $\mathrm{X} \in \mathrm{L}(\mathscr{K}^{\otimes r})$ *un opérateur* $\mathscr{R}$*-localisé,* $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathscr{K})$, $\gamma, \delta \in \mathscr{R}$, *on a*

i) *l'opérateur* $\mathrm{Y} = \mathscr{M}^{[\chi_\gamma \mathrm{A} \chi_\delta]}\mathrm{X}$ *est* $\mathscr{R}$*-localisé, si* $\mathrm{Y} \neq 0$ *on a* $w_{\mathrm{X}}(\delta) > 0$, *et dans ce cas,*

$$w_{\mathrm{Y}}(\alpha) = w_{\mathrm{X}}(\alpha) - \mathbf{1}_{\{\delta\}}(\alpha) + \mathbf{1}_{\{\gamma\}}(\alpha), \qquad \forall \alpha \in \mathscr{R}, \tag{2.3.2}$$

ii) *si de plus* $\mathrm{X} \in \mathscr{C}_1^{(r)}$, *on a* [37]

$$\| \mathrm{Y} \|_1 \leq w_{\mathrm{X}}(\delta) \, \| \chi_\gamma \mathrm{A} \chi_\delta \| \, \| \mathrm{X} \|_1 . \tag{2.3.3}$$

[Démonstration élémentaire par densité des opérateurs de rang fini].

2.4. On a

LEMME. — *Soit* $\mathrm{B} \in \mathscr{C}_1^{(r)}$, $(r \in \mathrm{N})$, *un opérateur* $\mathscr{R}$*-localisé, on a pour tous* $\Gamma \in \mathscr{C}_0$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{S}_0$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *avec* $\partial^\Gamma = \prod_{b \in \Gamma} \partial^{(b)}$,

$$\begin{aligned} &| \partial^\Gamma [\mathrm{Tr} \{ \wedge^r([1 + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1})\mathrm{B} \} \det_3 (1 + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s))] | \\ &\quad \leq e^{2r} e^{5|\Gamma|} \| \mathrm{B} \|_1 \cdot \sup_{0 \leq k \leq |\Gamma|} \| \wedge^{r+k}([1 + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1}) \cdot \det_3 (1 + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)) \| \\ &\quad \cdot \sum_{\mathrm{P} \in \mathscr{P}(\Gamma)} \sum_{\underline{\delta} \in \mathscr{R}^{\mathrm{P}}} \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (\mathrm{N}_{\underline{\delta}}(\alpha)!)^2 \prod_{\mathrm{C} \in \mathrm{P}} k_1(\mathrm{C}, \delta_{\mathrm{C}}), \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

[36] On note que $\mathrm{B}_\Lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, défini par (1.7.6), est évidemment $\mathscr{R}$-localisé.

[37] Le même énoncé subsiste en substituant $\| \cdot \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $(\| \cdot \|_\infty = \| \cdot \|)$, à $\| \cdot \|_1$ dans (2.3.3).

d'autre part on a

$$(2.4.2)\qquad |\,\partial^\Gamma [e^{-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\mathbf{K}_\Lambda(s)^2}]\,| \leq |\,e^{-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\mathbf{K}_\Lambda(s)^2}\,| \,.\sum_{\mathrm{P}\in\mathscr{P}(\Gamma)}\prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}} k_2(\mathrm{C}),$$

où on a utilisé les notations suivantes :

$\mathscr{P}(\Gamma)$ est l'ensemble des partitions de Γ, $\mathrm{N}_{\underline{\delta}}(\alpha) = |\,\{\, \mathrm{C}\in\mathrm{P}\,;\delta_{\mathrm{C}} = \alpha\,\}\,|$, ($\underline{\delta}\in\mathscr{R}^{\mathrm{P}}$, $\alpha\in\mathscr{R}$),

$$(2.4.3)\quad k_1(\mathrm{C},\delta) = \sum_{\gamma\in\mathscr{R}}\Big[\,\|\,\lambda\partial^{\mathrm{C}}(\chi_\gamma\mathbf{K}_\Lambda(s)\chi_\delta)\,\| + \Big\|\frac{\lambda^2}{2}\,\partial^{\mathrm{C}}(\chi_\gamma\mathbf{K}_\Lambda(s)^2\chi_\delta)\Big\| + \Big\|\frac{\lambda^3}{3}\,\partial^{\mathrm{C}}(\chi_\gamma\mathbf{K}_\Lambda(s)^3\chi_\delta)\Big\|_1\Big],$$

et,

$$(2.4.4)\quad k_2(\mathrm{C}) = \frac{|\,\lambda\,|^2}{2}\big[\,|\,\partial^{\mathrm{C}}\,\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\,\mathrm{D}_\Lambda(s)^2\,| + 2\,\|\,\partial^{\mathrm{C}}(\mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{R}_\Lambda(s))\,\|_1 + \|\,\partial^{\mathrm{C}}(\mathrm{R}_\Lambda(s)^2)\,\|_1 + \mathrm{E}_\nu[2\,\|\,\partial^{\mathrm{C}}(\mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{R}_\Lambda(s))\,\|_1 + \|\,\partial^{\mathrm{C}}(\mathrm{R}_\Lambda(s)^2)\,\|_1\,]\Omega\big]\,.$$

Démonstration. — Par commodité, on ordonne (arbitrairement) Γ, alors toute partition $\mathrm{P}\in\mathscr{P}(\Gamma)$ est muni d'un ordre naturel (si C_1, $\mathrm{C}_2\in\mathrm{P}$, on a $\mathrm{C}_1 < \mathrm{C}_2$ si $\exists\, a\in\mathrm{C}_1$, $a < b$, $\forall b\in\mathrm{C}_2$), on désigne par Γ^{P}_j, $1 \leq j \leq |\,\mathrm{P}\,|$, le $j^{\text{ème}}$ élément de $\mathrm{P}\in\mathscr{P}(\Gamma)$.

Cela étant, on obtient, par application itérée du lemme 2.2.

$$(2.4.5)\quad \partial^\Gamma[\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^r([\mathrm{I} + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1}).\mathrm{B}\,\}\,\det_3(\mathrm{I} + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s))]$$
$$= \sum_{\mathrm{P}\in\mathscr{P}(\Gamma)}\ \sum_{\underline{\gamma},\underline{\delta}\in\mathscr{R}^{\mathrm{P}}}\ \sum_{\mathrm{Q}\subset\mathrm{P}} \mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^{r+|\mathrm{Q}|}([\mathrm{I} + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1}).\mathrm{Y}^{\mathrm{P,Q}}(\underline{\gamma},\underline{\delta})\,\}\,.\,\det_3(\mathrm{I} + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s))$$

où $\mathrm{Y}^{\mathrm{P,Q}}(\underline{\gamma},\underline{\delta})\in\mathscr{T}_1^{(r+|\mathrm{Q}|)}$ est défini comme suit :

pour $1 \leq j \leq |\,\mathrm{P}\,|$ on pose,

$$(2.4.6)\qquad \mathscr{U}^{\mathrm{P,Q}}_j(\underline{\gamma},\underline{\delta}) = \begin{cases} \mathscr{C}^{\left[\chi_{\gamma_j}\partial^{\Gamma^{\mathrm{P}}_j}\left(\frac{\lambda^3}{3}\mathbf{K}_\Lambda(s)^3\right)\chi_{\delta_j}\right]}, & \text{si } \Gamma^{\mathrm{P}}_j\in\mathrm{Q}\,, \\ \mathscr{M}^{\left[\chi_{\gamma_j}\partial^{\Gamma^{\mathrm{P}}_j}\left(\frac{\lambda^2}{2}\mathbf{K}_\Lambda(s)^2 - \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)\right)\chi_{\delta_j}\right]}, & \text{si } \Gamma^{\mathrm{P}}_j\notin\mathrm{Q}\,, \end{cases}$$

(avec $\gamma_j = \gamma_{\Gamma^{\mathrm{P}}_j}$, $\delta_j = \delta_{\Gamma^{\mathrm{P}}_j}$), alors

$$(2.4.7)\qquad \mathrm{Y}^{\mathrm{P,Q}}(\underline{\gamma},\underline{\delta}) = \mathscr{U}^{\mathrm{P,Q}}_{|\mathrm{P}|}(\underline{\gamma},\underline{\delta})\ldots\mathscr{U}^{\mathrm{P,Q}}_j(\underline{\gamma},\underline{\delta})\ldots\mathscr{U}^{\mathrm{P,Q}}_1(\underline{\gamma},\underline{\delta}).\mathrm{B}\,.$$

On utilise la relation de commutation [*10*] (A.2.4) pour écrire $\mathrm{Y}^{\mathrm{P,Q}}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$ comme une somme de termes où tous les opérateurs $\mathscr{M}^{[\cdot]}$ sont rangés à droite ; si k est tel que $\Gamma^{\mathrm{P}}_k\notin\mathrm{Q}$, le transfert de $\mathscr{U}^{\mathrm{P,Q}}_k(\underline{\gamma},\underline{\delta})$ donne lieu à au plus $|\,\{\,j\,;\,1 \leq j \leq |\,\mathrm{P}\,|\,,\,\gamma_j = \delta_k\,\}\,| = \mathrm{N}_{\underline{\gamma}}(\delta_k)$ commutateurs non nuls, le nombre de termes dans l'expression ainsi obtenue de $Y^{P,Q}(\underline{\gamma}, \underline{\delta})$ est donc au plus

$$(2.4.8) \quad \prod_{\{k;\Gamma_k^P \notin Q\}} (1 + N_{\underline{\gamma}}(\delta_k)) \leq \prod_{1 \leq k \leq |P|} (1 + N_{\underline{\gamma}}(\delta_k)) = \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (1 + N_{\underline{\gamma}}(\alpha))^{N_{\underline{\delta}}(\alpha)}$$

$$\leq \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} e^{N_{\underline{\gamma}}(\alpha) + N_{\underline{\delta}}(\alpha)} . (N_{\underline{\delta}}(\alpha) !) = e^{2|P|} \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (N_{\underline{\delta}}(\alpha) !) \leq e^{2|\Gamma|} \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (N_{\underline{\delta}}(\alpha) !)$$

(d'après l'inégalité $a^n \leq e^a n !$, $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$).

Soit maintenant $Y_1^{P,Q}(\underline{\gamma}, \underline{\delta})$ l'un des termes apparaissant dans la décomposition de $Y^{P,Q}(\underline{\gamma}, \underline{\delta})$; comme B est $\mathscr{R}$-localisé, si $X \in \mathscr{C}_1^{(r)}$ désigne l'un quelconque des opérateurs obtenus en appliquant successivement les opérateurs $\mathscr{M}^{[\cdot]}$ à B, d'après le lemme 2.3, X est $\mathscr{R}$-localisé et, d'après (2.3.2), si $X \neq 0$,

$$(2.4.9) \quad w_X(\alpha) \leq w_B(\alpha) + N_{\underline{\gamma}}(\alpha), \qquad \forall \alpha \in \mathscr{R},$$

alors d'après (2.3.3) et [*10*], (A.3.1), (A.3.2) on a

$$(2.4.10) \quad \| Y_1^{P,Q}(\underline{\gamma}, \underline{\delta}) \|_1 \leq \binom{r + |Q|}{r} \prod_{\{k;\Gamma_k^P \notin Q\}} (w_B(\delta_k) + N_{\underline{\gamma}}(\delta_k))$$

$$. \prod_{\{j;\Gamma_j^P \notin Q\}} \left\| \chi_{\gamma_j} \partial^{\Gamma_j^P} \left(\frac{\lambda^2}{2} \mathbf{K}_\Lambda(s)^2 - \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s) \right) \chi_{\delta_j} \right\| \prod_{\{i;\Gamma_i^P \in Q\}} \left\| \chi_{\gamma_i} \partial^{\Gamma_i^P} \left(\frac{\lambda^3}{3} \mathbf{K}_\Lambda(s)^3 \right) \chi_{\delta_i} \right\|_1 . \| B \|_1,$$

or,

$$(2.4.11) \quad \prod_{\{k;\Gamma_k^P \notin Q\}} (w_B(\delta_k) + N_{\underline{\gamma}}(\delta_k))$$

$$\leq \prod_{1 \leq k \leq |P|} (w_B(\delta_k) + N_{\underline{\gamma}}(\delta_k)) = \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (w_B(\alpha) + N_{\underline{\gamma}}(\alpha))^{N_{\underline{\delta}}(\alpha)}$$

$$\leq \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} e^{w_B(\alpha) + N_{\underline{\gamma}}(\alpha)} . (N_{\underline{\delta}}(\alpha) !) = e^{r + |P|} \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (N_{\underline{\delta}}(\alpha) !) \leq e^r e^{|\Gamma|} \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (N_{\underline{\delta}}(\alpha) !),$$

et

$$(2.4.12) \quad \binom{r + |Q|}{r} \leq 2^{r + |Q|} \leq e^r e^{|\Gamma|},$$

donc, d'après (2.4.7), (2.4.9), (2.4.10), (2.4.11),

$$(2.4.13) \quad \| Y^{P,Q}(\underline{\gamma}, \underline{\delta}) \|_1 \leq e^{2r} e^{4|\Gamma|} \| B \|_1 \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (N_{\underline{\delta}}(\alpha) !)^2 .$$

$$. \prod_{\{j;\Gamma_j^P \notin Q\}} \left\| \chi_{\gamma_j} \partial^{\Gamma_j^P} \left(\frac{\lambda^2}{2} \mathbf{K}_\Lambda(s)^2 - \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s) \right) \chi_{\delta_j} \right\| . \prod_{\{i;\Gamma_i^P \in Q\}} \left\| \chi_{\gamma_i} \partial^{\Gamma_i^P} \left(\frac{\lambda^3}{3} \mathbf{K}_\Lambda(s)^3 \right) \chi_{\delta_i} \right\|_1,$$

et (2.4.1) résulte de (2.4.5) et (2.4.13).

D'autre part (2.4.2) résulte évidemment de (1.6.28). □

2.5. On a (avec les notations des lemmes 1.4, 1.6 et de la proposition B.3)

LEMME. — *Si* $\tau \geq u_0 l^{-1}$ *et, si* $\mu = \min\{m, M\}$ *vérifie* $\tau^{12}\mu^{-\theta} \leq 1$ *et* $\eta\mu - 4\tau \geq l^{-1}$ *il existe des constantes* $b > 0$, $y > 0$ *telles que, pour tous* $C \in \mathscr{C}_0$, $(C \neq \emptyset)$, $\delta \in \mathscr{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $(|\lambda| \leq 1)$, $(\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in S_0)$, *on ait* (38)

$$(2.5.1) \quad k_1(C, \delta) \leq b^{|C|} L(C)^9 (l\tau)^{-\frac{|C|}{2}} e^{-yD[\delta, C]} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-yD[\beta, C]}(F_\beta + F_\beta^2 + F_\beta^3),$$

et

$$(2.5.2) \quad k_2(C) \leq b^{|C|} L(C)^6 (l\tau)^{-\frac{|C|}{2}} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-yD[\beta, C]}(F_\beta^2 + \Omega).$$

Démonstration. — L'estimation des différents termes du membre de droite de (2.4.3), (2.4.4) relève de la même technique, pour alléger l'exposé on ne donne, à titre d'exemple, que l'estimation du second terme de (2.4.3).

D'après le lemme 1.4 et la proposition B.3, on a (si $\tau \geq u_0 l^{-1}$)

$$\begin{aligned}
(2.5.3) \quad & \sum_{\gamma \in \mathscr{R}} \| \partial^C (\chi_\gamma \mathbf{K}_\Lambda(s)^2 \chi_\delta) \| \\
& \leq \sum_{\substack{C_1 \cup C_2 = C \\ C_1 \cap C_2 = \emptyset}} \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \underline{\Delta} \\ \beta_1, \beta_2 \in \mathscr{R} \\ \gamma, \gamma' \in \mathscr{R}}} |\partial^{C_1} H(s \mid \alpha_1 ; \gamma, \beta_1, \gamma')| \, . \, |\partial^{C_2} H(s \mid \alpha_2 ; \gamma', \beta_2, \delta)| \\
& \qquad . \, \| \chi_\gamma \mathbf{K}_{\alpha_1, \beta_1} \chi_{\gamma'} \|_3 \, \| \chi_{\gamma'} \mathbf{K}_{\alpha_2, \beta_2} \chi_\delta \|_3 \\
& \leq a^2 7^{|C|} (l\tau)^{-\frac{|C|}{2}} (\tau^{12}\mu^{-\theta})^2 \sum_{\substack{C_1 \cup C_2 = C \\ C_1 \cap C_2 = \emptyset}} L(C_1)^3 L(C_2)^3 \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \underline{\Delta} \\ \beta_1, \beta_2 \in \mathscr{R} \\ \gamma, \gamma' \in \mathscr{R}}} e^{-\frac{\tau}{2}(D[\alpha_1, C_1] + D[\alpha_2, C_2])} \\
& \qquad . \, e^{-(\eta\mu - 4\tau)([\alpha_1, \gamma] + [\alpha_1, \beta_1] + [\alpha_1, \gamma'] + [\alpha_2, \gamma'] + [\alpha_2, \beta_2] + [\alpha_2, \delta])} . F_{\beta_1} F_{\beta_2},
\end{aligned}$$

donc, si $\tau^{12}\mu^{-\theta} \leq 1$ et $\eta\mu - 4\tau \geq l^{-1}$, on a, compte tenu des inégalités $L(C_j) \leq L(C)$, $j = 1, 2$ et $[\alpha, \beta] \geq |\alpha - \beta| - \sqrt{2}l$,

$$\begin{aligned}
(2.5.4) \quad & \sum_{\gamma \in \mathscr{R}} \| \partial^C (\chi_\gamma \mathbf{K}_\Lambda(s)^2 \chi_\delta) \| \\
& \qquad \leq b' 7^{|C|} L(C)^6 (l\tau)^{-\frac{|C|}{2}} \sum_{\substack{C_1 \cup C_2 = C \\ C_1 \cap C_2 = \emptyset}} \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \underline{\Delta} \\ \beta_1, \beta_2 \in \mathscr{R} \\ \gamma, \gamma' \in \mathscr{R}}} e^{-\frac{l^{-1}}{2}(D[\alpha_1, C_1] + D[\alpha_2, C_2])} \\
& \qquad . \, e^{-l^{-1}(|\alpha_1 - \gamma| + |\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_1 - \gamma'| + |\alpha_2 - \gamma'| + |\alpha_2 - \beta_2| + |\alpha_2 - \delta|)} . F_{\beta_1} F_{\beta_2}.
\end{aligned}$$

(38) k_1 et k_2 sont définis en (2.4.3), (2.4.4).

D'après l'inégalité $|\alpha-\beta| + D[\alpha,\Gamma] \geq D[\beta,\Gamma] - \sqrt{2}l$, $\forall\Gamma\in\mathscr{C}_0$, $\forall\alpha,\beta\in\mathscr{R}$, on a

$$(2.5.5)\quad \frac{1}{2}(D[\alpha_1,C_1] + D[\alpha_2,C_2] + |\alpha_1-\gamma'| + |\alpha_2-\gamma'|)$$
$$\geq \frac{1}{2}(D[\alpha_1,C_1] + D[\alpha_2,C_2] + |\alpha_1-\alpha_2|)$$
$$\geq \frac{1}{8}(D[\alpha_1,C_1] + D[\alpha_1,C_2]) + \frac{3}{8}(D[\alpha_2,C_1] + D[\alpha_2,C_2]) - \frac{1}{\sqrt{2}}l$$
$$\geq \frac{1}{8}D[\alpha_1,C] + \frac{3}{8}D[\alpha_2,C] - \frac{1}{\sqrt{2}}l$$
$$\geq \frac{1}{8}(D[\beta_1,C] + D[\beta_2,C]) + \frac{1}{4}D[\delta,C]$$
$$- \frac{1}{8}(|\alpha_1-\beta_1| + |\alpha_2-\beta_2| + 2|\alpha_2-\delta|) - \sqrt{2}l$$

donc, en substituant (2.5.5) dans (2.5.4),

$$(2.5.6)\quad \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} \| \partial^C(\chi_\gamma \mathbf{K}_\Lambda(s)^2\chi_\delta) \| \leq b''(14)^{|C|}L(C)^6(l\tau)^{-\frac{|C|}{2}} e^{-\frac{l^{-1}}{4}D[\delta,C]}$$
$$\cdot \sum_{\beta_1,\beta_2\in\mathscr{R}} e^{-\frac{l^{-1}}{4}|\beta_1-\beta_2|}\left(e^{-\frac{l^{-1}}{8}D[\beta_1,C]}F_{\beta_1}\right)\left(e^{-\frac{l^{-1}}{8}D[\beta_2,C]}F_{\beta_2}\right)$$
$$\cdot\left(\sum_{\alpha_1\in\mathscr{R}} e^{-\frac{l^{-1}}{2}|\alpha_1-\beta_1|}\sum_{\gamma\in\mathscr{R}} e^{-l^{-1}|\alpha_1-\gamma|}\right)\left(\sum_{\alpha_2\in\mathscr{R}} e^{-\frac{l^{-1}}{2}|\alpha_2-\beta_2|}\sum_{\gamma'\in\mathscr{R}} e^{-\frac{l^{-1}}{4}|\alpha_2-\gamma'|}\right)$$

$\left[\text{on a utilisé } \frac{1}{4}|\beta_1-\beta_2| \leq \frac{1}{4}(|\alpha_1-\beta_1| + |\alpha_1-\gamma'| + |\alpha_2-\gamma'| + |\alpha_2-\beta_2|)\right]$, la sommation en γ, γ', α_1, α_2 fournit une constante, donc d'après l'inégalité de Young :

$$(2.5.7)\quad \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} \| \partial^C(\chi_\gamma \mathbf{K}_\Lambda(s)^2\chi_\delta) \| \leq b^{|C|}L(C)^6(l\tau)^{-\frac{|C|}{2}} e^{-\frac{l^{-1}}{4}D[\delta,C]} \sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-\frac{l^{-1}}{4}D[\beta,C]}F_\beta^2 . \qquad \square$$

2.6. La fin de la démonstration de la proposition 2.1 repose sur le

LEMME [39]. — *Étant donné* $y>0$, $\rho>0$ *il existe une constante* $A_{y,\rho}>0$ *telle que pour tout* $\Gamma\in\mathscr{C}_0$ *et* $P\in\mathscr{P}(\Gamma)$,

$$(2.6.1)\quad \sum_{\underline{\beta}\in\mathscr{R}^P} \prod_{C\in P} e^{-yD[\beta_C,C]} \prod_{\alpha\in\mathscr{R}} N_{\underline{\beta}}(\alpha)^{\rho N_{\underline{\beta}}(\alpha)} \leq A_{y,\rho}{}^{|\Gamma|},$$

[*où* $D[\beta,C] = \max_{b\in C} d[\Delta_\beta, b]$ *et* $N_{\underline{\beta}}(\alpha) = |\{C\in\Gamma\,;\,\beta_C=\alpha\}|$, $\forall\alpha\in\mathscr{R}$].

([39]) D'après [*4*], lemme 10.2.

Démonstration. — On a

$$(2.6.2) \quad \sum_{\underline{\beta}\in\mathscr{R}^{\mathrm{P}}} \prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}} e^{-y\mathrm{D}[\beta_{\mathrm{C}},\mathrm{C}]} \prod_{\alpha\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)^{\rho\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)}$$
$$\leq \left(\prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}} \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} e^{-\frac{y}{2}\mathrm{D}[\gamma,\mathrm{C}]}\right) \cdot \sup_{\underline{\beta}\in\mathscr{R}^{\mathrm{P}}} \left(\prod_{\substack{\alpha\in\mathscr{R} \\ \mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)\neq 0}} \mathrm{I}_{y,\rho}(\mathrm{P},\underline{\beta},\alpha)\right)$$

où

$$(2.6.3) \quad \mathrm{I}_{y,\rho}(\mathrm{P},\underline{\beta},\alpha) = e^{-\frac{y}{2}\left(\sum_{\{\mathrm{C}\in\mathrm{P}:\beta_{\mathrm{C}}=\alpha\}} \mathrm{D}[\alpha,\mathrm{C}]\right)} \mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)^{\rho\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)}, \quad (\mathrm{P}\in\mathscr{P}(\Gamma), \underline{\beta}\in\mathscr{R}^{\mathrm{P}}, \alpha\in\mathscr{R}).$$

D'abord, pour tous $\gamma\in\mathscr{R}$, $\mathrm{C}\in\mathscr{C}_0$, $\mathrm{D}[\gamma,\mathrm{C}] \geq \mathrm{D}[\gamma,\{b\}]$, $\forall b\in\mathrm{C}$ donc si

$$\mathrm{A}'_y = \sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-\frac{y}{2}\mathrm{D}[\gamma,\{b\}]}, \qquad (b\in\mathscr{B}, \text{ arbitraire}),$$

on a

$$(2.6.4) \qquad \prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}} \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} e^{-\frac{y}{2}\mathrm{D}[\gamma,\mathrm{C}]} \leq \mathrm{A}'^{|\mathrm{P}|}_y \leq \mathrm{A}'^{|\Gamma|}_y .$$

Puis (en supposant $\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha) \geq 64$, sinon $\mathrm{I}_{y,\rho}(\mathrm{P},\underline{\beta},\alpha) \leq 64^{64\rho}$) soit n le plus grand entier tel que $2(2n+2)^2 \leq \frac{1}{2}\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)$ $\Big[$de sorte que $2(2n+4)^2 > \frac{1}{2}\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)$ donc $n > \frac{1}{4}\sqrt{\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)} - 2\Big]$; pour tout entier k, il y a moins de ([40])

$$2(2k+1)(2k+2) < 2(2k+2)^2$$

valeurs de $\mathrm{C}\in\mathrm{P}$ telles que $\mathrm{D}[\alpha,\mathrm{C}] \leq kl$, donc, parmi les $\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)$ valeurs de $\mathrm{C}\in\mathrm{P}$ telles que $\beta_{\mathrm{C}} = \alpha$, il y en a au moins $\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha) - 2(2n+2)^2 \geq \frac{1}{2}\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)$ qui vérifient $\mathrm{D}[\alpha,\mathrm{C}] \geq nl \geq \left(\frac{1}{4}\sqrt{\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)} - 2\right)l$, donc

$$(2.6.5) \qquad \mathrm{I}_{y,\rho}(\mathrm{P},\underline{\beta},\alpha) \leq e^{-\frac{yl}{2}\frac{\mathrm{N}_{\beta}(\alpha)}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)}-2\right)+\rho\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)\log\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)}$$
$$\leq \sup_{u\geq 0} e^{-u\left[\frac{yl}{4}\left(\frac{\sqrt{u}}{4}-2\right)-\rho\log u\right]},$$

donc il existe une constante $\mathrm{A}''_{y,\rho}$ telle que $\mathrm{I}_{y,\rho}(\mathrm{P},\underline{\beta},\alpha) \leq \mathrm{A}''_{y,\rho}$ et comme $|\{\alpha\in\mathscr{R}\,;\,\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)\neq 0\}| \leq |\mathrm{P}|$, on a

$$(2.6.6) \qquad \sup_{\beta\in\mathscr{R}} \prod_{\substack{\alpha\in\mathscr{R} \\ \mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\alpha)\neq 0}} \mathrm{I}_{y,\rho}(\mathrm{P},\underline{\beta},\alpha) \leq \mathrm{A}''^{|\mathrm{P}|}_{y,\rho} \leq \mathrm{A}''^{|\Gamma|}_{y,\rho} .$$

□

([40]) Le nombre d'éléments de $\mathscr{B}$ contenus dans le carré de centre $\alpha\in\mathscr{R}$ et de côté $(2k+1)l$ est $2(2k+1)(2k+2)$.

2.7. On a enfin

Proposition. — *Il existe des constantes* $K_1 > 0$, $K'_2 > 0$, $0 < a_1 \leq 1$, $b \geq 1$ *telles que si* $\tau \geq u_0 l^{-1}$ *et si* $\mu = \min\{m, M\}$ *vérifie* $\tau^{12}\mu^{-\theta} \leq 1$ *et* $\eta\mu - 4\tau \geq l^{-1}$ [41], *on ait pour tous* $\Gamma \in \mathscr{C}_0$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in S_0$, $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_1\right)}$,

$$(2.7.1)\quad |\partial^\Gamma Z^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})|$$
$$\leq b^{r+t}(t!)^{1/2} \prod_{j \in I_\Lambda^{(f)}} \| u_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j' \in I_\Lambda^{(\bar{f})}} \| v_{j'} \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k \in I_\Lambda^{(b)}} \| f_k \|_{\bar{\mathscr{H}}^{-1}} \cdot e^{K_1|\Lambda| + K'_2(\Gamma)} (l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}}.$$

Démonstration. — D'après les majorations des dérivées, indépendantes de $s \in S_0$, tirées de (2.4.1), (2.4.2), (2.5.1), (2.5.2) et (C.6.2), il est licite de dériver sous le signe somme dès que les fonctions majorantes sont intégrables.

On estime le dernier facteur du second membre de (2.4.1), d'après (2.5.1), on a

$$(2.7.2)\quad \sum_{P \in \mathscr{P}(\Gamma)} \sum_{\underline{\delta} \in \mathscr{R}^P} \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (N_{\underline{\delta}}(\alpha)!)^2 \prod_{C \in P} k_1(C, \delta_C)$$
$$\leq \sum_{P \in \mathscr{P}(\Gamma)} \sum_{\underline{\delta} \in \mathscr{R}^P} \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (N_{\underline{\delta}}(\alpha)!)^2 \prod_{C \in P} b^{|C|} L(C)^9 (l\tau)^{-\frac{|C|}{2}} e^{-yD[\delta_C, C]} \left(\sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-yD[\beta, C]} G_\beta \right)$$
$$= \sum_{P \in \mathscr{P}(\Gamma)} \sum_{\underline{\beta}, \underline{\delta} \in \mathscr{R}^P} \prod_{C \in P} b^{|C|} L(C)^9 (l\tau)^{-\frac{|C|}{2}} e^{-y(D[\beta_C, C] + D[\delta_C, C])} \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} (N_{\underline{\delta}}(\alpha)!)^2 G_\alpha^{N_{\underline{\beta}}(\alpha)}$$
$$\leq \left(\sum_{P \in \mathscr{P}(\Gamma)} \prod_{C \in P} b^{|C|} L(C)^9 (l\tau)^{-\frac{|C|}{2}} \right) \cdot \left(\sup_{P' \in \mathscr{P}(\Gamma)} \sum_{\underline{\delta} \in \mathscr{R}^{P'}} \prod_{C' \in P'} e^{-yD[\delta_{C'}, C']} \prod_{\alpha \in \mathscr{R}} N_{\underline{\delta}}(\alpha)^{2N_{\underline{\delta}}(\alpha)} \right)$$
$$\cdot \left(\sup_{P'' \in \mathscr{P}(\Gamma)} \sum_{\underline{\beta} \in \mathscr{R}^{P''}} \prod_{C'' \in P''} e^{-yD[\beta_{C''}, C'']} \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} G_\sigma^{N_{\underline{\beta}}(\sigma)} \right),$$

où l'on a posé $G_\beta = F_\beta + F_\beta^2 + F_\beta^3$, $\forall \beta \in \mathscr{R}$, de sorte que G_β est $\mathscr{A}_\beta$-mesurable et, d'après (1.4.1),

$$(2.7.3)\qquad \| G_\beta \|_p \leq a' p^{3/2}, \qquad \forall \beta \in \mathscr{R}, \quad \forall p \in [1, +\infty[.$$

Alors, d'après le lemme C.6, on a pour tous $\underline{\beta} \in \mathscr{R}^P$, $q \in [1, +\infty[$

$$(2.7.4)\quad \left\| \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} G_\sigma^{N_{\underline{\beta}}(\sigma)} \right\|_q \leq \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} \| G_\sigma^{N_{\underline{\beta}}(\sigma)} \|_{4q} \leq \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} (4a' q N_{\underline{\beta}}(\sigma))^{\frac{3}{2} N_{\underline{\beta}}(\sigma)}$$
$$\leq (4a'q)^{\frac{3}{2}|P|} N_{\underline{\beta}}(\sigma)^{\frac{3}{2} N_{\underline{\beta}}(\sigma)} \leq (4a'q)^{\frac{3}{2}|\Gamma|} N_{\underline{\beta}}(\sigma)^{\frac{3}{2} N_{\underline{\beta}}(\sigma)},$$

[41] Les notations sont celles des lemmes 1.4, 1.6 et de la proposition B.3.

comme d'autre part, d'après (B.3.2),

$$(2.7.5) \qquad \sum_{P\in\mathscr{P}(\Gamma)} \prod_{C\in P} b^{|C|} L(C)^9 (l\tau)^{-\frac{C}{2}} \leq b^{|\Gamma|} e^{9K|\Gamma|} (l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}}$$

on voit, d'après (2.6.1), (2.7.2), (2.7.3) et (2.7.4) que, pour chaque $q \in [1, +\infty[$, il existe une constante $c_1(q) > 0$ telle que

$$(2.7.6) \qquad \left\| \sum_{P\in\mathscr{P}(\Gamma)} \sum_{\underline{\delta}\in\mathscr{R}^P} \prod_{\alpha\in\mathscr{R}} (N_{\underline{\delta}}(\alpha)\,!)^2 \prod_{C\in P} k_1(C, \delta_C) \right\|_q \leq c_1(q)^{(\Gamma)} (l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}}.$$

Le dernier facteur du second membre de (2.4.2) s'évalue d'une façon analogue en utilisant (2.5.2) : pour tout $q \in [1, +\infty[$, il existe une constante $c_2(q) > 0$ telle que

$$(2.7.7) \qquad \left\| \sum_{P\in\mathscr{P}(\Gamma)} \prod_{C\in P} k_2(C) \right\|_q \leq c_2(q)^{|\Gamma|} (l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}}.$$

On déduit alors (2.7.1) de (2.4.1), (2.4.2) d'après la formule de Leibniz, l'inégalité de Hölder et les majorations (1.7.2), (2.7.6), (2.7.7). □

La fin de la démonstration de la proposition 2.1 (c'est-à-dire la vérification de F. P. v et F. S. iv) est une conséquence immédiate de (2.7.1) : d'abord, pour tout $s \in S_0$

$$(2.7.8) \qquad |\,\delta^\Gamma Z^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})\,| \leq \sup_{s'\in S_0} |\,\partial^\Gamma Z^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s'}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})\,|$$

$\left[\text{puisque } \delta^{(b)} f(s) = \int_0^{s_b} \partial^{(b)} f(s)\,|_{s_b = t} dt, \forall b \in \mathscr{B}, \forall s \in S_0\right]$, puis si $\tau \geq u_0 l^{-1}$ est assez grand (et μ assez grand pour que les hypothèses de la proposition 2.7 soient vérifiées), on a $e^{K_2^{\frac{1}{2}}}(l\tau)^{-\frac{1}{2}} \leq e^{-K_2}$ avec $K_2 > a_2(K_1 + \log 2)$, donc d'après (2.7.1), (2.7.8), (A.3.2) et (A.4.1) sont vérifiées et (A.3.1) l'est dès que $|\,Z^{(0,0)}_{\lambda,\Delta,0}\,| \geq \frac{1}{2}$ (détermination de a_0 en (2.1.11)).

3. SOMMABILITÉ DE BOREL DES FONCTIONS $\lambda \mapsto S^{(r,t)}_\lambda$

Les fonctions $\lambda \mapsto S^{(r,t)}_\lambda$, $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}$, introduites par le théorème I possèdent les propriétés suivantes :

THÉORÈME II. — *Les fonctions* $\lambda \mapsto S^{r,t}_\lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$, $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}$, *sont de* *classe* C^∞ *au bord de* $D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$, *de plus il existe* $b \geq 1$, *et, pour tout* $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon > 0$, $c_\varepsilon \geq 1$, *tels que*

$$(3.0.1)\quad \left|\frac{d^n}{d\lambda^n} S_\lambda^{(r,t)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})\right|$$

$$\leq b^{r+t}(t\,!)^{1/2}\prod_{j=1}^{r}\| u_j \|_{\mathscr{K}^{-1/2}}\prod_{j'=1}^{r}\| v_{j'} \|_{\mathscr{K}^{-1/2}}\prod_{k=1}^{t}\| f_k \|_{\mathscr{K}^{-1}}\,.\,[(r+1)c_\varepsilon]^n(n\,!)^{7/6+\varepsilon},$$

pour tous $n \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_\varepsilon\right)}$ [42].

La démonstration du théorème II fait l'objet des sections 3.1 à 3.9, ci-dessous.

D'après le théorème de Watson [43], on obtient comme corollaire du théorème II, la propriété de sommabilité de Borel :

THÉORÈME III. — *Si pour* $n \in \mathbf{N}$, *on pose*

$$(3.0.2)\qquad \underline{S}_n^{(r,t)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = \frac{d^n}{d\lambda^n}\bigg|_{\lambda=0} S_\lambda^{(r,t)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}),$$

alors pour tout $\nu \in\,]0,6[$, *la série*

$$(3.0.3)\qquad A_\nu(z\,; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\,!\,\Gamma\left(\frac{n}{\nu}+1\right)}\underline{S}_n^{(r,t)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$$

converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, *vérifie*

$$(3.0.4)\quad |\,A(z\,; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})\,|$$

$$\leq b^{r+t}(t\,!)^{1/2}\prod_{j=1}^{r}\| u_j \|_{\mathscr{K}^{-1/2}}\prod_{j'=1}^{r}\| v_{j'} \|_{\mathscr{K}^{-1/2}}\prod_{k=1}^{t}\| f_k \|_{\mathscr{K}^{-1}}e^{a_\varepsilon^{-\nu}|z|^\nu},$$

---

[42] Dans [*10*], une erreur de dénombrement (p. 264, 1-2, l'estimation $2^{n_1+n_2+n_3+n_4}$ doit être remplacée par $(n_3 + n_4 + 1)^{n_1+n_2}$, qui ne permet pas de conclure) invalide la démonstration du lemme [*10*] 2.3 et par conséquent des théorèmes [*10*] II et III.

On peut toutefois montrer un résultat plus faible (le dernier facteur $(n\,!)^{1+\varepsilon}$ de [*10*], (3.0.1) doit être remplacé par $(n\,!)^{7/6+\varepsilon}$ comme ci-dessus), suffisant pour entraîner la sommabilité de Borel dans un angle plus petit (la série [*10*], (3.0.3) converge pour tout $\nu \in\,]0, 6[$, et [*10*], (3.0.4) n'est établie que pour tout $\lambda \in D\left(\frac{\pi}{24}, a_0(g)\right)$, avec $\nu \in \left]\pi \middle/ 2\left(\frac{\pi}{8} - |\operatorname{Arg}\lambda|\right), 6\right[$) ; la démonstration est une variante simplifiée (puisque dans [*10*] on ne cherche pas d'uniformité relativement à $g \in \mathscr{V}$) de la démonstration 3.2 à 3.6 ci-dessous.

[43] Voir [*6*], théorème 136 et [*10*], 3.4.

pour tous $z \in D\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2\nu}, \infty\right)$, $\varepsilon < \frac{1}{\nu} - \frac{1}{6}$; *et pour tout* $\lambda \in D\left(\frac{\pi}{24}, a_\varepsilon\right)$, *on a*

$$(3.0.5) \quad S_\lambda^{(r,t)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = \int_0^\infty A_\nu(x^{1/\nu}\lambda\,; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})dx, \quad \forall \nu \in \left]\frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{8} - |\operatorname{Arg}\lambda|\right)}, 6\right[.$$

3.1. Les fonctions $(\Lambda, s) \mapsto \frac{d^n}{d\lambda^n} Z_{\lambda,\Lambda,s}^{(r,t)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$ ne découplent pas en $s = 0$ (définition A.2), on va d'abord les décomposer en une somme de fonctions qui découplent en $s = 0$.

Pour $\underline{\lambda} \in \mathbb{C}^{\mathcal{R}}$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in S_0$, on pose d'abord

$$(3.1.1) \qquad \tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s) = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \lambda_\alpha \mathbf{K}_\alpha(s),$$

[de sorte que $\lambda \mathbf{K}_\Lambda(s) = \tilde{\mathbf{K}}_{\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{R}},\Lambda}(s)$, où $\mathbf{1}_{\mathcal{R}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{R}}$ est la fonction constante égale à 1], et,

$$(3.1.2) \quad \operatorname{Tr}_{\text{reg}}^{\cdot} \tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2 = \operatorname{Tr}_{\text{reg}}^{\cdot} \tilde{\mathrm{D}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2 + \Pi_2 \operatorname{Tr}\{2\tilde{\mathrm{D}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)\tilde{\mathrm{R}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s) + \tilde{\mathrm{R}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2\},$$

où

$$\tilde{\mathrm{D}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s) = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \lambda_\alpha \mathrm{D}_\alpha(s), \qquad \tilde{\mathrm{R}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s) = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \lambda_\alpha \mathrm{R}_\alpha(s),$$

et

$$\operatorname{Tr}_{\text{reg}}^{\cdot} \tilde{\mathrm{D}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2 = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \lambda_\alpha^2 \operatorname{Tr}_{\text{reg}}^{\cdot} \mathrm{D}_\alpha(s)^2,$$

[de sorte que, d'après (1.6.28), $\lambda^2 \operatorname{Tr}_{\text{reg}}^{\cdot} \mathbf{K}_\Lambda(s)^2 = \operatorname{Tr}_{\text{reg}}^{\cdot} \tilde{\mathbf{K}}_{\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{R}},\Lambda}(s)^2$], puis, avec $A \in \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \nu)$ et $B \in \mathscr{C}_1^{(r)}$,

$$(3.1.3) \quad \tilde{Y}_{\underline{\lambda},\Lambda,s}(A, B) = A.\operatorname{Tr}\{\Lambda^r([I + \tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)]^{-1}).B\} \det_{\text{ren}}(I + \mathbf{K}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)) \quad ([44])$$

où

$$\det_{\text{ren}}(I + \tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)) = e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}_{\text{reg}}^{\cdot}\tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2} \det_3(I + \tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)),$$

et par conséquent $Y_{\lambda,\Lambda,s}(A.B) = \tilde{Y}_{\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{R}},\Lambda,s}(A, B)$.

Soit $n \ge 1$ un entier, on note $e_n = \{1, \dots, n\}$, et, pour $\underline{\alpha} \in \mathcal{R}^{e_n}$, $X \in \mathscr{X}$,

$$\partial_X^{\underline{\alpha}} = \prod_{\substack{j \in e_n \\ \alpha_j \in \underline{X}}} \partial^{(\alpha_j)}, \qquad \left(\underline{X} = X \cap \mathcal{R},\ \partial^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha}\right),$$

([44]) Voir (1.7.4).

on pose

(3.1.4) $\quad Y^{\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(A,B) = \partial^{\underline{\alpha}}_{\Lambda}\tilde{Y}_{\lambda \mathbf{1}_{\mathscr{R}},\Lambda,s}(A,B), \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \Lambda \in \mathscr{X}_0, s \in S_0)$

on a donc

$$(3.1.5) \qquad \frac{d^n}{d\lambda^n} Y_{\lambda,\Lambda,s}(A,B) = \sum_{\underline{\alpha} \in \underline{\Lambda}^{e_n}} Y^{\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(A,B).$$

Enfin, pour $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in S_0$, on pose

$$(3.1.6) \qquad Z^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = E_\nu[Y^{\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(A_\Lambda(\boldsymbol{f}), B_\Lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))]$$

L'essentiel de la démonstration du théorème II consiste à établir la proposition 3.6 ci-dessous, on conclut ensuite par un argument « indépendant du modèle ».

3.2. Pour $\zeta > 0$, on définit $Q_\zeta \in L(\mathscr{K})$ par

$$(3.2.1) \qquad \widehat{Q_\zeta \psi}(p) = e^{-\frac{|p|}{\zeta}} \hat{\psi}(p), \qquad (p \in E, \psi \in \mathscr{K}),$$

et on pose

$$(3.2.2) \qquad \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} = Q_\zeta \mathbf{K}_{\alpha,\beta}, \ \mathbf{H}_{\zeta;\alpha,\beta} = (I - Q_\zeta)\mathbf{K}_{\alpha,\beta}, \qquad (\alpha, \beta \in \mathscr{R}),$$

on a

LEMME. — *Il existe des constantes $\theta > 0$, $\eta > 0$, et, pour tous $\sigma > 0$, $\xi \in [1, 2[$ une constante $\alpha_{\sigma,\xi} > 0$ et des fonctions positives*

$$F^{(\sigma,\xi)}_\beta \in \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\beta, \nu), \qquad \beta \in \mathscr{R} \ \text{(45)}$$

vérifiant

$$(3.2.3) \qquad \| F^{(\sigma,\xi)}_\beta \|_p \le a_{\sigma,\xi}\sqrt{p}, \qquad \forall \beta \in \mathscr{R}, \ \forall p \in [1, +\infty[,$$

et telles que, si $\mu = \min\{m, M\} \ge l^{-1}$, pour tous $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{R}, \zeta \ge 1$,

$$(3.2.4) \quad \| \chi_{\gamma_1}\mathbf{H}_{\xi;\alpha,\beta}\chi_{\gamma_2} \|_4 \le \zeta^{-\frac{1}{4}+\sigma}\mu^{-\theta}(e^{-\eta\sigma\mu[\alpha,\gamma_1]} + e^{-\eta\sigma l^{-2}[\alpha,\gamma_1]^2})e^{-\eta\mu([\alpha,\beta]+[\alpha,\gamma_2])}F^{(\sigma,1)}_\beta,$$

et,

$$(3.2.5) \quad \| \chi_{\gamma_1}\mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta}\chi_{\gamma_2} \|_\xi \le \zeta^{1-\frac{\xi}{2}+\sigma}\mu^{-\theta}(e^{-\eta\sigma\mu[\alpha,\gamma_1]} + e^{-\eta\sigma l^{-2}[\alpha,\gamma_1]^2})e^{-\eta\mu([\alpha,\beta]+[\alpha,\gamma_2])}F^{(\sigma,\xi)}_\beta,$$

(avec $[\alpha, \beta] = d[\Delta_\alpha, \Delta_\beta]$, $\alpha, \beta \in \mathscr{R}$).

(45) La tribu $\mathscr{A}_\beta$ est définie en 1.4.

Démonstration. — Si $[\alpha, \gamma] > 0$, on a

$$(3.2.6)\quad \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta}\chi_\gamma \|_\xi = \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} | \mathrm{C} |^{-1/2}\chi_\alpha | \mathrm{C} |^{1/2}\chi_\gamma \|_\xi \leq be^{-2\eta\mathrm{M}[\alpha,\gamma]} \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} | \mathrm{C} |^{3/2} \|_\xi \| | \mathrm{C} |^2\chi_\gamma \|$$

(d'après une variante évidente de [*12*], théorème 2.2), donc

$$(3.2.7)\quad \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta}\chi_\gamma \|_\xi \leq b'e^{-2\eta\mathrm{M}[\alpha,\gamma]} \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_\xi, \qquad \forall\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{R},$$

et de même

$$(3.2.8)\quad \| \mathbf{H}_{\zeta;\alpha,\beta}\chi_\gamma \|_4 \leq b'e^{-2\eta\mathrm{M}[\alpha,\gamma]} \| \mathbf{H}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_4, \qquad \forall\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{R}.$$

D'autre part, si $[\alpha, \gamma] > 0$, on a

$$\begin{aligned}(3.2.9)\quad & \| \chi_\gamma\mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_\xi \leq \| \chi_\gamma\mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_1 = \| \chi_\gamma\mathrm{Q}_\zeta\mathrm{C}\boldsymbol{\Gamma} | \mathrm{C} |^{-1/2}\chi_\alpha\boldsymbol{\Gamma}^*\mathrm{C}^* | \mathrm{C} |^{-3/2}\mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_1 \\ & \leq b(\zeta^2e^{-4\eta\mathrm{M}[\alpha,\gamma]} + e^{-4\eta l^{-2}[\alpha,\gamma]^2}) \\ & \quad \cdot \| \chi_\gamma . (-\Delta + l^{-2})^{-1} \|_2 \| (-\Delta + l^{-2})^{-1}\chi_\alpha\boldsymbol{\Gamma}^*\mathrm{C}^* | \mathrm{C} |^{-3/2}\mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_2 \\ & \leq b'\zeta^2(e^{-4\eta\mathrm{M}[\alpha,\gamma]} + e^{-4\eta l^{-2}[\alpha,\gamma]^2}) . \| (-\Delta + l^{-2})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^*\mathrm{C}^* | \mathrm{C} |^{-3/2}\mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_2, \\ & \qquad [\alpha, \gamma] > 0,\ \zeta \geq 1,\end{aligned}$$

[la démonstration est identique à celle de [*12*], théorème 2.2, la fonction notée G dans cette démonstration étant ici convolée par la fonction $x \mapsto \dfrac{l^{-2}\zeta}{\pi} e^{-\zeta l^{-2}|x|^2}$], et de même,

$$\begin{aligned}(3.2.10)\quad & \| \chi_\gamma\mathbf{H}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_4 \leq \| \chi_\gamma\mathbf{H}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_1 \leq \| \chi_\gamma\mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_1 + \chi_\gamma\mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_1 \\ & \leq b''\zeta^2(e^{-4\eta\mathrm{M}[\alpha,\gamma]} + e^{-4\eta l^{-2}[\alpha,\gamma]^2}) . \| (-\Delta + l^{-2})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^*\mathrm{C}^* | \mathrm{C} |^{-3/2}\mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_2 . \\ & \qquad [\alpha, \gamma] > 0,\ \zeta \geq 1.\end{aligned}$$

En prenant une moyenne géométrique de (2.3.7) et (2.3.9) d'une part, de (2.3.8) et (2.3.10) d'autre part, on obtient (si $[\alpha, \gamma] > 0$, $\zeta \geq 1$),

$$\begin{aligned}(3.2.11)\quad & \| \chi_{\gamma_1}\mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta}\chi_{\gamma_2} \|_\xi \\ & \leq c\zeta^{\frac{\sigma}{2}}(e^{-\eta\sigma\mathrm{M}[\alpha,\gamma_1]} + e^{-\eta\sigma l^{-2}[\alpha,\gamma_1]^2})e^{-\eta\mathrm{M}[\alpha,\gamma_2]} \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_\xi^{1-\frac{\sigma}{4}} \\ & \quad \| (-\Delta + l^{-2})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^*\mathrm{C}^* | \mathrm{C} |^{-3/2}\mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_2^{\frac{\sigma}{4}},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(3.2.12)\quad & \| \chi_{\gamma_1}\mathbf{H}_{\zeta;\alpha,\beta}\chi_{\gamma_2} \|_4 \\ & \leq c\zeta^{\frac{\sigma}{2}}(e^{-\eta\sigma\mathrm{M}[\alpha,\gamma_1]} + e^{-\eta\sigma l^{-2}[\alpha,\gamma_1]^2})e^{-\eta\mathrm{M}[\alpha,\gamma_2]} \| \mathbf{H}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_4^{1-\frac{\sigma}{4}} \\ & \quad \| (-\Delta + l^{-2})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^*\mathrm{C}^* | \mathrm{C} |^{-3/2}\mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_2^{\frac{\sigma}{4}}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$(3.2.13)\quad \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_\xi \leq \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_1^{2-\xi} \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_{\xi'}^{\xi-1} \leq \| \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_1^{2-\xi} \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_{\xi'}^{\xi-1},$$

$$(3.2.14)\qquad \| \mathbf{H}_{\zeta;\alpha,\beta} \|_4 \leq \| (1 - Q_\zeta) | C |^{\frac{1-\sigma}{2}} \| \| | C |^{\frac{\sigma-1}{2}} \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_4 ,$$

et

$$(3.2.15)\qquad \| (1 - Q_\zeta) | C |^{\frac{1-\sigma}{2}} \| \leq \sup_{p\in E} (| p |^2 + M^2)^{-\frac{1-\sigma}{4}} (1 - e^{-\frac{l^2|p|^2}{\zeta}}) \leq \left(\frac{4l^2}{(1-\sigma)\zeta}\right)^{\frac{1-\sigma}{4}} .$$

Alors (avec les notations de [*10*], lemme 2.3), on a d'abord, si $h \in L^2(E)$,

$$(3.2.16)\qquad \| (- \Delta + l^{-2})^{-1} \Gamma^* C^* | C |^{-3/2} K(h) \|_2^2 = \frac{2}{(2\pi)^4} \int_{E^2} | \hat{h}(p - q) |^2 \frac{dp}{(| p |^2 + M^2)^{1/2}} \frac{dq}{(| q |^2 + l^{-2})^2} ,$$

puis, si $h \in L^4(E)$,

$$(3.2.17)\qquad \| | C |^{\frac{\sigma-1}{2}} K(h) \|_4^4 \leq \frac{2}{(2\pi)^8} \int_{E^4} \hat{h}(p_1 - p_2) \dots \hat{h}(p_4 - p_1)$$
$$\frac{dp_1}{(| p_1 |^2 + M^2)^{1/2}} \frac{dp_2}{(| p_2 |^2 + M^2)^{\sigma/2}} \frac{dp_3}{(| p_3 |^2 + M^2)^{1/2}} \frac{dp_4}{(| p_4 |^2 + M^2)^{\sigma/2}}$$

et, si h est nulle en dehors d'un compact $X \subset E$,

$$(3.2.18)\qquad \| Q_\zeta K(h) \|_1^2 \leq c(X)\zeta^{1+\sigma} \int_{E^2} | \hat{h}(p - q) |^2 \frac{dp}{(| p |^2 + M^2)^{1/2}} \frac{dq}{(| q |^2 + l^{-2})^{1/2+\sigma}} ,$$

[cette dernière inégalité est obtenue comme [*10*], (2.3.7), en remplaçant la décomposition [*10*], (2.3.17) par $Q_\zeta K(h) = A_\zeta^{(\sigma)} B_\zeta^{(\sigma)}(h)$, avec

$$A_\zeta^{(\sigma)} = Q_\zeta K(f) | C |^{-1/2} (- \Delta + l^{-2})^{1/4+\sigma/2}$$

et

$$B^{(\sigma)}(h) = (- \Delta + l^{-2})^{-(1/4+\sigma/2)} | C |^{1/2} M(h)] .$$

On achève la démonstration comme celle du lemme 1.4. □

Pour $\alpha \in \mathscr{R}$, $s \in S_0$, $\zeta \geq 1$, on pose

$$(3.2.19)\qquad \mathbf{L}_{\zeta;\alpha}(s) = \sum_{\beta,\gamma_1,\gamma_2 \in \mathscr{R}} H(s | \alpha ; \gamma_1, \beta, \gamma_2) \chi_{\gamma_1} \mathbf{L}_{\zeta;\alpha,\beta} \chi_{\gamma_2} ,$$

et,

$$(3.2.20)\qquad \mathbf{H}_{\zeta;\alpha}(s) = \sum_{\beta,\gamma_1,\gamma_2 \in \mathscr{R}} H(s | \alpha ; \gamma_1, \beta, \gamma_2) \chi_{\gamma_1} \mathbf{H}_{\zeta;\alpha,\beta} \chi_{\gamma_2} = \mathbf{K}_\alpha(s) - \mathbf{L}_{\zeta;\alpha}(s) .$$

3.3. Le calcul des dérivées successives des fonctions $\underline{\lambda} \mapsto \tilde{Y}_{\underline{\lambda},\Lambda,s}(A, B)$ [définies en (3.1.3)] repose sur l'application itérée de (3.3.1) ci-dessous

LEMME. — *Soient* $\lambda \mapsto L_j(\lambda) \in \mathscr{C}_1$ *et* $\lambda \mapsto H_j(\lambda) \in \mathscr{C}_3$, $j = 1, 2$, $(\lambda \in \mathbb{C})$, *des fonctions analytiques telles que* $L_1 + H_1 = L_2 + H_2 \equiv K$, *et soit* $X \in \mathscr{C}_1^u (u \in \mathbb{N})$, *on a (avec les notations de [10], A.2),*

$$(3.3.1)\quad \frac{d}{d\lambda}[\operatorname{Tr}\{\Lambda^u([I+K]^{-1})X\}\det_3(I+K)]$$
$$= [\operatorname{Tr}\{L'_1K - L'_2\}\operatorname{Tr}\{\Lambda^u([I+K]^{-1})X\}$$
$$+ \operatorname{Tr}\{\Lambda^u([I+K]^{-1})\mathscr{M}^{[H'_1K - H'_2]}X\}$$
$$+ \operatorname{Tr}\{\Lambda^{u+1}([I+K]^{-1})\mathscr{C}^{[H'_1K^2 - L'_1K + L'_2K + L'_2]}X\}]\det_3(I+K).$$

Démonstration. — Par simple changement de notation dans [10], (3.1.1) on a d'abord,

$$(3.3.2)\quad \frac{d}{d\lambda}[\operatorname{Tr}\{\Lambda^u([I+K]^{-1})X\}\det_3(I+K)]$$
$$= [\operatorname{Tr}\{L'_1K\}\operatorname{Tr}\{\Lambda^u([I+K]^{-1})X\}$$
$$+ \operatorname{Tr}\{\Lambda^u([I+K]^{-1})\mathscr{M}^{[H'_1K - L'_2 - H'_2]}X\}$$
$$+ \operatorname{Tr}\{\Lambda^{u+1}([I+K]^{-1})\mathscr{C}^{[H'_1K^2 - L'_1K]}X\}]\det_3(I+K),$$

puis,

$$(3.3.3)\quad -\operatorname{Tr}\{\Lambda^u([I+K]^{-1})\mathscr{M}^{[L'_2]}X\} = -\operatorname{Tr}\{(\mathscr{M}^{[L'_2]}X).\Lambda^u([I+K]^{-1})\}$$
$$= -\operatorname{Tr}\{\mathscr{M}^{[L'_2]}(X.\Lambda^u([I+K]^{-1}))\}$$
$$= \operatorname{Tr}\{\mathscr{C}^{[L'_2]}(X.\Lambda^u([I+K]^{-1}))\} - \operatorname{Tr}\{L'_2\}\operatorname{Tr}\{X.\Lambda^u([I+K]^{-1})\}$$
$$= \operatorname{Tr}\{(\mathscr{C}^{[L'_2(I+K)]}X).\Lambda^{u+1}([I+K]^{-1})\} - \operatorname{Tr}\{L'_2\}\operatorname{Tr}\{\Lambda^u([I+K]^{-1})X\}$$
$$= \operatorname{Tr}\{\Lambda^{u+1}([I+K]^{-1})\mathscr{C}^{[L'_2(I+K)]}X\} - \operatorname{Tr}\{L'_2\}\operatorname{Tr}\{\Lambda^u([I+K]^{-1})X\},$$

[la troisième égalité d'après [10], (A.3.3) et la quatrième d'après [10], (A.1.5)], on obtient (3.3.1) en substituant (3.3.3) dans (3.3.2). □

3.4. On a

LEMME. *Soit* $B \in \mathscr{C}_\Lambda^{(r)}$, $(r \in \mathbb{N})$, *un opérateur* $\mathscr{R}$*-localisé* ([46]), *et soit* $t > 0$, *il existe une constante* $c_t > 0$ *telle que, pour tous* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in S_0$, $\underline{\alpha} \in \underline{\Lambda}^{e_n}$, $(n \in \mathbb{N})$, $\Gamma \in \mathscr{C}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underline{\zeta}_k = \{\zeta_{k,j} > 0 ; j \in e_n\}$, $(k = 1, 2)$, *on ait*

$$(3.4.1)\quad |\partial^\Gamma \partial_\Lambda^{\underline{\alpha}}[\operatorname{Tr}\{\Lambda^r([I + \tilde{\mathbf{K}}_{\lambda \mathbf{1}_{\mathscr{R}},\Lambda}(s)]^{-1})B\}\det_3(I + \tilde{\mathbf{K}}_{\lambda\mathbf{1}_{\mathscr{R}},\Lambda}(s))]|$$
$$\leq e^{3r}e^{5|\Gamma|}[c_t(r+1)]^n \sup_{0 \leq k \leq n+|\Gamma|} \|\Lambda^{r+k}([I + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1})\det_3(I + \lambda\mathbf{K}_\Lambda(s))\|$$
$$\cdot \sum_{\Gamma_1 \subset \Gamma}\Bigg[\Bigg(\sum_{P \in \mathscr{P}(\Gamma\setminus\Gamma_1)}\ \sum_{\underline{\beta} \in \mathscr{R}^P}\ \prod_{\sigma \in \mathscr{R}}(N_{\underline{\beta}}(\sigma)!)^2 \prod_{C \in P} k_1(C, \beta_C)\Bigg)$$
$$\cdot \Bigg(\sum_{u \in \mathscr{I}_{e_9}(e_n)}\ \prod_{\sigma' \in \mathscr{R}} N_{\underline{\alpha}}(\sigma')^{(N_{\underline{\alpha}_{u_1}}(\sigma') + N_{\underline{\alpha}_{u_2}}(\sigma') + N_{\underline{\alpha}_{u_9}}(\sigma'))}$$
$$\cdot \sum_{\underline{C}' \in \mathscr{I}_{(e_n \setminus u_9)}(\Gamma_1)}\ \sum_{\underline{\gamma}, \underline{\delta} \in \mathscr{R}^{(e_n \setminus u_9)}} h_1^{(t)}(\underline{\alpha}, \underline{u}, \underline{C}', \underline{\gamma}, \underline{\delta}, \underline{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2 ; \lambda\mathbf{1}_{\mathscr{R}})\Bigg)\Bigg],$$

([46]) Définition 2.3, d'autre part $\tilde{\mathbf{K}}_{\lambda,\Lambda}(s)$, $(\underline{\lambda} \in \mathbb{C}^{\mathscr{R}})$ est défini en (3.1.1), $\mathbf{L}_{\zeta;\alpha}(s)$ et $\mathbf{H}_{\zeta;\alpha}(s)$ en (3.2.19), (3.2.20).

d'autre part, on a

$$(3.4.2)\quad \left|\partial^{\Gamma}\partial_{\underline{\Lambda}}^{\underline{\alpha}}\left[e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{\mathrm{reg}}^{\cdot}\widetilde{\mathbf{K}}_{\lambda \mathbf{1}_{\mathscr{R}},\Lambda}(s)^2}\right]\right| \leq c_t^n \left| e^{-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{Tr}_{\mathrm{reg}}^{\cdot}\mathbf{K}_{\Lambda}(s)^2} \right| \cdot \sum_{\Gamma_1 \subset \Gamma}\Bigg[\Bigg(\sum_{\mathrm{P}\in\mathscr{P}(\Gamma\setminus\Gamma_1)}\prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}} k_2(\mathrm{C})\Bigg) \cdot \Bigg(\sum_{u_1\subset e_n}\prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}(e_n\setminus u_1)}(\sigma)} \sum_{\mathrm{C}'\in\mathscr{J}_{u_1}(\Gamma_1)} h_2^{(t)}(\underline{\alpha}, u_1, \underline{\mathrm{C}}'; \lambda\mathbf{1}_{\mathscr{R}})\Bigg)\Bigg],$$

où on a utilisé les notations de 2.4, et où on a posé

$$\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_u}(\sigma) = |\{ j\in u\,;\, \alpha_j = \sigma \}|, \qquad (\underline{\alpha}\in\mathscr{R}^{e_n}, u \subset e_n, \sigma\in\mathscr{R}),$$

ainsi que

$$\mathscr{J}_v(\mathrm{A}) = \left\{ \underline{a} = (a_j)_{j\in v}\,;\, \bigcup_{j\in v} a_j = \mathrm{A},\, a_i \cap a_j = \varnothing \quad \text{si } i \neq j \right\},$$

$(|v| < \infty, |\mathrm{A}| < \infty)$, et

$$(3.4.3)\quad h_1^{(t)}(\underline{\alpha}, \underline{u}, \underline{\mathrm{C}}, \underline{\gamma}, \underline{\delta}, \underline{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2\,;\, \underline{\lambda})$$
$$= \prod_{j_1\in u_1}[\partial^{\mathrm{C}_{j_1}}(\chi_{\gamma_{j_1}}\mathbf{H}_{\zeta_{2,j_1};\alpha_{j_1}}(s)\chi_{\delta_{j_1}})]_{(t)} \cdot \prod_{j_2\in u_2}[\partial^{\mathrm{C}_{j_2}}(\chi_{\gamma_{j_2}}\mathbf{H}_{\zeta_{1,j_2};\alpha_{j_2}}(s)\widetilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)\chi_{\delta_{j_2}})]_{(t)}$$
$$\cdot \prod_{j_3\in u_3}[\partial^{\mathrm{C}_{j_3}}(\chi_{\gamma_{j_3}}\mathbf{H}_{\zeta_{1,j_3};\alpha_{j_3}}(s)\widetilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2\chi_{\delta_{j_3}})]_{1,(t)}$$
$$\cdot \prod_{j_4\in u_4\cup u_7}[\partial^{\mathrm{C}_{j_4}}(\chi_{\gamma_{j_4}}\mathbf{L}_{\zeta_{1,j_4};\alpha_{j_4}}(s)\widetilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)\chi_{\delta_{j_4}})]_{1,(t)}$$
$$\cdot \prod_{j_5\in u_5}[\partial^{\mathrm{C}_{j_5}}(\chi_{\gamma_{j_5}}\mathbf{L}_{\zeta_{2,j_5};\alpha_{j_5}}(s)\widetilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)\chi_{\delta_{j_5}})]_{1,(t)}$$
$$\cdot \prod_{j_6\in u_6\cup u_8}[\partial^{\mathrm{C}_{j_6}}(\chi_{\gamma_{j_6}}\mathbf{L}_{\zeta_{2,j_6};\alpha_{j_6}}(s)\chi_{\delta_{j_6}})]_{1,(t)}$$

avec, pour $t > 0$, $k = 0, 1, 2$ et $p = 1, +\infty$,

$$(3.4.4)\quad [\partial^{\mathrm{C}}(\chi_\gamma\mathbf{H}_{\zeta;\alpha}(s)\widetilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^k\chi_\delta)]_{p,(t)}$$
$$= e^{t(|\alpha-\gamma|+|\alpha-\delta|)} \max\Big[\, \|\partial^{\mathrm{C}}(\chi_\gamma\mathbf{H}_{\zeta;\alpha}(s)\widetilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^k\chi_\delta\|_p,$$
$$\sup_{\beta\in\underline{\Lambda}}\{ e^{t|\alpha-\beta|}\,\|\partial^{\mathrm{C}}\partial^{(\beta)}(\chi_\gamma\mathbf{H}_{\zeta;\alpha}\widetilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^k\chi_\delta)\|_p \},$$
$$\sup_{\beta_1,\beta_2\in\underline{\Lambda}}\{ e^{t(|\alpha-\beta_1|+|\beta_1-\beta_2|)}\,\|\partial^{\mathrm{C}}\partial^{(\beta_1)}\partial^{(\beta_2)}(\chi_\gamma\mathbf{H}_{\zeta;\alpha}(s)\widetilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^k\chi_\delta)\|_p \}\,\Big],$$

et l'expression analogue où **L** est substitué à **H**, et enfin,

$$(3.4.5)\qquad h_2^{(t)}(\underline{\alpha}, u_1, \underline{C}\,; \underline{\lambda}) = \prod_{j\in u_1} [\partial^{C_j}\partial^{(\alpha_j)}\,\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\,\tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2]_{(t)},$$

avec

$$(3.4.6)\quad [\partial^{C}\partial^{(\alpha)}\,\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\,\tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2]_{(t)}$$
$$= \max\,[\,|\,\partial^{C}\partial^{(\alpha)}\,\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\,\tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2\,|\,, \sup_{\beta\in\underline{\Lambda}}\{\,e^{t|\alpha-\beta|}\,|\,\partial^{C}\partial^{(\alpha)}\partial^{(\beta)}\,\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\,\tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)^2\,|\,\}\,]\,.$$

Démonstration. — D'après (3.3.1) et l'égalité

$$\partial^{(\alpha)}\tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s) = \mathbf{K}_\alpha(s) = \mathbf{L}_{\zeta;\alpha}(s) + \mathbf{H}_{\zeta;\alpha}(s)\,, \qquad (\alpha\in\Delta,\ \zeta\geq 1)\,,$$

on a pour tout $\underline{\alpha}\in\underline{\Lambda}^{e_n}$,

$$(3.4.7)\quad \partial^{\underline{\alpha}}_{\underline{\lambda}}[\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^r([\mathrm{I}+\tilde{\mathbf{K}}_{\lambda\mathbf{1}_{\mathscr{R}},\Lambda}(s)]^{-1})\mathrm{B}\,\}\,\det_3(\mathrm{I}+\tilde{\mathbf{K}}_{\lambda\mathbf{1}_{\mathscr{R}},\Lambda}(s))]$$
$$= \sum_{\underline{u}\in\mathscr{I}_{e_9}(e_n)}\ \sum_{\underline{\gamma},\underline{\delta}\in\mathscr{R}^{(e_n\setminus u_9)}} \mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^{r+\sum_{j=3}^{6}|u_j|}([\mathrm{I}+\lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1})\mathrm{X}^{\underline{u}}_{\lambda,s}(\underline{\gamma},\underline{\delta})\,\}\,.\,\det_3(\mathrm{I}+\lambda\mathbf{K}_\Lambda(s))\,,$$

où on a posé $\mathrm{X}^{\underline{u}}_{\lambda,s}(\underline{\gamma},\underline{\delta}) = \tilde{\mathrm{X}}^{\underline{u}}_{\lambda\mathbf{1}_{\mathscr{R}},s}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$, où, pour tout $\underline{\lambda}\in\mathbb{C}^{\mathscr{R}}$,

$$(3.4.8)\qquad \tilde{\mathrm{X}}^{\underline{u}}_{\underline{\lambda},s}(\underline{\gamma},\underline{\delta}) = \tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_n(\underline{\gamma},\underline{\delta})\ldots\tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_j(\underline{\gamma},\underline{\delta})\ldots\tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_1(\underline{\gamma},\underline{\delta})\,.\,\mathrm{B}\,,$$

avec

$$(3.4.9)\quad \tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_j(\underline{\gamma},\underline{\delta}) = \begin{cases} -\,\mathscr{M}^{[\chi_{\gamma_j}\mathrm{H}_2(j)\chi_{\delta_j}]} \\ \mathscr{M}^{[\chi_{\gamma_j}\mathrm{H}_1(j)\tilde{\mathrm{K}}\chi_{\delta_j}]} \\ \mathscr{C}^{[\chi_{\gamma_j}\mathrm{H}_1(j)\tilde{\mathrm{K}}^2\chi_{\delta_j}]} \\ -\,\mathscr{C}^{[\chi_{\gamma_j}\mathrm{L}_1(j)\tilde{\mathrm{K}}\chi_{\delta_j}]} \\ \mathscr{C}^{[\chi_{\gamma_j}\mathrm{L}_2(j)\tilde{\mathrm{K}}\chi_{\delta_j}]} \\ \mathscr{C}^{[\chi_{\gamma_j}\mathrm{L}_2(j)\chi_{\delta_j}]} \\ \mathrm{Tr}\,\{\,\chi_{\gamma_j}\mathrm{L}_1(j)\tilde{\mathrm{K}}\chi_{\delta_j}\,\}\,\mathrm{I} \\ -\,\mathrm{Tr}\,\{\,\chi_{\gamma_j}\mathrm{L}_2(j)\chi_{\delta_j}\,\}\,\mathrm{I} \\ \partial^{(\alpha_j)}[\,.\,] \end{cases}, \quad \text{si } j\in\begin{cases} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\\ u_7\ \text{(47)}\\ u_8\\ u_9\end{cases}$$

[on a abrégé les notations en posant $\mathrm{L}_k(j) = \mathbf{L}_{\zeta_{k,j};\alpha_j}$, $\mathrm{H}_k(j) = \mathbf{H}_{\zeta_{k,j};\alpha_j}$, $k = 1, 2$, et $\tilde{\mathrm{K}} = \mathbf{K}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)$].

Chaque opérateur $\mathrm{X}^{\underline{u}}_{\lambda,s}(\underline{\gamma},\underline{\delta})\in\mathscr{C}_1^{\,r+\sum_{j=3}^{6}|u_j|}$ est $\mathscr{R}$-localisé (définition 2.3), donc, d'après (2.4.1), pour tout $\Gamma\in\mathscr{C}_0$, on a

$$(3.4.10)\quad |\,\partial^{\Gamma}[\mathrm{Tr}\,\{\,\Lambda^{r+\sum_{j=3}^{6}|u_j|}([\mathrm{I}+\lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1})\mathrm{X}^{\underline{u}}_{\lambda,s}(\underline{\gamma},\underline{\delta})\,\}\,\det_3(1+\lambda\mathbf{K}_\Lambda(s))]\,|$$
$$\leq e^{2(r+n)}e^{5|\Gamma|}\sup_{0\leq k\leq n+|\Gamma|}\|\,\Lambda^{r+k}([\mathrm{I}+\lambda\mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1})\,.\,\det_3(1+\lambda\mathbf{K}_\Lambda(s))\,\|$$
$$.\sum_{\Gamma_1\subset\Gamma}\Big(\sum_{\mathrm{P}\in\mathscr{P}(\Gamma\setminus\Gamma_1)}\ \sum_{\underline{\beta}\in\mathscr{R}^{\mathrm{P}}}\ \prod_{\sigma\in\mathscr{R}}(\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\sigma)\,!)^2\prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}}k_1(\mathrm{C},\beta_{\mathrm{C}})\Big)\,.\,\|\partial^{\Gamma_1}\mathrm{X}^{\underline{u}}_{\lambda,s}(\underline{\gamma},\underline{\delta})\,\|_1\,,$$

---

(47) Tr { . } I désigne l'opérateur de multiplication par le nombre Tr { . }.

de plus, on a [48]

$$(3.4.11)\quad \partial^{\Gamma}\tilde{X}^{\underline{u}}_{\underline{\lambda},s}(\underline{\gamma},\underline{\delta}) = \sum_{\underline{C}\in\mathscr{I}_{(e_n\setminus u_9)}(\Gamma)} (\partial^{C_n}\tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_{n}(\underline{\gamma},\underline{\delta}))\dots(\partial^{C_j}\tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_{j}(\underline{\gamma},\underline{\delta}))\dots(\partial^{C_1}\tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_{1}(\underline{\gamma},\underline{\delta})).\mathbf{B}\,.$$

On exprime d'abord l'action des opérateurs $\partial^{(\alpha_j)}[\,.\,]$, $j\in u_9$, en écrivant

$$(3.4.12)\qquad \partial^{\Gamma}\tilde{X}^{\underline{u}}_{\underline{\lambda},s}(\underline{\gamma},\underline{\delta}) = \sum_{\underline{C}\in\mathscr{I}_{(e_n\setminus u_9)}(\Gamma)}\ \sum_{\pi\in\mathfrak{J}(u_9,e_n)} Y^{\underline{u},\underline{C}}_{\pi}(\underline{\gamma},\underline{\delta})\,,$$

où $\mathfrak{J}(v,w)$ est l'ensemble des injections de v dans w, et où $Y^{\underline{u},\underline{C}}_{\pi}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$, (non nul seulement si $\pi(j)<j$, $\pi(j)\notin u_1\cup u_6$, $\forall j\in u_9$ et $\pi(\pi(j))\in u_3$ si $\pi(j)\in u_9$), est obtenu en faisant opérer $\partial^{(\alpha_j)}$, $j\in u_9$ sur $\partial^{C_{\pi(j)}}\tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_{\pi(j)}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$, si $\pi(j)\notin u_9$ et sur $\partial^{(\alpha_{\pi(j)})}\partial^{C_{\pi(\pi(j))}}\tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_{\pi(\pi(j))}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$, si $\pi(j)\in u_9$.

Dans chaque terme $Y^{\underline{u},\underline{C}}_{\pi}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$ ne figurent plus que les opérateurs de la forme $\mathscr{M}^{[\cdot]}$ ou $\mathscr{C}^{[\cdot]}$, ainsi que les opérateurs de multiplication par les nombres $\mathrm{Tr}\{\,.\,\}$, (que l'on met en facteur), dans lesquels $|u_9|$ opérateurs $\tilde{\mathbf{K}}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)$ ont été remplacés par les opérateurs $\mathbf{K}_{\alpha_j}(s)$, $j\in u_9$.

En utilisant la relation de commutation [*10*] (A.2.4), on exprime chaque terme $Y^{\underline{u},\underline{C}}_{\pi}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$ comme une somme de termes où tous les opérateurs $\mathscr{M}^{[\cdot]}$ sont rangés à droite, soit

$$(3.4.13)\qquad Y^{\underline{u},\underline{C}}_{\pi}(\underline{\gamma},\underline{\delta}) = \sum_{\rho\in\mathfrak{J}(u_1\cup u_2,e_n)} Y^{\underline{u},\underline{C}}_{\pi,\rho}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$$

où $Y^{\underline{u},\underline{C}}_{\pi,\rho}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$ (non nul seulement si $\rho(j)\le j$, $\rho(j)\notin u_7\cup u_8\cup u_9$, s'il existe $k\ge 1$ tel que $\rho^k(j)\in\bigcup_{1=3}^{6}u_1$ — ρ^k est le $k^{\text{ème}}$ itéré de ρ — et si $\gamma_{\rho(j)}=\delta_j$, $\forall j$ tel que $\rho(j)\neq j$), est obtenu en retenant pour chaque $j\in u_1\cup u_2$ n'ayant pas d'antécédent par ρ le commutateur multiple [49]

$$[\partial^{C_j}\tilde{\mathscr{V}}^{(\pi),\underline{u}}_{j}(\underline{\gamma},\underline{\delta}),[\partial^{C_{\rho(j)}}\tilde{\mathscr{V}}^{(\pi),\underline{u}}_{\rho(j)}(\underline{\gamma},\underline{\delta}),[\dots$$
$$\dots,[\partial^{C_{\rho^{k-1}(j)}}\tilde{\mathscr{V}}^{(\pi),\underline{u}}_{\rho^{k-1}(j)}(\underline{\gamma},\underline{\delta}),\partial^{C_{\rho^k(j)}}\tilde{\mathscr{V}}^{(\pi),\underline{u}}_{\rho^k(j)}(\underline{\gamma},\underline{\delta})]\dots]]]$$

(et le seul terme $\partial^{C_j}\tilde{\mathscr{V}}^{(\pi),\underline{u}}_{j}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$ si $\rho(j)=j$).

Alors, d'après [*10*] (A.3.1), (A.3.2) et (3.4.3), (3.4.4) on a, pour tout $t>0$,

$$(3.4.14)\quad \|Y^{\underline{u},\underline{C}}_{\pi,\rho}(\underline{\gamma},\underline{\delta})\| \le \binom{r+\sum_{h=3}^{6}|u_h|}{r}(r+1)^{|u_1|+|u_2|}\prod_{k\in u_1\cup u_2}e^{-t|\alpha_k-\alpha_{\rho(k)}|}\prod_{k'\in u_9}e^{-t|\alpha_{k'}-\alpha_{\pi(k')}|}\,.\,h_1^{(t)}(\underline{\alpha},\underline{u},\underline{C},\underline{\gamma},\underline{\delta},\underline{\zeta}_1,\underline{\zeta}_2;\underline{\lambda})\,.$$

---

[48] Avec par convention $C_j=\emptyset$ pour $j\in u_9$.

[49] On désigne ici par $\tilde{\mathscr{V}}^{(\pi),\underline{u}}_{j}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$ l'opérateur obtenu à partir de $\tilde{\mathscr{V}}^{\underline{u}}_{j}(\underline{\gamma},\underline{\delta})$ par application des dérivations $\partial^{(\alpha_k)}$, $k\in u_9$, conformément au programme spécifié par $\pi\in\mathfrak{J}(u_9,e_n)$.

Or on a

$$(3.4.15)\quad \sum_{\substack{\pi\in\mathfrak{Z}(u_9,e_n)\\ \rho\in\mathfrak{Z}(u_1\cup u_2,e_n)}} \prod_{k\in u_1\cup u_2} e^{-t|\alpha_k-\alpha_{\rho(k)}|}\prod_{k'\in u_9} e^{-t|\alpha_{k'}-\alpha_{\pi(k')}|} \leq \prod_{j\in u_1\cup u_2\cup u_9}\left(\sum_{k\in e_n} e^{-t|\alpha_j-\alpha_k|}\right),$$

et si $v \subset e_n$, on a $\left(\text{d'après l'inégalité } x \leq \frac{1}{a}e^{ax}, x\in \mathbf{R}, a>0\right)$,

$$(3.4.16)\quad \prod_{j\in v}\left(\sum_{k\in e_n} e^{-t|\alpha_j-\alpha_k|}\right) \leq \prod_{j\in v} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\alpha_j)\,.\,e^{\frac{1}{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\alpha_j)}\sum_{k\in e_n} e^{-t|\alpha_j-\alpha_k|}}$$

$$= \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)} \prod_{k\in e_n} e^{\sum_{j\in v}\frac{1}{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\alpha_j)}e^{-t|\alpha_j-\alpha_k|}}$$

$$= \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)} \prod_{k\in e_n} e^{\sum_{\beta\in\underline{\alpha}(v)} e^{-t|\beta-\alpha_k|}}$$

$$\leq \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)} \prod_{k\in e_n} e^{\sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-t|\beta-\alpha_k|}} = b_t^n \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)},$$

$\left[\text{puisque } \sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-t|\beta-\gamma|} \text{ est une constante indépendante de } \gamma\in\mathscr{R}\right]$, donc (3.4.1) résulte de (3.4.7), (3.4.10), (3.4.11), (3.4.12), (3.4.13), (3.4.14), (3.4.15) et (3.4.16).

De même (3.4.2) résulte facilement de (2.4.2) et (3.4.16). □

3.5. Avec les notations des lemmes 1.4, 1.6, 3.2, 3.4, et de la proposition B.3, on a

LEMME. — *Étant donné* $\sigma\in\,]0,1]$ *et* $\tau \geq u_0 l^{-1}$, *on suppose que* $\mu = \min\{m, \mathrm{M}\}$ *vérifie* $\tau^{12}\mu^{-\theta} \leq 1$ *et* $\eta\sigma\mu - 4\tau \geq l^{-1}$, *il existe des constantes* $b_\sigma > 0$, $y > 0$ *telles que pour tous* $\underline{\alpha}\in\Lambda^{e_n}$, $u\in\mathscr{J}_{e_9}(e_n)$, $\Gamma\in\mathscr{C}_0$, $\mathrm{C}\in\mathscr{J}_{(e_n\setminus u_9)}(\Gamma)$,

$\underline{\zeta}_k = \{\zeta_{k,j} > 0\,; j\in e_n\}$, $(k = 1,2)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $(|\lambda|\leq 1)$, $0 < t < 1/4\,l$, $\xi\in[1,2[$, *on ait*

$$(3.5.1)\quad \sum_{\underline{\gamma},\underline{\delta}\in\mathcal{R}^{(e_n\setminus u_9)}} h_1^{(t)}(\underline{\alpha}, \underline{u}, \underline{C}, \underline{\gamma}, \underline{\delta}\,; \underline{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2\,; \lambda\mathbf{1}_{\mathcal{R}})$$

$$\leq \prod_{i\in e_n\setminus u_9} b_\sigma^{|C_i|}L(C_i)^9(l\tau)^{-\frac{|C_i|}{2}} l^{-yD[\alpha_i,C_i]}$$

$$.\ b_\sigma^n \prod_{j_1\in u_1} \zeta_{2,j_1}^{-\frac{1}{4}+\sigma} \prod_{j_2\in u_2\cup u_3} \zeta_{1,j_2}^{-\frac{1}{4}+\sigma} \prod_{j_3\in u_4\cup u_7} \zeta_{1,j_3}^{1-\frac{\xi}{2}+\sigma} \prod_{j_4\in u_5} \zeta_{2,j_4}^{1-\frac{\xi}{2}+\sigma} \prod_{j_5\in u_6\cup u_8} \zeta_{2,j_5}^{\frac{1}{2}+\sigma}$$

$$.\prod_{k_1\in u_1\cup u_6\cup u_8} \left(\sum_{\beta_{k_1}\in\mathcal{R}} e^{-y|\alpha_{k_1}-\beta_{k_1}|} F_{\beta_{k_1}}^{(\sigma,1)}\right)$$

$$.\prod_{k_2\in u_2}\left(\sum_{\beta_{k_2}\in\mathcal{R}} e^{-y|\alpha_{k_2}-\beta_{k_2}|}(F_{\beta_{k_1}} + F_{\beta_{k_1}}^{(\sigma,1)})^2\right)$$

$$.\prod_{k_3\in u_3}\left(\sum_{\beta_{k_3}\in\mathcal{R}} e^{-y|\alpha_{k_3}-\beta_{k_3}|}(F_{\beta_{k_3}} + F_{\beta_{k_3}}^{(\sigma,1)})^3\right)$$

$$.\prod_{k_4\in u_4\cup u_5\cup u_7}\left(\sum_{\beta_{k_4}\in\mathcal{R}} e^{-y|\alpha_{k_4}-\beta_{k_4}|}(F_{\beta_{k_4}} + F_{\beta_{k_4}}^{(\sigma,\xi)})^2\right)$$

et, pour $u_1 \in e_n$, $\underline{C} \in \mathcal{J}_{u_1}(\Gamma)$,

$$(3.5.2)\quad h_2^{(t)}(\underline{\alpha}, u_1, \underline{C}\,; \lambda\mathbf{1}_{\mathcal{R}})$$

$$\leq \prod_{i\in u_1} b^{|C_i|}L(C_i)^6(l\tau)^{-\frac{|C_i|}{2}} e^{-yD[\alpha_i,C_i]}\ .\ b^n \prod_{j\in u_1}\left(\sum_{\beta_j\in\mathcal{R}} e^{-y|\alpha_i-\beta_j|}(F_{\beta_j} + \Omega)^2\right).$$

Démonstration. — On procède par une variante de la démonstration du lemme 2.5. Par exemple, en partant de l'inégalité

$$(3.5.3)\quad \sum_{\gamma,\delta\in\mathcal{R}} [\partial^C(\chi_\gamma L_{\zeta;\alpha}\tilde{K}_{\underline{\lambda},\Lambda}(s)\chi_\delta)]_{1,(t)}$$

$$\leq \sum_{\substack{C_1\cup C_2=C\\ C_1\cap C_2=\emptyset}} \sum_{\substack{\alpha'\in\underline{\Lambda}\\ \beta,\beta'\in\mathcal{R}\\ \gamma,\gamma',\delta\in\mathcal{R}}} |\,\partial^{C_1}H(s\,|\,\alpha\,; \gamma, \beta, \gamma')\,|\,|\,\partial^{C_2}H(s\,|\,\alpha'\,; \gamma', \beta', \delta)\,|$$

$$.\ e^{t(|\alpha-\gamma|+|\alpha-\delta|+|\alpha-\alpha'|)}\,\|\,\chi_\gamma L_{\zeta;\alpha,\beta}\chi_{\gamma'}\,\|_\xi\,\|\,\chi_{\gamma'}K_{\alpha',\beta'}\chi_\delta\,\|_{\xi'},$$

on obtient, d'après les lemmes 1.4, 3.2, et la proposition B.3,

$$(3.5.4)\quad \sum_{\gamma,\delta\in\mathscr{R}} [\partial^{C}(\chi_{\gamma}\mathbf{L}_{\zeta:\alpha}\tilde{\mathbf{K}}_{\lambda,\Lambda}(s)\chi_{\delta}]_{1,(t)}$$
$$\leq b_{\sigma}^{|C|+1}\mathrm{L}(C)^{6}(l\tau)^{-\frac{|C|}{2}}e^{-y\mathrm{D}[\alpha,C]}.\zeta^{1-\frac{\xi}{2}+\sigma}\sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-y|\alpha-\beta|}(\mathrm{F}_{\beta}+\mathrm{F}_{\beta}^{(\sigma,\xi)})^{2}\ \text{(50)}. \quad \square$$

3.6. On a

Proposition. — *Il existe des constantes* $K_1 > 0$, $0 < a_1 \leq 1$, $b_1 \geq 1$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, $K_2^{(\varepsilon)} > 0$, $c'_\varepsilon \geq 1$, *telles que, si* $\tau \geq u_0 l^{-1}$ *et si* $\mu = \min\{m, M\}$ *vérifie* $\tau^{12}\mu^{-\theta} \leq$ *et* $\frac{1}{8}\eta\varepsilon\mu - 4\tau \geq l^{-1}$ (51), *on ait pour tous* $\underline{\alpha}\in\mathscr{R}^{e_n}$, $(n\in\mathbf{N})$, $\Gamma\in\mathscr{C}_0$, $\Lambda\in\mathscr{X}_0$, $s\in S_0$ *et* $\lambda\in\overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_1\right)}$,

$$(3.6.1)\quad |\partial^{\Gamma}Z_{\lambda,\Lambda,s}^{(r,t):\underline{\alpha}}(u,v,f)|$$
$$\leq b_1^{(r+t)}(t\,!)^{1/2}\prod_{j\in I_\Lambda^{(f)}}\|u_j\|_{\mathscr{H}^{-1/2}}\prod_{j'\in I_\Lambda^{(f)}}\|v_{j'}\|_{\mathscr{H}^{-1/2}}\prod_{k\in I_\Lambda^{(b)}}\|f_k\|_{\mathscr{H}^{-1}}$$
$$.\ [c'_\varepsilon(r+1)]^{n}\prod_{\sigma\in\mathscr{R}}(\mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)\,!)^{\frac{7}{6}+\varepsilon}e^{K_1|\Lambda|+K_2^{(\varepsilon)}|\Gamma|}(l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}},$$

(avec $\mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma) = |\{j\in e_n;\alpha_j=\sigma\}|$, $\underline{\alpha}\in\mathscr{R}^{e_n}$, $\sigma\in\mathscr{R}$*).*

Démonstration. — On déduit du lemme 3.4 et des inégalités (2.5.1), (2.5.2), (3.5.1), (3.5.2), (C.6.2) une majoration de $\partial^{\Gamma}Y_{\lambda,\Lambda,s}^{\underline{\alpha}}(A, B)$, (défini en (3.4.1)), uniforme en $s\in S_0$, donc, dès que les fonctions majorantes sont ν-intégrables, on a

$$(3.6.2)\quad \partial^{\Gamma}E_\nu[Y_{\lambda,\Lambda,s}^{\underline{\alpha}}(A,B)]$$
$$= E_\nu[\partial^{\Gamma}\partial_{\Lambda}^{\underline{\alpha}}\tilde{Y}_{\lambda 1_{\mathscr{R}},\Lambda,s}(A,B)], \qquad (\Gamma\in\mathscr{C}_0, \underline{\alpha}\in\mathscr{R}^{e_n}, n\in\mathbf{N}).$$

D'abord, pour $\alpha\in\mathscr{R}^{e_n}$, $v\subset e_n$ et $\Gamma\in\mathscr{C}_0$, on a

$$(3.6.3)\quad \sum_{\underline{C}\in\mathscr{F}_v(\Gamma)}\prod_{i\in v} b^{|C_i|}\mathrm{L}(C_i)^{k}(l\tau)^{-\frac{|C_i|}{2}}e^{-y\mathrm{D}[\alpha_i,C_i]}$$
$$= b^{|\Gamma|}(l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}}\sum_{\substack{P\in\mathscr{P}(\Gamma)\\ 1\leq|P|\leq|v|}}\ \sum_{\Psi\in\mathfrak{I}(P,v)}\ \prod_{C\in P}\mathrm{L}(C)^{k}e^{-y\mathrm{D}[\alpha_{\Psi(C)},C]},$$

(50) Dans ce cas, la fonction F_β qui apparaît au second membre provient de l'application de (1.4.2) avec $\delta = \xi'$, elle dépend donc implicitement de ξ.

(51) Les notations sont celles de 1.4, 1.6, 3.2 et B.3; d'autre part $Z_{\lambda,\Lambda,s}^{(r,t):\underline{\alpha}}(u,v,f)$ est défini en (3.1.6).

[où $\mathfrak{J}(\mathrm{P}, v)$ est l'ensemble des injections de P dans v], or, si $|\mathrm{P}| \leq |v|$,

$$(3.6.4)\quad \sum_{\Psi\in\mathfrak{J}(\mathrm{P},v)} \prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}} e^{-y\mathrm{D}[\alpha_{\Psi(\mathrm{C})},\mathrm{C}]}$$

$$= \sum_{\substack{\underline{\beta}\in\mathscr{R}^{\mathrm{P}} \\ \mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\sigma)\leq \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma),(\sigma\in\mathscr{R})}} \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \frac{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)!}{(\mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma) - \mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\sigma))!} \prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}} e^{-y\mathrm{D}[\beta_{\mathrm{C}},\mathrm{C}]}$$

$$\leq 2^n \sum_{\underline{\beta}\in\mathscr{R}^{\mathrm{P}}} \prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}} e^{-y\mathrm{D}[\beta_{\mathrm{C}},\mathrm{C}]} \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\sigma)! \leq 2^n \mathrm{A}_{y,1}^{|\Gamma|},$$

d'après (2.6.1); donc, d'après (3.6.3) et (B.3.2),

$$(3.6.5)\quad \sum_{\underline{\mathrm{C}}\in\mathscr{I}_v(\Gamma)} \prod_{i\in v} b^{|\mathrm{C}_i|}\mathrm{L}(\mathrm{C}_i)^k (l\tau)^{-\frac{|\mathrm{C}_i|}{2}} e^{-y\mathrm{D}[\alpha_i,\mathrm{C}_i]} \leq 2^n (b\,.\,\mathrm{A}_{y,1}\,.\,e^{k\mathrm{K}})^{|\Gamma|} (l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}}.$$

Ensuite, on suppose donnée une famille de fonctions

$$\mathrm{J}_\beta \in \bigcap_{1\leq p<\infty} \mathrm{L}^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\beta^+, v), \qquad (\beta\in\mathscr{R}),$$

vérifiant $\| \mathrm{J}_\beta \|_p \leq ap$, $\forall \beta \in \mathscr{R}$, $\forall p \in [1, +\infty[$ (de sorte que $e^{t\mathrm{J}_\beta} \in \mathrm{L}^1(\mathscr{S}', v)$ si $t < (ae)^{-1}$), alors, pour $\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_n}$, $v \subset e_n$, on a $\left(\text{d'après l'inégalité } x \leq \frac{1}{t} e^{tx},\ x \in \mathbf{R},\ t > 0\right)$,

$$(3.6.6)\quad \prod_{i\in v}\Big(\sum_{\beta_i\in\mathscr{R}} e^{-y|\alpha_i-\beta_i|}\mathrm{J}_{\beta_i}\Big) \leq \prod_{i\in v} \frac{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\alpha_i)}{c}\, e^{\frac{c}{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\alpha_i)}\sum_{\beta_i\in\mathscr{R}} e^{-y|\alpha_i-\beta_i|}\mathrm{J}_{\beta_i}}$$

$$= c^{-|v|} \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)} \prod_{\beta\in\mathscr{R}} e^{\sum_{i\in v}\frac{c}{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\alpha_i)} e^{-y|\alpha_i-\beta|}\mathrm{J}_\beta} \leq c^{-n} \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)}\,.\, e^{c\sum_{\alpha\in\underline{\alpha}(v)}\sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-y|\alpha-\beta|}\mathrm{J}_\beta},$$

donc, si $q \in 1, +\infty[$, en choisissant $c = c_q > 0$ tel que

$$4qc_q \sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-y|\alpha-\beta|} < (ae)^{-1},$$

on a, d'après (C.6.7), (C.6.9), (avec $\underline{\alpha}(v)$ mis pour $\underline{\Lambda}$),

$$(3.6.7)\quad \Big\| \prod_{i\in v}\Big(\sum_{\beta_i\in\mathscr{R}} e^{-y|\alpha_i-\beta_i|}\mathrm{J}_{\beta_i}\Big)\Big\|_q \leq c'(q)^n \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)},$$

de plus si $G_\beta \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\beta^+, \nu)$, $(\beta \in \mathscr{R})$, vérifie

$$\| G_\beta \|_p \leq a\sqrt{p}, \qquad (\beta \in \mathscr{R},\ p \in [1, +\infty[),$$

on a d'une part

$$(3.6.8) \qquad \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-y|\alpha-\beta|} G_\beta \leq b \Big(\sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-y|\alpha-\beta|} G_\beta^2 \Big)^{1/2},$$

$\left(\text{avec } b = \Big(\sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-y|\alpha-\beta|} \Big)^{1/2} \right)$, d'après l'inégalité de Schwarz, et d'autre part,

$$(3.6.9) \qquad \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-y|\alpha-\beta|} G_\beta^3 \leq \Big(\sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-\frac{2}{3}|\alpha-\beta|} G_\beta^2 \Big)^{3/2},$$

(d'après l'inégalité $\| \,.\, \|_{l^3} \leq \| \,.\, \|_{l^2}$), donc, d'après (3.6.7) où l'on pose $J_\beta = G_\beta^2$,

$$(3.6.10) \qquad \Big\| \prod_{i \in v} \Big(\sum_{\beta_i \in \mathscr{R}} e^{-y|\alpha_i-\beta_i|} G_{\beta_i} \Big) \Big\|_q \leq c''(q)^n \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} N_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\frac{1}{2} N_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)},$$

et

$$(3.6.11) \qquad \Big\| \prod_{i \in v} \Big(\sum_{\beta_i \in \mathscr{R}} e^{-y|\alpha_i-\beta_i|} G_{\beta_i}^3 \Big) \Big\|_q \leq c'''(q)^n \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} N_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\frac{3}{2} N_{\underline{\alpha}_v}(\sigma)}.$$

Donc, d'après (3.5.1), (3.6.5), (3.6.7), (3.6.10), (3.6.11), et l'inégalité de Hölder, on a, pour tout $q \in [1, +\infty[$,

$$(3.6.12) \qquad \sum_{\underline{C} \in \mathscr{F}_{(e_n \setminus u_9)}(\Gamma)} \Big\| \sum_{\underline{\gamma}, \underline{\delta} \in \mathscr{R}^{(e_n \setminus u_9)}} h_1^{(t)}(\underline{\alpha}, \underline{u}, \underline{C}, \underline{\gamma}, \underline{\delta}; \underline{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2; \lambda \mathbf{1}_{\mathscr{R}}) \Big\|_q$$
$$\leq c_1(\sigma)^{|\Gamma|} (l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}} c_1'(\sigma, \xi, q)^n$$
$$\cdot \prod_{j_1 \in u_1} \zeta_{2,j_1}^{-\frac{1}{4}+\sigma} \prod_{j_2 \in u_2 \cup u_3} \zeta_{1,j_2}^{-\frac{1}{4}+\sigma} \prod_{j_3 \in u_4 \cup u_7} \zeta_{1,j_3}^{1-\frac{\xi}{2}+\sigma} \prod_{j_4 \in u_5} \zeta_{2,j_4}^{1-\frac{\xi}{2}+\sigma} \prod_{j_5 \in u_6 \cup u_8} \zeta_{2,j_5}^{\frac{1}{2}+\sigma}$$
$$\cdot \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} N_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\left(\frac{1}{2} N_{\underline{\alpha}_{u_1}}(\sigma) + N_{\underline{\alpha}_{u_2}}(\sigma) + \frac{3}{2} N_{\underline{\alpha}_{u_3}}(\sigma) + N_{\underline{\alpha}_{u_4}}(\sigma) + N_{\underline{\alpha}_{u_5}}(\sigma) + \frac{1}{2} N_{\underline{\alpha}_{u_6}}(\sigma) + N_{\underline{\alpha}_{u_7}}(\sigma) + \frac{1}{2} N_{\underline{\alpha}_{u_8}}(\sigma) \right)},$$

donc si l'on pose $\zeta^{(\underline{\alpha})}_{1,j} = \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\alpha_j)^4$, $\zeta^{(\underline{\alpha})}_{2,j} = \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\alpha_j)^{4/3}$, et si, $\varepsilon > 0$ étant donné, on suppose $2 - \xi \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et $\sigma \leq \frac{\varepsilon}{8}$, on a,

$$(3.6.13)\quad \sum_{\underline{\mathrm{C}} \in \mathscr{I}_{(e_n \setminus u_9)}(\Gamma)} \Big\| \sum_{\underline{\gamma}, \underline{\delta} \in \mathscr{R}^{(e_n \setminus u_9)}} h_1^{(t)}(\underline{\alpha}, \underline{u}, \underline{\mathrm{C}}, \underline{\gamma}, \underline{\delta} ; \underline{\zeta}_1^{(\underline{\alpha})}, \underline{\zeta}_2^{(\underline{\alpha})} ; \lambda \mathbf{1}_{\mathscr{R}}) \Big\|_q$$
$$\leq c_1(\sigma)^{|\Gamma|}(l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}} c_1'(\sigma, \xi, q)^n$$
$$\cdot \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\left(\frac{1}{6}\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_{u_1}}(\sigma) + \frac{1}{2}\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_{u_3}}(\sigma) + \mathrm{N}_{\underline{\alpha}_{u_4}}(\sigma) + \mathrm{N}_{\underline{\alpha}_{u_5}}(\sigma) + \frac{7}{6}\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_{u_6}}(\sigma) + \mathrm{N}_{\underline{\alpha}_{u_7}}(\sigma) + \frac{7}{6}\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_{u_8}}(\sigma) + \varepsilon \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)\right)}.$$

De même, d'après (3.5.2), (3.6.5) et (3.6.7), on a

$$(3.6.14)\quad \sum_{\underline{\mathrm{C}} \in \mathscr{I}_{u_1}(\Gamma)} \| h_2^{(t)}(\underline{\alpha}, \underline{u}_1, \underline{\mathrm{C}} ; \lambda \mathbf{1}_{\mathscr{R}}) \|_q \leq c_2^{|\Gamma|}(l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}} c_2'^n \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} \mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_{u_1}}(\sigma)}.$$

Enfin (3.6.1) résulte, d'après la formule de Leibniz et l'inégalité de Hölder, de (3.4.1), (3.4.2) et des majorations (1.7.2), (2.7.6), (2.7.7), (3.6.13), (3.6.14). □

3.7. D'après (3.1.5) et les majorations de $\mathrm{Y}^{\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, uniformes en $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$, déduites de (3.4.1), (3.4.2), (3.5.1), (3.5.2) avec $\Gamma = \emptyset$, et (C.6.2), on déduit par dérivation sous le signe somme

$$(3.7.1)\quad \frac{d^k}{d\lambda^k} \mathrm{Z}^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = \sum_{\underline{\alpha} \in \underline{\Lambda}^{e_k}} \mathrm{Z}^{(r,t):\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}), \qquad \forall \lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right), \ \forall k \in \mathbf{N}.$$

D'autre part, si F et $\mathrm{Z} \neq 0$ sont des fonctions et ∂ une dérivation, et si, pour $u \subset v_n = \{0, 1, \ldots, n\} = \{0\} \cup e_n$, $(n \in \mathbf{N}, u \neq \emptyset)$, on pose

$$(3.7.2)\quad \mathrm{G}_u = \begin{cases} \partial^{|u|-1}\mathrm{F}, & \text{si } 0 \in u, \\ \partial^{|u|}\mathrm{Z}, & \text{si } 0 \notin u, \end{cases}$$

on a

$$(3.7.3)\quad \partial^n\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{Z}}\right) = \sum_{\mathrm{P} \in \mathscr{P}(v_n)} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{u \in \mathrm{P}} \frac{\mathrm{G}_u}{\mathrm{Z}}.$$

Alors si, pour $u \subset v_n$, $(u \neq \emptyset)$ et $\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_n}$, on note $\underline{\alpha}_u = \underline{\alpha}_{|u \cap e_n} \in \mathscr{R}^{u \cap e_n}$, et si, $(r, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}$ étant fixés), on pose pour $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{S}_0$,

$$(3.7.4) \qquad \mathrm{G}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s;u}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = \begin{cases} \mathrm{Z}^{(r,t);\underline{\alpha}_u}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}), & \text{si } 0 \in u, \\ \mathrm{Z}^{(0,0);\underline{\alpha}_u}_{\lambda,\Lambda,s}, & \text{si } 0 \notin u, \end{cases}$$

et (en supposant μ et τ assez grands pour que $\mathrm{Z}^{(0,0)}_{\lambda,\Lambda,s} \neq 0$),

$$(3.7.5) \quad \mathrm{S}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = \sum_{\mathrm{P} \in \mathscr{P}(v_n)} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{u \in \mathrm{P}} \frac{\mathrm{G}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s;u}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})}{\mathrm{Z}^{(0,0)}_{\lambda,\Lambda,s}},$$

on a d'après (1.7.8), (3.7.1), (3.7.3), (3.7.4), (3.7.5)

$$(3.7.6) \qquad \frac{d_n}{d\lambda^n} \mathrm{S}^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = \sum_{\underline{\alpha} \in \underline{\Lambda}^{e_n}} \mathrm{S}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}), \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

En outre on a

LEMME. — *Étant donné* $\varepsilon > 0$, *si* $\mu = \min\{m, \mathrm{M}\}$ *est assez grand, il existe* $\tau \geq l^{-1}, b \geq 1, c''_\varepsilon \geq 1$, *tels que, pour tous* $\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_n}$, $(n \in \mathbf{N})$, $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{S}_0$,

$$\begin{aligned}(3.7.7) \quad & |\mathrm{S}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})| \\ & \leq b^{r+t}(t\,!)^{1/2} \prod_{j \in \mathrm{I}^{(f)}_\Lambda} \| u_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j' \in \mathrm{I}^{(\bar f)}_\Lambda} \| v'_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k \in \mathrm{I}^{(b)}_\Lambda} \| f_k \|_{\mathscr{H}^{-1}} \\ & \quad \cdot [c''_\varepsilon(r+1)]^n n\,! \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} (\mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)\,!)^{\frac{1}{6}+\varepsilon} e^{-\underline{d}[(\mathrm{Y}_0,(\Delta_{\alpha_j})_{j \in e_n})]},\end{aligned}$$

où $\mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma) = |\{ j \in e_n ; \alpha_j = \sigma \}|$,

$$\mathrm{Y}_0 = \bigcup_{j=1}^{r} (\Delta_j^{(f)} \cup \Delta_j^{(\bar f)}) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{t} \Delta_k^{(b)} \right),$$

et $d[(\mathrm{Y}_j)_{0 \leq j \leq n}]$ *est défini en* (A.6.1).

Démonstration. — On vérifie d'abord que chaque fonction $\mathrm{G}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,.,.;u}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$ est subordonnée à la fonction de partition $\mathrm{Z}^{(0,0)}_{\lambda,.,.}$, (définitions A.3 et A.4) et que de plus la famille $(\mathrm{G}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,.,.;u}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}))_{u \subset v_n}$, vérifie les hypothèses F. T. *i*) et F. T. *ii*) du théorème A.6 :

F. S. *i*) (découplage en $s = 0$). On montre comme en 2.1, que si $\Gamma \in \mathscr{C}_1$

et $(X_i)_{1\leq i\leq p}$ sont comme dans la définition A.2, on peut substituer $\tilde{Y}$ à Y dans (2.1.8), c'est-à-dire que, pour tous $\Lambda\in\mathscr{X}_0$, $s\in S_0$,

$$(3.7.8)\quad \tilde{Y}_{\underline{\lambda},\Lambda,\mathbf{1}_\Gamma s}(A_\Lambda(f), B_\Lambda(u, v)) = \prod_{i=1}^{p} \tilde{Y}_{\underline{\lambda},\Lambda\cap X_i,\mathbf{1}_{\Gamma\cap X_i}s}(A_{\Lambda\cap X_i}(f), B_{\Lambda\cap X_i}(u, v)),$$

on a donc pour tout $\underline{\beta}\in\mathscr{R}^{e_k}$, $(k\in\mathbf{N})$,

$$(3.7.9)\quad \partial_\Lambda^{\underline{\beta}}\tilde{Y}_{\underline{\lambda},\Lambda,\mathbf{1}_\Gamma s}(A_\Lambda(f), B_\Lambda(u, v)) = \prod_{i=1}^{p} \partial_{\Lambda\cap X_i}^{\underline{\beta}}\tilde{Y}_{\underline{\lambda},\Lambda\cap X_i,\mathbf{1}_{\Gamma\cap X_i}s}(A_{\Lambda\cap X_i}(f), B_{\Lambda\cap X_i}(u, v)),$$

alors, d'après (3.1.4), (3.1.6), (3.7.4), on peut, comme en 1.2, conclure d'après (1.1.4), puisque chaque fonction $Y^{\underline{\beta}}_{\underline{\lambda},\Lambda\cap X_i,\mathbf{1}_{\Gamma\cap X_i}s}(A_{\Lambda\cap X_i}(f), B_{\Lambda\cap X_i}(u, v))$ est $\mathscr{A}(X_i)$-mesurable.

F. S. *ii*) La régularité à l'infini résulte (comme en 1.2), de la proposition B.2 et des majorations uniformes en $s\in S_0$, déduites de (3.4.1), (3.4.2), (3.5.1), (3.5.2) avec $\Gamma = \emptyset$, et (C.6.2), d'après le théorème de Lebesgue.

F. S. *iii*) et F. T. *i*) = si l'on pose $Y_j = \Delta_{\alpha_j}(j\in e_n)$, on a évidemment

$$(3.7.10)\qquad Y_{G_u^{(r,t)};\underline{\alpha}|Z^{(0,0)}} = Y_u \equiv \bigcup_{j\in u} Y_j \qquad \forall u\subset v_n,$$

F. T. *ii*) est évident.

F. S. *iv*) résulte de (2.7.8) et (3.6.1) dès que τ est assez grand pour que $e^{K_2^{(\varepsilon)}}(l\tau)^{-\frac{1}{2}} \leq e^{-K_2}$, avec $K_2 > a_2(K_1 + \log 2)$, (et μ assez grand pour que les hypothèses de la proposition 3.6 soient vérifiées). On obtient alors (3.7.7), d'après (3.6.1) et (A.6.3), compte tenu de l'inégalité

$$(3.7.11)\qquad \sum_{p\in\mathscr{P}(v_n)} (|P|-1)!\prod_{u\in P}|u|! \leq 3^n n!, \qquad \forall n\in\mathbf{N},$$

[démonstration par récurrence sur n]. □

3.8. On a

LEMME. — *Étant donné* $\varepsilon > 0$, *si* $\mu = \min\{m, M\}$ *est assez grand, il* *existe* $\tau \geq l^{-1}, b \geq 1, c''_\varepsilon \geq 1$, *tels que, pour tous* $\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_n}$, $(n \in \mathbf{N})$, $\lambda \in \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{S}_0$,

$$(3.8.1)\quad |\, \mathrm{S}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) \,| \leq b^{r+t}(t\,!)^{1/2} \prod_{j \in \mathrm{I}^{(f)}_{\Lambda}} \| u_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j' \in \mathrm{I}^{(\bar{f})}_{\Lambda}} \| v_{j'} \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k \in \mathrm{I}^{(b)}_{\Lambda}} \| f_k \|_{\mathscr{H}^{-1}} \cdot \left[c''_\varepsilon(r+1)\right]^n \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} (\mathrm{N}_{\underline{\alpha}}(\sigma)\,!)^{\frac{7}{6}+\varepsilon}.$$

Démonstration. — Pour $\underline{\beta} \in \mathscr{R}^{e_k}$, $(k \in \mathbf{N})$, et $\underline{h} \in \mathbb{C}^{\mathscr{R}}$, on pose, suivant une idée de T. Spencer [*13*],

$$(3.8.2)\qquad \mathrm{X}^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{h}) = \left(\prod_{\sigma \in \mathscr{R}} \left[\sum_{j=0}^{\mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\sigma)} \frac{h_\sigma^j}{j\,!} \partial^{(\sigma)^j}\right]\right) \cdot \tilde{\mathrm{Y}}_{\lambda \mathbf{1}_{\mathscr{R}},\Lambda,s}(\Omega, 1)\ [52],$$

et

$$(3.8.3)\qquad \mathrm{F}^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{h}) = \mathrm{E}_\nu\left[\mathrm{X}^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{h})\right],$$

de sorte que, d'après (3.1.6), pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\underline{\beta} \in \mathscr{R}^{e_k}$, $u \subset e^k$

$$(3.8.4)\qquad \mathrm{Z}^{(0,0);\underline{\beta}_u}_{\lambda,\Lambda,s} = \left(\prod_{\sigma \in \mathscr{R}} \frac{\partial^{\mathrm{N}_{\underline{\beta}_u}(\sigma)}}{\partial h_\sigma^{\mathrm{N}_{\underline{\beta}_u}(\sigma)}}\right) \mathrm{F}^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{0}), \qquad (\underline{\beta}_u = \underline{\beta}_{|u} \in \mathscr{R}^u),$$

[puisque $\partial^{(\sigma)}\tilde{\mathrm{Y}}_{\underline{\lambda},\Lambda,s}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0$, si $\sigma \notin \underline{\Lambda}$], et par conséquent, d'après (3.7.4), (3.7.5), pour tout $\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_n}$, $(n \in \mathbf{N})$,

$$(3.8.5)\qquad \mathrm{S}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) = \sum_{u \subset e_n} \left(\prod_{\sigma \in \mathscr{R}} \frac{\partial^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_u}(\sigma)}}{\partial h_\sigma^{\mathrm{N}_{\underline{\alpha}_u}(\sigma)}}\right) \frac{\mathrm{Z}^{(r,t);\underline{\alpha}(e_n/u)}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})}{\mathrm{F}^{\underline{\alpha}_u}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{0})},$$

$[\mathrm{F}^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{0}) = \mathrm{Z}^{(0,0)}_{\lambda,\Lambda,s} \neq 0$, donc $\mathrm{F}^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{h}) \neq 0$ pour $\underline{h}$ dans un voisinage de $\underline{0}]$. Si $\mathrm{K}_1 > 0$, $\mathrm{K}_2^{(\varepsilon)} > 0$ et $c'_\varepsilon \geq 1$ sont les constantes introduites dans la proposition 3.6 (a_2 étant introduit en (A.3.1)), on pose,

$$(3.8.6)\quad \rho_{\underline{\beta}}(\sigma) = \frac{1}{3c'_\varepsilon} e^{-a_2(\mathrm{K}_1 + \log 2)} \mathrm{N}_{\underline{\beta}}(\sigma)^{-\left(\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}, \quad \underline{\beta} \in \mathscr{R}^{e_k}, (k \in \mathbf{N}), \sigma \in \underline{\beta}(e_k),$$

alors, étant donné $\underline{\beta} \in \mathscr{R}^{e_k}$, $(k \in \mathbf{N})$, si $|\, h_\sigma \,| \leq \rho_{\underline{\beta}}(\sigma)$, $\forall \sigma \in \underline{\beta}(e_k)$, la fonction $\mathrm{F}^{\underline{\beta}}_{\lambda,\dots}(\underline{h})$ est une fonction de partition (définition A.3) et toute fonction $\mathrm{Z}^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\dots}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$, $\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_j}$, $(j \in \mathbf{N})$, lui est subordonnée (définition A.4), dès

[52] Où $\tilde{\mathrm{Y}}$ est défini en (3.1.3), $\partial^{(\sigma)} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda_\sigma}$ et $1 \in \mathscr{C}^{(0)}_1 = \mathbb{C}$.

que τ est assez grand pour que $e^{K_2^{(\varepsilon)}}(l\tau)^{-\frac{1}{2}} \leq e^{-K_2}$, avec $K_2 > a_2(K_1 + \log 6)$ (et μ assez grand pour que les hypothèses de la proposition 3.6 soient vérifiées), en effet, on vérifie

F. P. *i*) (découplage en $s = 0$). Si $\Gamma \in \mathscr{C}_1$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont comme dans la définition A.2, on a d'après (3.7.8) et (3.8.2)

$$\text{(3.8.7)} \qquad X^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,\mathbf{1}_\Gamma s}(\underline{h}) = \prod_{i=1}^{p} X^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda\cap X_i,\mathbf{1}_{\Gamma\cap X_i}s}(\underline{h}),$$

et on conclut d'après (1.1.4) puisque $X^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda\cap X_i,\mathbf{1}_{\Gamma\cap X_i}s}(\underline{h})$ est $\mathscr{A}(X_i)$-mesurable.

F. P. *ii*) La régularité à l'infini est évidente puisque $F^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,.}(\underline{h})$ est une combinaison linéaire de fonction (de la forme $Z^{(0,0),\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,.}$, $\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_j}$) régulières à l'infini.

F. P. *iii*) Évident.

F. P. *iv*) On a montré, en 3.7, que si

$$e^{K_2^{(\varepsilon)}}(l\tau)^{-\frac{1}{2}} \leq e^{-K_2},$$

avec $K_2 > a_2(K_1 + \log 2)$ (et μ assez grand), toute fonction $Z^{(0,0);\underline{\alpha}}_{\lambda,.,.}$, $\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_j}$, est subordonnée à la fonction de partition $Z^{(0,0)}_{\lambda,.,.}$, alors $\left(\text{comme } | Z^{(0,0)}_{\lambda,\Delta,0} | \geq \frac{1}{2},\right.$ $\left.\text{si } \lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}\right)$, il en résulte d'après (3.6.1), (3.7.10), (A.4.2) que

$$\text{(3.8.8)} \qquad \left| \frac{Z^{(0,0);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}}{Z^{(0,0)}_{\lambda,\Lambda,s}} \right| \leq \left(c'_\varepsilon e^{a_2(K_1 + \log 2)}\right)^j \prod_{\sigma \in \mathscr{R}} (N_{\underline{\alpha}}(\sigma)\,!)^{7/6+\varepsilon}, \qquad (\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_j},\ \Lambda \in \mathscr{X}_0,\ s \in S_0),$$

alors, d'après (3.8.6) et (3.8.8) (avec $\Lambda = \Delta_\sigma$, $s = 0$), on a, pour tout $\sigma \in \mathscr{R}$,

$$\text{(3.8.9)} \qquad \left| \frac{F^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Delta_\sigma,0}(\underline{h}) - Z^{(0,0)}_{\lambda,\Delta_\sigma,0}}{Z^{(0,0)}_{\lambda,\Delta_\sigma,0}} \right| \leq \sum_{j=1}^{N_{\underline{\beta}(\sigma)}} | h_\sigma |^j \left(c'_\varepsilon e^{a_2(K_1 + \log 2)}\right)^j (j\,!)^{1/6+\varepsilon} \leq \sum_{j=1}^{N_{\underline{\beta}(\sigma)}} 3^{-j} \leq \frac{1}{2},$$

si $| h_\sigma | \leq \rho_{\underline{\beta}}(\sigma)$, or, $| Z^{(0,0)}_{\lambda,\Delta_\sigma,0} | \geq \frac{1}{2}$, si $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}$, donc dans ce cas

$$\text{(3.8.10)} \qquad F^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Delta_\sigma,0}(\underline{h}) \geq \frac{1}{2} | Z^{(0,0)}_{\lambda,\Delta_\sigma,0} | \geq \frac{1}{4},$$

F. P. v) D'après (3.6.1), (3.8.2), (3.8.3), on a, compte tenu de ce que $\partial^{(\sigma)}\tilde{Y}_{\underline{\lambda},\Lambda,s}(A, B) = 0$ si $\sigma \notin \underline{\Lambda}$,

$$(3.8.11)\quad |\,\partial^{\Gamma} F^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{h})\,| \leq \left[\prod_{\sigma\in\underline{\Lambda}}\left(\sum_{j=0}^{N_{\underline{\beta}}(\sigma)} |\,h_\sigma\,|^j c'^j_\varepsilon (j\,!)^{1/6+\varepsilon}\right)\right] e^{K_1|\Lambda| - K_2^{(\varepsilon)}|\Gamma|}(l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}}$$

$$\leq e^{\left(K_1 + \log\frac{3}{2}\right)|\Lambda| - K_2^{(\varepsilon)}|\Gamma|}(l\tau)^{-\frac{|\Gamma|}{2}}, \qquad (\forall\Gamma \in \mathscr{C}_0),$$

si $|\,h_\sigma\,| \leq \rho_{\underline{\beta}}(\sigma)$, donc (A.3.1) et (A.3.2) sont vérifiés dès que les hypothèses faites ci-dessus sur τ et μ le sont,

F. P. vi) est évident,

F. S. i) et F. S. ii) ont déjà été vérifiées,

F. S. iii) est évident avec

$$(3.8.12)\qquad Y_{Z^{(r,t);\underline{\alpha}}|F^{\underline{\beta}}} \subset Y_{Z^{(r,t);\underline{\alpha}}|Z^{(0,0)}} \cup Y_{F^{\underline{\beta}}|Z^{(0,0)}},$$

F. S. iv) résulte de (3.6.1) et (3.8.11).

D'après (A.4.2), on en déduit d'après (3.6.1), (3.8.11), (3.8.12),

$$(3.8.13)\quad \left|\frac{Z^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})}{F^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{h})}\right|$$

$$\leq b^{r+t}(t\,!)\prod_{j\in I^{(f)}_{\Lambda}} \|\,u_j\,\|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j'\in I^{(f)}_{\Lambda}} \|\,v_{j'}\,\|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k\in I^{(b)}} \|\,f_k\,\|_{\mathscr{H}^{-1}}$$

$$\cdot\left[c'_\varepsilon(r+1)e^{a_2(k_1+\log 6)}\right]^n \cdot \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} (N_{\underline{\alpha}}(\sigma)\,!)^{\frac{7}{6}+\varepsilon},$$

si $\underline{\alpha} \in \mathscr{R}^{e_j}$, $\underline{\beta} \in \mathscr{R}^{e_k}$, $(j + k \leq n)$, $|\,h_\sigma\,| \leq \rho_{\underline{\beta}}(\sigma)$, $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}$ et si τ et μ sont assez grands pour vérifier les conditions ci-dessus.

Or, d'après la formule de Cauchy, on a

$$(3.8.14)\quad \left(\prod_{\sigma\in\mathscr{R}} \frac{\partial^{N_{\underline{\beta}}(\sigma)}}{\partial h_\sigma^{N_{\underline{\beta}}(\sigma)}}\right) \cdot \frac{Z^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})}{F^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{0})}$$

$$= \left(\prod_{\sigma\in\underline{\beta}(e_k)} \frac{N_{\underline{\beta}}(\sigma)\,!}{2i\pi}\right) \cdot \int_{|h_\sigma| = \rho_{\underline{\beta}}(\sigma)} \frac{Z^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})}{F^{\underline{\beta}}_{\lambda,\Lambda,s}(\underline{h})} \prod_{\sigma\in\underline{\beta}(e_k)} \frac{dh_\sigma}{h_\sigma^{(N_{\underline{\beta}}(\sigma)+1)}},$$

donc (3.8.1) résulte de (3.8.5), (3.8.6), (3.8.13) et (3.8.14). □

3.9. On achève la démonstration du théorème II comme suit : en prenant une moyenne géométrique de (3.7.7) et (3.8.1), on a

$$(3.9.1)\quad |S^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s}(u, v, f)|$$
$$\leq b^{r+t}(t\,!)^{1/2} \prod_{j\in I^{(f)}_{\Lambda}} \| u_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j'\in I^{(\bar{f})}_{\Lambda}} \| v_{j'} \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k\in I^{(b)}_{\Lambda}} \| f_k \|_{\mathscr{H}^{-1}}$$
$$\cdot \left[c''_{\varepsilon}(r+1)\right]^n (n\,!)^{\xi} \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} (N_{\underline{\alpha}}(\sigma)\,!)^{\frac{7}{6}+\varepsilon-\xi}\, e^{-\xi \underline{d}[(Y_0,(\Delta_{\alpha_j})_{j\in e_n})]}, \qquad (0 \leq \xi \leq 1),$$

or d'après [2], il existe $c_{\xi}(Y_0) > 0$ tel que,

$$(3.9.2)\qquad \sum_{\underline{\alpha}\in\mathscr{R}^{e_n}} \prod_{\sigma\in\mathscr{R}} N_{\underline{\alpha}}(\sigma)\,!\, e^{-\xi\underline{d}[(Y_0,(\Delta_{\alpha_j})_{j\in e_n})]} \leq c_{\xi}(Y_0)^n n\,!,$$

donc, d'après (3.7.6), (3.9.1) avec $\xi = \frac{1}{6} + \varepsilon$, et (3.9.2), on a (en supposant vérifiées les hypothèses des lemmes 3.7 et 3.8), pour tous $\Lambda \in \mathscr{X}_0$ et $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}$,

$$(3.9.3)\quad \left| \frac{d^n}{d\lambda^n} S^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda}(u, v, f) \right|$$
$$\leq b^{r+t}(t\,!)^{1/2} \prod_{j\in I^{(f)}_{\Lambda}} \| u_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{j'\in I^{(\bar{f})}_{\Lambda}} \| v_j \|_{\mathscr{H}^{-1/2}} \prod_{k\in I^{(b)}_{\Lambda}} \| f_k \|_{\mathscr{H}^{-1}} \cdot [c_{\varepsilon}(r+1)]^n (n\,!)^{\frac{7}{6}+\varepsilon}.$$

Or, d'après le théorème A.4, chaque $\frac{G^{(r,t);\underline{\alpha}}_{\lambda,\Lambda,s;u}(u, v, f)}{Z^{(0,0)}_{\lambda,\Lambda,s}}$ converge, lorsque $\Lambda \to E$, uniformément pour $\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}$, donc, d'après (3.7.5) et (3.7.6), $\frac{d^n}{d\lambda^n} S^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda}(u, v, f)$ converge uniformément ([53]) donc $S^{(r,t)}_{\lambda}(u, v, f)$ est C^{∞} au bord de $\overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)}$ et,

$$(3.9.4)\quad \frac{d^n}{d\lambda^n} S^{(r,t)}_{\lambda}(u, v, f) = \lim_{\Lambda\to E} \frac{d^n}{d\lambda^n} S^{(r,t)}_{\lambda,\Lambda}(u, v, f), \qquad \forall\lambda \in \overline{D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)},$$

([53]) Pour $\lambda \in D\left(\frac{\pi}{8}, a_0\right)$, cette convergence résulte plus simplement du théorème I et du théorème de Vitali.

donc (3.0.1) résulte de (3.9.3), si les hypothèses des lemmes 3.7 et 3.8 sont vérifiées. On en déduit (3.0.1) dans le cas général par un argument de « scaling » ([54]).

([54]) Voir note ([29]), p. 254.

APPENDICE A

FONDEMENTS FORMELS DE LA « CLUSTER EXPANSION » DE GLIMM-JAFFE-SPENCER

On a rassemblé dans cet appendice des énoncés abstraits qui résument la méthode de « cluster expansion » de Glimm-Jaffe-Spencer, on s'est borné à rappeler succinctement les grandes lignes des principales démonstrations.

A.1. Soit $\mathscr{B}$ un ensemble (fini ou) dénombrable, on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des parties de $\mathscr{B}$, par $\mathscr{C}_0$ l'ensemble des parties finies et par $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des parties soit finies, soit de complémentaire fini.

On dit qu'un sous-ensemble T *de* $S = [0, 1]^{\mathscr{B}}$ *est saturé* (55) *si*

i) T *contient des fonctions constantes* **1** *et* 0,

ii) *si* $t \in T$ *et* $s \in S$ *sont tels qu'il existe* $\Gamma \in \mathscr{C}_0$ *vérifiant*

$$\mathbf{1}_{\Gamma'} s = \mathbf{1}_{\Gamma'} t, \qquad \textit{alors} \quad s \in T,$$

[Γ' désigne le complémentaire de $\Gamma \dot{\subset} \mathscr{B}$ et $\mathbf{1}_\Gamma \in S$ la fonction indicatrice de Γ]. On note que si T est saturé et $s \in T$, les fonctions $\mathbf{1}_\Gamma s$ et $\mathbf{1}_{\Gamma'} s$ appartiennent à T, pour tout $\Gamma \in \mathscr{C}_1$.

Soit $T \subset S$ un sous-ensemble saturé, pour chaque $b \in \mathscr{B}$ on définit $\delta^{(b)} : \mathbb{C}^T \to \mathbb{C}^T$ par

$$(\delta^{(b)} f)(s) = f(s) - f(\mathbf{1}_{\{b\}'} s), \qquad \forall f \in \mathbb{C}^T, \quad s \in T, \tag{A.1.1}$$

[on note que $(\delta^{(b)})^2 = \delta^{(b)}$, $\forall b \in \mathscr{B}$ et que $\delta^{(a)}\delta^{(b)} = \delta^{(b)}\delta^{(a)}$, $\forall a, b \in \mathscr{B}$] et pour $\Gamma \in \mathscr{C}_0$, $\delta^\Gamma : \mathbb{C}^T \to \mathbb{C}^T$ par

$$\delta^\Gamma = \prod_{b \in \Gamma} \delta^{(b)} \quad \text{si} \quad \Gamma \neq \emptyset; \qquad \delta^\emptyset f = f, \quad \forall f \in \mathbb{C}^T \tag{A.1.2}$$

$$\left[\text{on a donc } \delta^\Gamma f(s) = \sum_{\Gamma_1 \subset \Gamma} (-1)^{|\Gamma_1|} f(\mathbf{1}_{\Gamma_1'} s), \quad \forall \Gamma \in \mathscr{C}_0,\ f \in \mathbb{C}^T,\ s \in T\right].$$

Définition (56). — *On dit que* $f \in \mathbb{C}^T$ *est régulière à l'infini si*

$$f(s) = \lim_{\substack{\Gamma \in \mathscr{C}_0 \\ \Gamma \to \mathscr{B}}} f(\mathbf{1}_\Gamma s), \qquad \forall s \in T. \tag{A.1.3}$$

[*la limite est prise suivant le filtre des parties finies de* $\mathscr{B}$].

---

(55) Si pout $\Gamma \in \mathscr{C}$ et $s \in S$ on pose $A_\Gamma(s) = \prod_{a \in \Gamma} s_a \prod_{b \in \Gamma'} (1 - s_b)$, et si

$$S_0 = \left\{ s \in S ; \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} A_\Gamma(s) = 1 \right\},$$

alors S_0 est saturé.

(56) Voir [*4*], définition 3.1, p. 209.

LEMME (57). — *Si $f \in \mathbb{C}^{\mathrm{T}}$ est régulière à l'infini on a*

$$f(s) = \lim_{\substack{C \in \mathscr{C}_0 \\ C \to \mathscr{B}}} \sum_{\Gamma \subset C} \delta^{\Gamma} f(\mathbf{1}_{\Gamma} s), \qquad \forall s \in \mathrm{T}. \tag{A.1.4}$$

On utilisera en particulier la formule :

$$f(\mathbf{1}_{\Gamma_1} s) = \lim_{\substack{C \in \mathscr{C}_0 \\ C \to \mathscr{B}}} \sum_{\Gamma \subset C \cap \Gamma_1} \delta^{\Gamma} f(\mathbf{1}_{\Gamma} s), \qquad \forall s \in \mathrm{T}, \quad \forall \Gamma_1 \in \mathscr{C}_1, \tag{A.1.5}$$

qui s'en déduit trivialement.

On note que si f_1 et f_2 sont régulières à l'infini, $f_1 f_2$ l'est aussi et que l'on a,

$$\delta^{\Gamma}[f_1 f_2](\mathbf{1}_{\Gamma} s) = \sum_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma} \delta^{\Gamma_1} f_1(\mathbf{1}_{\Gamma_1} s) \delta^{\Gamma_2} f_2(\mathbf{1}_{\Gamma_2} s), \qquad \Gamma \in \mathscr{C}_0, \quad s \in \mathrm{T}. \tag{A.1.6}$$

A.2. Étant donné un réseau à mailles cubiques dans un espace euclidien E de dimension d, on désigne par :

$\mathscr{R}$ l'ensemble des centres des mailles,

$\mathscr{X}$ l'ensemble des unions (58) de mailles, $\mathscr{X}_0$ l'ensemble des unions finies de mailles [pour $X \in \mathscr{X}_0$, $|X|$ est le nombre de mailles de X, et, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{X}_0^n = \{ X \in \mathscr{X}_0 ; |X| = n \}$],

$\mathscr{B}$ l'ensemble des faces [dans la suite les notions introduites en A.1 seront comprises comme relatives à cet ensemble $\mathscr{B}$] (59).

DÉFINITION (60). — *On dit que $F \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}_0 \times \mathrm{T}}$ (où $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$ est saturé), découple en $s = 0$, si pour tous $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{T}$, $\Gamma \in \mathscr{C}_1$ et toute famille finie $(X_i)_{1 \le i \le r}$ d'éléments non vides, deux à deux disjoints, de $\mathscr{X}$ telle que $E = \overline{\bigcup_{i=1}^{r} X_i}$ et chaque composante connexe de $E \backslash \Gamma'$ est incluse dans l'un des X_i, on a*

$$F(\Lambda, \mathbf{1}_{\Gamma} s) = \prod_{i=1}^{r} F(\Lambda \cap X_i, \mathbf{1}_{\Gamma \cap X_i} s). \tag{A.2.1}$$

[On note que si F_1 et F_2 découplent en $s = 0$, $F_1 F_2$ aussi, mais pas $F_1 + F_2$ en général].

Il est clair que si $F \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}_0 \times \mathrm{T}}$ découple en $s = 0$, on a pour tous $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{T}$, $\Gamma \in \mathscr{C}_0$ et $(X_i)_{1 \le i \le r}$ comme dans la définition,

$$\delta^{\Gamma} F(\Lambda, \mathbf{1}_{\Gamma} s) = \prod_{i=1}^{r} \delta^{\Gamma \cap X_i} F(\Lambda \cap X_i, \mathbf{1}_{\Gamma \cap X_i} s). \tag{A.2.2}$$

---

(57) Voir par exemple [*4*] (3.8), p. 210.

(58) On convient que tout $X \in \mathscr{X}$ est l'intérieur de sa fermeture, pour simplifier, si $X_1, X_2 \in \mathscr{X}$, on notera $X_1 \cup X_2$, $X_1 \backslash X_2$ au lieu de $\overset{\circ}{\overline{X_1 \cup X_2}}$, $X_1 \backslash \overline{X_1 \cap X_2}$ respectivement.

(59) On identifie à $\Gamma \in \mathscr{C}$ l'union des faces fermées qui lui appartiennent, si $\Gamma \in \mathscr{C}$, $X \in \mathscr{X}$, on notera $\Gamma \cap X$ au lieu de $\overline{\Gamma \cap X}$ et $\Gamma \subset X$ si $\overline{\Gamma \cap X} = \Gamma$.

(60) Voir [*4*], définition 3.2, p. 211.

Soit maintenant $Y_0 \in \mathscr{X}_0$ ($Y_0 \neq \emptyset$) ; pour tout $X \in \mathscr{X}_0$ tel que $Y_0 \subset X$ on désigne par $\mathscr{C}_{Y_0}(X)$ l'ensemble des $\Gamma \in \mathscr{C}_0$ tels que $\Gamma \subset X$ et chaque composante connexe de $X \backslash \Gamma'$ rencontre Y_0 [par convention, $\emptyset \subset X$, de sorte que $\emptyset \in \mathscr{C}_{Y_0}(X)$ si et seulement si $X = Y_0$], et on pose

$$\mathscr{U}(Y_0) = \{ X \in \mathscr{X}_0 \,;\, Y_0 \subset X, \mathscr{C}_{Y_0}(X) \neq \emptyset \}.$$

On note les inégalités ([61]) :

$$\text{(A.2.3)} \qquad |\{ X \in \mathscr{U}(Y_0) \,;\, |X| = p \}| \leq 2^{2dp} \binom{|\hat{Y}_0| + p - 1}{p}, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

[où $\hat{Y}_0$ est l'ensemble des composantes connexes de Y_0],

$$\text{(A.2.4)} \qquad |\mathscr{C}_{Y_0}(X)| \leq 2^{2^{d-1}|X|}, \qquad \forall X \in \mathscr{X}_0, \quad Y_0 \subset X,$$

$$\text{(A.2.5)} \qquad |\Gamma| \geq \frac{1}{2}(|X| - |Y_0|), \qquad \forall \Gamma \in \mathscr{C}_{Y_0}(X).$$

De (A.1.4), (A.1.5), (A.2.2) on déduit facilement

LEMME. — *Soit* $F \in C^{\mathscr{X}_0 \times T}$ ($T \subset S$ *est saturé*), *on suppose que*

i) F *découple en* $s = 0$.

ii) *Pour tout* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $F(\Lambda, .) \in \mathbb{C}^T$ *est régulière à l'infini.*

iii) *Pour tout* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, *il existe* $c_\Lambda > 0$ *tel que* $|F(\Lambda, s)| \leq c_\Lambda$, $\forall s \in T$, *alors si* $Y_0 \in \mathscr{X}_0$ ($Y_0 \neq \emptyset$), *est tel que*

$$\text{(A.2.6)} \qquad \sum_{X \in \mathscr{U}(Y_0)} \left| \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_0}(X)} \delta^\Gamma F(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_\Gamma s) \right| < +\infty, \qquad \forall \Lambda \in \mathscr{X}_0, \quad s \in T,$$

on a ([62]) :

$$\text{(A.2.7)} \quad F(\Lambda, s) = \sum_{X \in \mathscr{U}(Y_0)} \left[\sum_{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_0}(X)} \delta^\Gamma F(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_\Gamma s) \right] F(\Lambda \backslash X, \mathbf{1}_{(X_+)'} s), \qquad \forall \Lambda \in \mathscr{X}_0, \quad s \in T,$$

où pour $X \in \mathscr{X}_0$ *on a défini* $X_+ \in \mathscr{C}_0$ *par* $X_+ = \bar{X} \cap \mathscr{B}$.

On a comme cas particuliers :

$$\text{(A.2.8)} \quad F(\Lambda, \mathbf{1}_{\Gamma_1'} s) = \sum_{X \in \mathscr{U}(Y_0)} \left[\sum_{\substack{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_0}(X) \\ \Gamma \cap \Gamma_1 = \emptyset}} \delta^\Gamma F(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_\Gamma s) \right] F(\Lambda \backslash X, \mathbf{1}_{(\Gamma_1 \cup X_+)'} s), \qquad (\Lambda \in \mathscr{X}_0, \ s \in T, \ \Gamma_1 \in \mathscr{C}),$$

et, si $Y_b \in \mathscr{X}_0$ désigne l'union des deux mailles ayant $b \in \mathscr{B}$ comme face commune,

$$\text{(A.2.9)} \quad F(\Lambda, \mathbf{1}_{\Gamma_1'} s) = F(\Lambda, \mathbf{1}_{(\Gamma_1 \backslash b)'} s) - \sum_{X \in \mathscr{U}(Y_b)} \left[\sum_{\substack{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_b}(X) \\ \Gamma \cap \Gamma_1 = \{b\}}} \delta^\Gamma F(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_\Gamma s) \right] F(\Lambda \backslash X, \mathbf{1}_{(\Gamma_1 \cup X_+)'} s) \qquad (\Lambda \in \mathscr{X}_0, \ s \in T, \ \Gamma_1 \in \mathscr{C}_1, \ b \in \Gamma_1)$$

obtenue par différence des égalités (A.2.8), avec $Y_0 = Y_b$, écrites pour Γ_1 et $\Gamma_1 \backslash b$.

([61]) Voir [*4*], p. 219. On rappelle que d est la dimension de l'espace E et que $|A|$ est le nombre de points de l'ensemble fini A.

([62]) Voir [*4*] (3.1.3), p. 212.

A.3. Soit $T \subset S$ un sous-ensemble saturé, on pose

Définition. — *On dit que* $Z \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}_0 \times T}$ *est une fonction de partition si*

F. P. i) *Z découple en* $s = 0$.
F. P. ii) *Pour tout* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $Z(\Lambda, .) \in \mathbb{C}^T$ *est régulière à l'infini.*
F. P. iii) $Z(\emptyset, s) = 1, \quad \forall s \in T$.
F. P. iv) *Il existe* $K_0 \geq 0$ *tel que* $|Z(\Delta, 0)| \geq e^{-K_0}, \quad \forall \Delta \in \mathscr{X}_0^1$.
F. P. v) *Il existe des constantes positives* K_1, K_2 *vérifiant*

$$K_2 > a_d(K_0 + K_1) \tag{A.3.1}$$

[*où* $a_d(x) = 4[x + 2^{d+1}]$ (63), $x \geq 0$, $d \geq 2$], *et telles que*

$$|\delta^\Gamma Z(\Lambda, \mathbf{1}_\Gamma s)| \leq e^{K_1|\Lambda| - K_2|\Gamma|}, \qquad \forall \Lambda \in \mathscr{X}_0, \quad \Gamma \in \mathscr{C}_0, \quad s \in T. \tag{A.3.2}$$

F. P. vi) *Pour tout* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, *il existe* $a_\Lambda > 0$ *tel que* $|Z(\Lambda, s)| \leq a_\Lambda$, $\forall s \in T$.

On a

Théorème. (64). — *Soit* $Z \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}_0 \times T}$ *une fonction de partition, on a*

$$|Z(\Lambda, s)| \geq \frac{1}{4}(2^{-2^d} e^{-K_0})^{|\Lambda|} > 0, \qquad \forall \Lambda \in \mathscr{X}_0, \quad s \in T \tag{A.3.3}$$

En effet, d'après F. P. *i*), *ii*), *v*) [et les inégalités (A.2.3), (A.2.4), (A.2.5) pour montrer que tout $Y_0 \in \mathscr{X}_0$, ($Y_0 \neq \emptyset$), vérifie (A.2.6) avec $F = Z$], et F. P. *vi*) on peut substituer Z à F dans (A.2.9), or d'après F. P. *i*),

$$Z(\Lambda, \mathbf{1}_{(\Gamma_1 \cup X_+)'} s) = Z(\Lambda \cap X, 0) Z(\Lambda \backslash X, \mathbf{1}_{(\Gamma_1 \cup X_+)'} s), \tag{A.3.4}$$

avec

$$Z(\Lambda \cap X, 0) = \prod_{\substack{\Delta \in \mathscr{X}_0^1 \\ \Delta \subset \Lambda \cap X}} Z(\Delta, 0) \neq 0, \tag{A.3.5}$$

d'après F. P. *iv*), donc

$$\begin{aligned} Z(\Lambda, \mathbf{1}_{\Gamma_1'} s) &= Z(\Lambda, \mathbf{1}_{(\Gamma_1 \backslash b)'} s) - \sum_{X \in \mathscr{U}(Y_b)} \left[Z(\Lambda \cap X, 0)^{-1} \sum_{\substack{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_b}(X) \\ \Gamma \cap \Gamma_1 = \{b\}}} \delta^\Gamma Z(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_\Gamma s) \right] Z(\Lambda, \mathbf{1}_{(\Gamma_1 \cap X_+)'} s), \\ & \qquad (\Lambda \in \mathscr{X}_0, \ s \in T, \ \Gamma_1 \in \mathscr{C}_1, \ b \in \Gamma_1). \end{aligned} \tag{A.3.6}$$

On déduit alors (A.3.3) de (A.3.6) comme suit :

On désigne par $\mathscr{E}$ l'espace de Banach des fonctions $\rho : \mathscr{C}_0 \to \mathbb{C}$, vérifiant

$$\| \rho \| \equiv \sup_{\Gamma \in \mathscr{C}_0} 2^{-|\Gamma|} |\rho(\Gamma)| < +\infty, \tag{A.3.7}$$

d'autre part on fixe une injection $\theta : \mathscr{B} \to \mathbf{N}$, et pour tout $\Gamma \in \mathscr{C}_0$, ($\Gamma \neq \emptyset$), on désigne par $\theta_\Gamma \in \Gamma$ l'élément de Γ ayant la plus petite image par θ, on a alors :

---

(63) Ce choix n'est pas optimal, de plus cette condition est suffisante pour montrer tous les résultats énoncés dont certains peuvent être établis avec une hypothèse plus faible.

(64) Voir [*4*], théorème 6.1.

Lemme. — i) *Pour chaque* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{T}$ *il existe un unique opérateur* $\mathrm{A}_{\Lambda,s} \in \mathrm{L}(\mathscr{E})$, *tel que*, $\forall \rho \in \mathscr{E}$, $\mathrm{C} \in \mathscr{C}_0$

$$(\mathrm{A}.3.8) \quad \begin{cases} \mathrm{A}_{\Lambda,s}\rho(\mathrm{C}) \\ \quad = \rho(\mathrm{C}\backslash\theta_{\mathrm{C}}) \displaystyle\sum_{\mathrm{X} \in \mathscr{H}(\mathrm{Y}_{\theta_{\mathrm{C}}})} \left[\mathrm{Z}(\Lambda \cap \mathrm{X}, 0)^{-1} \sum_{\substack{\Gamma \in \mathscr{C}_{\mathrm{Y}_{\theta_{\mathrm{C}}}}(\mathrm{X}) \\ \Gamma \cap \mathrm{C} = \{\theta_{\mathrm{C}}\}}} \delta^{\Gamma}\mathrm{Z}(\Lambda \cap \mathrm{X}, \mathbf{1}_{\Gamma}s) \right] \rho(\mathrm{C} \cup \mathrm{X}) & \text{si } \mathrm{C} \neq \emptyset \\ \mathrm{A}_{\Lambda,s}\rho(\emptyset) = 0. \end{cases}$$

ii) *On a*

$$\| \mathrm{A}_{\Lambda,s} \| \leq \frac{3}{4}.$$

[Cet énoncé résulte facilement de F. P. *iv*), *v*) et (A.2.3), (A.2.4), (A.2.5) ([65])].

Alors on pose $\tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s}(\mathrm{C}) = \mathrm{Z}(\Lambda, \mathbf{1}_{\mathrm{C}'}s)$, $\forall \mathrm{C} \in \mathscr{C}_0$ (on a $\tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s} \in \mathscr{E}$ d'après F. P. *vi*) et on déduit de (A.3.6), (A.3.8) :

$$(\mathrm{A}.3.9) \qquad \tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s} = \mathrm{Z}(\Lambda, s)\mathbf{1}_{\emptyset} + \mathrm{A}_{\Lambda,s}\tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s}, \qquad (\Lambda \in \mathscr{X}_0,\ s \in \mathrm{T}),$$

[$\mathbf{1}_{\emptyset} \in \mathscr{E}$ est l'indicatrice de la partie vide de $\mathscr{B}$], or, d'après le lemme $(\mathrm{I} - \mathrm{A}_{\Lambda,s})$ est inversible et $\| (\mathrm{I} - \mathrm{A}_{\Lambda,s})^{-1} \| \leq 4$, donc

$$(\mathrm{A}.3.10) \qquad \mathrm{Z}(\Lambda, s) \geq \frac{1}{4} \| \tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s} \|$$

mais comme $| \tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s}(\Lambda_+) | = | \mathrm{Z}(\Lambda, \mathbf{1}_{(\Lambda_+)'}s) | \geq e^{-\mathrm{K}_0|\Lambda|}$, d'après F. P. *i*), *iv*), on a d'après (A.3.7),

$$\| \tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s} \| \geq 2^{-|\Lambda_+|} | \tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s}(\Lambda_+) | = 2^{-|\Lambda_+|}e^{-\mathrm{K}_0|\Lambda|} \geq 2^{-2^d|\Lambda|}e^{-\mathrm{K}_0|\Lambda|},$$

ce qui, avec (A.3.10), établit (A.3.3). □

D'autre part, on note l'inégalité ([66]) :

$$(\mathrm{A}.3.11) \qquad \left| \frac{\mathrm{Z}(\Lambda\backslash\mathrm{X}, \mathbf{1}_{(\mathrm{X}_+)'}s)}{\mathrm{Z}(\Lambda, s)} \right| \leq 4[2^{2^d}e^{\mathrm{K}_0}]^{|\mathrm{X}|}, \qquad \forall \Lambda, \mathrm{X} \in \mathscr{X}_0, \quad \forall s \in \mathrm{T},$$

[d'après (A.3.4), avec $\Gamma_1 = \emptyset$, on a $\mathrm{Z}(\Lambda\backslash\mathrm{X}, \mathbf{1}_{(\mathrm{X}_+)'}s) = \mathrm{Z}(\Lambda \cap \mathrm{X}, 0)^{-1}\tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s}(\mathrm{X}_+)$ donc

$$| \mathrm{Z}(\Lambda\backslash\mathrm{X}, \mathbf{1}_{(\mathrm{X}_+)'}s) | \leq e^{\mathrm{K}_0|\mathrm{X}|}2^{|\mathrm{X}_+|} \| \tilde{\mathrm{Z}}_{\Lambda,s} \| \leq e^{\mathrm{K}_0|\mathrm{X}|}2^{2^d|\mathrm{X}|}4 | \mathrm{Z}(\Lambda, s) |,$$

d'après (A.3.10)].

A.4 Soit encore $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$ un sous-ensemble saturé, on pose

Définition. — *Étant donné une fonction de partition* ([67]) $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}_0 \times \mathrm{T}}$ *on dit qu'une fonction* $\mathrm{G} \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}_0 \times \mathrm{T}}$ *est subordonnée à* Z *si*

F. S. i) G *découple en* $s = 0$.

F. S. ii) *Pour tout* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $\mathrm{G}(\Lambda, .) \in \mathbb{C}^{\mathrm{T}}$ *est régulière à l'infini.*

F. S. iii) *Il existe* $\mathrm{Y}_{\mathrm{G}|\mathrm{Z}} \in \mathscr{X}_0$ *tel que, si* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$ *vérifie* $\Lambda \cap \mathrm{Y}_{\mathrm{G}|\mathrm{Z}} = \emptyset$

$$\mathrm{G}(\Lambda, s) = \mathrm{Z}(\Lambda, s), \qquad \forall s \in \mathrm{T}.$$

([65]) (A.2.5) doit être appliquée à $\Gamma\backslash\theta_{\mathrm{C}} \in \mathscr{C}_{\mathrm{Y}_{\theta_{\mathrm{C}}}}(\mathrm{X})$.

([66]) Voir [*4*], proposition 5.2.

([67]) Voir A.3.

F. S. iv) *Il existe $c > 0$ et des constantes positives K_1, K_2, vérifiant* (A.3.1), (A.3.2), *telles que*

$$(A.4.1) \qquad |\delta^\Gamma G(\Lambda, 1_\Gamma s)| \leq c e^{K_1|\Lambda| - K_2|\Gamma|}, \qquad \forall \Lambda \in \mathscr{X}_0, \quad \Gamma \in \mathscr{C}_0, \quad s \in T.$$

On a

THÉORÈME [68]. — *Soient Z une fonction de partition et G une fonction subordonnée à Z,*

i) *on a*

$$(A.4.2) \qquad \left| \frac{G(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s)} \right| \leq c e^{a_d(K_0 + K_1)|Y_{G|Z}|}, \qquad \forall \Lambda \in \mathscr{X}_0, \quad s \in T,$$

ii) *la famille* $\left(\frac{G(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s)} \right)_{\substack{\Lambda \in \mathscr{X}_0 \\ \Lambda \to E}}$ *converge* [69] *(uniformément en $s \in T$).*

De plus, si $(Z_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions de partition et si, pour chaque $i \in I$, G_i est une fonction subordonnée à Z_i, telles que F. P. iv), F. P. v) et F. S. iv) soient vérifiées avec des constantes indépendantes de $i \in I$ et qu'il existe $X \in \mathscr{X}_0$ tel que $Y_{G_i|Z_i} \subset X$, $\forall i \in I$, alors la convergence est uniforme pour $i \in I$.

En effet (A.2.7) appliquée à G [70] (avec $Y_0 = Y_{G|Z}$) donne, compte tenu de F. S. *iii*):

$$(A.4.3) \qquad \frac{G(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s)} = \sum_{X \in \mathscr{U}(Y_{G|Z})} \left[\sum_{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_G}(X)} \delta^\Gamma G(\Lambda \cap X, 1_\Gamma s) \right] \frac{Z(\Lambda \backslash X, 1_{(X_+)'} s)}{Z(\Lambda, s)}, \qquad (\Lambda \in \mathscr{X}_0, \ s \in T).$$

On en déduit (A.4.2) d'après F. S. *iv*) (A.2.3), (A.2.4), (A.2.5) et (A.3.11).

Ensuite, pour montrer la convergence, on établit d'abord l'inégalité

$$(A.4.4) \qquad \left| \frac{G(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s)} - \frac{G(\Lambda \backslash \Delta, s)}{Z(\Lambda \backslash \Delta, s)} \right| \leq c e^{a_d(K_0 + K_1)[|Y_{G|Z}| + 1]} e^{-\underline{d}[Y_{G|Z}, \Delta]}, \qquad (\Lambda \in \mathscr{X}_0, \ \Delta \in \mathscr{X}_0^1, \ s \in T),$$

où, pour $Y_1, Y_2 \in \mathscr{X}_0$, on a posé :

$$(A.4.5) \quad \underline{d}[Y_1, Y_2] = \min \{ |X \backslash (Y_1 \cup Y_2)| \, ; X \in \mathscr{X}_0, \text{ connexe}, X \cap Y_j \neq \emptyset \, ; j = 1, 2 \}.$$

En appliquant (A.2.7) — avec $Y_0 = Y_{G|Z} \cup \Delta$ — aux fonctions F_j, $j = 1, 2$, définies par

$$(A.4.6) \qquad \begin{aligned} F_1(\Lambda, s) &= G(\Lambda, s) Z(\Lambda \backslash \Delta, s) \\ F_2(\Lambda, s) &= G(\Lambda \backslash \Delta, s) Z(\Lambda, s), \qquad (\Lambda \in \mathscr{X}_0, \ s \in T) \end{aligned}$$

on obtient pour $j = 1, 2$:

$$(A.4.7) \qquad \frac{F_j(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s) Z(\Lambda \backslash \Delta, s)} = \sum_{X \in \mathscr{U}(Y_{G|Z} \cup \Delta)} \left[\sum_{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_{G|Z}} \cup \Delta(X)} \delta^\Gamma F_j(\Lambda \cap X, 1_\Gamma s) \right] \frac{Z(\Lambda \backslash X, 1_{(X_+)'} s)^2}{Z(\Lambda, s) Z(\Lambda \backslash \Delta, s)},$$

or si la composante connexe de $X \in \mathscr{U}(Y_{G|Z} \cup \Delta)$ qui contient Δ ne rencontre pas $Y_{G|Z}$

---

[68] Voir [*4*], § 4.

[69] $\mathscr{X}_0$ étant ordonné par inclusion.

[70] On remarque que la démonstration du lemme A.2 n'utilise la condition *iii*) de l'énoncé que pour des valeurs de $\Lambda \in \mathscr{X}_0$ telles que $\Lambda \cap Y_0 = \emptyset$, ce lemme est donc applicable à G et $Y_0 = Y_{G|Z}$ d'après F. S. *iii*) et F. P. *vi*).

on a $\delta^{\Gamma}F_1(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_{\Gamma}s) = \delta^{\Gamma}F_2(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_{\Gamma}s)$, d'après F. S. *iii)*, donc le terme correspondant à X dans (A.4.7) est indépendant de $j = 1, 2$, donc

$$\text{(A.4.8)} \quad \frac{G(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s)} - \frac{G(\Lambda\backslash\Delta, s)}{Z(\Lambda\backslash\Delta, s)} = \frac{F_1(\Lambda, s) - F_2(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s)Z(\Lambda\backslash\Delta, s)}$$
$$= \sum_{\substack{X \in \mathscr{U}(Y_{G|Z} \cup \Delta) \\ |X| \geq |Y_{G|Z} \cup \Delta| + \underline{d}[Y_{G|Z}, \Delta]}} \left[\sum_{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_{G|Z} \cup \Delta}(X)} \delta^{\Gamma}F_1(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_{\Gamma}s) - \delta^{\Gamma}F_2(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_{\Gamma}s) \right] \frac{Z(\Lambda\backslash X, \mathbf{1}_{(X_+)'}s)^2}{Z(\Lambda, s)Z(\Lambda\backslash\Delta, s)}$$

et (A.4.4) résulte de (A.4.8) d'après (A.2.3), (A.2.4), (A.2.5), (A.3.11) puisque d'après F. S. *vi)* et (A.1.6) on a

$$| \delta^{\Gamma}F_j(\Lambda, \mathbf{1}_{\Gamma}s) | \leq ce^{2K_1|\Lambda| - (K_2 - \log 3)|\Gamma|}, \qquad j = 1, 2.$$

Alors si $\Lambda^{(2)} \subset \Lambda^{(1)}$, on obtient par application itérée de (A.4.4) :

$$\text{(A.4.9)} \qquad \left| \frac{G(\Lambda^{(1)}, s)}{G(\Lambda^{(1)}, s)} - \frac{G(\Lambda^{(2)}, s)}{G(\Lambda^{(2)}, s)} \right| \leq ce^{a_d(K_0 + K_1)[\,|Y_{G|Z}| + 1]} \sum_{\substack{\Delta \in \mathscr{X}_0^1 \\ \Delta \subset \Lambda^{(1)}\backslash\Lambda^{(2)}}} e^{-\underline{d}[Y_{G|Z}, \Delta]},$$

d'où l'on déduit facilement la convergence. □

A.5. On présente dans cette section une représentation du quotient $\dfrac{G(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s)}$ introduite dans [*3*], en vue de la démonstration du théorème A.6. Dans la suite Z est une fonction de partition et G une fonction subordonnée à Z, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$ et $s \in T$ sont fixés.

On pose

$$\text{(A.5.1)} \qquad \mathscr{Z}(\Lambda, s; X) = Z(\Lambda, 0)^{-1}Z(\Lambda, \mathbf{1}_{X_-}s), \qquad X \in \mathscr{X}_0,$$

où $X_- = X \cap \mathscr{B} \subset \mathscr{C}_0$, alors pour tout $V \in \mathscr{X}_0$ vérifiant $Y_{G|Z} \subset V$, on a d'après (A.4.3):

$$\text{(A.5.2)} \quad \frac{G(\Lambda, \mathbf{1}_{V_-}s)}{Z(\Lambda, \mathbf{1}_{V_-}s)} = \sum_{\substack{X \in \mathscr{U}(Y_{G|Z}) \\ X \subset V}} Z(\Lambda \cap X, 0)^{-1} \left[\sum_{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_{G|Z}}(X)} \delta^{\Gamma}G(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_{\Gamma}s) \right] \frac{\mathscr{Z}(\Lambda, s; V\backslash X)}{\mathscr{Z}(\Lambda, s; V)}.$$

si

$$\text{(A.5.3)} \qquad \underline{\mathscr{Z}}(\Lambda, s; Y) = \sum_{X \subset Y} (-1)^{|Y\backslash X|} \mathscr{Z}(\Lambda, s; X), \qquad Y \in \mathscr{X}_0,$$

on a

$$\mathscr{Z}(\Lambda, s; X) = \sum_{Y \subset X} \underline{\mathscr{Z}}(\Lambda, s; Y), \qquad \forall X \in \mathscr{X}_0,$$

donc si

$$\text{(A.5.4)} \quad \tilde{G}^X(\Lambda, s) = Z(\Lambda \cap X, 0)^{-1} \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}_{Y_{G|Z}}(X)} \delta^{\Gamma}G(\Lambda \cap X, \mathbf{1}_{\Gamma}s), \qquad X \in \mathscr{U}(Y_{G|Z}),$$

on a, d'après (A.5.2),

$$\text{(A.5.5)} \qquad \frac{G(\Lambda, \mathbf{1}_{V_-}s)}{Z(\Lambda, \mathbf{1}_{V_-}s)} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{X \in \mathscr{U}(Y_{G|Z}) \\ X \subset V}} \tilde{G}^X(\Lambda, s) \left[\sum_{Y \in V\backslash X} \underline{\mathscr{Z}}(\Lambda, s; Y) \right]}{\displaystyle\sum_{U \subset V} \underline{\mathscr{Z}}(\Lambda, s; U)}.$$

Soit alors $\mathbf{W} = \{ w \in \mathbf{N}^{\mathscr{X}_0^1} ; |\operatorname{supp} w| < \infty \}$, (où $\operatorname{supp} w = \{ \Delta \in \mathscr{X}_0^1 ; w(\Delta) > 0 \}$), pour $w \in \mathbf{W}$ on pose $\| w \|_\infty = \sup_{\Delta \in \mathscr{X}_0^1} w(\Delta)$ et $\| w \|_1 = \sum_{\Delta \in \mathscr{X}_0^1} w(\Delta)$; $\mathbb{C}^{\mathbf{W}}$ est muni d'une loi d'algèbre associative, commutative, unitaire, par

$$(\text{A.5.6}) \qquad f * g(w) = \sum_{0 \leq v \leq w} f(v) g(w - v), \qquad f, g \in \mathbb{C}^{\mathbf{W}}, \quad w \in \mathbf{W}.$$

On définit $\underline{\mathscr{Z}}_1(\Lambda, s ; .) \in \mathbb{C}^{\mathbf{W}}$, par

$$\underline{\mathscr{Z}}_1(\Lambda, s ; w) = \begin{cases} \underline{\mathscr{Z}}(\Lambda, s ; \operatorname{supp} w), & \text{si } \| w \|_\infty \leq 1 \\ 0 & , \text{si } \| w \|_\infty \geq 2, \end{cases}$$

comme $\underline{\mathscr{Z}}_1(\Lambda, s ; 0) \neq 0$, la fonction $\underline{\mathscr{Z}}_1(\Lambda, s ; .)$ est inversible dans l'algèbre $(\mathbb{C}^{\mathbf{W}}, *)$, on note $\underline{\mathscr{Z}}_1^{*(-1)}(\Lambda, s ; .)$ son inverse, on a

LEMME ([71]). — *Soit*

$$(\text{A.5.8}) \qquad Q^X(\Lambda, s ; .) = (\mathbf{1}_{\tilde{X}} \underline{\mathscr{Z}}_1(\Lambda, s ; .))_* \underline{\mathscr{Z}}_1^{*(-1)}(\Lambda, s ; .), \qquad X \in \mathscr{X}$$

(*où* $\mathbf{1}_{\tilde{X}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{W}}$ *est la fonction caractéristique de* $\tilde{X} = \{ w \in \mathbf{W} ; \operatorname{supp} w \subset X \}$) ([72]), *on a*

$$(\text{A.5.9}) \qquad | Q^X(\Lambda, s ; w) | \leq e^{|X| - 2(d+2)\| w \|_1}, \qquad (X \in \mathscr{X}_0, \ w \in \mathbf{W}).$$

On établit l'inégalité (A.5.9) par récurrence sur $|X| + \| w \|_1$: elle est évidemment vérifiée pour $|X| + \| w \|_1 = 0$ (puisqu'alors $X = \emptyset$, $w = 0$ donc $Q^X(\Lambda, s ; w) = 1$), soient $X \in \mathscr{X}_0$ et $w \in \mathbf{W}$ tels que $|X| + \| w \|_1 = k$ et $X \cap \operatorname{supp} w \neq \emptyset$ (si $X \cap \operatorname{supp} w = \emptyset$ l'inégalité est vérifiée puisque $Q^X(\Lambda, s ; 0) = 1$ et $Q^X(\Lambda, s ; w) = 0$ si $\| w \|_1 > 0$) et soit $\Delta \in \mathscr{X}_0^1$, $\Delta \subset X \cap \operatorname{supp} w$, on a

$$(\text{A.5.10}) \quad Q^X(\Lambda, s ; w) - Q^{X \setminus \Delta}(\Lambda, s ; w) = - \sum_{\substack{0 \leq v \leq w \\ \| v \|_\infty \leq 1 \\ \operatorname{supp} v \cap X = \emptyset}} \underline{\mathscr{Z}}_1(\Lambda, s ; v + \mathbf{1}_\Delta) \underline{\mathscr{Z}}_1^{*(-1)}(\Lambda, s ; w - v - \mathbf{1}_\Delta)$$

or, par un calcul standard sur les fonctions tronquées :

$$(\text{A.5.11}) \qquad \underline{\mathscr{Z}}_1(\Lambda, s ; . + \mathbf{1}_\Delta) = \underline{\mathscr{Z}}_0^{\mathrm{T}}(\Lambda, s ; . + \mathbf{1}_\Delta) * \underline{\mathscr{Z}}_1(\Lambda, s ; .), \qquad \forall \Delta \in \mathscr{X}_0^1$$

où

$$(\text{A.5.12}) \qquad \underline{\mathscr{Z}}_0^{\mathrm{T}}(\Lambda, s ; w) = \begin{cases} \underline{\mathscr{Z}}^{\mathrm{T}}(\Lambda, s ; \operatorname{supp} w), & \text{si } \| w \|_\infty = 1, \\ 0 & , \text{si } \| w \|_\infty \neq 1, \end{cases}$$

et, pour $Y \in \mathscr{X}_0 (Y \neq \emptyset ; \mathscr{P}(Y)$ désignant l'ensemble des partitions de Y) ([73]),

$$(\text{A.5.13}) \qquad \underline{\mathscr{Z}}^{\mathrm{T}}(\Lambda, s ; Y) = \sum_{P \in \mathscr{P}(Y)} (-1)^{(|P|-1)} (|P| - 1)! \prod_{U \in P} \underline{\mathscr{Z}}(\Lambda, s ; U),$$

([71]) Voir [*3*], lemme 1, p. 258.

([72]) $X \in \mathscr{X}_0$ est identifié à la partie de $\mathscr{X}_0^1$ constituée de mailles du réseau qu'elle contient.

([73]) Ici Y est identifié à une partie de $\mathscr{X}_0^1$.

donc,

$$\text{(A.5.14)}\quad Q^{X}(\Lambda, s; w) - Q^{X\setminus\Delta}(\Lambda, s; w) = - \sum_{\substack{0 \leq u \leq w \\ \|u\|_\infty \leq 1 \\ \operatorname{supp} u \cap X = \emptyset}} \underline{\mathscr{Z}}_0^{T}(\Lambda, s; u + \mathbf{1}_\Delta) Q^{X \cup \operatorname{supp} u}(\Lambda, s; w - u - \mathbf{1}_\Delta),$$

mais $|X\setminus\Delta| + \|w\|_1 = |X \cup \operatorname{supp} u| + \|w - u - \mathbf{1}_\Delta\|_1 = k - 1$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence et (A.5.12),

$$\text{(A.5.15)}\quad |Q^{X}(\Lambda, s; w)| \leq e^{|X| - 2(d+2)\|w\|_1} . e^{-1}\Big[1 + \sum_{\substack{0 \leq u \leq w \\ \|u\|_\infty \leq 1 \\ \operatorname{supp} u \cap X = \emptyset}} |\underline{\mathscr{Z}}^{T}(\Lambda, s; \operatorname{supp} u \cup \Delta)| \, e^{(2d+5)[\|u\|_1 + 1]}\Big].$$

Or comme $\mathscr{Z}(\Lambda, s; \emptyset) = 1$, on déduit de (A.5.3) que

$$\text{(A.5.16)}\quad \underline{\mathscr{Z}}^{T}(\Lambda, s; Y) = \begin{cases} \mathscr{Z}^{T}(\Lambda, s; Y) & , \quad \text{si} \quad |Y| \geq 2, \\ \mathscr{Z}^{T}(\Lambda, s; Y) - 1 = 0, & \quad \text{si} \quad |Y| = 1, \end{cases} \qquad (Y \in \mathscr{X}_0)$$

et d'après (A.5.1), (A.1.5) et F. P. *ii*), si pour $X \in \mathscr{X}_0$ on pose $\mathfrak{J}(X) = \{ \Gamma \subset X_- ; X\setminus\Gamma' \text{ connexe} \}$, [par conséquent $\mathfrak{J}(X) \neq \emptyset$ si et seulement si X est connexe, et, pour tout $\Delta \in \mathscr{X}_0^1$, $\Delta \subset X$, $\mathfrak{J}(X) = \mathscr{C}_\Delta(X)$], on a

$$\text{(A.5.17)}\quad \mathscr{Z}(\Lambda, s; X) = \sum_{P \in \mathscr{P}(X)} \prod_{Y \in P} \Big(Z(\Lambda \cap Y, 0)^{-1} \sum_{\Gamma \in \mathfrak{J}(Y)} \delta^{\Gamma} Z(\Lambda \cap Y, \mathbf{1}_\Gamma s) \Big),$$

donc

$$\text{(A.5.18)}\quad \mathscr{Z}^{T}(\Lambda, s; Y) = Z(\Lambda \cap Y, 0)^{-1} \sum_{\Gamma \in \mathfrak{J}(Y)} \delta^{\Gamma} Z(\Lambda \cap Y, \mathbf{1}_\Gamma s), \qquad (Y \in \mathscr{X}_0),$$

donc en substituant (A.5.16) et (A.5.18) dans (A.5.15), on obtient

$$\text{(A.5.19)}\quad |Q^{X}(\Lambda, s; w)| \leq e^{|X| - 2(d+2)\|w\|_1} . e^{-1} \Big\{ 1 + \sum_{\substack{Y \in \mathscr{U}(\Delta) \\ |Y| \geq 2}} e^{K_0 |\Lambda \cap Y|} \Big[\sum_{\Gamma \in \mathscr{C}\Delta(Y)} |\delta^{\Gamma} Z(\Lambda \cap Y, \mathbf{1}_\Gamma s)| \Big] e^{(2d+5)|Y|} \Big\},$$

dont on déduit (A.5.9) d'après (A.2.3), (A.2.4), (A.2.5) et (A.3.2). □

Maintenant, on pose

$$\text{(A.5.20)}\quad S(\Lambda, s; w) = \sum_{\substack{X \in \mathscr{U}(Y_{G|Z}) \\ X \subset \operatorname{supp} w}} \tilde{G}^{X}(\Lambda, s) Q^{X}(\Lambda, s; w - \mathbf{1}_X), \qquad w \in \mathbf{W},$$

on déduit d'abord de (A.5.9) que $\sum_{w \in \tilde{V}} |Q^{X}(\Lambda, s; w)| \leq (2e)^{|V|}$, si $X \subset V$, donc

$$\sum_{w \in \tilde{V}} |S(\Lambda, s; w)| < \infty, \qquad \forall V \in \mathscr{X}_0,$$

et par conséquent, d'après (A.5.5), (A.5.7), (A.5.8), on a :

$$\frac{G(\Lambda, \mathbf{1}_{V\_}s)}{Z(\Lambda, \mathbf{1}_{V\_}s)} = \sum_{\substack{X\in\mathscr{U}(Y_{G|Z})\\ X\subset V}} \tilde{G}^X(\Lambda, s)\frac{\sum_{u\in\mathbf{W}} \mathbf{1}_{\widetilde{V\setminus X}}(u)\underline{\mathscr{Z}_1}(\Lambda, s\,;u)}{\sum_{v\in\mathbf{W}} \mathbf{1}_{\tilde{V}}(v)\underline{\mathscr{Z}_1}(\Lambda, s\,;v)}$$

$$= \sum_{\substack{X\in\mathscr{U}(Y_{G|Z})\\ X\subset V}} \tilde{G}^X(\Lambda, s)\sum_{w\in\mathbf{W}} \mathbf{1}_{\tilde{V}}(w)Q^X(\Lambda, s\,; w) = \sum_{\substack{X\in\mathscr{U}(Y_{G|Z})\\ X\subset V}} \tilde{G}^X(\Lambda, s)\sum_{\substack{w\in\tilde{V}\\ w\geq \mathbf{1}_X}} Q^X(\Lambda, s\,; w-\mathbf{1}_X)$$

c'est-à-dire :

(A.5.21) $$\frac{G(\Lambda, \mathbf{1}_{V\_}s)}{Z(\Lambda, \mathbf{1}_{V\_}s)} = \sum_{w\in\tilde{V}} S(\Lambda, s\,; w), \qquad (V\in\mathscr{X}_0,\ Y_{G|Z}\subset V).$$

Ensuite on a :

Proposition. — *Avec les définitions ci-dessus,*

i) *s'il existe* $\Lambda\in\mathscr{X}_0$, $s\in T$ *tels que* $S(\Lambda, s\,; w)\neq 0$ *on a* supp $w\in\mathscr{U}(Y_{G|Z})$; *de plus*

(A.5.22) $$|\,S(\Lambda, s\,; w)\,| \leq ce^{a_d(K_0+K_1)|Y_{G|Z}|}e^{-2(d+2)\|w\|_1}, \qquad (\Lambda\in\mathscr{X}_0,\ s\in T,\ w\in\mathbf{W})$$

ii) *on a* $\sum_{w\in\mathbf{W}} |\,S(\Lambda, s\,; w)\,| < \infty$ *et*

(A.5.23) $$\frac{G(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s)} = \sum_{w\in\mathbf{W}} S(\Lambda, s\,; w), \qquad (\Lambda\in\mathscr{X}_0,\ s\in T).$$

En effet, s'il existe une composante connexe U_1 de supp w telle que $U_1\cap Y_{G|Z} = \emptyset$, soit $U_2 = \text{supp } w\setminus U_1$; si $Y_1\subset U_1$, $Y_2\subset U_2$, $(Y_1, Y_2\in\mathscr{X}_0)$ on a

$$\mathscr{Z}(\Lambda, s\,; Y_1\cup Y_2) = \mathscr{Z}(\Lambda, s\,; Y_1)\mathscr{Z}(\Lambda, s\,; Y_2)$$

d'après (A.5.1) et F. P. *i*), on en déduit que pour tous $u_1\in\tilde{U}_1$, $u_2\in\tilde{U}_2$

$$\underline{\mathscr{Z}_1}(\Lambda, s\,; u_1+u_2) = \underline{\mathscr{Z}_1}(\Lambda, s\,; u_1)\underline{\mathscr{Z}_1}(\Lambda, s\,; u_2)$$

et par conséquent

$$Q^X(\Lambda, s\,; u_1+u_2) = Q^X(\Lambda, s\,; u_1)Q^X(\Lambda, s\,; u_2), \qquad \forall X\in\mathscr{X}_0.$$

Si maintenant $X\in\mathscr{U}(Y_{G|Z})$ vérifie $X\subset$ supp w on a $X\subset U_2$ donc $Q^X(\Lambda, s\,; \mathbf{1}_{U_1}w) = 0$ puisque $X\cap$ supp $\mathbf{1}_{U_1}w = \emptyset$ et $\mathbf{1}_{U_1}w\neq 0$, donc

$$Q^X(\Lambda, s\,; w-\mathbf{1}_X) = Q^X(\Lambda, s\,; \mathbf{1}_{U_1}w)Q^X(\Lambda, s\,; \mathbf{1}_{U_2}w-\mathbf{1}_X) = 0,$$

donc $S(\Lambda, s\,; w) = 0$, $\forall\Lambda\in\mathscr{X}_0$, $s\in T$. L'inégalité (A.5.22) résulte de (A.2.3), (A.2.4), (A.2.5), (A.4.1) et (A.5.9), on en déduit, d'après (A.2.3), que $\sum_{w\in\mathbf{W}} |\,S(\Lambda, s\,; w)\,| < \infty$, (A.5.23) résulte alors de (A.5.21) puisque d'après F. P. *i*) et F. S. *i*)

$$\frac{G(\Lambda, s)}{Z(\Lambda, s)} = \lim_{\substack{V\in\mathscr{X}_0\\ V\to E}} \frac{G(\Lambda, \mathbf{1}_{V\_}s)}{Z(\Lambda, \mathbf{1}_{V\_}s)}. \qquad \square$$

A.6. On suppose donnée une famille $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'éléments de $\mathscr{X}_0$ et on pose

$$(A.6.1) \quad \underline{d}[(Y_j)_{1 \leq j \leq n}]$$
$$= \min \left\{ \left| X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} Y_j \right) \right| ; X \in \mathscr{X}_0 \text{ « connexe } \mathrm{mod}(Y_j)_{1 \leq j \leq n} \text{ »}, \ X \cap Y_j \neq \emptyset, \ 1 \leq j \leq n \right\}$$

où X « connexe mod. $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ » signifie que pour toute décomposition $X = X_1 \cup X_2$ de X en deux unions non vides de parties connexes il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $Y_j \cap X_1 \neq \emptyset$ et $Y_j \cap X_2 \neq \emptyset$ (74).

Soient d'autre part $Z \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}_0 \times T}$ une fonction de partition (75) et pour chaque partie u de $e_n = \{1, \ldots, n\}$ une fonction G_u subordonnée à Z (76) telles que,

F. T. i) *Pour chaque* $u \subset e_n$, $Y_{G_u|Z} = Y_u \equiv \bigcup_{j \in u} Y_j$.

F. T. ii) *Si* $u \subset v \subset e_n$ *et si* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$ *vérifie* $\Lambda \cap Y_{v \setminus u} = \emptyset$, *on a*

$$G_v(\Lambda, s) = G_u(\Lambda, s), \qquad \forall s \in T.$$

On pose, pour chaque $u \subset e_n$, $S_u = \dfrac{G_u}{Z}$, et

$$(A.6.2) \qquad S^T_{e_n} = \sum_{P \in \mathscr{P}(e_n)} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \prod_{u \in P} S_u,$$

[$\mathscr{P}(e_n)$ est l'ensemble des partitions de e_n], on a

THÉORÈME (77). — *Sous les hypothèses ci-dessus, on a pour tous* $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in T$

$$(A.6.3) \qquad |S^T_{e_n}(\Lambda, s)| \leq \left(\sum_{P \in \mathscr{P}(e_n)} (|P|-1)! \prod_{u \in P} c_u \right) e^{a_d(K_0+K_1)\sum_{j=1}^{n}|Y_j|} e^{-\underline{d}[(Y_j)_{1 \leq j \leq n}]}.$$

[c_u *est telle que* (A.4.1) *soit vérifiée avec* $G = G_u$, $c = c_u$].

En effet, suivant les notations de A.5, on pose

$$(A.6.4) \qquad S^T_{e_n}(\Lambda, s; .) = \sum_{P \in \mathscr{P}(e_n)} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \prod_{u \in P}{}^{*} S_u(\Lambda, s; .), \qquad (\Lambda \in \mathscr{X}_0, s \in T)$$

où Π^* désigne le produit dans l'algèbre $(\mathbb{C}^{\mathbf{W}}, *)$, d'après (A.6.2) et (A.5.23) on a

$$(A.6.5) \qquad S^T_{e_n}(\Lambda, v) = \sum_{w \in \mathbf{W}} S^T_{e_n}(\Lambda, s; w), \qquad \forall \Lambda \in \mathscr{X}_0, \quad s \in T.$$

---

(74) Dans le cas où Y_j sont connexes, on a

$$\underline{d}[(Y_j)_{1 \leq j \leq n}] = \min \left\{ \left| X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} Y_j \right) \right| ; X \in \mathscr{X}_0 \text{ connexe}, \bigcup_{j=1}^{n} Y_j \subset X \right\},$$

pour $n = 2$ on retrouve (A.4.5).

(75) Voir A.3.

(76) Voir A.4.

(77) Voir [3].

Si $S^T_{e_n}(\Lambda, s; w) \neq 0$ on a supp $w \subset \mathcal{U}(Y_{e_n})$ et supp w est « connexe mod. $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ », en effet, d'abord s'il existe $j \in e_n$ tel que $Y_j \not\subset$ supp w, on a, d'après (A.5.20),

$$S_u(\Lambda, s; v) = 0, \qquad \forall v \leq w,$$

pour tout $u \subset e_n$ tel que $j \in u$, donc $S^T_{e_n}(\Lambda, s; w) = 0$, puis, s'il existe une composante connexe V de supp w telle que $V \cap Y_{e_n} = \emptyset$, d'après la proposition A.5, *i*), on a

$$S_u(\Lambda, s; v) = 0, \qquad \forall u \subset e_n (u \neq \emptyset),$$

si $v \leq w$ est tel que supp $v \cap V \neq \emptyset$, donc $S^T_{e_n}(\Lambda, s; w) = 0$, donc supp $w \subset \mathcal{U}(Y_{e_n})$ si $S^T_{e_n}(\Lambda, s; w) \neq 0$, enfin, s'il existe une décomposition $e_n = t_1 \cup t_2$ en deux parties non vides disjointes et une décomposition supp $w = V_1 \cup V_2$ en deux unions de composantes connexes ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$), telles que $Y_{t_1} \cap V_2 = Y_{t_2} \cap V_1 = \emptyset$, on a d'après F. T. *ii*) (78),

$$S_u(\Lambda, s; v) = S_{u \cap t_1}(\Lambda, s; \mathbf{1}_{V_1} v) . S_{u \cap t_2}(\Lambda, s; \mathbf{1}_{V_2} v), \qquad \forall v \leq w,$$

donc, d'après la proposition A.5 *i*),

$$\text{(A.6.6)} \qquad S_u(\Lambda, s; v) = [S_{u \cap t_1}(\Lambda, s; .) * S_{u \cap t_2}(\Lambda, s; .)](v), \qquad \forall v \leq w,$$

donc si l'on définit $R : \{ u \subset e_n ; u \neq \emptyset \} \to \mathbb{C}^{\mathbf{W}}$ par

$$R_u = S_{u \cap t_2}(\Lambda, s; .) * S_{u \cap t_2}(\Lambda, s; .)$$

d'une part on a $R_u(v) = S_u(\Lambda, s; v)$, $\forall v \leq w$ donc

$$S^T_{e_n}(\Lambda, s; w) = R^T_{e_n}(w)$$

d'autre part, d'après un résultat classique sur les fonctions tronquées [ici à valeurs dans l'algèbre $(\mathbb{C}^{\mathbf{W}}, *)$], l'égalité $R_u = R_{u \cap t_1} * R_{u \cap t_2}$, $u \subset e_n$, implique $R^T_{e_n} = 0$.

On a donc, d'après (A.6.5),

$$\text{(A.6.7)} \quad | S^T_{e_n}(\Lambda, s) | \leq \sum_{w \in \mathbf{W}} | S^T_{e_n}(\Lambda, s; w) | \leq \sum_{\substack{w \in \mathbf{W} \\ |\operatorname{supp} w| \geq |Y_{e_n}| + \underline{d}[(Y_j)_{1 \leq j \leq n}]}} | S^T_{e_n}(\Lambda, s; w) |$$

$$\leq e^{-\underline{d}[(Y_j)_{1 \leq j \leq n}]} \sum_{w \in \mathbf{W}} e^{\|w\|_1} | S^T_{e_n}(\Lambda, s; w) |,$$

donc, d'après (A.6.4),

$$\text{(A.6.8)} \quad | S^T_{e_n}(\Lambda, s) | \leq e^{-\underline{d}[(Y_j)_{1 \leq j \leq n}]} \sum_{P \in \mathcal{P}(e_n)} (|P| - 1)! \prod_{u \in P} \Big(\sum_{v_u \in \mathbf{W}} e^{\|v_u\|_1} | S_u(\Lambda, s; v_u) | \Big)$$

or d'après (A.5.22) et (A.2.3)

$$\text{(A.6.9)} \quad \sum_{v \in \mathbf{W}} e^{\|v\|_1} | S_u(\Lambda, s; v) | = \sum_{X \in \mathcal{U}(Y_u)} \sum_{\substack{v \in \mathbf{W} \\ \operatorname{supp} v = X}} e^{\|v\|_1} | S_u(\Lambda, s; v) | \leq c_u e^{a d (K_0 + K_1) |Y_u|},$$

ce qui établit (A.6.3). □

---

(78) Avec par convention $S_{\emptyset}(\Lambda, s; .) = \mathbf{1}_{\{0\}}$, [$\mathbf{1}_{\{0\}}$ est l'identité de l'algèbre $(\mathbb{C}^{\mathbf{W}}, *)$].

APPENDICE B

PROPRIÉTÉS DES COEFFICIENTS H [79]

En vue d'une application éventuelle à d'autres modèles [80] de théorie des champs, on introduit plus généralement pour $k \geq 1$, entier les coefficients $H^{(k)}$ définis par [81]

$$\text{(B.0.1)} \quad \tilde{H}_\Gamma^{(k)}(\alpha\,;\beta_1,\ldots,\beta_k) = \prod_{j=1}^{k} \frac{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_{\tau,\Gamma}^{-1}\mathbf{1}_{\Delta_{\beta_j}})}{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_\tau^{-1}\mathbf{1}_{\Delta_{\beta_j}})}, \qquad (\Gamma \in \mathscr{C}\,;\,\alpha \in \mathscr{R}\,;\,\beta_j \in \mathscr{R},\ 1 \leq j \leq k),$$

et

$$\text{(B.0.2)} \quad H^{(k)}(s \mid \alpha\,;\beta_1,\ \ldots,\beta_k) = \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} A_\Gamma(s)\tilde{H}_\Gamma^{(k)}(\alpha\,;\beta_1,\ \ldots,\beta_k), \qquad (s \in S_0\,;\,\alpha \in \mathscr{R}\,;\,\beta_j \in \mathscr{R},\ 1 \leq j \leq k),$$

où l'on suppose $\tau \geq l^{-1}$ et où $A_\Gamma(s)$ est défini par (1.5.2).

[D'après [*4*], proposition 7.1, on a $0 \leq H^{(k)}(s \mid \alpha\,;\beta_1,\ \ldots,\beta_k) \leq 1$].

B.1. Soit $\Gamma \mapsto \tilde{f}_\Gamma$ une fonction bornée définie sur $\mathscr{C}$ [82], on pose

$$\text{(B.1.1)} \qquad f(s) = \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} A_\Gamma(s)\tilde{f}_{\Gamma'}, \qquad (s \in S_0),$$

on a d'abord,

LEMME 1. — *Pour que f soit régulière à l'infini* [83] *(il faut et) il suffit que*

$$\text{(B.1.2)} \qquad \tilde{f}_\Gamma = \lim_{\substack{C \in \mathscr{C}_0 \\ C \to \mathscr{B}}} \tilde{f}_{\Gamma \cup C'}, \qquad \forall \Gamma \in \mathscr{C}.$$

Démonstration. — Pour tous $C \in \mathscr{C}_0$, $s \in S_0$, on a

$$\text{(B.1.3)} \qquad f(\mathbf{1}_C s) = \sum_{\Gamma_1 \subset C} \Big(\prod_{a_1 \in \Gamma_1} s_{a_1} \prod_{b_1 \in \Gamma_1' \cap C} (1 - s_{b_1}) \Big) \tilde{f}_{\Gamma_1'},$$

et, comme $\mathbf{1}_{C'} s \in S_0$ (puisque S_0 est saturé),

$$\text{(B.1.4)} \qquad 1 = \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} A_\Gamma(\mathbf{1}_{C'} s) = \sum_{\Gamma_2 \subset C'} \Big(\prod_{a_2 \in \Gamma_2} s_{a_2} \prod_{b_2 \in \Gamma_2' \cap C'} (1 - s_{b_2}) \Big),$$

[79] Définis en (1.5.1), (1.5.3).
[80] Voir appendice D.
[81] Les notations sont celles de 1.5.
[82] Voir A.1 et (1.5.2).
[83] Voir définition A.1.

donc en faisant le produit membre à membre de (B.1.3) et (B.1.4)

$$f(\mathbf{1}_C s) = \sum_{\substack{\Gamma_1 \subset C \\ \Gamma_2 \subset C'}} \left(\prod_{a \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} s_a \prod_{b \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)'} (1 - s_b) \right) \tilde{f}_{\Gamma_1'} = \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} A_\Gamma(s) \tilde{f}_{(\Gamma \cap C)'} \tag{B.1.5}$$

donc si $\tilde{f}$ vérifie (B.1.2) on a, d'après le théorème de la convergence dominée,

$$f(s) = \lim_{\substack{C \in \mathscr{C}_0 \\ C \to \mathscr{B}}} f(\mathbf{1}_C s), \qquad \forall s \in S_0 . \tag{B.1.6}$$

[La réciproque est triviale puisque $\tilde{f}_\Gamma = f(\mathbf{1}_{\Gamma'})$, $\forall \Gamma \in \mathscr{C}$]. □

D'autre part, pour $b \in \mathscr{B}$, on pose $\partial^{(b)} = \dfrac{\partial}{\partial s_b}$, et pour $C \in \mathscr{C}_0$, $\partial^C = \prod_{b \in C} \partial^{(b)}$, on a

LEMME 2. — *Si f est définie par* (B.1.1), *pour tout $C \in \mathscr{C}_0$, on a* [84]

$$\partial^C f(s) = \sum_{\substack{\Gamma \in \mathscr{C} \\ \Gamma \supset C}} A_\Gamma(s \vee \mathbf{1}_C) \delta^C f(\mathbf{1}_\Gamma) . \tag{B.1.7}$$

Démonstration. — On a évidemment $\partial^{(b)} A_\Gamma(s) = \delta^{(b)} A_\Gamma(s \vee \mathbf{1}_{\{b\}})$, $\forall b \in \mathscr{B}$, $s \in S_0$, $\Gamma \in \mathscr{C}$, donc, en dérivant (B.1.1) terme à terme, on obtient

$$\partial^{(b)} f(s) = \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} \delta^{(b)} A_\Gamma(s \vee \mathbf{1}_{\{b\}}) \tilde{f}_{\Gamma'} = \delta^{(b)} f(s \vee \mathbf{1}_{\{b\}})$$

donc, par itération,

$$\partial^C f(s) = \delta^C f(s \vee \mathbf{1}_C), \qquad \forall C \in \mathscr{C}_0 , \quad s \in S_0 . \tag{B.1.8}$$

Par ailleurs $f(\mathbf{1}_\Gamma) = \tilde{f}_{\Gamma'}$, $\forall \Gamma \in \mathscr{C}$, donc

$$\delta^{(b)} f(s) = \sum_{\substack{\Gamma \in \mathscr{C} \\ \Gamma \ni b}} A_\Gamma(s)(\tilde{f}_{\Gamma'} - \tilde{f}_{(\Gamma \setminus b)'}) = \sum_{\substack{\Gamma \in \mathscr{C} \\ \Gamma \ni b}} A_\Gamma(s) \delta^{(b)} f(\mathbf{1}_\Gamma) = \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} A_\Gamma(s) \delta^{(b)} f(\mathbf{1}_\Gamma) ,$$

et, par itération,

$$\delta^C f(s) = \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} A_\Gamma(s) \delta^C f(\mathbf{1}_\Gamma) , \qquad \forall C \in \mathscr{C}_0 , \quad s \in S_0 . \tag{B.1.9}$$

On obtient (B.1.7) en substituant (B.1.9) au second membre de (B.1.8). □

Par un calcul élémentaire de $\delta^C f(\mathbf{1}_\Gamma)$, sous l'hypothèse que

$$f(\mathbf{1}_\Gamma) = \prod_{j=1}^{k} f^{(j)}(\mathbf{1}_\Gamma) , \qquad \forall \Gamma \in \mathscr{C},$$

on déduit de (B.1.7),

COROLLAIRE. — *On suppose données k fonctions bornées $\Gamma \mapsto \tilde{f}_\Gamma^{(j)}$, $\Gamma \in \mathscr{C}$, $1 \leq j \leq k$, et on pose $\tilde{f}_\Gamma = \prod_{j=1}^{k} \tilde{f}_\Gamma^{(j)}$, $\forall \Gamma \in \mathscr{C}$, alors si*

$$f^{(j)}(s) = \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} A_\Gamma(s) \tilde{f}_{\Gamma'}^{(j)} , \qquad 1 \leq j \leq k , \quad s \in S_0 \tag{B.1.10}$$

[84] δ^C, $C \in \mathscr{C}_0$, est défini en (A.1.1), (A.1.2), d'autre part $x \vee y = \sup . \{ x, y \}$.

et si f est définie par (B.1.1), *on a*

$$\text{(B.1.11)} \quad \partial^{C} f(s) = \sum_{\substack{\Gamma\in\mathscr{C} \\ \Gamma\supset C}} A_{\Gamma}(s \vee \mathbf{1}_{C}) \left[\sum_{\bigcup_{j=1}^{k} C_j = C} \prod_{j=1}^{k} \delta^{C_j} f^{(j)}(\mathbf{1}_{(\Gamma\setminus C)\cup C_j}) \right], \qquad \forall C \in \mathscr{C}_0,$$

[*la somme entre crochets comporte* $(2^k - 1)^{|C|}$ *termes*].

B.2. On a

PROPOSITION. — *Pour tout entier $k \geq 1$ et tous $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathscr{R}$, la fonction*

$$s \mapsto H^{(k)}(s \mid \alpha ; \beta_1, \ldots, \beta_k), \qquad (s \in S_0),$$

est régulière à l'infini.

Démonstration. — D'après [*4*], (7.2), on a

$$\text{(B.2.1)} \qquad (\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_{\tau,\Gamma}^{-1} \mathbf{1}_{\Delta_\beta}) = \int_{\Delta_\alpha \times \Delta_\beta} G_{\tau,\Gamma}(x, y) dx dy,$$

où $G_{\tau,\Gamma}$ admet (presque partout) la représentation

$$\text{(B.2.2)} \qquad G_{\tau,\Gamma}(x, y) = \int_0^\infty e^{-\tau^2 T} dT \int_{C(\mathbf{R}^+, E)} \prod_{b\in\Gamma} J_b^T(q) P_{x,y}^T(dq),$$

avec

$$J_b^T(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{ q(t) \}_{0 \leq t \leq T} \cap b \neq \emptyset \\ 1 & \text{si non} \end{cases}.$$

On a pour tous $q \in C(E, \mathbf{R}^+)$, $T > 0$, $\Gamma \in \mathscr{C}$,

$$\text{(B.2.3)} \qquad \prod_{b\in\Gamma} J_b^T(q) = \lim_{\substack{C\in\mathscr{C}_0 \\ C\to\mathscr{B}}} \prod_{a\in\Gamma\cup C'} J_a^T(q),$$

(puisque q, continue, est bornée sur $[0, T]$, donc $|\{ b \in \mathscr{B} ; J_b^T(q) = 0 \}| < \infty$), donc, d'après le théorème de Lebesgue, d'abord

$$G_{\tau,\Gamma}(x, y) = \lim_{\substack{C\in\mathscr{C}_0 \\ C\to\mathscr{B}}} G_{\tau,\Gamma\cup C'}(x, y), \text{ presque partout,}$$

puis

$$\text{(B.2.4)} \qquad (\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_{\tau,\Gamma}^{-1} \mathbf{1}_{\Delta_\beta}) = \lim_{\substack{C\in\mathscr{C}_0 \\ C\to\mathscr{B}}} (\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_{\tau,\Gamma\cup C'}^{-1} \mathbf{1}_{\Delta_\beta}).$$

On conclut d'après B.1, lemme 1. □

B.3. Pour $\alpha, \beta \in \mathscr{R}$, $s \in S_0$, on pose

$$\text{(B.3.1)} \qquad G_\tau(s \mid \alpha, \beta) = \sum_{\Gamma\in\mathscr{C}} A_\Gamma(s) (\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_{\tau,\Gamma'}^{-1} \mathbf{1}_{\Delta_\beta}).$$

On rappelle l'estimation fondamentale de Glimm-Jaffe-Spencer :

THÉORÈME ([85]). — *Il existe une fonction croissante* $\Gamma \mapsto \mathrm{L}(\Gamma) \geq 1$, $\Gamma \in \mathscr{C}_0$, *et une constante* $\mathrm{K} > 0$, *vérifiant*

(B.3.2) $$\sum_{\mathrm{P}\in\mathscr{P}(\Gamma)} \prod_{\mathrm{C}\in\mathrm{P}} \mathrm{L}(\mathrm{C}) \leq e^{\mathrm{K}|\Gamma|}, \qquad \forall\Gamma \in \mathscr{C}_0,$$

($\mathscr{P}(\Gamma)$ *est l'ensemble des partitions de* Γ), *et telles que*

(B.3.3) $$|\delta^{\Gamma}\mathrm{G}_{\tau}(s\,|\,\alpha,\beta)| \leq \mathrm{L}(\Gamma)(l\tau)^{-|\Gamma|/2}e^{-\frac{\tau}{2}\max\{\mathrm{D}[\alpha,\Gamma],\mathrm{D}[\beta,\Gamma]\}},$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathscr{R}$, $s \in \mathrm{S}_0$, $\Gamma \in \mathscr{C}_0$, $\tau \geq u_0 l^{-1}$ *(u_0 est une constante universelle), avec*

$$\mathrm{D}[\alpha,\Gamma] = \max_{b\in\Gamma} d[\Delta_\alpha, b], \qquad (\mathrm{D}[\alpha, \varnothing] = 0),$$

où d est la distance euclidienne.

D'autre part, on a

LEMME. — *Il existe une constante* $a > 0$ *telle que,*

(B.3.4) $$0 \leq (\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_\tau^{-1}\mathbf{1}_{\Delta_\beta})^{-1} \leq a\tau^4 e^{4\tau[\alpha,\beta]}, \qquad \tau \geq l^{-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathscr{R},$$

avec $[\alpha, \beta] = d[\Delta_\alpha, \Delta_\beta]$.

Démonstration. — On a ([86])

(B.3.5) $$(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_\tau^{-1}\mathbf{1}_{\Delta_\beta}) = \int_{\Delta_\alpha\times\Delta_\beta} \mathrm{G}_\tau^{(1)}(x-y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_\alpha\times\Delta_\beta} \mathrm{K}_0(\tau\,|\,x-y\,|)dxdy.$$

D'abord, si $[\alpha, \beta] = 0$, soient V_α et V_β les images de Δ_α et Δ_β par l'homothétie de centre $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et de rapport $(\tau l)^{-1} \leq 1$, comme $\mathrm{K}_0(t) \geq 0$, $\forall t > 0$, on a

(B.3.6) $$\int_{\Delta_\alpha\times\Delta_\beta} \mathrm{K}_0(\tau\,|\,x-y\,|)dxdy \geq \int_{\mathrm{V}_\alpha\times\mathrm{V}_\beta} \mathrm{K}_0(\tau\,|\,x-y\,|)dxdy = (\tau l)^{-4}\int_{\Delta_\alpha\times\Delta_\beta} \mathrm{K}_0(l^{-1}\,|\,u-v\,|)dudv.$$

Ensuite, $\forall\xi > 0$ on a $\mathrm{K}_0(t) \geq \frac{\xi}{2}e^{-(1+\xi)t}$, si $t \geq 1$, [en effet, on a $\mathrm{G}_\tau^{(1)} = \mathrm{G}_\tau^{(1/2)} * \mathrm{G}_\tau^{(1/2)}$ et $\mathrm{G}_\tau^{(1/2)}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\tau|x|}}{|x|}$, $\forall x \in \mathrm{E}$, donc

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_0(|\,u\,|) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{E}} \frac{e^{-|u-v|}}{|\,u-v\,|}\frac{e^{-|v|}}{|\,v\,|}dv \geq \frac{1}{2\pi}e^{-|u|}\int_{\mathrm{E}} \frac{e^{-2|v|}}{(|\,u\,|+|\,v\,|)\,|\,v\,|}dv \\ &= e^{-|u|}\int_0^\infty \frac{e^{-2\rho}}{|\,u\,|+\rho}d\rho \geq \frac{e^{-|u|}}{2\,|\,u\,|}\int_0^{|u|} e^{-2\rho}d\rho \geq \frac{\xi}{2}e^{-(1+\xi)|u|}, \quad \text{si} \quad |\,u\,| \geq 1],\end{aligned}$$

or, si $[\alpha, \beta] \neq 0$, on a $[\alpha, \beta] \geq l$, donc, pour tous $x \in \Delta_\alpha$, $y \in \Delta_\beta$, d'une part $\tau\,|\,x-y\,| \geq 1$ et d'autre part $|\,x-y\,| \leq [\alpha,\beta] + 2\sqrt{2}l \leq (1+2\sqrt{2})[\alpha,\beta]$, donc

(B.3.7) $$\mathrm{K}_0(\tau\,|\,x-y\,|) \geq \frac{\xi}{2}e^{-(1+\xi)(1+2\sqrt{2})\tau[\alpha,\beta]}, \qquad \forall x \in \Delta_\alpha, \quad y \in \Delta_\beta,$$

et (B.3.4) résulte immédiatement de (B.3.5), (B.3.6), (B.3.7). □

([85]) D'après [*4*], propositions 8.1 et 8.2.
([86]) Voir 1.3, remarque ([6]).

Alors de (B.1.11), (B.3.3), (B.3.4) on déduit

Proposition. — *Avec les notations du théorème ci-dessus, on a (si $\tau \geq u_0 l^{-1}$),*

$$|\partial^{C} H^{(k)}(s \mid \alpha ; \beta_1, \ldots, \beta_k)| \leq a^k (2^k - 1)^{|C|} L(C)^k (l\tau)^{-|C|/2} e^{-\frac{\tau}{2} D[\alpha, C]} \tau^{4k} e^{4\tau \sum_{j=1}^{k} [\alpha, \beta_j]}, \quad (C \in \mathscr{C}_0,\ s \in S_0,\ \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathscr{R}). \tag{B.3.8}$$

APPENDICE C

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.7

L'essentiel de la démonstration consiste à établir $\left(\text{si } |\operatorname{Arg} \lambda^2| \leq \frac{\pi}{4}\right)$, une majoration de la forme :

$$\| \wedge^r([\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1}) \det_{\mathrm{ren}}(\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)) \| \leq e^{9r} e^{|\lambda|^2 \sum_{\alpha\in\Delta} \sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} \mathrm{J}_\beta} \tag{C.0.1}$$

où J_β est une fonction positive $\mathscr{A}_\beta^+$-mesurable ([87]) telle que

$$\| e^{t\mathrm{J}_\beta} \|_1 \leq c, \qquad \forall t \in [0, t_0], \ \forall \beta \in \mathscr{R},$$

on conclut alors facilement (en C.6) en utilisant l'indépendance des variables aléatoires mesurables dans des régions disjointes de E (voir 1.1 (*b*)).

C.1. D'après (1.6.28) on a

$$\begin{aligned} &\left| e^{-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{Tr}_{\mathrm{reg}}^{:} \mathbf{K}_\Lambda(s)^2} \right| \\ &\quad \leq \left| e^{-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{Tr}_{\mathrm{reg}}^{:} \mathrm{D}_\Lambda(s)^2} \right| e^{|\lambda|^2\left\{\|\mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{R}_\Lambda(s)\|_1 + \frac{1}{2}\|\mathrm{R}_\Lambda(s)\|_2^2 + \mathrm{E}_\nu\left[\|\mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{R}_\Lambda(s)\|_1 + \frac{1}{2}\|\mathrm{R}_\Lambda(s)\|_2^2\right]\right\}}, \end{aligned} \tag{C.1.1}$$

d'autre part le lemme [*10*] 4.2 s'applique à $\mathbf{K}_\Lambda(s)$, donc, compte tenu de (C.1.1), si $|\operatorname{Arg} \lambda^2| \leq \frac{\pi}{4}$, on a pour tous $r \in \mathrm{N}$, $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in \mathrm{S}_0$,

$$\begin{aligned} &\| \wedge^r([\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)]^{-1}) \det_{\mathrm{ren}}(\mathrm{I} + \lambda \mathbf{K}_\Lambda(s)) \| \\ &\qquad \leq e^{9r} \left| e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, \mathrm{S}(\lambda, \mathrm{D}_\Lambda(s)) - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{Tr}_{\mathrm{re}}^{:}\, \mathrm{D}_\Lambda(s)^2} \right| . \mathrm{T}(\lambda, \mathrm{A}_\Lambda(s)) . e^{|\lambda|^2 \mathrm{W}_\Lambda(s)} \end{aligned} \tag{C.1.2}$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_\Lambda(s) = {} & \mathrm{E}_\nu\left[\| \mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{R}_\Lambda(s) \|_1 + \frac{1}{2} \| \mathrm{R}_\Lambda(s) \|_2^2 \right]\Omega \\ & + \frac{1}{4} \| \mathrm{Q}_\Lambda(s) \|_2^2 + \frac{7}{4} \| \mathrm{A}_\Lambda(s)\mathrm{Q}_\Lambda(s) \|_1 + \frac{21}{2} \| \mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{R}_\Lambda(s)^* \|_1 + 2 \| \mathrm{D}_\Lambda(s)^*\mathrm{R}_\Lambda(s)^* \|_1 \\ & + \| \mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{R}_\Lambda(s) \|_1 + \frac{13}{2} \| \mathrm{R}_\Lambda(s) \|_2^2 . \end{aligned} \tag{C.1.3}$$

$$\mathrm{A}_\Lambda(s) = [\mathrm{I} + \lambda^2 \mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{D}_\Lambda(s)^*]^{-1/2}(\mathrm{D}_\Lambda(s) + \mathrm{D}_\Lambda(s)^*)[\mathrm{I} + \lambda^2 \mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{D}_\Lambda(s)^*]^{-1/2}, \tag{C.1.4}$$

$$\mathrm{Q}_\Lambda(s) = [\mathrm{I} + \lambda^2 \mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{D}_\Lambda(s)^*]^{-1/2}(\mathrm{R}_\Lambda(s) + \mathrm{R}_\Lambda(s)^*)[\mathrm{I} + \lambda^2 \mathrm{D}_\Lambda(s)\mathrm{D}_\Lambda(s)^*]^{-1/2}, \tag{C.1.5}$$

$$\mathrm{T}(\lambda, \mathrm{A}) = \det_3(\mathrm{I} + \lambda \mathrm{O}_{\lambda\mathrm{A}}^+)^{1/4} e^{-\mathrm{Tr}\left\{\frac{|\lambda|^4}{8}(\mathrm{AA}^*)^2 + \frac{|\lambda|^2}{4}\mathrm{AA}^*(\lambda \mathrm{A} + \bar{\lambda}\mathrm{A}^*)\right\}}, \tag{C.1.6}$$

avec

$$\mathrm{O}_\mathrm{X} = \mathrm{X} + \mathrm{X}^* + \mathrm{XX}^*, \qquad \mathrm{O}_\mathrm{X}^+ = \frac{1}{2}(\mathrm{O}_\mathrm{X} + |\mathrm{O}_\mathrm{X}|),$$

([87]) Voir note ([13]), p. 245.

et

$$\text{(C.1.7)}\quad S(\lambda, D) = \lambda^3 [I + \lambda^2 DD^*]^{-1} DD^*(D + D^*) \left\{ -I + \frac{\lambda}{2}(I + [I + \lambda^2 DD^*]^{-1})(D + D^*) \right\}.$$

Enfin, on rappelle (1.6.27) :

$$\text{(C.1.8)}\qquad \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{res}} D_\Lambda(s)^2 = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{res}} D_\alpha(s)^2$$

et on vérifie que, comme en [*10*] (4.3.9), (4.3.10),

$$\text{(C.1.9)}\qquad S(\lambda, D_\Lambda(s)) = \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} S(\lambda, D_\alpha(s)),$$

et, avec $A_\alpha(s) = A_{\Delta_\alpha}(s)$,

$$\text{(C.1.10)}\qquad T(\lambda, A_\Lambda(s)) = \prod_{\alpha \in \underline{\Lambda}} T(\lambda, A_\alpha(s)).$$

C.2. Majoration de $W_\Lambda(s)$ et de $| \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{res}} D_\Lambda(s)^2 |$

LEMME. — *Il existe des constantes $c > 0$, $u > 0$ (indépendantes de $m \geq l^{-1}$ et $M \geq l^{-1}$) telles que, pour tous $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in S_0$,*

$$\text{(C.2.1)}\qquad W_\Lambda(s) \leq c \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha - \beta|}(F_\beta^2 + \Omega),$$

et

$$\text{(C.2.2)}\qquad | \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{res}} D_\Lambda(s)^2 | \leq c \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha - \beta|}(F_\beta^2 + \Omega),$$

(les fonctions F_β, $\beta \in \mathscr{R}$, sont introduites aux lemmes 1.4 et 1.6).

Démonstration. — On déduit de (1.4.2), (1.4.3), (1.6.3) les inégalités simplifiées

$$\text{(C.2.3)}\qquad \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \|_\delta \leq c e^{-u|\alpha - \beta|} F_\beta, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{R},$$

$$\text{(C.2.4)}\quad \| \chi_{\gamma_1} \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \chi_{\gamma_2} \|_{\delta'} \leq c e^{-u(|\alpha-\beta| + |\alpha - \gamma_1| + |\alpha - \gamma_2|)} F_\beta, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{R}, (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathscr{R}^2 \backslash (\alpha, \alpha),$$

et

$$\text{(C.2.5)}\quad | \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{res}} \{ \mathbf{K}_{\alpha,\beta_1} . \mathbf{K}_{\alpha,\beta_2} \} | \leq c^2 e^{-u(|\alpha - \beta_1| + |\alpha - \beta_2|)} F_{\beta_1} F_{\beta_2}, \qquad \forall \alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathscr{R},$$

où $u = \eta l^{-1}$ et $c > 0$ est une constante indépendante de $m \geq l^{-1}$ et $M \geq l^{-1}$.

a) On a

$$\text{(C.2.6)}\quad R_\Lambda(s) R_\Lambda(s)^* = \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \in \underline{\Lambda} \\ \beta, \beta' \in \mathscr{R}}} \sum_{\substack{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathscr{R} \\ (\gamma_1, \gamma_2) \neq (\alpha, \alpha) \\ (\gamma_2, \gamma_3) \neq (\alpha', \alpha')}} H(s \mid \alpha; \gamma_1, \beta_2, \gamma_2) H(s \mid \alpha'; \gamma_2, \beta', \gamma_3) \chi_{\gamma_1} \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \chi_{\gamma_2} \mathbf{K}_{\alpha',\beta'} \chi_{\gamma_3},$$

comme $0 \leq H(s \mid \alpha; \beta_1, \beta_2, \beta_3) \leq 1$, $\forall \alpha, \beta_j \in \mathscr{R}$, $\forall s \in S_0$, on en déduit d'après (C.2.4) (avec, dans ce qui suit, $b = \sum_{\gamma \in \mathscr{R}} e^{-\frac{u}{2}|\gamma - \gamma_0|}$), (C.2.7) $$\| R_\Lambda(s) \|_2^2 \leq c^2 \sum_{\substack{\alpha,\alpha' \in \underline{\Lambda} \\ \beta,\beta' \in \mathscr{R} \\ \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 \in \mathscr{R}}} e^{-u(|\alpha-\beta|+|\alpha-\gamma_1|+|\alpha-\gamma_2|+|\alpha'-\beta'|\alpha'-\gamma_2|+|\alpha'-\gamma_3|)} F_\beta F_{\beta'}$$

$$\leq c^2 b^2 \sum_{\substack{\alpha,\alpha' \in \underline{\Lambda} \\ \beta,\beta',\gamma_2 \in \mathscr{R}}} e^{-u(|\alpha-\beta|+|\alpha'-\beta'|+|\alpha-\gamma_2|+|\alpha'-\gamma_2|)} F_\beta F_{\beta'} ,$$

or, $|\beta - \beta'| \leq |\beta - \alpha| + |\alpha - \gamma| + |\gamma - \alpha'| + |\alpha' - \beta'|$, donc

(C.2.8) $$\| R_\Lambda(s) \|_2^2 \leq c^2 b^2 \sum_{\substack{\alpha,\alpha' \in \underline{\Lambda} \\ \gamma \in \mathscr{R}}} e^{-\frac{u}{2}(|\alpha-\gamma|+|\alpha'-\gamma|)} \sum_{\beta,\beta' \in \mathscr{R}} e^{-\frac{u}{2}|\beta-\beta'|} (e^{-\frac{u}{2}|\alpha-\beta|} F_\beta)(e^{-\frac{u}{2}|\alpha'-\beta'|} F_{\beta'})$$

$$\leq c^2 b^3 \sum_{\substack{\alpha,\alpha' \in \underline{\Lambda} \\ \gamma \in \mathscr{R}}} e^{-\frac{u}{2}(|\alpha-\gamma|+|\alpha'-\gamma|)} \Big(\sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} F_\beta^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\beta' \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha'-\beta'|} F_{\beta'}^2 \Big)^{1/2} ,$$

d'après l'inégalité de Young, donc,

(C.2.9) $$\| R_\Lambda(s) \|_2^2 \leq \frac{c^2 b^3}{2} \sum_{\substack{\alpha,\alpha' \in \underline{\Lambda} \\ \gamma \in \mathscr{R}}} e^{-\frac{u}{2}(|\alpha-\gamma|+|\alpha'-\gamma|)} \Big[\sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} F_\beta^2 + \sum_{\beta' \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha'-\beta'|} F_{\beta'}^2 \Big]$$

$$\leq \frac{c^2 b^5}{2} \Big[\sum_{\substack{\alpha \in \underline{\Lambda} \\ \beta \in \mathscr{R}}} e^{-u|\alpha-\beta|} F_\beta^2 + \sum_{\substack{\alpha' \in \underline{\Lambda} \\ \beta' \in \mathscr{R}}} e^{-u|\alpha'-\beta'|} F_{\beta'}^2 \Big] ,$$

c'est-à-dire

(C.2.10) $$\| R_\Lambda(s) \|_2^2 \leq c^2 b^5 \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} F_\beta^2 .$$

Par un calcul analogue, d'après (C.2.3), (C.2.4), on obtient

(C.2.11) $$\max \{ \| D_\Lambda(s) R_\Lambda(s) \|_1 , \| D_\Lambda(s) R_\Lambda(s)^* \|_1 , \| D_\Lambda(s)^* R_\Lambda(s) \|_1 \} \leq c^2 b^3 \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} F_\beta^2 ,$$

(C.2.12) $$\| Q_\Lambda(s) \|_2^2 \leq 4 c^2 b^5 \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} F_\beta^2 ,$$

et

(C.2.13) $$\| A_\Lambda(s) Q_\Lambda(s) \|_1 \leq 4 c^2 b^3 \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} F_\beta^2 .$$

L'inégalité (C.2.1) résulte de (C.1.3), (C.2.10), (C.2.11), (C.2.12), (C.2.13) puisque d'après (1.4.1),

(C.2.14) $$E_\nu \Big[\sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} F_\beta^2 \Big] \leq 2a^2 \sum_{\substack{\alpha \in \underline{\Lambda} \\ \beta \in \mathscr{R}}} e^{-u|\alpha-\beta|} .$$

b) On a, d'après (1.6.24), (1.6.25), (1.6.26)

$$(\text{C}.2.15)\quad \mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\, \mathrm{D}_\alpha(s)^2 = \sum_{\beta_1,\beta_2\in\mathcal{R}} \mathrm{H}(s\mid\alpha;\alpha,\beta_1,\alpha)\mathrm{H}(s\mid\alpha;\alpha,\beta_2,\alpha)$$

$$.\left(\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\{\mathbf{K}_{\alpha,\beta_1}.\mathbf{K}_{\alpha,\beta_2}\} - \mathrm{Tr}\{2\,\mathrm{D}_{\alpha,\beta_1}\mathrm{R}_{\alpha,\beta_2} + \mathrm{R}_{\alpha,\beta_1}\mathrm{R}_{\alpha,\beta_2}\} + \mathrm{E}_\nu[\mathrm{Tr}\{2\,\mathrm{D}_{\alpha,\beta_1}.\mathrm{R}_{\alpha,\beta_2} + \mathrm{R}_{\alpha,\beta_1}\mathrm{R}_{\alpha,\beta_2}\}\,]\Omega\right)$$

or, d'après (C.2.3), (C.2.4),

$$(\text{C}.2.16)\quad \sum_{\beta_1,\beta_2\in\mathcal{R}} \|\,\mathrm{D}_{\alpha,\beta_1}.\mathrm{R}_{\alpha,\beta_2}\,\|_1 \le c^2 \sum_{\substack{\beta_1,\beta_2\in\mathcal{R}\\ \gamma\in\mathcal{R}}} e^{-u(|\alpha-\beta_1|+|\alpha-\beta_2|+|\alpha-\gamma|)}\mathrm{F}_{\beta_1}\mathrm{F}_{\beta_2}$$

$$\le c^2 b \sum_{\beta_1,\beta_2\in\mathcal{R}} e^{-\frac{u}{2}|\beta_1-\beta_2|}\, e^{-\frac{u}{2}(|\alpha-\beta_1|+|\alpha-\beta_2|)}\mathrm{F}_{\beta_1}\mathrm{F}_{\beta_2} \le c^2 b^2 \sum_{\beta\in\mathcal{R}} e^{-u|\alpha-\beta|}\mathrm{F}_\beta^2\,,$$

(d'après l'inégalité de Young), de même

$$(\text{C}.2.17)\quad \sum_{\beta_1,\beta_2\in\mathcal{R}} \|\,\mathrm{R}_{\alpha,\beta_1}.\mathrm{R}_{\alpha,\beta_2}\,\|_1 \le c^2 \sum_{\substack{\beta_1,\beta_2\in\mathcal{R}\\ \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in\mathcal{R}}} e^{-u(|\alpha-\gamma_1|+2|\alpha-\gamma_2|+|\alpha-\gamma_3|+|\alpha-\beta_1|+|\alpha-\beta_2|)}\mathrm{F}_{\beta_1}\mathrm{F}_{\beta_2}$$

$$\leqslant c^2 b^4 \sum_{\beta\in\mathcal{R}} e^{-u|\alpha-\beta|}\mathrm{F}_\beta^2\,,$$

et d'après (C.2.5),

$$(\text{C}.2.18)\qquad \sum_{\beta_1,\beta_2\in\mathcal{R}} |\,\mathrm{Tr}^{:}_{\mathrm{reg}}\{\mathbf{K}_{\alpha,\beta_1}.\mathbf{K}_{\alpha,\beta_2}\}\,| \le c^2 b \sum_{\beta\in\mathcal{R}} e^{-u|\alpha-\beta|}\mathrm{F}_\beta^2\,.$$

On en déduit (C.2.2) d'après (1.6.27) et (C.2.14). □

C.3. Majoration de $|\, e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{S}(\lambda,\mathrm{D}_\alpha(s))}\,|\,\mathrm{T}(\lambda,\mathrm{A}_\alpha(s))$.

Soit $k \in \mathcal{D}(\mathrm{E})$ une fonction telle que supp $k \subset \left\{x\,;\,|\,x\,| < \frac{l}{2}\right\}$ et $\int_{\mathrm{E}} k(x)dx = 1$, pour $\varkappa > 0$, on définit $k_\varkappa$ par $k_\varkappa(x) = \varkappa^2 k(\varkappa x)$, $\forall x \in \mathrm{E}$ et on pose

$$(\text{C}.3.1)\qquad \mathbf{K}_{\alpha,\beta;\varkappa} = \mathbf{K}_{(\Delta_\alpha,\mathbf{1}_{\Delta_\beta}),k_\varkappa},\qquad (\alpha,\beta\in\mathcal{R})\ ^{(88)},$$

puis

$$(\text{C}.3.2)\qquad \mathrm{D}_{\alpha,\beta;\varkappa}(s) = \mathrm{H}(s\mid\alpha;\alpha,\beta,\alpha)\chi_\alpha\mathbf{K}_{\alpha,\beta;\varkappa}\chi_\alpha\,,\qquad (\alpha,\beta\in\mathcal{R}, s\in\mathrm{S}_0)\,,$$

$$(\text{C}.3.3)\qquad \mathrm{D}_{\alpha;\varkappa}(s) = \sum_{\beta\in\mathcal{R}} \mathrm{D}_{\alpha,\beta;\varkappa}(s)\,,\qquad (\alpha\in\mathcal{R}, s\in\mathrm{S}_0)\,,$$

$$(\text{C}.3.4)\quad \mathrm{A}_{\alpha;\varkappa}(s) = [\mathrm{I} + \lambda^2\mathrm{D}_\alpha(s)\mathrm{D}_\alpha(s)^*]^{-1/2}(\mathrm{D}_{\alpha;\varkappa}(s) + \mathrm{D}_{\alpha;\varkappa}(s)^*)[\mathrm{I} + \lambda^2\mathrm{D}_\alpha(s)\mathrm{D}_\alpha(s)^*]^{-1/2}\,,$$

et

$$(\text{C}.3.5)\qquad \theta_\alpha(\lambda,s) = \frac{1}{2}|\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{S}(\lambda,\mathrm{D}_\alpha(s))\,| + \mathrm{Log}\,\mathrm{T}(\lambda,\mathrm{A}_\alpha(s))\,,$$

$$(\text{C}.3.6)\quad \theta_{\alpha,\varkappa}(\lambda,s) = \frac{1}{2}|\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{S}(\lambda,\mathrm{D}_{\alpha,\varkappa}(s))\,| + \mathrm{Log}\,\mathrm{T}(\lambda,\mathrm{A}_{\alpha,\varkappa}(s))\,,\qquad (\alpha\in\mathcal{R}, s\in\mathrm{S}_0)\,.$$

---

(88) Voir (1.3.1).

a) Soient $\delta' \in]\frac{3}{2}, 2[$ et $\delta = \frac{\delta'}{\delta' - 1}$, d'après [*10*] (2.4.4) on a,

$$\text{(C.3.7)} \quad \operatorname{Log} T(\lambda, A_{\alpha,x}(s)) \leq \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \{ (\lambda A_{\alpha,x}(s) + \bar{\lambda} A_{\alpha,x}(s)^*)^2 \} \leq 4 |\lambda|^2 \| D_{\alpha,x}(s) \|_\delta \| D_{\alpha,x}(s) + D_{\alpha,x}(s)^* \|_{\delta'},$$

et d'après [*10*] (2.4.5), (2.4.6), (2.4.7) avec $\zeta = 0$,

$$\text{(C.3.8)} \qquad \frac{1}{2} | \operatorname{Tr} S(\lambda, D_{\alpha,x}(s)) | \leq 3 |\lambda|^2 \| D_{\alpha,x}(s) \|_\delta \| D_{\alpha,x}(s) + D_{\alpha,x}(s)^* \|_{\delta'},$$

or,

$$\text{(C.3.9)} \quad \| D_{\alpha,x}(s) + D_{\alpha,x}(s)^* \|_{\delta'} = \Big\| \sum_{\beta \in \mathscr{R}} H(s | \alpha ; \alpha, \beta, \alpha) \chi_\alpha (\mathbf{K}_{\alpha,\beta,x} + \mathbf{K}_{\alpha,\beta,x}^*) \chi_x \Big\|_{\delta'} \leq \sum_{\beta \in \mathscr{R}} \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta,x} + \mathbf{K}_{\alpha,\beta,x}^* \|_{\delta'},$$

et de même,

$$\text{(C.3.10)} \qquad \| D_{\alpha,x}(s) \|_\delta \leq \sum_{\beta \in \mathscr{R}} \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta,x} \|_\delta,$$

donc pour tout $s \in S_0$:

$$\text{(C.3.11)} \qquad \theta_{\alpha,x}(\lambda, s) \leq 7 |\lambda|^2 \Big(\sum_{\beta \in \mathscr{R}} \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta_1,x} \|_\delta \Big) \Big(\sum_{\beta_2 \in \mathscr{R}} \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta_2,x} + \mathbf{K}_{\alpha,\beta_2,x}^* \|_{\delta'} \Big).$$

b) D'autre part, on obtient comme en [*10*], (2.7.3)

$$\text{(C.3.12)} \quad | \theta_\alpha(\lambda, s) - \theta_{\alpha,x}(\lambda, s) | \leq c |\lambda| \Big(\sum_{\beta \in \mathscr{R}} \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta} - \mathbf{K}_{\alpha,\beta,x} \|_3 \Big) \sum_{j=2}^{5} |\lambda|^j \Big(\sum_{\beta' \in \mathscr{R}} [\| \mathbf{K}_{\alpha,\beta'} \|_3 + \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta'} - \mathbf{K}_{\alpha,\beta',x} \|_3] \Big)^j.$$

C.4. Majoration de $| \theta_{\alpha,x}(\lambda, s) |$.
On a

LEMME. — *Il existe $u > 0$ et, pour tout $\varepsilon > 0$ une constante $a(\varepsilon) > 0$ (indépendante de $m \geq l^{-1}$ et $M \geq l^{-1}$), et des fonctions positives*

$$G^{(\varepsilon)}_{\beta,x} \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}^+_\beta, \nu), \qquad \beta \in \mathscr{R},\ x > 0 \ [89],$$

vérifiant

$$\text{(C.4.1)} \qquad \| G^{(\varepsilon)}_{\beta,x} \|_p \leq a(\varepsilon) p, \qquad \forall \beta \in \mathscr{R}, \forall x > 0, \forall p \in [1, +\infty[$$

et telles que,

$$\text{(C.4.2)} \qquad | \theta_{\alpha,x}(\lambda, s) | \leq \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha - \beta|} [G^{(\varepsilon)}_{\beta,x} + a(\varepsilon) x^\varepsilon \Omega], \qquad \forall x \geq 1, \forall s \in S_0 .$$

Démonstration. — On suppose $2 - \delta' = \varepsilon' < \varepsilon/12$.
D'après (1.3.4) (en posant $\Psi^{(\delta)}_{\alpha,\beta,x} = \Psi_{\Delta_\alpha, 1_{\Delta_\beta} \cdot k_x}$), on a

$$\text{(C.4.3)} \qquad \| \mathbf{K}_{\alpha,\beta,x} \|_\delta \leq \Psi^{(\delta)}_{\alpha,\beta,x},$$

[89] Voir note [13], p. 245.

où $\Psi^{(\delta)}_{\alpha,\beta,\varkappa} \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathcal{S}', \mathcal{A}^+_\beta, \nu)$, et, d'après (1.3.36), il existe des constantes $a(\delta) > 0$ et $\eta > 0$ (indépendantes de m et M) telles que

$$\| \Psi^{(\delta)}_{\alpha,\beta,\varkappa} \| \leq a(\delta)\sqrt{p}e^{-2u|\alpha-\beta|}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall \varkappa > 0. \tag{C.4.4}$$

D'autre part, si $E^{(\delta')2}_{\alpha,\beta,\varkappa} \in \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_2$ est la fonction

$$\omega \mapsto \| \mathbf{1}_{\Delta_\alpha} . \Sigma_m^{-1/2}(\mathbf{1}_{\Delta_\beta} . (\omega * k_\varkappa)) \|_{\mathcal{H}^{2-\delta'}}, \qquad (\omega \in \mathcal{S}')\ (^{90}),$$

on a d'après [*10*] (2.3.6) [et l'inégalité $\| h \|_1 \leq l^{1+t} \| h \|_{\mathcal{H}^t}$ si $k \in \mathcal{H}^t(E)$ est nulle en dehors de Δ_α],

$$\| \mathbf{K}_{\alpha,\beta,\varkappa} + \mathbf{K}_{\alpha,\beta,\varkappa}{}^* \|_{\delta'} \leq c E^{(\delta')}_{\alpha,\beta,\varkappa} . \tag{C.4.5}$$

Soit maintenant $D = d(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$ (où d est la distance euclidienne), $A^{(z)}_D$ ($\mathrm{Re}\, z > 0$), est défini par (1.3.30) (^{91}), on définit $T^z_{\alpha,D}$ par

$$\begin{aligned} &T^z_{\alpha,D}(p_1, p_2) \\ &= \widehat{A^{(z)}_D}(p_1)\widehat{G^{(z)}_m}(p_2) \int_E \widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}}(p_1 - q)(|q|^2 + l^{-2})^{2-\delta'}\widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}}(q - p_2)\frac{dq}{(2\pi)^2}, \qquad (p_1, p_2) \in E^2, \end{aligned} \tag{C.4.6}$$

comme $(|q|^2 + l^{-2}) \leq c(|q - p_2|^2 + l^{-2})(|p_2|^2 + l^{-2})$ et $m \geq l^{-1}$, on a (avec $z_1 = \mathrm{Re}\, z$),

$$\begin{aligned} &|T^{(z)}_{\alpha,D}(p_1, p_2)| \\ &\leq c' |\widehat{A^{(z)}_D}(p_1)| |\widehat{G^{(z_1-\varepsilon')}_m}(p_2)| \int_E |\widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}}(p_1 - q)| (|q - p_2|^2 + l^{-2})^{\varepsilon'} |\widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}}(q - p_2)| \,dq . \end{aligned} \tag{C.4.7}$$

On a $(|\,.\,|^2 + l^{-2})^t |\widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}}| \in L^q(E)$, si $q > \dfrac{1}{1 - 2t}$, donc

— si $z_1 > \dfrac{1}{2} + 3\varepsilon'$, on a $\widehat{G^{(z_1-\varepsilon')}_m} \in L^q(E)$, $\forall q > \dfrac{1}{z_1 - \varepsilon'}$, et, d'après (1.3.34), $A^{(z)}_D \in L^2(E)$ donc, d'après les inégalités de Young et de Schwarz, $T^{(z)}_{\alpha,D} \in L^1(E^2)$, avec

$$\begin{aligned} \| T^{(z)}_{\alpha,D} \|_1 &\leq \int_E |\widehat{A^{(z)}_D}|(p)[\,|\widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}}| * (|\,.\,|^2 + l^{-2})^{\varepsilon'} |\widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}}| * \widehat{G^{(z_1-\varepsilon)}_m}](p)dp \\ &\leq \| \widehat{A^{(z)}_D} \|_2 \| \,|\widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}}| * (|\,.\,|^2 + l^{-2})^{\varepsilon'} |\widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}}| * \widehat{G^{(z_1-\varepsilon)}_m} \|_2 = c(\varepsilon', z_1) \| A^{(z)}_D \|_2 \end{aligned} \tag{C.4.8}$$

— si $z_1 > \dfrac{1}{4} + \varepsilon'$ $\left(\text{et } \varepsilon' < \dfrac{1}{8}\right)$, on a $(|\,.\,|^2 + l^{-2})^{\varepsilon'}\widehat{\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}} \in L^{4/3}(E)$, $\widehat{G^{(z_1-\varepsilon')}_m} \in L^4(E)$ et d'après (1.3.34) et l'inégalité de Hausdorff-Young $\widehat{A^{(z)}_D} \in L^4(E)$, donc, d'après [*12*], lemme 2.1, on a $T^{(z)}_{\alpha,D} \in L^2(E^2)$ avec

$$\| T^{(z)}_{\alpha,D} \|_2 \leq c(\varepsilon', z_1) \| A^{(z)}_D \|_{4/3} . \tag{C.4.9}$$

Alors d'après (1.3.34), (C.4.8), (C.4.9) et le théorème d'interpolation de Stein appliquée à la fonction analytique

$$z \mapsto \frac{T^{(z)}_{\alpha,D}}{\sin \pi z}, \left(\frac{1}{4} + \frac{q-1}{2q} < \mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2} + \frac{q-1}{2q}\right),$$

(^{90}) Avec ici $\| h \|_{\mathcal{H}^t} = \| (-\Delta + l^{-2})^{t/2} h \|_2$, $\forall h \in \mathcal{H}^t(E)$; on vérifie qu'avec cette normalisation, la constante au second membre de [*10*], (2.3.6) peut être choisie indépendamment de $M \geq l^{-1}$.

(^{91}) On rappelle que $\widehat{G^{(z)}_m}(p) = \dfrac{1}{(|p|^2 + m^2)^z}$.

on obtient pour $q \in \left]\frac{1}{1-6\varepsilon'}, 2\right]$,

(C.4.10) $$\| T_{\alpha,D}^{(1/2)} \|_q \leq c(\varepsilon', q) \qquad \forall \alpha \in \mathscr{R}, \forall D \geq l.$$

a) Soit $V_{\beta,\varkappa}$ la fonction définie par

(C.4.11) $$V_{\beta,\varkappa}(x, y) = \mathbf{1}_{\Delta_\beta}(x)\mathbf{1}_{\Delta_\beta}(y)\check{k}_\varkappa * k_\varkappa(x-y), \qquad (x, y) \in E^2,$$

on a

(C.4.12) $$E_\nu[E_{\alpha,\beta,\varkappa}^{(\delta')2}] = \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-(1-\xi)mD} \int_{E^2} \widehat{T_{\alpha,D}^{(1/2)}}(x, y) V_{\beta,\varkappa}(x, y) dx dy,$$

or,

(C.4.13) $$\| V_{\beta,\varkappa} \|_q \leq \| \mathbf{1}_{\Delta_\beta} \|_q \| k_\varkappa \|_1 \| k_\varkappa \|_q \leq c\varkappa^{2\frac{q-1}{q}},$$

donc, en posant $q = \frac{2}{2-\varepsilon}$ dans (C.4.10) et (C.4.13), d'après (C.4.12) et l'inégalité de Hausdorff-Young on a (avec $4u < (1-\xi)l^{-1}$)

(C.4.14) $$E_\nu[E_{\alpha,\beta,\varkappa}^{(\delta')2}] \leq c(\varepsilon) e^{-4u|\alpha-\beta|}\varkappa^\varepsilon, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{R}, \forall \varkappa \geq 1.$$

b) Si

(C.4.15) $$Z_{\alpha,\beta}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-(1-\xi)mD} \widehat{T_{\alpha,D}^{(1/2)}}(x, y)\mathbf{1}_{\Delta_\beta}(x)\mathbf{1}_{\Delta_\beta}(y), \qquad (x, y) \in E^2,$$

on a

(C.4.16) $$\| \Pi_2 E_{\alpha,\beta,\varkappa}^{(\delta')2} \|_2 = \| (k_\varkappa \otimes \check{k}_\varkappa) * Z_{\alpha,\beta} \|_2 \leq \| k_\varkappa \|_1^2 \| Z_{\alpha,\beta} \|_2$$

donc, d'après (C.4.10) et (C.4.15) (avec $4u < (1-\xi)l^{-1}$)

(C.4.17) $$\| \Pi_2 E_{\alpha,\beta,\varkappa}^{(\delta')2} \|_2 \leq c(\delta') e^{-4u|\alpha-\beta|}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{R}, \forall \varkappa > 0.$$

Alors d'après (C.3.11), (C.4.3), (C.4.5), on a

(C.4.18) $$\begin{aligned} |\theta_{\alpha,\varkappa}(\lambda, s)| &\leq c|\lambda|^2 \Big(\sum_{\beta_1 \in \mathscr{R}} \Psi_{\alpha,\beta_1,\varkappa}^{(\delta)}\Big)\Big(\sum_{\beta_2 \in \mathscr{R}} E_{\alpha,\beta_2,\varkappa}^{(\delta')}\Big) \\ &\leq c|\lambda|^2 \sum_{\beta_1,\beta_2 \in \mathscr{R}} e^{-\frac{u}{2}|\beta_1-\beta_2|} e^{-\frac{u}{2}(|\alpha-\beta_1|+|\alpha-\beta_2|)} (e^{u|\alpha-\beta_1|}\Psi_{\alpha,\beta_1,\varkappa}^{(\delta)})(e^{u|\alpha-\beta_2|}E_{\alpha,\beta_2,\varkappa}^{(\delta')}) \\ &\leq bc|\lambda|^2 \Big(\sum_{\beta_1 \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta_1|}[e^{2u|\alpha-\beta_1|}\Psi_{\alpha,\beta_1,\varkappa}^{(\delta)2}]\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\beta_2 \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta_2|}[e^{2u|\alpha-\beta_2|}E_{\alpha,\beta_2,\varkappa}^{(\delta')2}]\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{bc}{2}|\lambda|^2 \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|}[e^{2u|\alpha-\beta|}(\Psi_{\alpha,\beta,\varkappa}^{(\delta)2} + E_{\alpha,\beta,\varkappa}^{(\delta')2})] \end{aligned}$$

or $E_{\alpha,\beta,\varkappa}^{(\delta')2} = \Pi_2 E_{\alpha,\beta,\varkappa}^{(\delta')2} + E_\nu[E_{\alpha,\beta,\varkappa}^{(\delta')2}]\Omega$, donc si l'on pose

(C.4.19) $$G_{\beta,\varkappa}^{(\varepsilon)} = \frac{bc}{2} \sum_{\gamma \in \mathscr{R}} e^{2u|\alpha-\beta|}(\Psi_{\gamma,\beta,\varkappa}^{(\delta)2} + |\Pi_2 E_{\gamma,\beta,\varkappa}^{(\delta')2}|), \qquad \left(\text{avec } 2 - \delta' < \frac{\varepsilon}{12}\right),$$

la série est convergente et $G^{(\varepsilon)}_{\beta,\varkappa}$ vérifie (C.4.1) d'après (C.4.4) et (C.4.17), enfin (C.4.2) résulte de (C.4.14) et (C.4.18). □

C.5. Majoration de $|\theta_\alpha(\lambda, s) - \theta_{\alpha,\varkappa}(\lambda, s)|$.
On a

LEMME. — *Il existe des constantes $u > 0$, $a > 0$ (indépendantes de m et M), et des fonctions positives* $H_{\beta,\varkappa} \in \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}^+_\beta, \nu)$, $\beta \in \mathscr{R}$, $\varkappa > 0$, *vérifiant*

$$\|H_{\beta,\varkappa}\|_p \le ap^3, \qquad \forall \beta \in \mathbb{N},\ \forall \varkappa > 0,\ \forall p \in [1, +\infty[, \tag{C.5.1}$$

et telles que, si σ est assez petit et si $|\lambda| \le 1$,

$$|\theta_\alpha(\lambda, s) - \theta_{\alpha,\varkappa}(\lambda, s)| \le |\lambda|^2 \varkappa^{-\sigma} \sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} H_{\beta,\varkappa}, \qquad \forall \varkappa \ge 1,\ \forall s \in S_0. \tag{C.5.2}$$

Démonstration. — En posant $X = \Delta_\alpha$, $h = \mathbf{1}_{\Delta_\beta}$ et $f = k_{\varkappa'} - k_\varkappa$ dans (1.3.5) et en passant à la limite $\varkappa' \to \infty$ on obtient

$$\|\mathbf{K}_{\alpha,\beta} - \mathbf{K}_{\alpha,\beta,\varkappa}\|_3 \le \Psi'_{\alpha,\beta,\varkappa} \tag{C.5.3}$$

où $\Psi'_{\alpha,\beta,\varkappa} \in \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}^+_\beta, \nu)$ vérifie

$$\|\Psi'_{\alpha,\beta,\varkappa}\|_p \le c\sqrt{p}\, e^{-2u|\alpha-\beta|} \varkappa^{-\sigma}, \qquad (p \in [1, +\infty[,\ \varkappa > 0) \tag{C.5.4}$$

d'après (1.3.28) et (1.3.36).
Posant alors

$$F'_{\beta,\varkappa} = \varkappa^\sigma \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} e^{u|\alpha-\beta|} \Psi'_{\alpha,\beta,\varkappa} \tag{C.5.5}$$

on a

$$\|F'_{\beta,\varkappa}\|_p \le a\sqrt{p}, \qquad (p \in [1, +\infty[,\ \varkappa > 0,\ \beta \in \mathscr{R}) \tag{C.5.6}$$

et,

$$\|\mathbf{K}_{\alpha,\beta} - \mathbf{K}_{\alpha,\beta,\varkappa}\|_3 \le e^{-u|\alpha-\beta|} \varkappa^{-\sigma} F'_{\beta,\varkappa}, \qquad (\alpha \in \mathscr{R},\ \varkappa > 0), \tag{C.5.7}$$

donc, d'après (C.2.3) et (C.3.12),

$$|\theta_\alpha(\lambda, s) - \theta_{\alpha,\varkappa}(\lambda, s)| \le c\varkappa^{-\sigma} \sum_{j=3}^{6} |\lambda|^j \Big(\sum_{\beta \in \mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} [F_\beta + F'_{\beta,\varkappa}] \Big)^j. \tag{C.5.8}$$

Mais, d'après les inégalités

$$\sum_{1 \le i,j \le k} |\beta_i - \beta_j| \le 2(k-1) \sum_{i=1}^{k} |\alpha - \beta_i|$$

et

$$\prod_{j=1}^{k} a_j \le \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j^k, \qquad (a_j > 0),$$

on a (si $Z_\beta^{(j)} \geq 0$, $\beta \in \mathscr{R}$, $1 \leq j \leq k$),

$$(\text{C.5.9}) \quad \prod_{j=1}^{k}\Big(\sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|}Z_\beta^{(j)}\Big) = \sum_{\beta_1,\dots,\beta_k\in\mathscr{R}} \prod_{j=1}^{k} e^{-u|\alpha-\beta_j|}Z_{\beta_j}^{(j)}$$

$$\leq \sum_{\beta_1,\dots,\beta_k\in\mathscr{R}} e^{-\frac{u}{2k}\sum_{1\leq i,j\leq k}|\beta_i-\beta_j|} \prod_{h=1}^{k} e^{\frac{u}{k}|\alpha-\beta_h|} Z_{\beta_h}^{(h)}$$

$$\leq \frac{1}{k} \sum_{\beta_1,\dots,\beta_k\in\mathscr{R}} \sum_{j=1}^{k} e^{-\frac{u}{2k}\sum_{i\neq j}|\beta_i-\beta_j|} e^{-u|\alpha-\beta_j|}(Z_{\beta_j}^{(j)})^k$$

$$\leq b(k)^{k-1} \sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|}\Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(Z_\beta^{(j)})^k\Big)$$

$\Big($où $b(k) = \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} e^{-\frac{u}{2k}|\gamma-\gamma_0|}\Big)$.

Le lemme résulte alors de (1.4.1), (C.5.6), (C.5.8) et (C.5.9). □

C.6. Fin de la démonstration de la proposition 1.7.

D'après (C.1.2), (C.1.9), (C.1.10), (C.3.5), (C.2.2), (C.4.2), (C.5.2) si on définit

$$J_\beta \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\beta^+, \nu),$$

par

$$(\text{C.6.1}) \qquad J_\beta = \frac{3}{2}c(F_\beta^2 + \Omega) + \inf_{\log\varkappa\in\mathbb{N}}\big(G_{\beta,\varkappa}^{(\varepsilon)} + a(\varepsilon)\varkappa^\varepsilon\Omega + \varkappa^{-\sigma}H_{\beta,\varkappa}\big), \qquad \beta\in\mathscr{R},$$

avec $\varepsilon < \frac{\sigma}{3}$, on a

$$(\text{C.6.2}) \quad \|\Lambda^r([I+\lambda K_\Lambda(s)]^{-1})\,\det_{\text{ren}}(I+\lambda K_\Lambda(s))\| \leq e^{9r}e^{|\lambda|^2\sum_{\alpha\in\Lambda}\sum_{\beta\in\mathscr{R}}e^{-u|\alpha-\beta|}J_\beta},$$

$$\forall s\in S_0,\ \forall\Lambda\in\mathscr{X}_0,\ \text{si } |\operatorname{Arg}\lambda^2| \leq \frac{\pi}{4},\ |\lambda|\leq 1,$$

et, d'après (1.4.1), (C.4.1), (C.5.1) et le théorème de Nelson ([92]), il existe $t_0 > 0$ et pour chaque $t \in [0, t_0]$, $c(t) > 0$ tels que

$$(\text{C.6.3}) \qquad \|e^{tJ_\beta}\|_1 \leq c(t), \qquad \forall\beta\in\mathscr{R},\ 0\leq t\leq t_0.$$

([92]) On utilise ici l'énoncé suivant :

Soit $F \in L^0(\mathscr{S}', \nu)$, on suppose qu'il existe des constantes $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$, $\varepsilon > 0$, $\eta > k\varepsilon$, et des suites de fonctions réelles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifiant

$$e^{A_n} \in L^q(\mathscr{S}', \nu) \quad \text{et} \quad \|e^{A_n}\|_q \leqslant a, \quad (n\in\mathbb{N}),$$

$$R_n \in \bigcap_{1\leqslant r<\infty} L^r(\mathscr{S}', \nu) \quad \text{et} \quad \|R_n\|_r \leqslant r^k e^{-\eta n}, \quad (n\in\mathbb{N},\ r\in[1,+\infty[),$$

et telles que

$$\operatorname{Re} F \leqslant A_n + b(e^{n\varepsilon}\Omega + R_n), \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

alors

$$e^F \in \bigcap_{1\leqslant p<q} L^p(\mathscr{S}', \nu).$$

Pour conclure, on utilise le

LEMME. — *Soit* $(Y_\beta)_{\beta\in\mathscr{R}}$ *une famille de fonctions telles que* $Y_\beta \in L^4(\mathscr{S}', \mathscr{A}_\beta^+, \nu)$, $Y_\beta \geq 1$ *et* $\prod_{\beta\in\mathscr{R}} \| Y_\beta \|_4 < +\infty$, *alors,* $\prod_{\beta\in\mathscr{R}} Y_\beta \in L^1(\mathscr{S}', \nu)$, *et*

$$\Big\| \prod_{\beta\in\mathscr{R}} Y_\beta \Big\|_1 \leq \prod_{\beta\in\mathscr{R}} \| Y_\beta \|_4 \tag{C.6.4}$$

Démonstration. — On décompose $\mathscr{R}$ en sous-réseaux $\mathscr{R} = \bigcup_{j=1}^{4} \mathscr{R}_j$, conformément aux croquis ([93]),

	j		j		j
j		j		j	
	j		j		j

$\mathscr{R}_j$

3	1	3	1	3
4	2	4	2	4
1	3	1	3	1
2	4	2	4	2
3	1	3	1	3

$\mathscr{R} = \bigcup_{j=1}^{4} \mathscr{R}_j$

on a, d'après l'inégalité de Hölder

$$\Big\| \prod_{\beta\in\mathscr{R}} Y_\beta \Big\|_1 \leq \prod_{j=1}^{4} \Big\| \prod_{\beta\in\mathscr{R}_j} Y_\beta \Big\|_4 = \prod_{j=1}^{4} E_\nu\Big[\prod_{\beta\in\mathscr{R}_j} Y_\beta^4\Big]^{1/4} \tag{C.6.5}$$

or, d'une part,

$$\prod_{\beta\in\mathscr{R}_j} Y_\beta^4 = \lim_{U_j\to\mathscr{R}_j} \prod_{\beta\in U_j} Y_\beta^4, \qquad (U_j \subset \mathscr{R}_j, \mid U_j \mid < \infty),$$

est limite d'une suite croissante (puisque $Y_\beta^4 \geq 1$, par hypothèse) et, d'autre part, d'après (1.4.4),

$$E_\nu\Big[\prod_{\beta\in U_j} Y_\beta^4\Big] = \prod_{\beta\in U_j} E_\nu[Y_\beta^4]$$

(puisque Y_β est $\mathscr{A}_\beta^+$-mesurable) donc, d'après le théorème de Beppo-Levi,

$$\prod_{j=1}^{4} E_\nu\Big[\prod_{\beta\in\mathscr{R}_j} Y_\beta^4\Big] = \prod_{j=1}^{4} \prod_{\beta\in\mathscr{R}_j} E_\nu[Y_\beta^4] = \prod_{\beta\in\mathscr{R}} \| Y_\beta \|_4^4 . \quad \square \tag{C.6.6}$$

Alors, d'après (C.6.6), si $v \geq 0$,

$$Z_v \equiv \| e^{v \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} \sum_{\beta\in\mathscr{R}} e^{-u|\alpha-\beta|} J_\beta} \|_1 \leq \prod_{\beta\in\mathscr{R}} \| e^{4v \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} e^{-u|\alpha-\beta|} J_\beta} \|_1^{1/4} , \tag{C.6.7}$$

([93]) D'après une idée de O. McBryan.

or, si l'on pose $p_\beta(\alpha) = be^{u|\alpha-\beta|}$ où $b = \sum_{\gamma\in\mathcal{R}} e^{-u|\gamma-\beta|}$, de sorte que $\sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} \frac{1}{p_\beta(\alpha)} \leq 1$, $\forall\beta\in\mathcal{R}$, on a

$$\text{(C.6.8)} \quad \| e^{4v\sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} e^{-u|\alpha-\beta|}J_\beta} \|_1 \leq \| e^{4v\sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} e^{-u|\alpha-\beta|}J_\beta} \|_{\left(\sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}}\frac{1}{p_\beta(\alpha)}\right)^{-1}} \leq \prod_{\alpha\in\underline{\Lambda}} \| e^{4ve^{-u|\alpha-\beta|}J_\beta} \|_{p_\beta(\alpha)},$$

donc, d'après (C.6.3), (C.6.7), (C.6.8)

$$\text{(C.6.9)} \quad Z_v \leq \prod_{\beta\in\mathcal{R}} \prod_{\alpha\in\underline{\Lambda}} \| e^{4vbJ_\beta} \|_1^{\frac{1}{4b}e^{-u|\alpha-\beta|}} \leq \prod_{\alpha\in\underline{\Lambda}} c(4vb)^{\frac{1}{4b}\sum_{\beta\in\mathcal{R}} e^{-u|\alpha-\beta|}} = c(4vb)^{\frac{1}{4}|\Lambda|}, \quad \text{si } 4vb \leq t_0 .$$

La proposition 1.7 résulte alors de (C.6.2) et (C.6.9), puisque

$$\| e^{|\lambda|^2 \sum_{\alpha\in\underline{\Lambda}} \sum_{\beta\in\mathcal{R}} e^{-u|\alpha-\beta|}J_\beta} \|_p = (Z_{p|\lambda|^2})^{1/p} .$$

APPENDICE D

ÉLÉMENTS DE LA CONSTRUCTION D'UN PROLONGEMENT $(\Lambda, s) \mapsto Z^{(n)}_{\lambda,\Lambda,s}$ POUR LE MODÈLE $\lambda P(\varphi)_2$

D.1. Compte tenu du changement de représentation défini en 1.1, 1.2, les fonctions de Schwinger « à volume fini » du modèle s'expriment comme suit :

Soit $k \geq 1$ un entier et g une fonction réelle définie sur E telle que

$$\text{(D.1.1)} \qquad M_k(g)^2 = (2\pi)^{-2k} \int_{E^k} \left| \hat{g}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right)\right|^2 \prod_{j=1}^{k} \frac{dp_j}{|p_j|^2 + m^2} < +\infty,$$

on désigne par $\Phi^{:k}_{\mu_m}(g) \in \mathfrak{F}_k$ [94] la fonction définie par

$$\text{(D.1.2)} \qquad \int_{\mathcal{S}'} \Phi^{:k}_{\mu_m}(g)[\omega] e^{i\langle\omega,f\rangle} \nu(d\omega) = i^k (g, (\Sigma_m^{-1/2} f)^k)_2 \hat{\nu}(f), \qquad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Alors, étant donné un polynôme réel P de la forme

$$\text{(D.1.3)} \qquad P(z) = \sum_{k=1}^{d} a_k z^k, \qquad (d \in 2\mathbf{N},\ a_d = 1),$$

on pose (si $M_d(g) < +\infty$),

$$\text{(D.1.4)} \qquad \mathbf{V}_g = \sum_{k=1}^{d} a_k \Phi^{:k}_{\mu_m}(g)$$

et les fonctions de Schwinger (avec cut-off de volume g) du modèle $\lambda P(\Phi)_2$ sont données par

$$\text{(D.1.5)} \quad Z^{(n)}_{\lambda,g}(f_1, \ldots, f_n) = E_\nu\left[\prod_{j=1}^{n} \Phi(f_j) e^{-\lambda \mathbf{V}_g}\right], \qquad (f_j \in \mathcal{S},\ 1 \leq j \leq n;\ \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0),$$

---

[94] Voir note [18], p. 248 (par ailleurs les notations sont celles du paragraphe 1.1). Une notation plus habituelle serait

$$\Phi^{:k}_{\mu_m}(g) = \int_E g(x) : \Phi(x)^k :_{\mu_m} dx = \int_{E^k} w_g(x_1, \ldots, x_k) : X(x_1) \ldots X(x_k) :_\nu dx_1 \ldots dx_k,$$

où $w_g \in L^2(E^k)$ est définie par

$$w_g(x_1, \ldots, x_k) = \int_E \prod_{j=1}^{k} G_m^{(1/2)}(x - x_j) g(x) dx,$$

(avec $\widehat{G_m^{(1/2)}}(p) = (|p|^2 + m^2)^{-1/2}$, $p \in E$), X désigne le processus canonique $X_f(\omega) = \langle \omega, f \rangle$, $f \in \mathcal{S}$, $\omega \in \mathcal{S}'$) et $: - :_{\mu_m}$ (resp. $: - :_\nu$) est l' « ordre de Wick » relativement à la mesure μ_m (resp. ν).

et

(D.1.6) $$S^{(n)}_{\lambda,g}(f_1, \ldots, f_n) = Z^{(n)}_{\lambda,g}(f_1, \ldots, f_n)/Z^{(0)}_{\lambda,g}, \qquad \text{si } Z^{(0)}_{\lambda,g} \neq 0.$$

D.2. Étant donné $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathscr{R}$ (voir 1.4), on définit $\Phi^{:k}_{\mu_m}[\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_k] \in \mathfrak{F}_k$ par

(D.2.1) $$\int_{\mathscr{S}'} \Phi^{:k}_{\mu_m}[\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_k](\omega) e^{i\langle\omega, f\rangle} \nu(d\omega) = i^k \Big(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \prod_{j=1}^{k} (\Sigma_m^{-1/2} \mathbf{1}_{\Delta_{\beta_j}} f) \Big)_2 \hat{\nu}(f), \qquad \forall f \in \mathscr{S},$$

puis, pour $\Lambda \in \mathscr{X}_0$, $s \in S_0$, on pose ([95]),

(D.2.2) $$\Phi^{:k}_{\mu_m}(\Lambda, s) = \sum_{\substack{\alpha \in \underline{\Lambda} \\ \beta_j \in \mathscr{R}}} H^{(k)}(s \mid \alpha; \beta_1, \ldots, \beta_k) \Phi^{:k}_{\mu_m}[\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_k],$$

et,

(D.2.3) $$\mathbf{V}_\Lambda(s) = \sum_{k=1}^{d} a_k \Phi^{:k}_{\mu_m}(\Lambda, s),$$

enfin, si comme en 1.7, $f_j \in \mathscr{K}^{-1}(E)$, $1 \leq j \leq n$ est telle qu'il existe $\Delta_j \in \mathscr{X}^1_0$ tel que supp $\Sigma_m^{-1/2} f_j \subset \Delta_j$, on pose

(D.2.4) $$Z^{(n)}_{\lambda,\Lambda,s}(f_1, \ldots, f_n) = E_\nu\Big[\prod_{\substack{j=1 \\ \Delta_j \subset \Lambda}}^{n} \Phi(f_j) e^{-\lambda \mathbf{V}_\Lambda(s)} \Big],$$

et, si $Z^{(0)}_{\lambda,\Lambda,s} \neq 0$,

(D.2.5) $$S^{(n)}_{\lambda,\Lambda,s}(f_1, \ldots, f_n) = Z^{(n)}_{\lambda,\Lambda,s}(f_1, \ldots, f_n)/Z^{(0)}_{\lambda,\Lambda,s},$$

qui constitue le prolongement proposé ([96]).

([95]) Voir (B.0.2).
En posant

$$T_{\Gamma,\alpha} = \sum_{\beta \in \mathscr{R}} \frac{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma^{-1}_{\tau,\Gamma} \mathbf{1}_{\Delta_\beta})}{(\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, \Sigma_\tau^{-1} \mathbf{1}_{\Delta_\beta})} \mathbf{1}_{\Delta_\beta}, \qquad (\alpha \in \mathscr{R}, \Gamma \in \mathscr{C})$$

on a, d'après (B.0.2), (D.2.1), (D.2.2),

$$\int_{\mathscr{S}'} \Phi^{:k}_{\mu_m}(\Lambda, s)[\omega] e^{i\langle\omega, f\rangle} \nu(d\omega) = i^k \sum_{\alpha \in \underline{\Lambda}} \sum_{\Gamma \in \mathscr{C}} A_\Gamma(s) (\mathbf{1}_{\Delta_\alpha}, (\Sigma_m^{-1/2} T_{\Gamma',\alpha} f)^k)_2 \cdot \hat{\nu}(f), \qquad \forall f \in \mathscr{S};$$

comme $A_\Gamma(s) \geq 0$, cette remarque est le point de départ de la démonstration, *via* le théorème de Nelson, de l'intégrabilité de la fonction $e^{-\lambda \mathbf{V}_\Lambda(s)}$, si Re $\lambda \geq 0$.
([96]) Voir note ([27]), p. 253.

RÉFÉRENCES

[1] A. Cooper, L. Rosen, The weakly coupled Yukawa_2 field theory, cluster expansion and Wightman axioms, *TAMS*, t. **234**, 1977, p. 1-88.

[2] M. Duneau, D. Iagolnitzer, B. Souillard, Strong cluster properties for classical systems with finite range interaction, *CMP*, t. **35**, 1974, p. 307-320.

[3] J. P. Eckmann, J. Magnen, R. Sénéor, Decay properties and Borel summability for the Schwinger functions in $P(\Phi)_2$ theories, *CMP*, t. **39**, 1975, p. 251-271.

[4] J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer, The particle structure of the weakly coupled $P(\Phi)_2$ model... Part II, the cluster expansion (Erice 1973) in *Lecture Notes in Physics*, t. **25**, Springer, 1973, p. 199-242.

[5] J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer, The Wightman axions and particle structure in the $P(\Phi)_2$ quantum field model, *Ann. of Math.*, t. **100**, 1974, p. 585.

[6] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford Univ. Press, 1973.

[7] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1966.

[8] J. Magnen, R. Sénéor, The Wightman axioms for the weakly coupled Yukawa model in two dimensions, *CMP*, t. **51**, 1976, p. 297-313.

[9] K. Osterwalder, R. Schrader, Axioms for euclidan Green's functions, *CMP*, t. **31**, 1973, p. 83; *CMP*, t. **42**, 1975, p. 281.

[10] P. Renouard, Analyticité et sommabilité « de Borel » des fonctions de Schwinger de modèle de Yukawa en dimension $d = 2$. I. — Approximation « à volume fini », *Ann. IHP*, t. **27**, 1977, p. 237-277.

[11] E. Seiler, Schwinger functions for the Yukawa model in two dimensions with space time cut-off, *CMP*, t. **42**, 1975, p. 163.

[12] E. Seiler, B. Simon, Bounds in the Yukawa_2 quantum field theory..., *CMP*, t. **45**, 1975, p. 99.

[13] T. Spencer, The decay of the Bethe-Salpeter kernel in $P(\Phi)_2$ quantum field models, *CMP*, t. **44**, 1975, p. 143-164.

(Manuscrit reçu le 25 juillet 1979).