ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

RADU ROSCA

Espaces-temps possédant la propriété de Killing

Annales de l'I. H. P., section A, tome 30, nº 4 (1979), p. 333-337
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__30_4_333_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré Section A :
Vol. XXX, n° 4, 1979, p. 333-337. *Physique théorique.*

Espaces-temps possédant la propriété de Killing

par

Radu ROSCA
Faculté des Sciences et Techniques.
Sfax, Tunisie.

Soit (M, g) un espace-temps et soit $R(M)$ un champ de repères de Sachs sur M. Si au voisinage de chaque point $p \in M$ il existe un repère

$$R = \{ h_A \} \in R(M)$$

tels que tous les vecteurs (isotropes) h_A soient des champs de Killing on dit que (M, g) possède la *propriété de Killing*. On démontre que tout espace-temps qui possède cette propriété est de *courbure scalaire constante* et est du *type D* dans la classification de Petrov. En outre la connexion ∇_K induite par cette propriété définit sur l'espace tangent $T_p(M)$ un *double feuilletage géodésique*. D'autres considérations sont aussi faites.

1. Soit (M, g) un espace-temps assujetti aux conditions d'intégrabilité usuelles et soit $R(M)$ le fibré des repères de Sachs et $R = \{ h_A \} \in R(M)$ un pareil repère.

Nous disons que (M, g) possède la *propriété de Killing* si au voisinage de chaque point $p \in M$ il existe un R tel que tous les vecteurs h_A soient des *champs de Killing* [*1*]. Si $T_p(M)$ est l'espace tangent en chaque point $p \in M$ et ∇ la dérivation covariante par rapport à g, cette propriété s'exprime d'une manière intrinsèque, par

$$(1.1) \qquad \langle \nabla_W h_A, W' \rangle + \langle \nabla_{W'} h_A, W \rangle = 0 \,;\ \forall W, W' \in T_p(M)\,.$$

Nous ferons usage dans ce qui suit du formalisme vectoriel complexe [*2*] (abr. f. v. c.) : Si $\{ \theta^A \}$ est la base duale de $\{ h_A \}$ il existe un isomorphisme entre les 2-formes $\theta^A \wedge \theta^B$ de l'espace 6-dimensionel L_6^* et les 2-formes autoduales Z^α, $(\alpha = 1, 2, 3)$ qui forment une base de l'espace complexe C^3. L'on a :

$$(1.2) \qquad Z^1 = \theta^3 \wedge \theta^4,\ Z^2 = \theta^1 \wedge \theta^2,\ Z^3 = \frac{1}{2}(\theta^1 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^3)$$

et la connexion ∇ est déterminée par la 1-forme σ (à valeurs dans $SO^3(C)$) telle que le premier groupe d'équations de structure dans C^3 est sous forme compacte : $d \wedge Z = \sigma \wedge Z$ ($d \wedge$: différentiation extérieure). Les 1-formes σ_α, $\bar{\sigma}_\alpha$ ($-$: complexe conjugué) sont exprimées en fonctions des θ^A par $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha A}\theta^A$, $\bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}_{\alpha A}\bar{\theta}^A$ ($\theta^2 = \bar{\theta}^3$, $\theta^1 = \bar{\theta}^1$, $\theta^4 = \bar{\theta}^4$) et les coefficients $\sigma_{\alpha A}$, $\bar{\sigma}_{\alpha A}$ correspondent dans f. v. c. aux coefficients spinoriels de Newmann-Penrose. En termes de σ la variété (M, g) est structurée par la connexion :

$$
(1.3)\qquad
\begin{aligned}
\nabla h_1 &= -\frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \otimes h_1 + \frac{\bar{\sigma}_2}{2} \otimes h_2 + \frac{\sigma_2}{2} \otimes h_3 \\
\nabla h_2 &= -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \otimes h_1 + \frac{(\bar{\sigma}_3 - \sigma_3)}{4} \otimes h_2 + \frac{\sigma_2}{2} \otimes h_4 \\
\nabla h_3 &= -\frac{1}{2}\sigma_1 \otimes h_1 - \frac{(\bar{\sigma}_3 - \sigma_3)}{4} \otimes h_3 + \frac{\bar{\sigma}_2}{2} \otimes h_4 \\
\nabla h_4 &= -\frac{1}{2}\sigma_1 \otimes h_2 - \frac{\bar{\sigma}_1}{2} \otimes h_3 + \frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \otimes h_4
\end{aligned}
$$

et sur le fibré R(M) le 1er groupe d'équations de structure s'écrit :

$$
(1.4)\qquad
\begin{aligned}
d \wedge \theta^1 &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^1 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \wedge \theta^2 + \frac{1}{2}\sigma_1 \wedge \theta^3 \\
d \wedge \theta^2 &= -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 \wedge \theta^1 + \frac{1}{4}(\sigma_3 - \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^2 + \frac{1}{2}\sigma_1 \wedge \theta^4 \\
d \wedge \theta^3 &= -\frac{1}{2}\sigma_2 \wedge \theta^1 - \frac{1}{4}(\sigma_3 - \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^3 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \wedge \theta^4 \\
d \wedge \theta^4 &= -\frac{1}{2}\sigma_2 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 \wedge \theta^3 - \frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^4 .
\end{aligned}
$$

En faisant usage des équations 1.3 les conditions de définition 1.1 donnent après calculs :

$$
(1.5)\qquad
\begin{aligned}
&\sigma_1 = \lambda_3\theta^1 - \mu_4\theta^2 , \qquad \sigma_2 = \lambda_2\theta^4 - \mu_1\theta^3 , \\
&\sigma_3 = \mu_1\theta^1 + \mu_4\theta^4 - \lambda_2\theta^2 - \lambda_3\theta^3 \\
&\bar{\sigma}_1 = \lambda_2\theta^1 + \mu_4\theta^3 , \qquad \bar{\sigma}_2 = \lambda_3\theta^4 + \mu_1\theta^2 , \\
&\bar{\sigma}_3 = -\mu_1\theta^1 - \mu_4\theta^4 - \lambda_2\theta^2 - \lambda_3\theta^3 \\
&\qquad (\mu_a, \lambda_b \in C^\infty(M) ; \quad a = 1,4 ; \quad b = 2,3) .
\end{aligned}
$$

Il résulte aussitôt de 1.5 que l'on a : $\sigma_{14} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{21} = 0, \sigma_{22} = 0$ et ces conditions caractérisent comme on sait un espace-temps du *type D* dans la classification de Petrov [*2*]. En nous rapportant à [*3*] il résulte aussi que (M, g) possède la *propriété géodésique*, mais la réciproque n'est évidemment plus vrai. Nous considérons d'appeler la connexion ∇ induite par la propriété 1.1 une connexion de Killing (notée par ∇_k).

L'espace tangent $T_p(M)$ en $p \in M$ peut se décomposer en $T_p(M) = \mathscr{D}_h \oplus \mathscr{D}_s$ où $\mathscr{D}_h = \{ h_a \}$ et $\mathscr{D}_s = \{ h_b \}$ sont respectivement une *2-distribution hyperbolique* et une *2-distribution spatiale.*

Posons :

$$(1.6) \qquad \omega_s = \lambda_b \theta^b \in \mathscr{D}_s^*, \qquad \omega_h = \mu_a \theta^a \in \mathscr{D}_h^*$$

et introduisant les *2-formes simples* $\eta_s = \theta^2 \wedge \theta^3$ et $\eta_h = \theta^1 \wedge \theta^4$ correspondant respectivement à $\mathscr{D}_s$ et $\mathscr{D}_h$. Eu égard à 1.5 et 1.6 les équations :

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} d \wedge \theta^1 &= - \omega_s \wedge \theta^1 - \mu_4 \eta_s \\ d \wedge \theta^4 &= \omega_s \wedge \theta^4 - \mu_1 \eta_s \\ d \wedge \theta^2 &= \omega_h \wedge \theta^2 + \lambda_3 \eta_h \\ d \wedge \theta^3 &= - \omega_h \wedge \theta^3 + \lambda_2 \eta_h \end{aligned}$$

et le théorème de Frobenius montrent aussitôt que les deux distributions $\mathscr{D}_s$ et $\mathscr{D}_h$ sont *involutives.* Si j est l'isomorphisme canonique défini par la métrique g nous convenons d'appeler $X_s = j^{-1}(\omega_s) \in \mathscr{D}_s$ et $X_h = j^{-1}(\omega_h) \in \mathscr{D}_h$ respectivement le champ vectoriel spatial et le champ vectoriel hyperbolique associés à ∇_k. D'autre part en nous rapportant à 1.2 nous poserons $\Omega = 2Z^3$, $\bar{\Omega} = 2\bar{Z}^3$ $(= \theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3)$. Les 2-formes Ω et $\bar{\Omega}$ sont visiblement *presque symplectique* $((\wedge\, \Omega)^2 \neq 0,\ (\wedge\, \bar{\Omega})^2 \neq 0)$. Notons par μ et $\bar{\mu}$ les isomorphismes de fibrés définis par Ω et $\bar{\Omega}$ $(\mu : w \to i_w \Omega ;\ w \in T(M)$, etc.). En faisant usage de (1.7) la différentiation extérieure de η_h et η_s donne :

$$(1.8) \qquad d \wedge \eta_h = - \bar{\mu}(X_h) \wedge \eta_s, \quad d \wedge \eta_s = - \mu(X_s) \wedge \eta_h$$

et à l'aide de (1.8) la différentiation extérieure de (1.7) donne après calculs :

$$(1.9) \qquad d\mu_a = 0, \ d\lambda_b = 0 .$$

D'autre part soient Σ_α et $C_{\alpha\beta}$ respectivement les 2-formes de courbures complexes et les composantes du tenseur symétrique (et de trace nulle) qui correspond dans le f. v. c. au *tenseur conforme de Weyl* [*2*]. On a comme on sait (1.9) $\Sigma_\alpha = \left(C_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R \mu_{\alpha\beta} \right) Z^\beta + E_{\alpha\bar{\beta}} \bar{Z}^\beta$ et

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} d \wedge \sigma_1 &= \Sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_3 \wedge \sigma_1 \\ d \wedge \sigma_2 &= \Sigma_2 + \frac{1}{2} \sigma_2 \wedge \sigma_3 \\ d \wedge \sigma_3 &= \Sigma_3 + \sigma_2 \wedge \sigma_1 . \end{aligned}$$

Dans (1.9) R, $E_{\alpha\bar{\beta}}$ et $\mu_{\alpha\beta}$ sont respectivement la *courbure scalaire* de (M, g), le *tenseur d'Einstein* et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

A l'aide de (1.5) et (1.7) on déduit de (1.9) et (1.10) $R = 3(\mu_1\mu_4 - \lambda_2\lambda_3) = \text{const}$. Enfin des distributions $\mathscr{D}_s$ et $\mathscr{D}_h$ étant les deux involutives considérons par exemple la surface (feuille) M_h tangente à $\mathscr{D}_h$. Elle est définie par $\theta^b = 0$ et par conséquent la forme de soudure de M_h est $dp = \theta^a \otimes h_a$ (nous avons noté avec les mêmes lettres les éléments induites par l'immersion $x : M_h \to M$). Les vecteurs h_b étant des sections normales, les deux *formes quadratiques* l_b associés à x sont $l_b = - \langle dp, \nabla h_b \rangle$. De (1.3), (1.6) et (1.7) il vient :

$$(1.11)\qquad \begin{aligned} \nabla h_2 &= \frac{1}{2}(-\omega_h \otimes h_2 + \lambda_2(\theta^4 \otimes h_4 - \theta^1 \otimes h_1)) \\ \nabla h_3 &= \frac{1}{2}(\omega_h \otimes h_3 + \lambda_3(\theta^4 \otimes h_4 - \theta^1 \otimes h_1)) \end{aligned}$$

et un calcul immédiat donne $l_b = 0$ ce qui prouve que l'immersion x est *totalement géodésique* [*4*]. La considération de la surface M_s tangente à $\mathscr{D}_s$ conduit à la même propriété. On peut donc dire que la connexion ∇_k induit un double *feuilletage géodésique.*

THÉORÈME. — *Soit* (M. g) *un espace-temps ayant la propriété de Killing et soit* ∇_k *la connexion induite par cette propriété. Alors :*

i) *L'espace-temps* (M, g) *est du type* D *dans la classification de Petrov et est de courbure scalaire constante;*

ii) *la connexion* ∇_k *induit sur l'espace tangent* $T_p(M)$ *un double feuilletage géodésique dont les feuilles sont respectivement des surfaces spatiales et hyperboliques.*

2. De (1.3) et (1.5) on déduit après calculs

$$(2.1)\qquad \nabla_{X_s}X_s = 0\,, \qquad \nabla_{X_h}X_h = 0\,, \qquad \nabla_{X_s}X_h + \nabla_{X_h}X_s = 0$$

et les deux premières équations (2.1) montrent que les champs vectoriels X_s et X_h sont *géodésiques.* En outre les propriétés de l'opérateur ∇ montrent aussitôt que les champs $\underset{+}{X} = X_s + X_h$ et $\underset{-}{X} = X_s - X_h$ sont aussi géodésiques. Si nous posons maintenant :

$$(2.2)\qquad i_X\bar{\Omega} = \mu_1\theta^1 - \lambda_2\theta^2 + \lambda_3\theta^3 - \mu_4\theta^4 = \phi\,.$$

on trouve à l'aide (1.7) $d \wedge \phi = 0$. Mais d'autre part compte tenu de (1.8) il vient :

$$(2.3)\qquad d \wedge \bar{\Omega} = (\mu\theta^1 - \mu_4\theta^4) \wedge \eta_s + (\lambda_3\theta^3 - \lambda_2\theta^2) \wedge \eta_h$$

et l'on obtient $i_X(d \wedge \bar{\Omega}) = 0$. On a donc $L_X\bar{\Omega} = 0$ (L_w : dérivée de Lie dans la direction W) ce qui montre que $\underset{-}{X}$ est un *automorphisme infinitésimal* de $\bar{\Omega}$. De plus on trouve que l'adjointe ${}_*\phi$ de ϕ a pour expression

$${}_*\phi = -(\lambda_3\theta^2 + \lambda_2\theta^3) \wedge \eta_h + (\mu_4\theta^1 + \mu_1\theta^4) \wedge \eta_s$$

et à l'aide de (1.7) et (1.8) on déduit $d \wedge {}_*\phi = 0$.

Il résulte de là que ϕ est *harmonique* ou encore que le champ vectoriel $j^{-1}\phi = (j^{-1} \circ \bar{\mu})\underset{-}{\mathrm{X}}$ est harmonique. D'une manière analogue on retrouve les mêmes propriétés pour la 2-forme Ω et le champ vectoriel $\underset{+}{\mathrm{X}}$.

THÉORÈME. — *Le champ spatial* X_s *et le champ hyperbolique* X_h *associés à la connexion* ∇_k *qui structure un espace-temps possédant la propriété de Killing sont les deux géodésiques et cette propriété est encore vraie pour les champs* $\underset{-}{\mathrm{X}} = \mathrm{X}_s - \mathrm{X}_h$ *et* $\underset{+}{\mathrm{X}} = \mathrm{X}_s + \mathrm{X}_h$. *Ces deux derniers champs sont des automorphismes infinitésimaux respectivement des formes presque symplectiques* $\bar{\Omega}$ *et* Ω *et les champs* $(j^{-1} \circ \bar{\mu})\underset{-}{\mathrm{X}}$ *et* $(j^{-1} \circ \mu)\underset{+}{\mathrm{X}}$ *sont harmoniques.*

Let (M, g) be a general space-time and let R(M) be the bundle of Sachs frames. If in the neighbourhood of each point $p \in \mathrm{M}$ there exists a frame $\mathrm{R} = \{ h_{\mathrm{A}} ; \mathrm{A} = 1, \ldots, 4 \} \in \mathrm{R(M)}$ such that all vectors h_{A} are Killing vector fields we say that (M, g) has the *Killing property*. Making use of the complex vectorial formalism [*2*] if is proved that any space-time which has the Killing property is *of type* D in Petrov's classification and M is of *constant scalar curvature.* The connection ∇_k induced by this property defines on the tangent space $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ a *double geodesic foliation* whose leaves are hyperbolic and spatial surfaces respectively. The properties of some vector fields induced by ∇_k are also discussed.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. E. D'ATRI, H. K. NICKERSON, *The existence of special orthogonal frames.* Diff., t. **2**, 1968.

[*2*] M. CAHEN, R. DEBEVER, L. DEFRISE, A complex vectoriel formalism in general Relativity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, t. **16**, 7, 1967.

[*3*] R. ROSCA, Espace-temps ayant la propriété géodésique, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, Série A, t. **285**, 1977, p. 305-308.

[*4*] B. Y. CHEN, *Geometry of submanifolds*, M. Dekker, N. Y., 1973.

(Manuscrit reçu le 22 mars 1979)