

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Groupes conformes en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 30, n° 3 (1979), p. 231-250

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__30_3_231_0

© Gauthier-Villars, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Groupes conformes en relativité générale

par

M. BRAY

657, rue de Robbée, 02120 Guise

ABSTRACT. — This paper proposes to study some properties of conformal transformations in general relativity and their applications to magneto-hydrodynamics and thermodynamic perfect fluid.

I. INTRODUCTION

Tout champ vectoriel $\vec{\xi}$ engendrant sur l'espace-temps V_4 un groupe à 1 paramètre de transformations conformes satisfait les relations

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}}(g_{\alpha\beta}) = 2\phi g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 2\phi g_{\alpha\beta} ; \phi(x^\lambda) ; \phi_\alpha \equiv \nabla_\alpha(\phi)$$

[Nous écrivons dorénavant la dérivée de Lie sous la forme $\mathcal{L}(\)$ sans expliciter le $\vec{\xi}$].

Par dérivation et combinaison nous obtenons

$$[\xi_{\alpha;\beta;\gamma} - \xi_{\alpha;\gamma;\beta}] + [\xi_{\gamma;\beta;\alpha} - \xi_{\gamma;\alpha;\beta}] + [\xi_{\beta;\gamma;\alpha} - \xi_{\beta;\alpha;\gamma}] + 2\xi_{\beta;\alpha;\gamma} = 2\langle g_{\alpha\beta}\phi_\gamma + g_{\beta\gamma}\phi_\alpha - g_{\gamma\alpha}\phi_\beta \rangle$$

L'identité de Ricci

$$[\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha]X^\nu = -X^\rho R^\nu{}_{\rho\alpha\beta} \Leftrightarrow 2\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} X_\nu = X_\rho R^\rho{}_{\nu\alpha\beta}$$

permet d'écrire l'expression sous la forme

$$\xi_{\alpha;\beta;\gamma} = -\xi_\nu R^\nu{}_{\gamma\beta\alpha} + \langle g_{\alpha\beta}\phi_\gamma + g_{\alpha\gamma}\phi_\beta - g_{\beta\gamma}\phi_\alpha \rangle \rightarrow \xi_{[\alpha;\beta;\gamma]} = 0.$$

D'autre part on déduit de $g^{\alpha\rho}g_{\beta\rho} = g^\alpha{}_\beta : \mathcal{L}(g^{\alpha\beta}) = -2\phi g^{\alpha\beta}$.

Appliquant maintenant \mathcal{L} au tenseur de Levi-Civita $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$, il vient

$$\mathcal{L}(\eta_{\alpha\beta\mu\nu}) = 4\phi\eta_{\alpha\beta\mu\nu} \rightarrow \mathcal{L}(\sqrt{-g}) = 4\phi\sqrt{-g} ; g \equiv |g_{\alpha\beta}|$$

Nous avons ensuite pour un champ vectoriel contrevariant Y^α

$$\nabla_\alpha[\mathcal{L}(Y^\beta)] - \mathcal{L}[\nabla_\alpha(Y^\beta)] = -\xi^\nu Y^\rho R^\beta_{\rho\alpha\nu} - Y^\nu \xi^\beta_{;\nu\alpha}$$

Le remplacement de $\xi^\beta_{;\nu\alpha}$ par sa valeur fournit alors le commutateur

$$\nabla_\alpha[\mathcal{L}(Y^\beta)] - \mathcal{L}[\nabla_\alpha(Y^\beta)] = -Y^\beta \phi_\alpha + Y_\alpha \phi^\beta - g_\alpha^\beta (Y^\nu \phi_\nu)$$

et la formule équivalente

$$\nabla_\alpha[\mathcal{L}(Y_\beta)] - \mathcal{L}[\nabla_\alpha(Y_\beta)] = Y_\beta \phi_\alpha + Y_\alpha \phi_\beta - g_{\alpha\beta} (Y^\nu \phi_\nu)$$

Plus généralement, pour un tenseur mixte d'ordre deux

$$\nabla_\alpha[\mathcal{L}(T^\rho_{\cdot\beta})] - \mathcal{L}[\nabla_\alpha(T^\rho_{\cdot\beta})] = -T^\sigma_{\cdot\beta}(\phi_\sigma g^\rho_\alpha) - T^\rho_{\cdot\sigma}(g_{\alpha\beta} \phi^\sigma) + T^\rho_{\cdot\alpha} \phi_\beta + T_{\alpha\beta} \phi^\rho$$

Dans l'expression

$$\mathcal{L} \langle [\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha] X^\nu \rangle = -\mathcal{L}(X^\rho) R^\nu_{\cdot\rho\alpha\beta} - X^\rho (\mathcal{L} R^\nu_{\cdot\rho\alpha\beta})$$

déduite de l'identité de Ricci on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\nabla_\alpha \nabla_\beta (X^\nu)] &= \nabla_\alpha[\mathcal{L}(X^\nu_{;\beta})] - X_{\alpha;\beta} \phi^\nu + g^\nu_\alpha (X^\sigma_{;\beta} \phi_\sigma) \\ &\quad - X^\nu_{;\alpha} \phi_\beta + g_{\alpha\beta} (X^\nu_{;\sigma} \phi^\sigma) \end{aligned}$$

puis une formule similaire en permutant α et β , d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \langle 2\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} X^\nu \rangle &= 2\nabla_{[\alpha} \langle \mathcal{L}(X^\nu_{;\beta]} \rangle - 2X_{[\alpha;\beta]} \phi^\nu + (g^\nu_\alpha X^\sigma_{;\beta} \phi_\sigma) \\ &\quad - (g^\nu_\beta X^\sigma_{;\alpha} \phi_\sigma) - 2X^\nu_{;[\alpha} \phi_{\beta]} \end{aligned}$$

Effectuant dans le premier terme du second membre une nouvelle commutation des opérateurs \mathcal{L} et ∇ il vient toutes réductions faites

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \langle 2\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} X^\nu \rangle &= 2\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} \langle \mathcal{L}(X^\nu) \rangle + 2X_{[\alpha} \phi^\nu_{;\beta]} \\ &\quad + g^\nu_\beta (X^\sigma \phi_{\sigma;\alpha}) - g^\nu_\alpha (X^\sigma \phi_{\sigma;\beta}) \end{aligned}$$

Mais nous avons $2\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} \langle \mathcal{L}(X^\nu) \rangle = -\mathcal{L}(X^\rho) R^\nu_{\cdot\rho\alpha\beta}$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \langle 2\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} X^\nu \rangle &= -\mathcal{L}(X^\rho) R^\nu_{\cdot\rho\alpha\beta} + 2X_{[\alpha} \phi^\nu_{;\beta]} - 2g^\nu_{[\alpha} X^\sigma \phi_{\sigma;\beta]} \\ &= -\mathcal{L}(X^\rho) R^\nu_{\cdot\rho\alpha\beta} - X^\rho \mathcal{L}(R^\nu_{\cdot\rho\alpha\beta}) \end{aligned}$$

Les deux expressions devant être égales pour tout X^ρ on trouve en identifiant

$$\begin{cases} \mathcal{L}(R^\nu_{\cdot\rho\alpha\beta}) = -2g_{\rho[\alpha} \phi^\nu_{;\beta]} - 2\phi_{\rho;[\alpha} g^\nu_{\beta]} \\ \text{ou équivalamment} \\ \mathcal{L}(R_{\rho\sigma\alpha\beta}) = 2\phi R_{\rho\sigma\alpha\beta} + 4\phi_{[\rho;[\alpha} g_{\beta]\sigma]} \end{cases}$$

puis, avec $R_{\alpha\beta} \equiv R^\nu_{\cdot\alpha\beta\nu}$ et $R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(R_{\alpha\beta}) = -2\phi_{\beta;\alpha} - g_{\alpha\beta} \phi^\nu_{;\nu} = -\langle \phi_{\alpha;\beta} + \phi_{\beta;\alpha} + g_{\alpha\beta} \phi^\nu_{;\nu} \rangle \\ \mathcal{L}(R) = -2\phi R - 6\phi^\nu_{;\nu} \end{cases}$$

Ces résultats permettent d'écrire la dérivée de Lie du tenseur d'Einstein

$$\mathcal{L} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) = -2 \langle \phi_{(\alpha;\beta)} - g_{\alpha\beta} \phi^\nu_{;\nu} \rangle$$

Donc les équations d'Einstein avec terme cosmologique

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \chi T_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}$$

nous donnent si $T_{\alpha\beta} = 0$

$$2\phi_{(\alpha;\beta)} - 2g_{\alpha\beta}\phi^{\nu}_{;\nu} = 2\Lambda\phi g_{\alpha\beta} \\ \rightarrow \phi^{\nu}_{;\nu} + \frac{4}{3}\Lambda\phi = 0 \rightarrow \phi_{(\alpha;\beta)} + \frac{\Lambda}{3}\phi g_{\alpha\beta} = 0$$

En outre $\mathcal{L}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right) = -2\Lambda\phi g_{\alpha\beta}$

Si $T_{\alpha\beta} \neq 0$ désignons par X^z un vecteur propre de valeur propre λ

$$(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})X^{\beta} = 0$$

Par application de \mathcal{L}

$$\langle \mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) - \mathcal{L}(\lambda)g_{\alpha\beta} - \lambda\mathcal{L}(g_{\alpha\beta}) \rangle X^{\beta} + (T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})\mathcal{L}(X^{\beta}) = 0$$

soit

$$\langle \mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) - g_{\alpha\beta}[\mathcal{L}(\lambda) + 2\phi\lambda] \rangle X^{\beta} + (T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})\mathcal{L}(X^{\beta}) = 0$$

d'où en multipliant par X^{α}

$$X^{\alpha} \langle \mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) - g_{\alpha\beta}[\mathcal{L}(\lambda) + 2\phi\lambda] \rangle X^{\beta} = 0$$

Si nous avons à la fois $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$ et $(X^{\nu}X_{\nu}) \neq 0$ il vient donc $\mathcal{L}(\lambda) = -2\phi\lambda$ (1).

Or

$$\chi\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = \mathcal{L}\left\langle R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} \right\rangle \\ \rightarrow \phi_{(\alpha;\beta)} - g_{\alpha\beta}\phi^{\nu}_{;\nu} = \Lambda\phi g_{\alpha\beta} \quad \phi_{(\alpha;\beta)} = -\frac{\Lambda}{3}\phi g_{\alpha\beta};$$

$\vec{\nabla}\phi$ doit engendrer un groupe conforme.

II. APPLICATIONS

A) Magnétohydrodynamique

Dans ce cas

$$T_{\alpha\beta} = (c^2rf + \mu|h|^2)U_{\alpha}U_{\beta} - \left(p + \frac{\mu}{2}|h|^2\right)g_{\alpha\beta} - \mu h_{\alpha}h_{\beta} \\ U^{\alpha}U_{\alpha} = 1 \quad ; \quad h^{\alpha}h_{\alpha} = -|h|^2 \quad ; \quad U^{\alpha}h_{\alpha} = 0$$

(1) J. Wainwright and P. E. A. Yaremovicz, *Killing vector fields and the Einstein-Maxwell field equations with perfect fluid source*, GRG, vol. 7, n° 4 (1976), p. 345-359.

On voit aisément que \vec{U} est un vecteur propre de $T_{\alpha\beta}$ correspondant à la valeur propre $\rho + \frac{\mu}{2} |h|^2$ avec $c^2rf = \rho + p$.

De même \vec{h} est un vecteur propre de valeur propre $-\rho + \frac{\mu}{2} |h|^2$. Les deux autres vecteurs propres orthogonaux à \vec{U} et \vec{h} forment un 2-plan correspondant à la valeur propre double $-\left(\rho + \frac{\mu}{2} |h|^2\right)$.

Nous avons $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta})X^\alpha X^\beta = [\mathcal{L}(\lambda) + 2\phi\lambda](X^\nu X_\nu)$ pour les vecteurs propres

$$\vec{U}, \vec{h} \text{ et } \vec{X}_{(a)}, \quad a = 1, 2$$

Imposant $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta})X^\alpha X^\beta = 0$ nous aurons donc $\mathcal{L}(\lambda) + 2\phi\lambda = 0$. De même si $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$.

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c^2rf) + 2\phi c^2rf &= 0 & ; & \quad \mathcal{L}(|h|^2) + 2\phi|h|^2 = 0; \\ \mathcal{L}(\rho) + 2\phi\rho &= 0 & ; & \quad \mathcal{L}(\rho) + 2\phi\rho = 0 \end{aligned}$$

Dans ces conditions $(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})\mathcal{L}(X^\beta) = 0$.

Donc $\mathcal{L}(X^\beta) = KX^\beta$ si la multiplicité propre est 1-dimensionnelle

$$\mathcal{L}(U^\alpha) = KU^\alpha \rightarrow \mathcal{L}(U_\alpha) = (K + 2\phi)U_\alpha$$

Puisque

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta &= 1 & , & \quad \mathcal{L}(g_{\alpha\beta})U^\alpha U^\beta + 2g_{\alpha\beta}\mathcal{L}(U^\alpha)U^\beta = 0 \rightarrow K = -\phi \\ \mathcal{L}(U^\alpha) &= -\phi U^\alpha & ; & \quad \mathcal{L}(U_\alpha) = \phi U_\alpha \end{aligned}$$

Écrivant $T_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$ avec

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv (\rho + p) U_\alpha U_\beta - p g_{\alpha\beta} ;$$

$$\tau_{\alpha\beta} \equiv \mu |h|^2 \left\langle U_\alpha U_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} - H_\alpha H_\beta \right\rangle ; \quad H_\alpha \equiv h_\alpha / |h|$$

on a $\mathcal{L}(\theta_{\alpha\beta}) = 0$ ce qui entraîne $\mathcal{L}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$ si l'on impose $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$. Réciproquement si l'on postule $\mathcal{L}(\theta_{\alpha\beta}) = 0$ les conséquences

$$\mathcal{L}(\rho) + 2\phi\rho = 0 \quad , \quad \mathcal{L}(p) + 2\phi p = 0 \quad , \quad \mathcal{L}(U_\alpha) = \phi U_\alpha$$

en découlent.

De l'équation de conservation $\nabla_\alpha(rU^\alpha) = 0$ on tire $\mathcal{L}[\nabla_\alpha(rU^\alpha)] = 0$. Soit à l'aide de la relation de commutation

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha[\mathcal{L}(rU^\alpha)] + 4r(U^\nu \phi_{,\nu}) &= 0 \rightarrow \nabla_\alpha \langle \mathcal{L}(r)U^\alpha \rangle + 3r(U^\alpha \phi_\alpha) = 0 \\ \nabla_\alpha \langle \mathcal{L}(r)U^\alpha \rangle &= -3r\dot{\phi} ; \quad \dot{\phi} \equiv U^\nu \nabla_\nu(\phi) \end{aligned}$$

Cette relation s'écrit également $\nabla_\alpha \langle [\mathcal{L}(r) + 3r\phi]U^\alpha \rangle = 0$. Si $\Lambda = 0$, les conditions $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$ entraînent $\phi_{(\alpha;\beta)} = g_{\alpha\beta}\phi_{;\nu}^\nu \rightarrow \phi_{(\alpha;\beta)} = 0$.

Soit $\nabla_\beta(\phi_\alpha) = 0$, relations admettant les solutions particulières $\phi = c^{te}$.

Pour $\Lambda \neq 0$ on ne peut avoir $\phi = c^{te} \neq 0$; le champ $\vec{\xi}$ engendre alors des isométries.

Examinons maintenant les conditions $X^\alpha X^\beta \mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$ où \vec{X} désigne un vecteur propre de $T_{\alpha\beta}$. Avec un système orthonormal $\vec{U}, \vec{H}, \vec{X}_{(a)}, a = 1, 2$ nous avons :

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} = U_\alpha U_\beta - H_\alpha H_\beta - X_{\alpha(1)} X_{\beta(1)} - X_{\alpha(2)} X_{\beta(2)} \\ T_{\alpha\beta} = \lambda_1 U_\alpha U_\beta - \lambda_2 H_\alpha H_\beta - \lambda_3 \langle X_{\alpha(1)} X_{\beta(1)} + X_{\alpha(2)} X_{\beta(2)} \rangle \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \left(\rho + \frac{\mu}{2} |h|^2 \right) \quad ; \quad \lambda_2 = \left(-p + \frac{\mu}{2} |h|^2 \right) \quad ; \quad \lambda_3 = - \left(p + \frac{\mu}{2} |h|^2 \right)$$

Le choix d'un repère coordonné coïncidant avec la tétrade orthonormale propre réduit nos conditions aux quatre relations $\mathcal{L}(T_{\alpha\alpha}) = 0$. D'une manière générale nous pouvons écrire $X^\alpha X^\beta \mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = [\mathcal{L}(\lambda) + 2\phi\lambda(X^\alpha X_\alpha)]$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda_1) + 2\phi\lambda_1 &= \frac{2}{\chi} \langle \pi^{\alpha\beta} \phi_{(\alpha;\beta)} + \Lambda\phi \rangle \quad ; \quad \pi_{\alpha\beta} \equiv (g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta) \\ \mathcal{L}(\lambda_2) + 2\phi\lambda_2 &= \frac{2}{\chi} \langle \tilde{\pi}^{\alpha\beta} \phi_{(\alpha;\beta)} + \Lambda\phi \rangle \quad ; \quad \tilde{\pi}_{\alpha\beta} \equiv (g_{\alpha\beta} + H_\alpha H_\beta) \\ \mathcal{L}(\lambda_3) + 2\phi\lambda_3 &= \frac{2}{\chi} \langle \pi^{*\alpha\beta} \phi_{(\alpha;\beta)} + \Lambda\phi \rangle \quad ; \quad \pi_{\alpha\beta}^* \equiv (g_{\alpha\beta} + \mathcal{X}_\alpha \mathcal{X}_\beta) \quad ; \quad \mathcal{X}^\alpha \mathcal{X}_\alpha = -1 \end{aligned}$$

On en déduit notamment

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu |h|^2) &= \frac{2}{\chi} \langle (\tilde{\pi}^{\alpha\beta} - \pi^{*\alpha\beta}) \phi_{\alpha;\beta} \rangle \quad ; \quad \mathcal{L}(p) + 2\phi p \\ &= -\frac{2}{\chi} \left\langle \left(\frac{\tilde{\pi}^{\alpha\beta} + \pi^{*\alpha\beta}}{2} \right) \phi_{\alpha;\beta} + \Lambda\phi \right\rangle \\ \mathcal{L}(\rho) + 2\phi\rho &= \frac{2}{\chi} \left\langle \left(\frac{2\pi^{\alpha\beta} - \tilde{\pi}^{\alpha\beta} + \pi^{*\alpha\beta}}{2} \right) \phi_{\alpha;\beta} + \Lambda\phi - \frac{\chi}{2} \mu |h|^2 \phi \right\rangle \end{aligned}$$

En introduisant le bivecteur $(^2)\xi_{[\alpha;\beta]} \equiv \tilde{\phi}_{\alpha\beta}$, il vient $\xi_{\alpha;\beta} = \phi g_{\alpha\beta} + \tilde{\phi}_{\alpha\beta}$ d'où

$$\nabla_\beta [\tilde{\phi}^{\alpha\beta}] = \nabla_\beta \langle \xi^{\alpha;\beta} - \phi g^{\alpha\beta} \rangle = \nabla_\beta (\xi^{\alpha;\beta}) - \phi^\alpha$$

D'après l'identité de Ricci : $\xi^{v;\beta}{}_{;v} - \xi^v{}_{;v}{}^{;\beta} = R^{\beta v} \xi_v$; $R_{\alpha\beta} \equiv R^v{}_{\alpha\beta v}$; donc

$$\nabla_v \langle \phi g^{v\beta} - \tilde{\phi}^{\beta v} \rangle - \nabla^\beta (\xi^v{}_{;v}) = R^{\beta v} \xi_v \rightarrow \nabla_\beta (\tilde{\phi}^{\alpha\beta}) = -3\phi^\alpha - R^{\alpha v} \xi_v$$

Soit $\nabla_\beta (\tilde{\phi}^{\beta\alpha}) = J^\alpha$ avec un vecteur de source $J_\alpha \equiv 3\phi_\alpha + R_{\alpha v} \xi^v$ conservatif qui s'écrit dans notre cas

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \chi \langle (\rho + p) + \mu |h|^2 \rangle U_\alpha (U_\beta \xi^\beta) \\ &\quad - \chi \mu (h_\beta \xi^\beta) h_\alpha + \left\langle \Lambda - \frac{\chi}{2} [(\rho - p) + \mu |h|^2] \right\rangle \xi_\alpha + 3\phi_\alpha \end{aligned}$$

(2) C. B. G. McIntosh, *Homothetic motions in general relativity*, GRG, vol. 7, n° 2 (1976), p. 199-213.

Supposons qu'il soit possible de choisir $\vec{\xi}$ orthogonal à \vec{U} et \vec{h} , nous avons alors

$$J^\alpha = \Omega \xi^\alpha + 3\phi^\alpha \quad ; \quad \Omega \equiv \Lambda - \frac{\chi}{2} [(\rho - p) + \mu |h|^2]$$

$\nabla_\alpha(J^\alpha) = 0$ fournit l'équation $\mathcal{L}(\Omega) + 4\phi\Omega + 3\phi^\nu{}_{;\nu} = 0$ dans laquelle nous expliciterons $\mathcal{L}(\rho)$, $\mathcal{L}(p)$, $\mathcal{L}(\mu |h|^2)$. Il vient

$$2\phi \left\langle \Lambda - \frac{\chi}{2} \left[\rho - p + \frac{3}{2} \mu |h|^2 \right] \right\rangle = (H^\alpha H^\beta - U^\alpha U^\beta) \phi_{\alpha;\beta} - \nabla_\nu(\phi^\nu)$$

Donc si l'on peut trouver un champ $\vec{\xi}$ tel que

$$(H^\alpha H^\beta - U^\alpha U^\beta - g^{\alpha\beta}) \phi_{\alpha;\beta} = 0$$

ϕ doit s'annuler pourvu que $2\Lambda - \chi \left[\rho - p + \frac{3}{2} \mu |h|^2 \right] \neq 0$ ce qui est certainement le cas lorsque $\Lambda = 0$ ($p < \rho$; $|h|^2 \neq 0$). Portant dans la relation générale de commutation un tenseur $F_{\alpha\beta} \equiv 2h_{[\alpha} U_{\beta]}$ nous obtenons, en vertu des équations de Maxwell $\nabla_\alpha(F^\alpha{}_{;\beta}) = 0$

$$\nabla_\alpha[\mathcal{L}(F^\alpha{}_{;\beta})] = -2F^\alpha{}_{;\beta} \phi_\alpha = -2\nabla_\alpha(\phi F^\alpha{}_{;\beta}) \rightarrow \nabla_\alpha[\mathcal{L}(F^\alpha{}_{;\beta}) + 2\phi F^\alpha{}_{;\beta}] = 0$$

Si les conditions $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$ sont satisfaites,

$$\mathcal{L}(U_\alpha) = \phi U_\alpha \quad ; \quad \mathcal{L}(H_\alpha) = \phi H_\alpha$$

Cette dernière relation entraîne $\mathcal{L}(h_\alpha) = 0$, $\mathcal{L}(h^\alpha) = -2\phi h^\alpha$ d'où $\mathcal{L}(F^\alpha{}_{;\beta}) = -\phi F^\alpha{}_{;\beta}$; il reste alors $\nabla_\alpha(\phi F^\alpha{}_{;\beta}) = 0 \rightarrow \phi_\alpha F^\alpha{}_{;\beta} = 0$

$$F_{\alpha\beta} \phi^\beta = 0 \Rightarrow h_\alpha(U_\beta \phi^\beta) - U_\alpha(h_\beta \phi^\beta) = 0 \rightarrow U^\beta \phi_\beta = h^\beta \phi_\beta = 0$$

$\vec{\nabla}\phi$ est donc orthogonal à \vec{U} et \vec{h} ; en outre $\nabla_\alpha[\mathcal{L}(F^\alpha{}_{;\beta})] = 0$. Une technique analogue permet de déduire des équations du mouvement $\nabla_\beta(T^{\alpha\beta}) = 0$

$$\nabla_\alpha[\mathcal{L}(T^\alpha{}_{;\beta})] = -4 \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} T \right) \phi^\alpha$$

Si $\mathcal{L}(T^\alpha{}_{;\beta}) = 0$ on a donc $\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} T \right) \phi^\alpha = 0$ et puisque $\vec{\nabla}\phi$ satisfait les relations $U^\beta \phi_\beta = h^\beta \phi_\beta = 0$

$$[\rho + p + 2\mu |h|^2] \phi_\beta = 0 \rightarrow \phi_\beta = 0 \quad , \quad \phi = \text{cte.}$$

Les transformations conformes dégénèrent donc en homothéties ou isométries. Mais $\mathcal{L}(T^\alpha{}_{;\beta}) = -2\phi T^\alpha{}_{;\beta} + g^{\alpha\sigma} \mathcal{L}(T_{\sigma\beta})$ donc $\mathcal{L}(T^\alpha{}_{;\beta}) = -2\phi T^\alpha{}_{;\beta}$ si l'on postule $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$. Dans ce cas $\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) \phi^\alpha = 0$; ϕ^α est un vecteur propre de $T_{\alpha\beta}$ de valeur propre $\frac{T}{2} = \frac{\rho - 3p}{2}$. Nécessairement

$$\left(\frac{\rho - 3p}{2} \right) = -p + \frac{\mu}{2} |h|^2 \rightarrow \rho - p = \mu |h|^2$$

Lorsque $\phi = k$ les formules se simplifient considérablement; nous avons notamment $\nabla_\alpha[\mathcal{L}(T^\rho_\beta)] = \mathcal{L}[\nabla_\alpha(T^\rho_\beta)]$ pour tout tenseur. Les dérivées de Lie du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci sont nulles et la relation

$$\mathcal{L}(R) = -2kR \text{ entraîne } \mathcal{L}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right) = 0.$$

Par conséquent $\mathcal{L}(\chi T_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}) = 0$ et pour un vecteur propre non nul correspondant à une valeur propre λ nous avons $\mathcal{L}(\lambda) + 2k\lambda = 0$ pourvu que les conditions $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$ soient satisfaites.

Si la multiplicité du vecteur propre est 1, il vient puisque $\mathcal{L}(X^\beta)$ est aussi un vecteur propre $\mathcal{L}(X^\alpha) = CX^\alpha$; on en déduit $\mathcal{L}(X_\alpha) = (2k + C)X_\alpha$. En particulier si $X^\alpha X_\alpha = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1 : C = -k$ et $\mathcal{L}(X_\alpha) = kX_\alpha$. Si l'on suppose $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = mg_{\alpha\beta}$ tout vecteur propre non nul fournit la relation

$$\mathcal{L}(\lambda) = -2k\lambda + m$$

Puisque $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = \frac{\Lambda}{\chi} \mathcal{L}(g_{\alpha\beta}) = \frac{2k}{\chi} \Lambda g_{\alpha\beta}$ nous avons donc

$$\mathcal{L}(\lambda) = 2k\left(\frac{\Lambda}{\chi} - \lambda\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p) &= -2kp - 2k\frac{\Lambda}{\chi} & ; & \quad \mathcal{L}(|h|^2) = -2k|h|^2 & ; & \quad \mathcal{L}(\rho) = -2k\rho + \frac{2k\Lambda}{\chi} \\ \mathcal{L}(U_\alpha) &= kU_\alpha & ; & \quad \mathcal{L}(H_\alpha) = kH_\alpha & ; & \quad H^\alpha H_\alpha = -1 \end{aligned}$$

Dans ces conditions $\mathcal{L}(\theta_{\alpha\beta}) = \frac{2k}{\chi} \Lambda g_{\alpha\beta}$; $\mathcal{L}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$. Réciproquement supposons $\mathcal{L}(\theta_{\alpha\beta}) = Ag_{\alpha\beta}$, $A : c^te$ et développons $\mathcal{L}(\theta_{\alpha\beta})$; on trouve

$$U_\alpha U_\beta \mathcal{L}(\mathcal{R}) + \mathcal{R}[U_\beta \mathcal{L}(U_\alpha) + U_\alpha \mathcal{L}(U_\beta)] - \mathcal{L}(p)g_{\alpha\beta} - p(2kg_{\alpha\beta}) = Ag_{\alpha\beta}$$

avec $\mathcal{R} \equiv (\rho + p)$. Une multiplication par U^β nous montre que

$$\mathcal{L}(U_\alpha) = \phi U_\alpha$$

Donc

$$-[\mathcal{L}(p) + 2kp]h_\alpha = Ah_\alpha \rightarrow \mathcal{L}(p) = -2kp - A$$

Il reste $U_\alpha U_\beta [\mathcal{L}(\mathcal{R}) + 2\mathcal{R}\bar{\phi}] = 0 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{R}) + 2\mathcal{R}\bar{\phi} = 0$. \vec{U} étant unitaire on trouve aisément $\bar{\phi} = k$. Soit $\mathcal{L}(U_\alpha) = kU_\alpha$; $\mathcal{L}(p) = -2kp - A$; $\mathcal{L}(\rho) = -2k\rho + A$. L'équation de conservation donne maintenant la relation $\nabla_\alpha \langle \mathcal{L}(r)U^\alpha \rangle = 0$. Nous pouvons poser $\mathcal{L}(r) = Br$, $B : c^te$. Appliquant \mathcal{L} à $c^2rf = \rho + p$ on obtient alors $\mathcal{L}(f) = -(2k + B)f$. Puis, d'après la définition de l'énergie spécifique interne $\rho = r(c^2 + \varepsilon)$,

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = -(2k + B)(c^2 + \varepsilon) + \frac{2k\Lambda}{\chi r}$$

Le tenseur $\tau_{\alpha\beta} \equiv \mu |h|^2 \left\langle U_\alpha U_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} - H_\alpha H_\beta \right\rangle$ s'écrit à l'aide de $F_{\alpha\beta} \equiv 2h_{[\alpha} U_{\beta]}$

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu \left\langle \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) - F_{\alpha\beta} F_{\beta}{}^\rho \right\rangle$$

Introduisant les vecteurs nuls $K_\alpha \equiv \frac{U_\alpha + H_\alpha}{\sqrt{2}}$; $N_\alpha \equiv \frac{U_\alpha - H_\alpha}{\sqrt{2}}$; $N^\alpha K_\alpha = 1$

nous avons aussi $F_{\alpha\beta} = 2\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} K_{[\alpha} N_{\beta]}$ avec $\tau^2 \equiv \tau^{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}$ et

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau \left\langle 2K_{(\alpha} N_{\beta)} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right\rangle$$

Ceci nous donne $\tau \mathcal{L}(\tau) = -2k\tau^2 + \tau^{\alpha\beta} \mathcal{L}(\tau_{\alpha\beta})$. Donc si $\mathcal{L}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$, $\mathcal{L}(\tau) = -2k\tau$. Portant cette valeur dans l'expression de $\mathcal{L}(\tau_{\alpha\beta})$ et multipliant par K^β il vient $\mathcal{L}(K_\alpha) + K_\alpha \langle K^\beta \mathcal{L}(N_\beta) - 2k \rangle = 0$. En vertu de $K^\beta N_\beta = 1$ on a $K^\beta \mathcal{L}(N_\beta) = 2k - N^\beta \mathcal{L}(K_\beta)$; donc

$$\mathcal{L}(K_\alpha) = \omega K_\alpha \quad ; \quad \omega \equiv N^\beta \mathcal{L}(K_\beta)$$

Un procédé analogue permet de déduire la relation $\mathcal{L}(N_\alpha) = (2k - \omega)N_\alpha$.

Ces résultats servent à évaluer $\mathcal{L}(F_{\alpha\beta})$; on aboutit à la formule

$$\mathcal{L}(F_{\alpha\beta}) = kF_{\alpha\beta}$$

Excluant l'écoulement isentropique et supposant $h^\alpha \nabla_\alpha (S) \neq 0$, S : entropie, on sait que la température propre $\bar{\theta}$ s'exprime par :

$$\bar{\theta} = c^2 \nabla_\alpha (fh^\alpha) / (h^\alpha S_\alpha)$$

Le calcul de $\mathcal{L}(\bar{\theta})$ est alors direct, nous avons

$$\mathcal{L}(\bar{\theta}) = -\bar{\theta} \left\langle (2k + B) + \frac{h^\beta \nabla_\beta [\mathcal{L}(S)]}{(h^\gamma S_\gamma)} \right\rangle$$

De la formule fondamentale $\bar{\theta} S_\alpha = c^2 f_\alpha - \frac{1}{r} p_\alpha$ on peut également tirer

un résultat similaire $\mathcal{L}(\bar{\theta} S_\alpha) = -(2k + B)\bar{\theta} S_\alpha$. Puisque $\dot{S} \equiv U^\nu \nabla_\nu (S) = 0$, il en résulte $[\mathcal{L}(S)]^* = 0$. Donc $\bar{\theta} \nabla_\alpha \langle \mathcal{L}(S) \rangle = -\langle \mathcal{L}(\bar{\theta}) + (2k + B)\bar{\theta} \rangle S_\alpha$. Par conséquent, si $\vec{\xi}$ est colinéaire à \vec{U} , $\mathcal{L}(\bar{\theta}) = -(2k + B)\bar{\theta}$. Les lignes de courant, trajectoires de \vec{U} sont décrites au moyen des tenseurs

$\omega_{\alpha\beta} \equiv U_{[\alpha; \beta]} + U_{[\alpha} \dot{U}_{\beta]}$; $\sigma_{\alpha\beta} \equiv U_{(\alpha; \beta)} - U_{(\alpha} \dot{U}_{\beta)} - \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\beta}$; $\theta \equiv \nabla_\nu (U^\nu)$;
avec

$$\pi_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta$$

On sait déjà que $\mathcal{L}(\theta) = -k\theta$; un calcul élémentaire fournit ensuite $\mathcal{L}(\dot{U})_\alpha = 0$. Ceci conduit à la loi $\mathcal{L}(\omega_{\alpha\beta}) = k\omega_{\alpha\beta}$. Le tenseur $\sigma_{\alpha\beta}$ satisfait

également la même relation. Le vecteur densité superficielle de courant est défini au moyen du tenseur induction électrique-champ magnétique $G_{\alpha\beta}$ par la formule $J^\alpha = -\nabla_\beta(G^{\alpha\beta})$, $G_{\alpha\beta}$ correspond à la 2-forme

$$G = - *(\vec{U} \wedge \vec{h})$$

soit

$$\begin{aligned} G^{23} &= F_{01} ; G^{31} = F_{02} ; G^{12} = F_{03} ; G^{01} = F_{23} ; G^{02} = F_{31} ; G^{03} = F_{12} \\ \sqrt{-g}J^0 &= - \langle \partial_1(\sqrt{-g}F_{23}) + \partial_2(\sqrt{-g}F_{31}) + \partial_3(\sqrt{-g}F_{12}) \rangle \\ J^0 &= - \langle \nabla_1(F_{23}) + \nabla_2(F_{31}) + \nabla_3(F_{12}) + F_{23}\nabla_1 \log(\sqrt{-g}) \\ &\quad + F_{31}\nabla_2 \log(\sqrt{-g}) + F_{12}\nabla_3 \log(\sqrt{-g}) \rangle \end{aligned}$$

On en déduit $\mathcal{L}(J^0) = kJ^0$ puis $\mathcal{L}(J^\lambda) = kJ^\lambda$. Puisque $J^\lambda = \zeta U^\lambda$, $\mathcal{L}(\zeta) = 2k\zeta$; ζ : densité de charge propre. Supposons, $\vec{\xi} = \Psi\vec{U}$; la relation $\mathcal{L}(U_\alpha) = kU_\alpha$ nous donne dans ce cas

$$\begin{aligned} \Psi\dot{U}_\alpha + \Psi_\alpha &= kU_\alpha \rightarrow \dot{\Psi} = k ; \\ \Psi(h^\alpha\dot{U}_\alpha) + h^\alpha\Psi_\alpha &= 0 \Rightarrow h^\alpha\Psi_\alpha = \Psi\nabla_\alpha(h^\alpha) \end{aligned}$$

ou

$$\nabla_\alpha(\Psi^{-1}h^\alpha) = 0$$

On tire de l'équation de conservation $\nabla_\alpha(rU^\alpha) = \nabla_\alpha\left(\frac{(r\xi^\alpha)}{\Psi}\right) = 0$ la conséquence

$$\Psi\dot{r} + 3r\dot{\Psi} = 0 \rightarrow (r\Psi^3)^\cdot = 0$$

Si $\vec{\xi}$ est colinéaire à \vec{h} , $\xi^\alpha = \Psi h^\alpha$, la relation $\mathcal{L}(U_\alpha) = kU_\alpha$ entraîne

$$\Psi(U_\nu\dot{h}^\nu) = 0 \Rightarrow \nabla_\nu(h^\nu) = 0 \Rightarrow h^\nu\nabla_\nu(p) = 0$$

D'après $\mathcal{L}(p) = -2kp - 2k\frac{\Lambda}{\chi}$, $p + \frac{\Lambda}{\chi} = 0$, d'où la nécessité d'un $\Lambda \leq 0$.

Le développement de $\xi_{(\alpha;\beta)} = kg_{\alpha\beta}$ conduit à $\Psi(U^\alpha\dot{h}_\alpha) = k = 0$; les transformations dégénèrent donc en isométries.

Nous avons $\mathcal{L}(h_\alpha) = 0$ soit

$$\Psi h^\nu\nabla_\nu(h_\alpha) + h_\nu[\Psi_\alpha h^\nu + \Psi\nabla_\alpha(h^\nu)] = 0;$$

on en déduit en multipliant par

$$U^\alpha : \Psi H^\alpha H^\beta U_{(\alpha;\beta)} + \dot{\Psi} + \frac{\Psi}{2} (\log |h|^2)^\cdot = 0 ; H^\alpha H_\alpha = -1$$

puis

$$\sigma_{\alpha\beta} H^\alpha H^\beta + \langle \log(r^{1/3}\Psi |h|) \rangle^\cdot = 0$$

En vertu de la relation générale $\sigma_{\alpha\beta} H^\alpha H^\beta = - \langle \log(r^{-2/3} |h|) \rangle^\cdot$ on a donc

$$\langle \log(r\Psi) \rangle^\cdot = 0 \rightarrow (r\Psi)^\cdot = 0$$

Pour $\phi = k$ la relation de McIntosh s'écrit $\nabla_\rho(\tilde{\phi}^{\beta\alpha}) = J^\alpha$, $J^\alpha \equiv R^{\alpha\beta}\xi_\beta$ avec

$$J_\alpha = \chi \langle \rho + p + \mu |h|^2 \rangle U_\alpha(U_\beta \xi^\beta) - \chi \mu (h_\beta \xi^\beta) h_\alpha + \left\langle \Lambda - \frac{\chi}{2} [\rho - p + \mu |h|^2] \right\rangle \xi_\alpha$$

Si $\vec{\xi}$ est orthogonal à \vec{U} et \vec{h} , $J_\alpha = \Omega \xi_\alpha$; dans ce cas le théorème 4-2 de McIntosh exige $k = 0$ (isométries).

Portant $\mathcal{L}(\rho)$, $\mathcal{L}(p)$ et $\mathcal{L}(|h|^2)$ dans $\mathcal{L}(\Omega)$ nous trouvons $\mathcal{L}(\Omega) = -2k\Omega$. Mais $\nabla_\alpha(J^\alpha) = 0$ ou $\nabla_\alpha(\Omega \xi^\alpha) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}(\Omega) + 4k\Omega = 0 \rightarrow k\Omega = 0$. Si $\Omega = 0$, $\frac{2\Lambda}{\chi} = \rho - p + \mu |h|^2$. On ne peut avoir $\Lambda = 0$ sinon $p > \rho$; il faut nécessairement $\Lambda > 0$ pourvu que la pression correspondante soit physiquement acceptable. La valeur $k = 0$ permet d'échapper à toute contrainte sur Ω .

Introduisons le tenseur $\pi_{\alpha\beta}^* \equiv g_{\alpha\beta} - \frac{\xi_\alpha \xi_\beta}{\xi^2}$; $\xi^2 \equiv (\xi^\alpha \xi_\alpha)$ supposé $\neq 0$.

Il vient

$$\pi_{(\alpha}^{\rho} \pi_{\beta)}^{\sigma} \xi_{\rho;\sigma} = k \pi_{\alpha\beta}^*$$

Donc

$$\sigma_{\alpha\beta}^* \equiv \pi_\alpha^{\rho} \pi_\beta^{\sigma} \xi_{(\rho;\sigma)} - \frac{1}{3} \pi_{\alpha\beta}^* \langle g^{\mu\nu} \pi_\mu^{\rho} \pi_\nu^{\sigma} \xi_{(\rho;\sigma)} \rangle = 0$$

De même

$$\omega_{\alpha\beta}^* \equiv \pi_\alpha^{\rho} \pi_\beta^{\sigma} \xi_{[\rho;\sigma]} = \tilde{\phi}_{\alpha\beta} + \xi^\rho [\tilde{\phi}_{\rho\alpha} \xi_\beta - \tilde{\phi}_{\rho\beta} \xi_\alpha] \xi^{-2}$$

Posons

$$\omega_\alpha^* \equiv \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \xi^\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu};$$

il vient

$$\omega_{\alpha;\beta}^* = k \tilde{\phi}_{\alpha\beta}^* + \tilde{\phi}_{,\beta}^\zeta \tilde{\phi}_{\alpha\zeta}^* + \xi^\zeta \nabla_\beta (\tilde{\phi}_{\alpha\zeta}^*)$$

avec

$$\tilde{\phi}_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{\phi}^{\mu\nu}$$

Le calcul montre que le produit $(\tilde{\phi}_{,\beta}^\zeta \tilde{\phi}_{\alpha\zeta}^*)$ est nul; par conséquent

$$\omega_{[\alpha;\beta]}^* = k \tilde{\phi}_{\alpha\beta}^* - \xi^\zeta \langle \nabla_{[\alpha} \tilde{\phi}_{\beta]\zeta}^* \rangle$$

nous avons par exemple

$$-2\xi^\nu \nabla_{[0} \tilde{\phi}_{1]\nu}^* = \sqrt{-g} \langle \nabla_\nu (\tilde{\phi}^{23}) \cdot \xi^\nu - \xi^2 J^3 + \xi^3 J^2 \rangle;$$

Or $\mathcal{L}(\tilde{\phi}^{23}) = \xi^\nu \nabla_\nu (\tilde{\phi}^{23}) - 2k\tilde{\phi}^{23}$; le calcul de $\mathcal{L}(\tilde{\phi}^{23})$ à partir de la définition $\xi_{[\alpha;\beta]} \equiv \tilde{\phi}_{\alpha\beta}^*$ ne présente aucune difficulté. On trouve

$$\mathcal{L}(\tilde{\phi}^{23}) = -2k\tilde{\phi}^{23}$$

d'où

$$\xi^\nu \nabla_\nu (\tilde{\phi}^{\alpha\beta}) = 0$$

Nous pouvons donc écrire le rotationnel $\omega_{[\alpha;\beta]}^*$ sous la forme

$$\omega_{[\alpha;\beta]}^* = k \tilde{\phi}_{\alpha\beta}^* - \frac{1}{2} (\tilde{\xi} \wedge \tilde{J})_{\alpha\beta}^*$$

soit

$$d(\omega)^* = k \tilde{\phi}^* - \frac{1}{2} (\tilde{\xi} \wedge \tilde{J})^*$$

dans le langage des formes différentielles.

Donc si $\tilde{\xi}$ est parallèle à \tilde{J} , $d(\omega)^* = k \tilde{\phi}^* \rightarrow k d\tilde{\phi}^* = 0$. Nous avons supposé $\tilde{\xi}$ orthogonal à \tilde{U} et \tilde{h} ; si l'on abandonne cette hypothèse le vecteur de source devient $J_\alpha = A U_\alpha + B h_\alpha + \Omega \xi_\alpha$ avec

$$A \equiv \chi[\rho + p + \mu |h|^2](U_\beta \xi^\beta) \quad ; \quad B \equiv -\chi^\mu (h_\beta \xi^\beta)$$

Un $\tilde{\xi}$ non nul et parallèle à \tilde{J} exige donc une relation

$$A U^\alpha + B h^\alpha + \Omega \xi^\alpha = \Psi \xi^\alpha$$

d'où

$$A = (\Psi - \Omega)(\xi^\alpha U_\alpha) \quad ; \quad B(h^\alpha h_\alpha) = (\Psi - \Omega)(\xi^\alpha h_\alpha)$$

On en déduit

$$\begin{cases} \left[\frac{\chi}{2} \langle \rho + 3p + \mu |h|^2 \rangle + \Lambda - \Psi \right] (\xi^\beta U_\beta) = 0, \\ \left[\frac{\chi}{2} \langle -\rho + p + \mu |h|^2 \rangle + \Lambda - \Psi \right] (\xi^\beta h_\beta) = 0 \end{cases}$$

On ne peut avoir simultanément $(\xi^\beta U_\beta) \neq 0$ et $(\xi^\beta h_\beta) \neq 0$ car cela entraînerait

$$\rho + p = 0$$

Un au moins des scalaires $\tilde{\xi} \cdot \tilde{U}$, $\tilde{\xi} \cdot \tilde{h}$ est nul.

Supposons $\xi^\beta U_\beta = 0$, $\xi^\beta h_\beta \neq 0$; alors $\Psi = \Lambda + \frac{\chi}{2} [-\rho + p + \mu |h|^2]$
 $\Psi - \Omega = \chi \mu |h|^2$; $A = 0$, $J^\alpha = B h^\alpha + \Omega \xi^\alpha = \Psi \xi^\alpha \rightarrow \xi^\alpha = -(\xi^\beta h_\beta) h^\alpha$
 $J_\alpha = R_{\alpha\beta} \xi^\beta = \Psi \xi_\alpha \rightarrow (R_{\alpha\beta} - \Psi g_{\alpha\beta}) h^\beta = 0$. Ψ est donc la valeur propre correspondant au vecteur propre \tilde{h} soit sous forme explicite

$$\Psi \left[1 + \frac{\xi^\beta h_\beta}{|h|^2} \right] = 0$$

Donc si $\Psi \neq 0$, $\xi_\alpha = h_\alpha$.

Étudions à présent le cas $\xi^\beta U_\beta \neq 0$, $\xi^\beta h_\beta = 0 \rightarrow B = 0$,

$$\Psi = \Lambda + \frac{\chi}{2} [\rho + 3p + \mu |h|^2]$$

$$(\Psi - \Omega) = \chi(\rho + p + \mu |h|^2) > 0 \quad ; \quad J^\alpha = A U^\alpha + \Omega \xi^\alpha = \Psi \xi^\alpha$$

Il vient $\xi^\alpha = (\xi^\beta U_\beta)U^\alpha$. Dans ce cas Ψ est la valeur propre correspondant à \vec{U} . Le cas où $\vec{\xi} \cdot \vec{U} = \vec{\xi} \cdot \vec{h} = 0$ a été traité précédemment.

En conclusion si $\vec{\xi}$ est parallèle à \vec{J} on a $\vec{\xi} = \vec{h}$, $\vec{\xi} = a\vec{U}$ ou $\vec{\xi} \cdot \vec{U} = \vec{\xi} \cdot \vec{h} = 0$. Nous ferons maintenant l'hypothèse $(\xi^\alpha \xi_\alpha) = 0$

$$\xi^\alpha \xi_{\alpha;\beta} = 0 \rightarrow \xi^\alpha [2kg_{\alpha\beta} - \xi_{\beta;\alpha}] = 0 \rightarrow \xi_{\beta;\nu} \xi^\nu = 2k\xi_\beta$$

Les trajectoires du champ $\vec{\xi}$ sont autoparallèles. On peut alors prendre un paramètre affine tel que le vecteur $\vec{\lambda}$ défini par $\xi_\alpha = \Psi \lambda_\alpha$ satisfasse les relations

$$\lambda^\alpha \lambda_\alpha = 0 \quad ; \quad \lambda_{\alpha;\beta} \lambda^\beta = 0$$

Il faut pour cela $\lambda^\alpha \Psi_\alpha = 2k$, $\Psi_\alpha \equiv \nabla_\alpha(\Psi)$ puis $(\Psi \lambda^\alpha)_{;\alpha} = 4k$; $\lambda^\alpha_{;\alpha} = 2k/\Psi$. On tire en outre de la définition des homothéties $\xi_{(\alpha;\beta)} = kg_{\alpha\beta}$ les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{(\alpha;\beta)} \lambda^{(\alpha;\beta)} = 2k^2 \Psi^{-2} \\ \lambda_{[\alpha;\beta]} \lambda^{[\alpha;\beta]} = \left[\frac{\tilde{\phi}_{\alpha\beta} \tilde{\phi}^{\alpha\beta} + 2k^2}{\Psi^2} \right] \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \lambda_{(\alpha;\beta)} = \left\langle \frac{kg_{\alpha\beta} - \Psi_{(\alpha} \lambda_{\beta)}}{\Psi} \right\rangle$$

$$\lambda_{[\alpha;\beta]} = \left\langle \frac{\phi_{\alpha\beta} + \Psi_{[\alpha} \lambda_{\beta]}}{\Psi} \right\rangle$$

Les scalaires optiques de Sachs décrivant la congruence nulle s'écrivent

$$|\sigma| = \left\langle \frac{1}{2} \lambda_{(\alpha;\beta)} \lambda^{(\alpha;\beta)} - \left(\frac{1}{2} \lambda^\alpha_{;\alpha} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = 0$$

et

$$z = \frac{k}{\Psi} + \frac{i}{\Psi} \left[\frac{1}{2} \tilde{\phi}_{\alpha\beta} \tilde{\phi}^{\alpha\beta} + k^2 \right]^{1/2}$$

$\vec{\lambda}$ est une direction principale nulle du tenseur de Weyl.

Le scalaire $(\tilde{\phi}^{\alpha\beta} \tilde{\phi}_{\alpha\beta})$ peut se mettre sous la forme

$$\tilde{\phi}^{\alpha\beta} \nabla_\beta(\xi_\alpha) = \nabla_\beta \langle \Psi \tilde{\phi}^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \rangle - \xi_\alpha \nabla_\beta(\tilde{\phi}^{\alpha\beta})$$

soit

$$\tilde{\phi}^{\alpha\beta} \tilde{\phi}_{\alpha\beta} = -4k^2 + \xi_\alpha J^\alpha$$

L'expansion complexe devient alors $z = \frac{k}{\Psi} + \frac{i}{\Psi} \left[\frac{1}{2} (\vec{\xi} \cdot \vec{J}) - k^2 \right]^{1/2}$.

On doit donc avoir $\vec{\xi} \cdot \vec{J} \geq 2k^2$. Mais $\xi^\alpha J_\alpha = A(\xi^\alpha U_\alpha) + B(\xi^\alpha h_\alpha)$ puisque $\vec{\xi}$ est nul

$$(\xi^\alpha J_\alpha) = \chi[(\rho + p) + \mu |h|^2] (\xi^\alpha U_\alpha)^2 - \chi \mu (\xi^\beta h_\beta)^2$$

En particulier si $\xi^\alpha h_\alpha = 0$, $\chi[(\rho + p) + \mu |h|^2] (\xi^\alpha U_\alpha)^2 \geq 2k^2$.

L'hypothèse $\xi_{[\alpha;\beta]} = 0$ entraîne

$$\xi_{\alpha;\beta} = kg_{\alpha\beta} \rightarrow \xi_{\alpha;\beta;\gamma} = 0 \Leftrightarrow R_{\alpha\beta\gamma\nu} \xi^\nu = 0.$$

Par contraction, $R_{\alpha\beta} \xi^\beta = 0 \Leftrightarrow J_\alpha = 0$ soit $AU_\alpha + Bh_\alpha + \Omega \xi_\alpha = 0$. Si

$\Omega \neq 0$, $\vec{\xi}$ est une combinaison linéaire de \vec{U} et \vec{h} , $\xi_\alpha = -\frac{A}{\Omega}U_\alpha - \frac{B}{\Omega}h_\alpha$
 $(\xi^\alpha \xi_\alpha) = \Omega^{-2} \langle A^2 - B^2 |h|^2 \rangle$; donc $\vec{\xi}$ sera nul si $A = \pm B |h|$. Soit
 en explicitant $A \{ \rho + p + \mu |h|^2 \mp \mu |h|^2 \} = 0$. A devant être $\neq 0$
 il faut $\rho + p + 2\mu |h|^2 = 0$ ou $\rho + p = 0$ ce qui est impossible.

Donc si $\tilde{\phi}_{\alpha\beta} = 0$ et $\Omega \neq 0$, $\vec{\xi}$ ne peut être nul.

On établirait comme précédemment que les scalaires $\vec{\xi} \cdot \vec{U}$ et $\vec{\xi} \cdot \vec{h}$ ne peuvent différer simultanément de zéro.

Si l'on suppose $\vec{\xi} \cdot \vec{h} = 0$ il faut $\rho = 3p + \mu |h|^2 = -\frac{2\Lambda}{\chi} \rightarrow \Lambda < 0$.

Posons $\xi_\alpha = \mathcal{A}U_\alpha$; $\nabla_\alpha(\xi^\alpha) = 4k \rightarrow \dot{\mathcal{A}} + \mathcal{A}\theta = 4k$; d'après $\nabla_\alpha(rU^\alpha) = 0$
 il vient

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}/r)^* &= 4k/r & \text{et si } \tilde{\phi}_{\alpha\beta} &= 0, \\ \xi_{\alpha;\beta} &= \mathcal{A}_\beta U_\alpha + \mathcal{A}U_{\alpha;\beta} = kg_{\alpha\beta} \rightarrow \mathcal{A}_\beta = kU_\beta \\ \mathcal{A}U_{\alpha;\beta} &= k\pi_{\alpha\beta} \rightarrow U_{[\alpha;\beta]} = 0 & ; \quad \dot{U}_\alpha = 0 \rightarrow \omega_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned}$$

De même $\sigma_{\alpha\beta} = U_{(\alpha;\beta)} - U_{(\alpha}\dot{U}_{\beta)} - \frac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta} = 0$. Appliquant un traitement analogue au cas $\xi_\alpha = \mathcal{B}h_\alpha$ on déduit

$$\dot{\xi}_\alpha = kU_\alpha \quad ; \quad -\mathcal{B} |h|^2 \nabla_\beta \log \left(\frac{\mathcal{B}}{|h|} \right) = kh_\beta \rightarrow \left(\frac{\mathcal{B}}{|h|} \right)^* = 0$$

puis $\xi^\alpha{}_{;\alpha} = h^\alpha \nabla_\alpha(\mathcal{B}) + \mathcal{B} \nabla_\alpha(h^\alpha) = 4k$.

Mais $\dot{U}^\alpha \xi_\alpha = -k$ en raison de $U^\alpha \dot{\xi}_\alpha = k$ puisque $U^\alpha \xi_\alpha = 0$. D'après la relation générale $h^\alpha \dot{U}_\alpha = -\nabla_\alpha(h^\alpha)$ on a donc $\mathcal{B} \nabla_\alpha(h^\alpha) = k$ d'où

$$h^\alpha \nabla_\alpha(\mathcal{B}) = 3k$$

B) Fluide parfait thermodynamique

Dans les équations d'Einstein $\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \right) = \chi T_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}$; $\chi > 0$,
 posons $T_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$ avec $\theta_{\alpha\beta} = (\rho + p)U_\alpha U_\beta - pg_{\alpha\beta}$

$$\tau_{\alpha\beta} = 2U_{(\alpha}Q_{\beta)} \quad ; \quad U^\alpha U_\alpha = 1 \quad ; \quad U^\alpha Q_\alpha = 0.$$

Nous étudierons tout d'abord le spectre de $\|T_{\alpha\beta}\|$. La combinaison des relations $T_{\alpha\beta}U^\beta = \rho U_\alpha + Q_\alpha$ et $T_{\alpha\beta}Q^\beta = -(pQ_\alpha + Q^2 U_\alpha)$ avec

$$Q^2 \equiv -(Q^\alpha Q_\alpha)$$

nous donne $T_{\alpha\beta}(U^\beta + XQ^\beta) = (\rho - Q^2 X)U_\alpha + (1 - pX)Q_\alpha$.

Écrivant $\rho - Q^2X = \frac{1 - pX}{X}$, l'équation $Q^2X^2 - (\rho + p)X + 1 = 0$ admet les racines

$$X^\pm = \left[\frac{(\rho + p) \pm \sqrt{(\rho + p)^2 - 4Q^2}}{2Q^2} \right]$$

pourvu que le discriminant soit positif. Dans ce cas les vecteurs $\vec{U} + X^- \vec{Q}$ et $\vec{U} + X^+ \vec{Q}$ sont des vecteurs propres, les valeurs propres étant $\rho - Q^2X^-$ et $\rho - Q^2X^+$ respectivement.

Les normes des deux vecteurs sont $2 - (\rho + p)X^-$ et $2 - (\rho + p)X^+$. Nous avons par exemple $2 - (\rho + p)X^- = \frac{\mathcal{Y}[(\rho + p) - \mathcal{Y}]}{2Q^2} > 0$ si $\mathcal{Y} \equiv [(\rho + p)^2 - 4Q^2]^{1/2} > 0$ et $2 - (\rho + p)X^+ = -\frac{\mathcal{Y}[(\rho + p) + \mathcal{Y}]}{2Q^2} < 0$

$T_{\alpha\beta}$ devant admettre un seul vecteur propre du genre temps nous devons donc avoir $(\rho + p)^2 > 4Q^2$.

Si $(\rho + p) = 2Q$, les vecteurs propres sont confondus en un vecteur nul correspondant à la valeur propre $\rho - Q^2X = \rho - Q = Q - p$. Pour tout vecteur orthogonal à \vec{U} et \vec{Q} , $T_{\alpha\beta}Z^\beta = -pZ_\alpha$. Donc la multiplicité des vecteurs propres orthogonaux à \vec{U} et \vec{Q} est de dimension 2 et correspond à la valeur propre $-p$.

Les vecteurs propres seront représentés par la notation suivante

$$\mathcal{U}^a \equiv U^a + X^- Q^a ; \quad \mathcal{Y}^a \equiv U^a + X^+ Q^a ; \quad \mathcal{L}^a, a = 1, 2$$

L'imposition des conditions $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$ entraîne la conséquence $\mathcal{L}(\lambda) + 2\phi\lambda = 0$ pour les valeurs propres. En outre, pour $\vec{\mathcal{U}}$ et $\vec{\mathcal{Y}}$ il vient

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}^a) = -\phi^* \mathcal{U}^a ; \quad \mathcal{L}(\mathcal{U}_a) = \phi^* \mathcal{U}_a \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}^a = \mathcal{U}^a (\mathcal{U}^\nu \mathcal{U}_\nu)^{-1/2}$$

et

$$\mathcal{L}(\mathcal{Y}^a) = -\phi^* \mathcal{Y}^a ; \quad \mathcal{L}(\mathcal{Y}_a) = \phi^* \mathcal{Y}_a \quad \text{avec} \quad \mathcal{Y}^a = \mathcal{Y}^a (-\mathcal{Y}^\nu \mathcal{Y}_\nu)^{-1/2}.$$

D'après $\mathcal{L}(\rho - Q^2X^\mp) + 2\phi(\rho - Q^2X^\mp) = 0$, $\mathcal{L}(\rho) + 2\phi\rho = 0$ on déduit $\mathcal{L}(\rho - p) + 2\phi(\rho - p) = 0 \rightarrow \mathcal{L}(\rho) + 2\phi\rho = 0$.

Donc $\mathcal{L}(Q^2X^\mp) + 2\phi(Q^2X^\mp) = 0$. Puisque

$$2Q^2X^\mp = (\rho + p) \mp [(\rho + p)^2 - 4Q^2]^{1/2}$$

nous devons avoir $\mathcal{L}[(\rho + p)^2 - 4Q^2]^{1/2} + 2\phi[(\rho + p)^2 - 4Q^2]^{1/2} = 0$.

La relation $\mathcal{L}(Q) + 2\phi Q = 0$ découle aisément de la précédente. Compte tenu de ce résultat nous obtenons $\mathcal{L}(X^\mp) - 2\phi(X^\mp) = 0$.

Ensuite $\mathcal{L}(\mathcal{U}^\nu \mathcal{U}_\nu) = \mathcal{L} \langle 2 - (\rho + p)X^- \rangle$; les résultats obtenus assurent

l'annulation du second membre. Il suffit alors de développer les relations $\mathcal{L}(\dot{U}^\alpha) = -\phi \dot{U}^\alpha$, etc., pour obtenir

$$\mathcal{L}(U^\alpha) + Q^\alpha[2\phi X^\mp] + X^\mp \mathcal{L}(Q^\alpha) = -\phi[U^\alpha + X^\mp Q^\alpha]$$

Par soustraction $(X^+ - X^-) \langle \mathcal{L}(Q^\alpha) + 3\phi Q^\alpha \rangle = 0$; or

$$X^+ - X^- = \frac{[(\rho + p)^2 - 4Q^2]^{1/2}}{Q^2} \neq 0$$

Donc $\mathcal{L}(Q^\alpha) = -3\phi Q^\alpha$; $\mathcal{L}(U^\alpha) = -\phi U^\alpha$; $\mathcal{L}(U_\alpha) = \phi U_\alpha$; $\mathcal{L}(Q_\alpha) = -\phi Q_\alpha$. Dans ces conditions $\mathcal{L}(\theta_{\alpha\beta}) = 0$, $\mathcal{L}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$ soit $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$ ou

$$\begin{aligned} \phi_{(\alpha;\beta)} = g_{\alpha\beta}[\phi^v{}_{;v} + \Lambda\phi] \rightarrow \phi_{(\alpha;\beta)} = -\frac{\Lambda}{3}\phi g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \nabla_\beta \nabla_\alpha(\xi^v{}_{;v}) = -\frac{\Lambda}{3}(\xi^v{}_{;v})g_{\alpha\beta} \\ \nabla^\alpha \nabla_\alpha(\phi) \equiv \square(\phi) = -\frac{4}{3}\Lambda\phi \end{aligned}$$

Si $\phi = c^{te} \rightarrow \Lambda\phi = 0$; $\Lambda \neq 0$ entraîne $\phi = 0$ (isométries); pour $\Lambda = 0$ nous obtenons des solutions « ondulatoires » $\square(\phi) = 0$.

$\Lambda \neq 0$ permet d'écrire la relation $\xi_{(\alpha;\beta)} = \phi g_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$\left(\xi_\alpha + \frac{3}{\Lambda}\phi_\alpha\right)_{;\beta} + \left(\xi_\beta + \frac{3}{\Lambda}\phi_\beta\right)_{;\alpha} = 0$$

Le champ $\vec{\xi} + \frac{3}{\Lambda}\vec{\nabla}\phi$ engendre des isométries.

Nous savons que l'imposition des contraintes $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$ entraîne

$$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right)\phi^\beta = 0$$

ϕ^α est donc un vecteur propre de valeur propre $\frac{T}{2}$; nécessairement

$$\rho - Q^2X^- = \left(\frac{\rho - 3p}{2}\right) \quad ; \quad \rho - Q^2X^+ = \left(\frac{\rho - 3p}{2}\right) \quad \text{ou} \quad -p = \left(\frac{\rho - 3p}{2}\right)$$

La dernière éventualité est à exclure pour des raisons physiques ($\rho = p$). La première fournit une pression négative $2p = -[(\rho + p)^2 - 4Q^2]^{1/2}$. Il reste par conséquent $\rho + 3p = 2Q^2X^+ \rightarrow 2p = [(\rho + p)^2 - 4Q^2]^{1/2}$ $\vec{\nabla}\phi$ est colinéaire au vecteur propre spatial de valeur propre $\rho - Q^2X^+$ nous avons $\rho = -p + 2\sqrt{p^2 + Q^2}$. La valeur propre $\rho - Q^2X^-$ a pour valeur dans ce cas $\left(\frac{\rho + p}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \phi^\alpha = \dot{\phi}[U^\alpha + X^+ Q^\alpha] \rightarrow \phi^\alpha Q_\alpha = -\dot{\phi}Q^2X^+ = -\dot{\phi}\left(\frac{\rho + 3p}{2}\right) \\ (\phi^\alpha \phi_\alpha) = \frac{-4p(\dot{\phi})^2}{(\rho - p)} \quad \Leftrightarrow \left[g_{\alpha\beta} + \frac{4p}{(\rho - p)}U_\alpha U_\beta\right]\phi^\alpha \phi^\beta = 0 \end{aligned}$$

Pour étudier la congruence des trajectoires du champ

$$\vec{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}^\alpha \mathcal{Y}_\alpha = -1)$$

nous poserons

$$\pi_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + \mathcal{Y}_\alpha \mathcal{Y}_\beta$$

Il vient

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \pi_{(\alpha} \rho \pi_{\beta)} \mathcal{Y}_{\rho;\sigma} - \frac{1}{3} \pi_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \pi_{(\mu} \rho \pi_{\nu)} \sigma \mathcal{Y}_{\rho;\sigma}$$

soit

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{Y}_{(\alpha;\beta)} + \mathcal{Y}_{(\alpha} \mathcal{Y}_{\beta);v} \mathcal{Y}^v - \frac{1}{3} \pi_{\alpha\beta} (\mathcal{Y}^v{}_{;v})$$

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \pi_{[\alpha} \rho \pi_{\beta]} \mathcal{Y}_{\rho;\sigma} = \mathcal{Y}_{[\alpha;\beta]} - \mathcal{Y}_{[\alpha} \mathcal{Y}_{\beta];v} \mathcal{Y}^v$$

Or nous avons $\mathcal{Y}_\alpha = \phi_\alpha (-\phi^v \phi_v)^{-1/2}$; ceci nous permet de calculer

$$\mathcal{Y}_{(\alpha;\beta)} = \frac{\Lambda}{3} \phi (-\phi^v \phi_v)^{-3/2} \langle g_{\alpha\beta} (\phi^v \phi_v) - \phi_\alpha \phi_\beta \rangle$$

puis de vérifier que les quantités $\mathcal{Y}_{(\alpha} \mathcal{Y}_{\beta);v} \mathcal{Y}^v$ sont nulles, aboutissant finalement au résultat $\sigma_{\alpha\beta} = 0$. Une technique analogue fournit $\omega_{\alpha\beta} = 0$ le seul paramètre de la congruence étant l'expansion

$$\mathcal{Y}^v{}_{;v} = [-\Lambda \phi \sqrt{\rho - p}] / 2\dot{\phi} \sqrt{p}$$

Si

$$\rho + p = 2Q \quad , \quad X^+ = X^- = Q^{-1}$$

$$U^\alpha + X^- Q^\alpha = U^\alpha + X^+ Q^\alpha = U^\alpha + \frac{Q^\alpha}{Q} \equiv I^\alpha \quad ; \quad I^\alpha I_\alpha = 0$$

Donc $I^\beta \mathcal{L}(I_\beta) = 0$; en outre $(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}) I^\beta = 0$ avec $\lambda = \rho - Q = Q - p$; on en déduit $I^\beta \mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) + (T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}) \mathcal{L}(I^\beta) = [\mathcal{L}(\lambda) + 2\lambda\phi] I_\alpha$.

L'hyperplan orthogonal à \vec{I} est déterminé par \vec{I} et deux vecteurs spatiaux que l'on peut prendre orthogonaux à \vec{U} et \vec{Q} par exemple les vecteurs propres \vec{Z} et $\vec{\bar{Z}}$ (valeur propre $-p$).

On peut donc écrire $\mathcal{L}(I_\beta) = \zeta I_\beta + \overset{(1)}{A} Z_\beta + \overset{(2)}{B} \bar{Z}_\beta$.

Imposant les contraintes $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$ l'équation

$$(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}) \mathcal{L}(I^\beta) = [\mathcal{L}(\lambda) + 2\lambda\phi] I_\alpha$$

s'écrit $-Q \langle \overset{(1)}{A} Z_\alpha + \overset{(2)}{B} \bar{Z}_\alpha \rangle = [\mathcal{L}(\lambda) + 2\lambda\phi] I_\alpha$; on tire de cette expression

$A = B = 0$ d'où $[\mathcal{L}(\lambda) + 2\lambda\phi] = 0$; $\mathcal{L}(I_\beta) = \zeta I_\beta$, puis

$$\mathcal{L}(p) + 2p\phi = 0 \quad ; \quad \mathcal{L}(Q) + 2Q\phi = 0 \quad ; \quad \mathcal{L}(\rho) + 2\rho\phi = 0$$

Si $2Q < (\rho + p)$ nous avons $\mathcal{L}(U_\alpha + X^-Q_\alpha) = \phi(U_\alpha + X^-Q_\alpha)$. Donc, à la limite $\mathcal{L}(I_\beta) = \phi I_\beta$.

Il est alors possible de décomposer $\mathcal{L}(U_\alpha)$ et $\mathcal{L}\left(\frac{Q_\alpha}{Q}\right)$ selon les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(U_\alpha) = \mathcal{A}U_\alpha + \mathcal{B}\frac{Q_\alpha}{Q} + \mathcal{C}Z_{\alpha(1)} + \mathcal{D}Z_{\alpha(2)} \\ \mathcal{L}\left(\frac{Q_\alpha}{Q}\right) = \mathcal{M}U_\alpha + \mathcal{N}\frac{Q_\alpha}{Q} + \mathcal{O}Z_{\alpha(1)} + \mathcal{P}Z_{\alpha(2)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathcal{A} + \mathcal{M} = \phi \quad ; \quad \mathcal{B} + \mathcal{N} = \phi \\ \mathcal{C} + \mathcal{O} = 0 \quad ; \quad \mathcal{D} + \mathcal{P} = 0 \end{array}$$

L'application de \mathcal{L} à la relation $(U^\alpha - \frac{Q^\alpha}{Q})(U_\alpha + \frac{Q_\alpha}{Q}) = 2$ entraîne, compte tenu de $\mathcal{L}(I_\beta) = \phi I_\beta : I^\beta \mathcal{L}(U_\beta) = \phi$, soit en vertu de $U^\alpha U_\alpha = 1$,

$$Q^\beta \mathcal{L}(U_\beta) = 0.$$

Le coefficient \mathcal{B} est nul; on démontre de la même manière que $\mathcal{M} = 0$. Il reste

$$\mathcal{L}(U_\alpha) = \phi U_\alpha + \mathcal{C}Z_{\alpha(1)} + \mathcal{D}Z_{\alpha(2)} \quad ; \quad \mathcal{L}\left(\frac{Q_\alpha}{Q}\right) = \phi \frac{Q_\alpha}{Q} - \mathcal{C}Z_{\alpha(1)} - \mathcal{D}Z_{\alpha(2)}$$

Or $\langle T_{\alpha\beta} + p g_{\alpha\beta} \rangle \mathcal{L}(Z^\beta) = 0$, $a = 1, 2$ si $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$. Les conséquences $\mathcal{C} = \mathcal{D} = 0$ en découlent :

$$\mathcal{L}(U_\alpha) = \phi U_\alpha \quad ; \quad \mathcal{L}\left(\frac{Q_\alpha}{Q}\right) = \phi \frac{Q_\alpha}{Q} \rightarrow \mathcal{L}(Q_\alpha) = -\phi Q_\alpha$$

D'autre part si $\mathcal{L}(T_{\alpha\beta}) = 0$, ϕ^α est vecteur propre de $\|T_{\alpha\beta}\|$ (valeur propre $\left(\frac{\rho - 3p}{2}\right)$).

Dans ce cas $2p = [(\rho + p)^2 - 4Q^2]^{1/2} = 0$; $\rho = 2Q$.

On peut écrire $T_{\alpha\beta}$ sous la forme $T_{\alpha\beta} = 2QU_{(\alpha}I_{\beta)}$

$$\phi_\alpha = \phi \dot{I}_\alpha \rightarrow \phi^\alpha \phi_\alpha = 0$$

Par conséquent $\phi^\alpha \phi_{\alpha;\beta} = \phi^\alpha \phi_{\beta;\alpha} = 0$; les trajectoires de $\vec{\nabla} \phi$ forment une congruence de géodésiques nulles.

Il vient $\phi^\alpha \left\langle -\frac{\Lambda}{3} \phi g_{\alpha\beta} \right\rangle = 0$, $\Lambda \phi \phi_\alpha = 0$. Pour $\Lambda = 0$ il faut $\phi_{\alpha;\beta} = 0$; si l'on prend $\phi = c^{te}$ (homothéties) $\rightarrow \phi_\alpha = 0$

$$\phi_{\alpha;\beta} = 0 \rightarrow \Lambda \phi g_{\alpha\beta} = 0 \rightarrow \Lambda \phi = 0;$$

donc $\phi \neq 0$ exige $\Lambda = 0$.

Nous examinerons maintenant les équations du mouvement $\nabla_\beta(T^{\alpha\beta}) = 0$. On en tire aisément les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_\beta \langle (\rho + p)U^\beta \rangle - U^\beta \nabla_\beta(p) + \nabla_\beta(Q^\beta) + U_\alpha \dot{Q}^\alpha = 0 \\ (\rho + p)\dot{U}_\alpha - \pi_\alpha{}^\beta \langle \nabla_\beta(p) - \dot{Q}_\beta \rangle + \theta Q_\alpha + U_{\alpha;\beta} Q^\beta = 0 \quad ; \quad \pi_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta; \\ \theta \equiv \nabla_\nu(U^\nu) \end{array} \right.$$

Soit en introduisant les tenseurs qui décrivent la congruence des lignes de courant

$$\left. \begin{aligned} (\rho + p)\dot{U}_\alpha - \pi_\alpha^\beta \left\langle \nabla_\beta(\rho) - \dot{Q}_\beta - \frac{4}{3}\theta Q_\beta \right\rangle + (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})Q^\beta &= 0 \\ \dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \nabla_\beta(Q^\beta) + U_\beta\dot{Q}^\beta &= 0. \end{aligned} \right\}$$

L'opération \mathcal{L} appliquée à l'équation vectorielle nous donne, toutes réductions faites

$$(\rho + p)\mathcal{L}(\dot{U}_\alpha) + 2\pi_\alpha^\beta \langle p\nabla_\beta(\phi) + \dot{\phi}Q_\beta \rangle = 0$$

Nous avons ensuite à l'aide de l'équation scalaire

$$\mathcal{L}(\dot{\rho}) + 3\dot{\phi}\dot{\rho} + 3\dot{\phi}(\rho + p) + 2(Q^\beta\phi_\beta) = 0$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{U}_\alpha) &= \mathcal{L}[U^\beta\nabla_\beta(U_\alpha)] = \mathcal{L}(U^\beta)\nabla_\beta(U_\alpha) + U^\beta\mathcal{L}[\nabla_\beta(U_\alpha)] \\ \mathcal{L}(\dot{U}_\alpha) &= -\phi U^\beta\nabla_\beta(U_\alpha) + U^\beta \langle \phi U_{\alpha;\beta} - U_\beta\phi_\alpha + g_{\alpha\beta}\dot{\phi} \rangle = -\pi_\alpha^\beta\phi_\beta \end{aligned}$$

d'où

$$\pi_\alpha^\beta \langle -(\rho - p)\phi_\beta + 2\dot{\phi}Q_\beta \rangle = 0; \quad \text{donc} \quad -(\rho - p)\phi_\beta + 2\dot{\phi}Q_\beta = \zeta U_\beta$$

On en tire

$$\zeta = -(\rho - p)\dot{\phi} \rightarrow 2\dot{\phi}Q_\beta = (\rho - p)[\phi_\beta - \dot{\phi}U_\beta]$$

Nous avons de même

$$\mathcal{L}(\dot{\rho}) = -\phi U^\beta\nabla_\beta(\rho) + U^\beta\nabla_\beta[\mathcal{L}(\rho)] = -3\dot{\phi}\dot{\rho} - 2\phi\dot{\rho}$$

puis, portant cette valeur dans l'équation précédemment obtenue

$$(\rho + 3p)\dot{\phi} + 2(Q^\beta\phi_\beta) = 0 \Leftrightarrow \langle (\rho + 3p)U^\beta + 2Q^\beta \rangle \phi_\beta = 0$$

Ces relations peuvent être transcrites de la manière suivante

$$2\dot{\phi}Q_\beta = (\rho - p)\pi_\beta^\nu\phi_\nu \quad ; \quad 4p(\dot{\phi})^2 + (\rho - p)(\phi^\beta\phi_\beta) = 0$$

Lorsque $(\rho + p) = 2Q$ nous avons vu que $p = 0$; les relations $\mathcal{L}\{p, \rho, Q, U_\alpha, Q_\alpha\}$ sont alors les mêmes que dans le cas général. Nous pouvons donc traiter ce cas particulier en posant $p = 0$, $\rho = 2Q$ dans les formules établies. Il vient

$$2\dot{Q} + 2Q\theta + \nabla_\beta(Q^\beta) - Q^\beta\dot{U}_\beta = 0 \rightarrow \nabla_\beta \langle 2QU^\beta + Q^\beta \rangle = (Q^\alpha\dot{U}_\alpha)$$

Or

$$2Q\dot{U}_\alpha + \pi_\alpha^\beta\dot{Q}_\beta + \theta Q_\alpha + U_{\alpha;\beta}Q^\beta = 0$$

Une contraction en Q^α fournit

$$2QQ^\alpha\dot{U}_\alpha + Q^\alpha\pi_\alpha^\beta\dot{Q}_\beta + Q^\alpha U_{(\alpha;\beta)}Q^\beta + \theta Q^\alpha Q_\alpha = 0$$

Comme $Q^\alpha \pi_{\alpha;\beta} \dot{Q}_\beta = Q^\beta \dot{Q}_\beta = -Q\dot{Q}$, nous avons

$$\nabla_\beta \langle 2QU^\beta + Q^\beta \rangle = \left\{ \frac{Q\dot{Q} + \theta Q^2 - U_{\alpha;\beta} Q^\alpha Q^\beta}{2Q} \right\}$$

ou équivallemment

$$\nabla_\beta (Q^\beta) = - \left\{ \frac{3Q\dot{Q} + 3\theta Q^2 + U_{\alpha;\beta} Q^\alpha Q^\beta}{2Q} \right\} \Rightarrow \nabla_\beta \left\langle Q^\beta + \frac{3}{2} QU^\beta \right\rangle = - \left(\frac{U_{\alpha;\beta} Q^\alpha Q^\beta}{2Q} \right)$$

Puisque $\phi_\alpha = \dot{\phi} \left(U_\alpha + \frac{Q_\alpha}{Q} \right) = \dot{\phi} I_\alpha$, on obtient en développant les relations $\phi_{\alpha;\beta} = 0$ et $\phi^v_{;v} = 0$

$$\dot{\phi} \langle I_{\beta;\alpha} I^\alpha - \nabla_v (I^v) I_\beta \rangle = 0$$

soit en supposant $\dot{\phi} \neq 0$

$$I_{\beta;\alpha} I^\alpha = I_\beta \nabla_v (I^v)$$

Posons $Q_\alpha = -x\pi_{\alpha;\beta} \langle \bar{\mathcal{C}}_\beta + \bar{\mathcal{C}} \dot{U}_\beta \rangle$; $\bar{\mathcal{C}}$ désignant la température propre,

$$\bar{\mathcal{C}}_\beta \equiv \nabla_\beta (\bar{\mathcal{C}})$$

Nous avons $\pi_{\alpha;\beta} \langle (\rho - p)\phi_\beta + 2x\dot{\phi}[\bar{\mathcal{C}}_\beta + \bar{\mathcal{C}} \dot{U}_\beta] \rangle = 0$.

Donc $(\rho - p)\phi_\beta + 2x\dot{\phi}[\bar{\mathcal{C}}_\beta + \bar{\mathcal{C}} \dot{U}_\beta] = \gamma U_\beta \rightarrow \gamma = (\rho - p)\dot{\phi} + 2x\dot{\phi}\dot{\bar{\mathcal{C}}}$.
Contractant en $Q^\beta : (\rho - p)Q^\beta \phi_\beta + 2x\dot{\phi}[Q^\beta \bar{\mathcal{C}}_\beta + \bar{\mathcal{C}} Q^\beta \dot{U}_\beta] = 0$, ou d'après $(\rho - p)Q^\beta \phi_\beta + 2Q^2 \dot{\phi} = 0$,

$$\dot{\phi} \langle x(Q^\beta \bar{\mathcal{C}}_\beta) + x\bar{\mathcal{C}}(Q^\beta \dot{U}_\beta) - Q^2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \dot{\phi} Q^\beta \langle x(\bar{\mathcal{C}}_\beta + \bar{\mathcal{C}} \dot{U}_\beta) + Q_\beta \rangle = 0$$

La divergence du vecteur de chaleur \vec{Q} , calculée à partir de la définition s'écrit

$$\nabla_\alpha (Q^\alpha) = -x \{ -[\theta \dot{\bar{\mathcal{C}}} + U^\beta \dot{\bar{\mathcal{C}}}_\beta] + \nabla^\alpha \nabla_\alpha (\bar{\mathcal{C}}) + \bar{\mathcal{C}} \nabla_\alpha (\dot{U}^\alpha) \}$$

Il serait possible d'éliminer dans cette expression la divergence $\nabla_\alpha (\dot{U}^\alpha)$ à l'aide de la relation de Raychaudhuri

$$\dot{\theta} = \nabla_\alpha (\dot{U}^\alpha) - U_{(\alpha;\beta)} U^{(\alpha;\beta)} + U_{[\alpha;\beta]} U^{[\alpha;\beta]} - \frac{\chi}{2}(\rho + 3p) - \Lambda$$

soit encore

$$\nabla_\alpha (\dot{U}^\alpha) = \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + (\sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}) - (\omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}) + \left[\frac{\chi}{2}(\rho + 3p) + \Lambda \right]$$

La relation fondamentale $\bar{\mathcal{C}} dS = d\varepsilon + pdv$; $vr = 1$; S : entropie, ε énergie spécifique interne : $\rho = r(1 + \varepsilon)$ nous donne

$$r\bar{\mathcal{C}}\dot{S} = \dot{\varepsilon} - p \frac{\dot{r}}{r^2} \Leftrightarrow r\bar{\mathcal{C}}\dot{S} = - \frac{(\rho + p)}{r^2} [\dot{r} + r\theta] + \frac{1}{r} \langle Q^\beta \dot{U}_\beta - \nabla_\beta (Q^\beta) \rangle$$

ou en postulant la conservation de la matière

$$r\bar{\mathcal{C}}\dot{S} = (Q^\beta \dot{U}_\beta) - \nabla_\beta (Q^\beta)$$

Dans le cas $p = 0$, $\rho = 2Q$ la relation se réduit à $r\dot{\bar{\mathcal{C}}}\dot{S} = 2\nabla_\beta(QU^\beta)$.
 Dans les mêmes conditions la loi de variation de l'énergie interne

$$r\dot{\varepsilon} = -p\dot{\theta} - \nabla_\beta(Q^\beta) + Q^\beta\dot{U}_\beta$$

devient

$$r\dot{\varepsilon} = 2\nabla_\beta(QU^\beta)$$

Alors $\bar{\mathcal{C}}\dot{S} = \dot{\varepsilon}$.

L'équation de conservation $\nabla_\alpha(rU^\alpha) = 0$ fournit par application de \mathcal{L} et usage du commutateur

$$\nabla_\alpha \langle [\mathcal{L}(r) + 3r\phi]U^\alpha \rangle = 0$$

D'autre part $\mathcal{L}(\rho) = -2\phi\rho$ d'où

$$\frac{\rho}{r}\mathcal{L}(r) + r\mathcal{L}(\varepsilon) = -2\rho\phi \rightarrow \mathcal{L}(\varepsilon) = -\frac{\rho}{r} \left[\frac{\mathcal{L}(r) + 2r\phi}{r} \right]$$

Si nous posons $\mathcal{L}(r) + 3r\phi = Kr$, K : cte nous aurons donc

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = -(1 + \varepsilon)(K - \phi)$$

Il vient de même après quelques transformations

$$\mathcal{L}(\dot{\varepsilon}) = -K\dot{\varepsilon} + (1 + \varepsilon)\dot{\phi}$$

puis partant de l'équation conservative $r\bar{\mathcal{C}}\dot{S} = (Q^\beta\dot{U}_\beta) - \nabla_\beta(Q^\beta)$

$$[\mathcal{L}(r) + 3r\phi]\bar{\mathcal{C}}\dot{S} + [\mathcal{L}(\bar{\mathcal{C}}) - \phi\bar{\mathcal{C}}]r\dot{S} + r\bar{\mathcal{C}}[\mathcal{L}(S)]^\cdot = -2(Q^\alpha\phi_\alpha) = (\rho + 3p)\dot{\phi}$$

$$[\mathcal{L}(\bar{\mathcal{C}}) - \phi\bar{\mathcal{C}}]r\dot{S} = (\rho + 3p)\dot{\phi} - Kr\bar{\mathcal{C}}\dot{S} - r\bar{\mathcal{C}}[\mathcal{L}(S)]^\cdot$$

(Manuscrit reçu le 14 février 1979)