ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

Un programme de quantification des champs libres relativistes sur les espaces courbes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 29, nº 2 (1978), p. 217-231
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1978__29_2_217_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXIX, n° 2, 1978, p. 217-231.

Section A :
Physique théorique.

Un programme de quantification des champs libres relativistes sur les espaces courbes

par

A. CRUMEYROLLE
Université Paul-Sabatier,
118, route de Narbonne, 31077 Toulouse Cedex

I. PRÉAMBULE

Au sens relativiste restreint, un champ quantique libre est usuellement représenté comme une distribution à valeurs opératorielles dans un espace de Hilbert H, satisfaisant à un certain nombre « d'axiomes » bien connus comme la condition de covariance, l'irréductibilité, le caractère cyclique d'un vecteur de vide dont on postule l'existence, etc. Ce champ appartient au noyau d'un ou plusieurs opérateurs différentiels dont le prototype est l'opérateur de Klein-Gordon ; l'espace H s'introduit alors comme un espace de solutions et la construction des crochets relève plus ou moins directement de la transformation de Fourier, ce qui conduit à de très sérieuses difficultés dans les problèmes globaux.

Pour surmonter ces difficultés A. Lichnerowicz a mis au point la théorie des propagateurs sur les espaces-temps courbes [*6*]. Un propagateur a été effectivement construit par Combet (*C. R. Acad. Sci., Paris,* t. **268**, Série A, p. 798) sous des hypothèses de staticité, par Chevalier (*C. R. Acad. Sci., Paris,* t. **276**, Série A, p. 499) et Moreno (Thèse, Lyon, 1975) sous des hypothèses de stationnarité.

Toutes ces méthodes utilisent des espaces de représentations construits à partir des solutions d'opérateurs différentiels, tandis que dans notre programme un espace commun à chaque type (bosons ou fermions) sera introduit au préalable.

Nous nous proposons de définir un champ quantique au moyen de quelque section s d'un fibré vectoriel au-dessus de l'espace-temps courbe V_4,

$\Phi(s)$ étant l'opérateur associé à s, dans l'espace de Hilbert H que nous construirons au moyen de fibrations spinorielles — orthogonales ou symplectiques, selon qu'il sera question de schémas en fermions ou en bosons. On notera d'ailleurs que certains aspects de la théorie quantique des champs de tout type peuvent se décrire en utilisant uniquement les spineurs orthogonaux, les spineurs symplectiques n'intervenant que pour la construction des opérateurs de création et d'annihilation dans le cas des spins entiers.

Dans deux notes aux *C. R. Acad. Sci. de Paris* [*4*, *a*, *b*) nous avons montré avec la collaboration de J. Timbeau comment nos méthodes d'approche spinorielle permettaient de donner une solution géométrique de la quantification des systèmes à n degrés de liberté, cette solution extrêmement rapide nous a fourni, avec l'article [*3*, *d*] et l'ensemble de nos travaux antérieurs [*3*] le point de départ de la méthode que nous allons présenter ici dans ses grandes lignes.

II. RAPPELS MATHÉMATIQUES

1° *Conjugaison tenant compte de la signature.*

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un espace vectoriel réel muni d'une forme quadratique Q, somme directe de deux sous-espaces orthogonaux E_1 et E_2 tels que Q soit positive sur E_1 et négative sur E_2. Ecrivant $x = x_1 + x_2$, $x_i \in E_i$, on pose $\bar{x} = x_1 - x_2$ et $\bar{x}$ sera dit conjugué de x. $Q(\bar{x}) = Q(x)$, soit $Q \circ \alpha = Q$, si $\bar{x} = \alpha(x)$.

C(Q) étant l'algèbre de Clifford de Q, un raisonnement classique donne une conjugaison α de C(Q) qui étend celle de E, $\alpha(u \circ v) = \overline{u \circ v} = \alpha(u) \circ \alpha(v)$, $u, v \in C(Q)$.

Soit maintenant la variété V munie d'une structure pseudo-riemannienne, on peut établir que l'espace tangent en $x \in V$, $T_x(V)$ s'écrit

$$T_x(V) = \xi_x^+ \oplus \xi_x^-, \qquad T(V) = \xi^+ \oplus \xi^-,$$

sur ξ_x^+ la métrique est positive, elle est négative sur ξ_x^-. De sorte que la conjugaison introduite s'étend au fibré de Clifford.

Par passage au complexifié α s'étend naturellement à $E_{\mathbb{C}}$, $C(Q)_{\mathbb{C}}$ et au complexifié du fibré de Clifford sur V

$$\alpha(\lambda u) = \bar{\lambda}\alpha(u), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

$\bar{\lambda}$ étant le complexe conjugué usuel de λ.

2° *Spineurs orthogonaux.*

V est l'espace temps. Supposons qu'il existe au-dessus de V un fibré vectoriel (ξ, Q) riemannien ou pseudo-riemannien de rang $2r$ et que l'on puisse construire au-dessus de (ξ, Q) un fibré en spineurs orthogonaux projectifs complexes (les spineurs étant définis modulo un facteur complexe de norme 1). S'il existe au-dessus de (ξ, Q) une structure spinorielle au sens large [3, c] on peut envisager une telle situation. $C(Q')_x f_x$ désigne la fibre spinorielle au-dessus de x, Q' étant le complexifié de Q, f_x le r-vecteur isotrope qui définit les spineurs, β sera l'anti-automorphisme principal de l'algèbre de Clifford et la barre la conjugaison tenant compte de la signature introduite au 1°. On peut définir sur les champs spinoriels projectifs une forme sesquilinéaire hermitienne $\mathscr{H}$, définie positive par :

$$(2) \qquad \bar{f}\mathscr{H}(vf, uf)f = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \beta(\overline{uf})vf = \bar{f}\beta(\bar{u})vf \qquad [3, d].$$

$\mathscr{H}$ est invariante par les éléments du sous-groupe spinoriel de norme spinorielle 1. Pour simplifier on supposera que le fibré des repères orthonormés se réduit à la composante connexe du groupe de Lorentz lorsqu'il sera question de fibré tangent à V et on fera une convention analogue pour tout fibré (ξ, Q).

Nous considérerons les sections du fibré en algèbres de Clifford de (ξ, Q), complexifié en $(\xi_{\mathbb{C}}, Q')$: ce sont les sections de ce fibré en algèbre que l'on fera opérer sur les sections du fibré spinoriel, ainsi l'exigence de travailler sur une algèbre d'opérateurs sera automatiquement satisfaite.

On a vu [3, c] qu'il existe en chaque point x une décomposition directe $\xi_{\mathbb{C}}^x = F'_x \oplus \bar{F}'_x$ où F'_x est le sous-espace déterminé par f_x, $x \to F'_x$ dépendant différentiablement de x (ce qui ne détermine pas en général une structure presque complexe).

3° *Spineurs symplectiques.*

Le lecteur pourra se reporter pour plus de détails à nos travaux [3, e]. On va montrer brièvement ici que s'il existe au-dessus du fibré (ξ, Q) un fibré en spineurs orthogonaux on peut lui associer naturellement un fibré en spineurs symplectiques. On recouvre V par un système d'ouverts U_α, munis de repères de Witt « réels » (e_α, e_{β^*}) pour le fibré ξ, on définit alors une forme symplectique complexe F en posant :

$$F(e_\alpha, e_{\beta^*}) = i\delta_{\alpha\beta^*}, \qquad F(e_\alpha, e_\beta) = F(e_{\alpha^*}, e_{\beta^*}) = 0 ;$$

les changements de repère de Witt « réels » sont adaptés à la fois à la structure pseudo-riemannienne et à cette structure symplectique complexe. On peut alors envisager un fibré spinoriel symplectique complexe naturellement associé à la donnée de (ξ, Q) dont le groupe structural est le groupe métaplectique complexe $Mp'(r)$. On introduit avec les notations de nos travaux [3, e] le symbole Φ_x^* et une forme sesquilinéaire $\mathscr{H}'$, définie positive sur les spineurs symplectiques telles que :

$$(3) \qquad \Phi\mathscr{H}'(v\Phi^*, u\Phi^*)\Phi^* = \Phi\beta(\bar{u})\Phi^*$$

$\mathscr{H}'$ est invariante par l'action du groupe métaplectique (en valeur absolue).

Remarquons enfin que si une variété admet une structure spinorielle orthogonale au sens strict le cardinal des structures spinorielles distinctes au-dessus de la variété est celui des éléments du premier groupe de cohomologie $H^1(V, \mathbb{Z}_2)$. Cette situation est à rapprocher de la non unicité du vecteur de vide en mécanique quantique.

III. LA QUANTIFICATION EN FORMALISME ONDULATOIRE D'UN CHAMP DE MÉSONS SCALAIRES NON CHARGÉS

Nous considérons un fibré spinoriel orthogonal au sens strict, quelconque au-dessus de V_4 déduit du fibré tangent par construction fonctorielle. Soit ∇ une connexion pseudo-euclidienne et D une connexion spinorielle au-dessus de ∇, D sera étendue éventuellement aux tenseurs-spineurs, et supposée telle que $D\mathcal{H} = 0$, condition réalisée si elle est d'excès cliffordien nul (ce qui signifie qu'elle est à valeurs dans l'algèbre de Lie de Spin Q).

Soit φ une fonction différentiable, définie sur V à valeurs réelles ou complexes, nous poserons :

$$\text{grad } \varphi = e^i \partial_i \varphi \qquad (e^i = g^{ij}(\partial/\partial x^j)), \tag{4}$$

g étant la forme bilinéaire fondamentale, puis :

$$\underline{\delta(\varphi) = D_{\text{grad}\,\varphi} + k\varphi}, \qquad k \in C_c^\infty(V), \qquad D_{\text{grad}\,\varphi} = g^{ij}(\partial_j \varphi) D_i . \tag{5}$$

$\delta(\varphi)$ opère sur l'espace S des sections du fibré spinoriel η déterminé par f (cf. II, 2°) dont une section locale pourra se noter :

$$x \to \lambda(x) f(x), \qquad \lambda(x) \in C(Q')_x .$$

Remarque. — On pourrait évidemment ajouter au deuxième membre de (5) une fonction arbitraire de φ à valeurs scalaires.

Nous allons introduire maintenant un espace H des « fonctions d'ondes ». Considérons au-dessus de V la forme volume $d\mathcal{V}$, associée à la métrique.

L'ensemble des sections boréliennes uf du fibré spinoriel telles que :

$$\langle uf, uf \rangle = \int_V \mathcal{H}(uf, uf)_x d\mathcal{V} < \infty$$

(on identifie deux sections qui diffèrent seulement sur un ensemble de mesure nulle) constitue un espace de Hilbert, ce sera l'espace H.

A quelle condition $\delta\varphi$ est-il anti-hermitien, en supposant φ a support compact, relativement à $\langle\, , \rangle$. $\mathcal{H}(\delta(\varphi)s, t) + \mathcal{H}(s, \delta(\varphi)t)$, s'écrit compte tenu de $D\mathcal{H} = 0$:

$$\text{grad } \varphi \mathcal{H}(s, t) + 2 \text{ Re } (k\varphi)\mathcal{H}(s, t) ;$$

utilisant alors le théorème de Stokes on trouve aisément [*4*, *a*] :

$$\int_V [\text{div } (\text{grad } \varphi) - 2 \text{ Re } (k\varphi)] \mathcal{H}(s, t) d\mathcal{V} = 0 ,$$

ce qui entraîne s et t étant arbitraires :

$$\underline{\square\, \varphi = 2\ \mathrm{Re}\ (k\varphi)}\,. \tag{6}$$

Sous la seule hypothèse supplémentaire que le vecteur de torsion de la connexion ∇ du fibré tangent soit nul, ce qui permet d'écrire div $X = \nabla_i X^i$ pour tout champ de vecteur, (5) donne :

$$\underline{g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi \equiv \square\, \varphi = 2\ \mathrm{Re}\ (k\varphi)}\,. \tag{7}$$

Choisissons φ réel et posons $2k = -m^2$, on trouve alors l'équation usuelle de Klein-Gordon

$$\text{(8)} \qquad \underline{\square\, \varphi = -m^2\varphi}\,, \qquad \underline{\delta(\varphi) = \mathrm{D}_{\mathbf{grad}\,\varphi} - \frac{1}{2}m^2\varphi}\,. \qquad \text{(9)}$$

(tandis que si φ est imaginaire pur : $\varphi = i\psi$ ainsi que $k = \lambda i$, on trouve :

$$\square\, \psi = -2i\lambda\psi, \qquad \lambda \text{ réel}, \qquad \delta(\psi) = \mathrm{D}_{\mathbf{grad}\,\psi} + \lambda i\psi\,,$$

$\delta\psi$ est hermitien).

Ainsi : L'équation de Klein-Gordon exprime que l'opérateur $\delta(\varphi)$ est anti-hermitien pour la métrique $\langle\, ,\rangle$ de l'espace des sections boréliennes de carré intégrable pour la mesure volume.

Pour un autre champ φ' du même type $[\delta(\varphi), \delta(\varphi')]$ est à nouveau anti-hermitien en raison de l'équation (8). (5) dépend linéairement de φ mais rien n'empêche selon la remarque ci-dessus d'envisager un opérateur $\delta(\varphi)$ qui dépendrait par un terme supplémentaire d'une fonction quelconque de φ, *non linéaire.*

En théorie quantique relativiste restreinte des champs on envisage une action du revêtement $\hat{\mathrm{P}}$, d'ordre deux, du groupe de Poincaré P par des opérateurs unitaires, dans l'espace H des fonctions d'onde. Si $\lambda \to s_\lambda$, définit cette action, $\lambda \in \hat{\mathrm{P}}$, on postule avec les notations du préambule que :

$$\Phi(s_\lambda) = u(\lambda)\Phi(s)u(\lambda)^{-1}\,.$$

Dans la présente théorie nous chercherons à relever pour un groupe au moins local, d'isométries de V, l'action de ce groupe en une action équi-linéaire sur l'espace S des sections du fibré spinoriel. Ce problème a été étudié par différents auteurs [*2*, *7*]. Si (ξ, Q) est le fibré tangent à V, muni d'une structure spinorielle orthogonale au sens strict, l'action du groupe d'isométries se relève dans le fibré en spineurs projectifs. Il en est de même si on prend $\xi = \mathrm{T}^2(\mathrm{V})/\mathrm{V}$, V orientable, selon [*3*, *b*].

Donc *sous des hypothèses très larges notre théorie possédera la covariance relativiste générale, au sens précisé ci-dessus.*

Enfin (8) se déduit comme à l'usuel d'un principe variationnel portant sur le lagrangien :

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial xi}\frac{\partial\varphi}{\partial xj}\right) + \frac{1}{2}m^2\varphi$$

et on en déduit le tenseur d'énergie :

$$\mathrm{T}^{ij} = g^{ik}g^{il}\frac{\partial\varphi}{\partial xk}\frac{\partial\varphi}{\partial xl} - \mathscr{L}g^{ij}$$

à $\mathscr{L}$ et T^{ij} correspondent par (5) des opérateurs quantiques. Pour $\mathscr{L}$ c'est immédiat, pour T^{ij} cela résultera du n° IV ci-dessous.

La quantification des fonctions coordonnées.

Soient y^i, $i = 0, 1, 2, 3$, un système de coordonnées locales. On peut appliquer à ces fonctions les résultats précédents en faisant $m = 0$. Ainsi : *Pour que les fonctions coordonnées satisfassent à la condition de quantification* (8), *il faut et il suffit qu'elles soient isothermes.*

Posant :

$$(\partial/\partial y^i) = e_i$$
$$\delta(y^i) = g^{ij}\mathrm{D}_{e_j}$$

Si ∇ est la connexion riemannienne, alors le crochet $[\delta(y^i), \delta(y^j)]$ s'exprimera à l'aide de la courbure de la connexion spinorielle, donc de la connexion riemannienne.

Ainsi : Sur un espace courbe les fonctions coordonnées ne sont pas des grandeurs simultanément mesurables, la courbure constitue l'obstruction à la possibilité de mesure simultanée des coordonnées.

Remarque 1. — Si la connexion ∇ peut être choisie spin-euclidienne (au sens strict, ou même au sens large) alors on peut faire opérer $\delta(\varphi)$ sur l'espace des sections de r fibrés en droites correspondantes aux champs de spineurs de différents degrés, cela résulte de la définition même de la forme de connexion spin-euclidienne. Nous retrouverons cette remarque dans la quantification en « formalisme particulaire ».

Remarque 2. — S'il s'agit d'un champ de mésons scalaires chargés, nous introduisons un couple de fonctions réelles indépendantes et la théorie se développe de la même manière.

IV. GÉNÉRALISATION

Nous nous proposons de remplacer φ que l'on peut considérer comme une section cliffordienne scalaire par une section cliffordienne quelconque. Toute connexion euclidienne passe naturellement à une connexion cliffordienne [*3*, *a*]. La difficulté est maintenant de généraliser $\mathrm{D}_{\mathrm{grad}\,\varphi}$ de manière convenable.

Pour préparer les développements ultérieurs, il sera commode (sinon indispensable) de supposer que V_4 admet une structure spinorielle au sens strict. On sait que le *fibré tangent à* V_4 *est alors parallélisable.*

Si on se donne sur V_4 une parallélisation cela équivaut à se donner une trivialisation de $T(V_4)$ rendant ce fibré isomorphe à $V_4 \times T_{x_0}(V)$, x_0 étant choisi dans V_4. Dans cette bijection les champs de vecteurs parallèles correspondent aux sections constantes du fibré trivial. Si on se donne une parallélisation π, soit a fixé dans V_4 et $T_a(V_4) = F$, si θ est une 1-forme à valeurs dans F et si X est un champ de vecteurs de V_4, $\pi(a, x)$ définit par hypothèse un isomorphisme linéaire de $T_a(V_4)$ sur $T_x(V_4)$. Si on pose $S(x, X, Y) = -\pi(a, x)d\theta_a(x, X, Y)$ avec $\theta_a(x, X) = \pi(a, x)^{-1}X$, on définit un champ de tenseurs S de type (2, 1) indépendant du choix de a et appelé la torsion de π. Si X et Y sont deux champs de vecteurs parallèles alors

$$S(X, Y) = [X, Y].$$

Si π est une parallélisation telle que $S = 0$, pour chaque point $a \in V$ il existe un voisinage U et un difféomorphisme de U sur un ouvert $\hat{U}$ de R^n, ce difféomorphisme commutant avec les parallélismes. Pour ces derniers résultats conférer [5, p. 174-175, Tome I].

Il est naturel de faire l'hypothèse que les fibrés tels que (ξ, Q) au-dessus de V_4 que l'on pourra considérer sont trivialisables. Dans ces conditions soit $\varphi = \varphi^A e_A$ un champ cliffordien, supposons choisie une parallélisation π, la base locale e_A étant construite à partir de champs de repères parallèles de ξ et définissons

$$\text{grad } \varphi = e^i e_A \partial_i \varphi^A = e^i[\nabla_i \varphi - \Gamma^B_{Ai} e_B \varphi^A]$$

ce qui ne dépend pas, pour un choix de π, de celui des repères parallèles qui se déduisent l'un de l'autre par des matrices à coefficients *constants*, selon une remarque antérieure, et revient à $\text{grad } \varphi = e^i \hat{\nabla}_i \varphi$, $\hat{\nabla}$ étant la connexion triviale pour laquelle les e_A sont parallèles.

Nous poserons maintenant :

$$\underline{\delta(\varphi) = D_{\text{grad } \varphi} + k\varphi} \tag{10}$$

avec :

$$D_{\text{grad } \varphi} = e_A g^{kj}(\partial_j \varphi^A) D_k . \qquad (D_k = D_{(\partial/\partial x^k)}) .$$

D est la dérivation spinorielle « au-dessus » de ∇, à excès cliffordien nul, que l'on pourra étendre aux tenseurs-spineurs de tout type selon un processus bien connu.

Si nous exprimons maintenant l'antihermiticité de $\delta(\varphi)$ apparaît

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(D_{\text{grad } \varphi} s, t) + \mathscr{H}(s, D_{\text{grad } \varphi} t) \\ = \mathscr{H}(g^{kj}(\partial_j \varphi^A) e_A D_k s, t) + \mathscr{H}(x, g^{kj}(\partial_j \varphi^A) e_A D_k t) . \end{aligned}$$

Si nous supposons φ hermitien : $\beta(\bar{\varphi}) = \varphi$, cela s'écrit :

$$\begin{aligned} g^{kj}[\mathscr{H}(\partial_j \varphi^A e_A D_k s, t) + \mathscr{H}(\partial_j \varphi^A e_A s, D_k t)] \\ = g^{kj} \partial_j \varphi^A [\mathscr{H}(e_A D_k s, t) + \mathscr{H}(e_A s, D_k t)] \\ = g^{kj} \partial_j \varphi^A [\mathscr{H}(D_k \gamma_A(s), t) + \mathscr{H}(\gamma_A(s), D_k t)] \\ = g^{kj}(\partial_j \varphi^A) \partial_k \mathscr{H}(\gamma_A(s), t) \end{aligned}$$

γ_A étant le tenseur-spineur attaché à e_A (tensoriel de type 1, 1) tel que $D_k\gamma_A = 0$.

Dès lors un calcul analogue à celui que l'on a fait au III conduit en intégrant à :

$$e_A g^{ij}\nabla_i(\partial_j\varphi^A) = 2k\varphi\,,$$

si on suppose que la connexion ∇ *a son vecteur de torsion nul.*

Soit :

$$\underline{e_A g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi^A = 2k\varphi} \tag{11}$$

Il est loisible comme on l'a déjà remarqué d'ajouter d'autres termes au deuxième membre de (10) de sorte que (11) n'épuise pas les possibilités de la théorie.

Remarques. — 1° Si on choisissait dans V_4 des coordonnées (x^i) isothermes et la connexion riemannienne, alors $g^{ij}\Gamma^k_{ij} = 0$ et (11) s'écrirait :

$$g^{ij}(\partial_{ij}\varphi^A) = 2k\varphi^A\,.$$

Dans cette hypothèse on pourrait définir

$$\delta(\varphi) = D_{\mathbf{grad}\,\varphi} + k\varphi - g^{ij}(\nabla_i e_A)(\partial_j\varphi^A)$$

et au lieu de (11) il viendrait :

$$\underline{g^{ij}(\nabla_i\nabla_j\varphi) = 2k\varphi} \tag{11 *bis*}$$

où les bases de parallélisation n'apparaissent plus, mais l'isothermie remplace comme hypothèse le parallélisme. Le choix entre (11) et (11 *bis*) pourrait résulter des observations ou expériences du physicien.

2° Si on choisit la connexion ∇ spin-euclidienne au sens large, elle passe naturellement à une connexion D sur les spineurs. On suppose $D\mathscr{H} = 0$. Supposons donc que φ soit une section cliffordienne spinorielle, c'est-à-dire une section spinorielle ; dans les conditions du 1°, écrivons :

$$g^{ij}D_iD_j\varphi = \frac{e^ie^j + e^je^i}{2} D_iD_j\varphi$$

γ^i désignant le tenseur-spineur « fondamental » associé à e^i, alors :

$$\begin{aligned} g^{ij}D_iD_j\varphi &= \frac{e^je^i}{2} D_iD_j\varphi + \frac{1}{2}\gamma^iD_i\gamma^jD_j\varphi \\ &= \gamma^iD_i\gamma^jD_j\varphi - \frac{1}{2}R\varphi\,, \end{aligned}$$

où R désigne la courbure scalaire [*6*].

$$g^{ij}D_iD_j\varphi - 2k\varphi = (\gamma^iD_i + im)\circ(\gamma^jD_j - im)(\varphi) = 0\,,$$

avec

$$2k + \frac{R}{4} = - m^2$$

traduit (11 *bis*).

Dirac pose

$$\gamma^k D_k \varphi - im\varphi = 0 ,$$

mais ici le coefficient de masse dépend de la courbure scalaire.

V. LA QUANTIFICATION DU CHAMP DE GRAVITATION EN FORMALISME ONDULATOIRE

Choisissons comme fibré ξ le fibré $T^2(V_4) \mid V_4$, avec g forme quadratique, le repère (e_α, e_{α^*}) est obtenu par restriction à V_4 du repère naturel de $T(V_4)$: $(\partial/\partial x^\alpha)$, $(\partial/\partial x^{\alpha^*})$; en chaque point $x \in V$, la fibre de ξ est la somme directe de deux sous-espaces isomorphes à $T_x(V_4)$, totalement isotropes pour une métrique dont les composantes sont telles que $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha^*\beta^*} = 0$, $g_{\alpha\beta^*} = g_{\beta^*\alpha}$ et $\partial_{\lambda^*}(g_{\alpha\beta^*}) = 0$. On peut donc identifier les composantes $g_{\alpha\beta^*}$ à celle d'un tenseur $\mathcal{G}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta^*}$, symétrique, au-dessus de V_4.

V_4 étant supposée orientable, il existe alors une fibration spinorielle $\mathcal{C}$ au-dessus de ξ, déterminée localement par la forme

$$(\partial/\partial x^{1^*}) \wedge (\partial/\partial x^{2^*}) \wedge (\partial/\partial x^{3^*}) \wedge (\partial/\partial x^{4^*}) \quad [3, b],$$

pour la métrique g_{ij}. C'est le produit tensoriel $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ qui sera utilisé pour construire notre représentation.

V_4 est supposée parallélisable. Choisissons une parallélisation π, avec bases locales parallèles (e_α), $\mathcal{G} = (e_\alpha \otimes e_\beta)\mathcal{G}^{\alpha\beta}$, et définissons

$$\operatorname{grad} \mathcal{G} = e^i(e_\alpha \otimes e_\beta)\partial_i \mathcal{G}^{\alpha\beta} , \qquad \partial_i = \partial/\partial x^i .$$

Sur le fibré

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} : D_{\operatorname{grad} \mathcal{G}} = (e_\alpha \otimes e_\beta)\mathcal{G}^{ij}(\partial_i \mathcal{G}^{\alpha\beta})D_j ,$$

D étant la connexion spinorielle. La connexion euclidienne choisie sur $T^2(V_4) \mid V_4 = \xi$ est de coefficients non nuls $L^\alpha_{\beta\gamma} = L^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma} = L^{\alpha^*}_{\gamma\beta^*}$, $(L^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\gamma\beta})$, de sorte que la dérivée covariante de $g_{\alpha\beta^*}$ apparaît comme celle de $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ sur V_4 avec connexion $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\beta\gamma}$ [3, b].

Prenons :

$$\underline{\delta(\mathcal{G}) = D_{\operatorname{grad} \mathcal{G}} + \lambda \mathcal{G} + \mathcal{G}^{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\mu\sigma}\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\Gamma^\beta_{\rho\sigma}(e_\alpha \otimes e_\beta)} \tag{12}$$

Nous exprimerons que $\delta(\mathcal{G})$ est anti-hermitien pour la métrique déduite par produit tensoriel de $\mathcal{H}$ après intégration.

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(g^{ij}(\partial_i \mathcal{G}^{\alpha\beta})e_\alpha \otimes e_\beta D_j(s \otimes s'), t \otimes t') \\ &\qquad = \mathcal{G}^{ij}\partial_i \mathcal{G}_{\alpha\beta}\mathcal{H}(e_\alpha D_j s, t)\mathcal{H}(s', e_\beta t') + \mathcal{H}(e_\alpha s, t)\mathcal{H}(e_\beta D_j s', t')\end{aligned}$$

ce qui ajouté au terme analogue conduit à :

$$\mathcal{G}^{ij}\partial_i\mathcal{G}^{\alpha\beta}[\mathcal{H}(e_\alpha \mathrm{D}_j s, t) + \mathcal{H}(s, e_\alpha \mathrm{D}_j t)]\mathcal{H}(s', e_\beta t) \\ + \mathcal{G}^{ij}\partial_i\mathcal{G}^{\alpha\beta}[\mathcal{H}(e_\alpha \mathrm{D}_j s', t') + \mathcal{H}(s', e_\alpha \mathrm{D}_j t')]\mathcal{H}(s, e_\beta t).$$

Après intégration apparaît :

$$\mathcal{G}^{ij}\partial_i\mathcal{G}^{\alpha\beta}\partial_j(\langle s, e_\alpha t\rangle\langle s', e_\beta t'\rangle)$$

et conduit après un calcul analogue à celui du IV à :

$$(13)\quad \underline{\square\,\mathcal{G}^{\alpha\beta} - 2\lambda\mathcal{G}^{\alpha\beta} - 2\mathcal{G}^{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\mu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\beta}_{\rho\sigma} = 0}\,, \qquad \square\,\mathcal{G}^{\alpha\beta} = \mathcal{G}^{ij}\nabla_i\nabla_j\mathcal{G}^{\alpha\beta}$$

(où on ne *dérive pas* relativement aux indices α, β).

Faisons maintenant l'hypothèse que S, torsion de la parallélisation soit nulle. Alors on a une structure localement plate, c'est-à-dire intégrable.

Il existe des coordonnées naturelles, telles que les repères locaux naturels soient parallèles. On peut choisir de telles coordonnées et écrire (13) sous la forme :

$$(14)\quad \underline{\frac{1}{2}\square\,\mathcal{G}^{ij} - \mathcal{G}^{lr}\mathcal{G}^{ms}\Gamma^{i}_{lm}\Gamma^{j}_{rs} = \lambda\mathcal{G}^{ij}}$$

qui s'identifie aux équations d'Einstein en coordonnées isothermes si les coordonnées introduites le sont, c'est-à-dire si :

$$(15)\quad \Gamma^{i}_{jk}\mathcal{G}^{ik} = 0$$

et si λ est la constante cosmologique (facultative).

Donc : Dans l'hypothèse où la variété V_4 *admet une structure spinorielle au sens strict, avec torsion de parallélisation nulle, si l'on peut déterminer des repères locaux naturels isothermes et parallèles, notre méthode de quantification donne les équations d'Einstein du vide en exprimant que les opérateurs de représentation hilbertienne sont anti-hermitiens.*

Remarque. — Pour obtenir des équations d'Einstein avec second membre il suffit d'ajouter au deuxième membre de (12) un terme qui représente le tenseur d'énergie.

Le résultat que l'on vient d'obtenir vaut donc sous une condition très forte, car si un repère de vecteurs parallèles pour π est isotherme, tous les repères de π le sont aussi. Il se pose donc le problème :

Existe-t-il sur l'espace-temps des systèmes locaux des coordonnées isothermes dont les repères soient adaptés à quelque parallélisation, sans être nécessairement orthonormés pour la métrique $\mathcal{G}$?

Une réponse partielle à cette question peut-être donnée.

Considérons la solution du modèle de Schwarzschild :

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2mG}{c^2 r}} - r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2mG}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 .$$

On peut en posant $r' = r - \frac{mG}{c^2}$, obtenir des coordonnées isothermes $(r', \theta, \varphi, ct)$, dans l'ouvert

$$r > \frac{2mG}{c^2}, \qquad r' > \frac{mG}{c^2}, \qquad [8],$$

les conditions désirées sont bien réalisées. (On notera que pour le système solaire, $\frac{mG}{c^2} \simeq 10^{-6} \times R$, R étant le rayon du soleil). *Donc la méthode de quantification donnée s'applique dans l'ouvert de Schwarzschild,* $r' > \frac{mG}{c^2}$, *c'est-à-dire pratiquement dans tout le système solaire, au moins dans le cas extérieur.*

VI. LE FORMALISME CORPUSCULAIRE

1° *Fermions.*

Considérons d'abord un fibré spinoriel orthogonal, au sens strict, au-dessus de V_4. Toute section à support compact s'écrit $x \to u(x)f(x)$ avec les notations du 2°.

Le groupe structural du fibré se réduit à un groupe de spinorialité. L'action du groupe de spinorialité par produit à gauche sur les sections spinorielles conserve le degré ($u(x)f(x)$ est la somme de r termes de degré $0, 1, \ldots, r$). Si donc on envisage un recouvrement de la variété par un système d'ouverts trivialisants pour le fibré (ξ, Q) du 2° à fonctions de transitions dans un groupe de spinorialité, on pourra définir sans ambiguïté des champs locaux de degré respectif, $0, 1, \ldots, r$. r est ici un nombre arbitraire. On peut envisager un tel fibré construit à partir du fibré tangent à V_4 par sommes de Whitney et produits tensoriels, ou par tout autre procédé fonctoriel.

Il existe en chaque point x une décomposition directe :

$$\xi_x^{\mathbb{C}} = F'_x \oplus \bar{F}'_x$$

où F'_x est le sous-espace associé à f_x. Soit $\eta : x \to \eta_x$ une section locale du fibré associé aux $\bar{F}'_x$, on peut identifier η à $x \to \eta_x f_x$.

A η nous associons un *opérateur de création* $a_\eta^+ : uf \to \eta uf$ et un *opérateur d'annihilation* a_η^- qui est l'adjoint de a_η^+ relativement à $\mathscr{H}$. D'après la définition de $\mathscr{H}$, $a_\eta^- = a_\eta^+$.

On obtient alors B étant le double de la forme bilinéaire associé à Q, les relations d'anticommutation :

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} \underline{[a_\eta^+, a_{\eta'}^+]_+ = [a_\eta^-, a_{\eta'}^-]_+ = 0} \\ \underline{[a_\eta^+, a_{\eta'}^-]_+ = \mathrm{B}(\eta, \bar{\eta}') = \mathscr{H}(\eta f, \eta' f')}\,. \end{array}\right.$$

A l'aide de sections boréliennes choisies comme au III, on construit le produit scalaire $\langle\, ,\rangle$ et *on obtient les relations analogues à* (16) *ou* $\mathscr{H}$ *est remplacé par* $\langle\, ,\rangle$ [*3*, *d*].

Il est clair que l'on pourra parler d'un schéma comportant p particules au sens global et de manière indépendante de tout repère dans le fibré dont le groupe structural est un groupe de spinorialité (même au sens large). Cela n'a plus de sens intrinsèque, c'est-à-dire dépend du repère de l'observateur, si on travaille avec le groupe de Lorentz tout entier, même réduit à sa composante orthochrone.

Au sujet de la covariance relativiste on se reportera au III : c'est la même situation.

2° *Bosons relativistes.*

Le fibré spinoriel est symplectique complexe de rang $2r$ sur $\mathbb{C}$, comme décrit au (II, 3°), on peut envisager le cas des fibrations à groupe métaplectique complexe $\mathrm{M}p'(r)$ ou dont le groupe est un revêtement du groupe symplectique complexe. Nous choisirons dans $\mathrm{M}p'(r)$ le groupe $\mathrm{S}p'_2(r)$ complexifié de $\mathrm{S}p_2(r)$ [*3*, *e*], dont nous conserverons l'image réciproque de la composante connexe du groupe de Lorentz généralisé (qui est le groupe structural du fibré (ξ, Q) pseudo-riemannien).

On peut définir sur les champs de spineurs symplectiques une forme sesquilinéaire $\mathscr{H}'$, invariante par l'action des éléments de $\mathrm{S}p'_2(r)$, définie positive, et construire exactement comme au 1° des opérations de création et d'annihilation tels que :

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \underline{[a_\eta^{(+)}, a_{\eta'}^{(+)}] = [a_\eta^{(-)}, a_{\eta'}^{(-)}] = 0} \\ \underline{[a_\eta^{(+)}, a_{\eta'}^{(-)}] = -\,i\mathrm{F}(\eta, \bar{\eta}') = \mathscr{H}'(\eta\Phi^*, \eta'\Phi^*)} \end{array}\right.$$

où F *est la forme symplectique, puis après intégration, avec les précautions usuelles, des relations analogues à* (17) *où* $\mathscr{H}'$ *est remplacée par* $\langle\, ,\,\rangle$.

La covariance relativiste donne encore lieu aux mêmes observations que dans III.

On peut enfin se limiter, si l'on veut, à des opérateurs soit hermitiens, soit pseudo-hermitiens dans les relations (17).

Remarque. — La théorie des bosons symplectiques est tout à fait analogue, elle relève de la même méthode indiquée brièvement dans [*3*, *d*].

On observera que $\mathscr{H}'(\eta\phi^*, \eta'\phi^*) = g(\eta, \eta')$ ce qui identifie l'énergie classique à l'énergie quantique quand le champ η est identifié à $\eta\Phi^*$.

3° *Formalisme corpusculaire pour les bosons scalaires.*

Nous choisissons le fibré spinoriel orthogonal de base V_4 identique à celui que l'on a utilisé en (V) pour le champ gravitationnel. De cette manière le fibré spinoriel symplectique peut-être choisi réel puis complexifié. Fixons sur V_4 une parallélisation π. Tout champ de repères locaux de V_4, au-dessus d'un ouvert de U, adaptés à π se déduit de l'un d'eux par un champ de matrices à coefficients constants, de sorte que localement, le choix de π identifie une application φ de U dans $\mathbb{C}$ à une application de R^4 dans $\mathbb{C}$. On se bornera aussi, selon une remarque faite au III à faire opérer φ sur les sections d'un fibré en droites complexes : $x \to \lambda(x)f(x) = s(x)$, $\lambda(x) \in \mathbb{C}^*$, et on considère une connexion D *spin-euclidienne au sens strict*, de sorte que D opère sur s comme une différentielle usuelle. ψ sera pris imaginaire pur de sorte que $\delta(\varphi) = D_{\text{grad}\,\varphi} + i\lambda\varphi$, est hermitien. Il vient alors :

$$\delta(x^k) = g^{jk}\partial_j + i\lambda' x^k, \qquad \lambda' \text{ réel,}$$

et le schéma obtenu en changeant λ' en $-\lambda'$ donnerait :

$$\delta'(x^k) = g^{jk}\partial_j - i\lambda' x^k$$

$\delta(x^k)$ et $\delta'(x^k)$ sont adjoints pour la métrique $\mathscr{H}$. On reconnaît les opérateurs de création et d'annihilation du formalisme de Fock.

On sait par ailleurs que $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^4)$ peut se développer sur la base des fonctions d'Hermite — et on passe ainsi de $L^2(\mathbb{R}^4)$ à l'algèbre symétrique de $\mathbb{R}^4$ — les opérations de création et d'annihilation étant obtenus, les premiers par produit à gauche par des éléments d'une base de $\mathbb{R}^4$, et les autres par passage à l'adjoint, selon le formalisme exprimé par (17) [*1*].

Donc pour identifier localement le formalisme ondulatoire explicité au III et le formalisme corpusculaire du (VI, 2°), *on doit fixer sur* V_4 *une parallélisation* π, *choisir une connexion spin-euclidienne au sens strict qui opère sur le fibré en droites complexes défini par la fibration spinorielle orthogonale.*

A la structure spinorielle orthogonale on associe naturellement une structure spinorielle complexe symplectique, sur laquelle on construit les opérations de création et d'annihilation, la correspondance entre les deux descriptions, corpusculaire et ondulatoire, se faisant pour un observateur local au moyen des fonctions d'Hermite (dualité ondes-matière).

On rappelle que si l'algèbre symétrique construite sur les (e_α), $\alpha = 0, 1, 2, 3$, linéairement isomorphe à l'espace des spineurs symplectiques (réels ici), admet pour base :

$$\Phi_\alpha = \frac{(e_0)^{\alpha_0}(e_1)^{\alpha_1}(e_2)^{\alpha_2}(e_3)^{\alpha_3}}{\sqrt{\alpha_0\,!\,\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\,\alpha_3\,!}}$$

on identifie Φ_α avec :

$$\Phi_\alpha(q) = h_{\alpha_1}(q^0)h_{\alpha_2}(q^1)h_{\alpha_2}(q^2)h_{\alpha_3}(q^3)$$

$$h_n(x) = \frac{e^{-x^2}/2}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}\,\mathrm{H}_n(x)\,, \qquad \mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$$

H_n étant le $n^{\text{ième}}$ polynôme d'Hermite à une variable, h_{α_i} correspond à (e_i), $\delta(x^k)$ correspond au produit par (e_k) dans l'espace des spineurs symplectiques (modulo quelque coefficient de normalisation) [*1*].

En résumé. — On peut construire pour un champ de bosons scalaires un formalisme ondulatoire et un formalisme corpusculaire, globalement sur un espace courbe — on peut localement identifier les deux formalismes au moyen d'une base de fonctions d'Hermite. Le formalisme corpusculaire global exige un choix plus restrictif de la connexion qui doit être spin-euclidienne au sens strict. Ce choix étant possible dans les hypothèses où l'on bâtit le formalisme ondulatoire.

L'identification locale n'est pas unique et dépend du repère de parallélisation de l'observateur, la notion de nombre de particules, mais non de type, est donc liée à ce repère de parallélisation défini modulo une transformation de Lorentz quelconque à coefficients constants. Ces diverses constructions et identifications sont possibles sur l'ouvert de Schwarzschild défini en (V), c'est-à-dire pratiquement dans tout le système solaire, ou dans tout système stellaire analogue à symétrie sphérique.

Remarques finales.

1° Dans les conditions du IV, si on choisit pour A fixé $\varphi^{\mathrm{A}} = 1$, alors $\delta(\varphi)$ se réduit au produit par e_{A} modulo un scalaire. Pour les fermions, cela donne un formalisme corpusculaire qui n'a de valeur que si l'on travaille avec un groupe de covariance réduit au groupe de spinorialité et avec une connexion spin-euclidienne (du moins au sens large). Pour les bosons on peut également introduire le formalisme corpusculaire à l'aide de section locales du fibré (ξ, Q). Cela s'appliquerait en particulier au champ gravitationnel de manière presque immédiate.

2° Pour introduire un principe de « commutativité » (ou « d'anti-commutativité ») locale il faudrait introduire le produit de 2 fibrations spinorielles identiques et intégrer sur un domaine compact, ensemble de couples (x, y) tels que x et y soient reliés par un chemin orienté dans le temps. De la sorte il n'y aurait pas d'interaction entre deux points séparés par un intervalle d'espace.

Ces remarques finales appellent de nouveaux développements.

RÉFÉRENCES

[*1*] N. Bogolubov, A. Logunov, I. Todorov, *Introduction to axiomatic quantum field theory* (Izdat'elstvo Nauka — Moscou, 1969 — en russe — ou Benjamin, 1975 — en anglais).

[2] G. CHICHILNISKY, *Group actions on spin manifolds*. Thèse, Berkeley, 1970.
[3] A. CRUMEYROLLE, *a*) Structures spinorielles. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **XI**, n° 1, 1969, p. 19-55 ; *b*) Une théorie d'Einstein-Dirac en spin maximum 1. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **XXII**, n° 1, 1975, p. 43-61 ; *c*) Spin fibrations over manifolds and generalised twistors (Stanford, 1973, *Proceed. of Symp. in pure mathematics*, vol. **27**, 1975); ou *Periodica Math. Hungarica*, t. **6** (2), 1975, p. 143-171 ; *d*) *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **282**, Série A, 1976, p. 1367 ; *e*) Algèbre de Clifford symplectique... et spineurs symplectiques. *J. Math. pures et appl.*, t. **56**, 1977, p. 205-230.
[4] A. CRUMEYROLLE et J. TIMBEAU, a) *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **280**, série A, 1975, p. 1535; b) *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **282**, série A, 1976, p. 49.
[5] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE, *Connections, curvature and cohomology*, t. I, p. 174 (Acad. Press, 1972).
[6] A. LICHNEROWICZ, Champs spinoriels et propagateurs. *Bull. Soc. Math. de France*, t. **92**, 1964, p. 11 à 100.
[7] J. MARSDEN, Hamiltonian systems with Spin. *Canad. Math. Bull.*, t. **12**, 1969, p. 203-208.
[8] S. WEINBERG, *Gravitation and cosmology*. J. Wiley, 1972.

(Manuscrit reçu le 31 mai 1978)