ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BERNARD LÉAUTÉ

Électromagnétisme dans l'espace-temps de Kerr

Annales de l'I. H. P., section A, tome 27, nº 2 (1977), p. 167-173
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__27_2_167_0>

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXVII, n° 2, 1977, p. 167 à 173. *Physique théorique.*

Électromagnétisme dans l'espace-temps de Kerr

par

Bernard Léauté

Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S. n° 533,
Université Paris VI, Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-et-Marie-Curie, 75231 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Le quadripotentiel électromagnétique engendré par une charge ponctuelle, au repos, sur l'axe de symétrie dans l'espace-temps de Kerr, est déterminé sous forme analytique. Ses propriétés sont décrites.

ABSTRACT. — The electromagnetic quadripotential of a point charge at rest on the symmetry axis in the Kerr space-time is given in an analytical form. Its properties are described.

INTRODUCTION

Dans une publication récente, Linet [*1*] a donné, sous forme analytique, le potentiel électrostatique V_s dû à une source ponctuelle, au repos, dans l'espace-temps de Schwarzschild. L'examen de l'expression de V_s permet de vérifier facilement l'ensemble des propriétés du champ électrostatique déjà mises en évidence, grâce au développement en multipôles statiques, par Cohen et Wald [*2*], Hanni et Ruffini [*3*].

Le même travail a également été fait dans le cas de l'espace-temps de Reissner-Nordström : le potentiel électrostatique V_{R-N} explicitement obtenu et ses propriétés spécifiques indiquées [*4*].

L'objet de la présente étude est de poursuivre dans la voie précédemment tracée dans le cas de l'espace-temps de Kerr; c'est-à-dire, précisément, de donner l'expression du quadripotentiel A_α engendré par une source ponctuelle, stationnaire, située sur l'axe de symétrie. Cohen *et al.* [*5*] se sont déjà posés ce même problème et l'ont résolu en exprimant les composantes $F_{\alpha\beta}$

du champ électromagnétique sous forme de développements multipolaires, alors qu'ici la solution A_α sera énoncée sous forme analytique. Cette formulation simplifie notablement l'étude des propriétés du champ.

1. ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS L'ESPACE-TEMPS DE KERR

Rapportée au système de coordonnées de Boyer-Linquist [6] la métrique de Kerr s'écrit :

$$
(1.1) \quad \begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right)dt^2 + 4\frac{mar}{\Sigma}\sin^2\theta dt d\varphi \\ & - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2r}{\Sigma}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2 \end{aligned}
$$

avec les notations

$$
(1.2) \qquad \Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta \quad , \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2mr.
$$

Les unités sont telles que $G = c = 1$. On suppose $m > |a|$ de façon qu'il existe en $r = r_+$ et $r = r_-$ des horizons; $r_\pm$ valant $m \pm \sqrt{m^2 - a^2}$. En vue de recourir au formalisme de Newman-Penrose [7], on choisit, à la suite de Kinnersley [8], la tétrade isotrope complexe suivante :

$$
(1.3) \quad \begin{cases} l^\alpha : & \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \quad 1 \ , \ 0 \ , \quad \frac{a}{\Delta}\right) \\ n^\alpha : & \frac{1}{2\Sigma}(r^2 + a^2, \quad -\Delta \ , \ 0 \ , \ a) \\ m^\alpha : & \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta, \quad 0 \ , \ 1 \ , \ \frac{i}{\sin\theta}\right). \end{cases}
$$

Le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est régi par les équations de Maxwell :

$$
(1.4) \qquad F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = J^\mu \quad \text{et} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu
$$

formulées en se référant à la métrique de Kerr (1.1).

A^μ désigne le quadripotentiel électromagnétique et J^μ la quadri-densité de courant électrique.

Pour une charge ponctuelle q, au repos, située en $r = b$ ($b > r_+$) $\theta = 0$, J^μ se réduit à la seule densité de charge J^0 qui s'écrit :

$$
(1.5) \qquad J^0 = \frac{4\pi q}{a^2 + b^2}\delta(r - b)\,\delta(\cos\theta - 1).
$$

Dans le formalisme de Newman-Penrose, le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est complètement décrit par les trois fonctions complexes :

$$
(1.6) \quad \Phi_0 = F_{\mu\nu}l^\mu m^\nu \quad , \quad \Phi_1 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu + m^\mu \overline{m}^\nu) \quad , \quad \Phi_2 = F_{\mu\nu}\overline{m}^\mu n^\nu.
$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, compte tenu, d'une part, du caractère stationnaire à symétrie axiale de la métrique de Kerr, d'autre part, de la position de la charge q sur l'axe de symétrie, les composantes du champ $F_{\mu\nu}$ sont indépendantes de t et φ; de ce fait, il est aisé de voir que $F_{t\varphi} = F_{r\theta} \equiv 0$ si bien que la connaissance de Φ_1 et Φ_2 (ou de Φ_0 et Φ_2) suffit à déterminer entièrement le champ $F_{\mu\nu}$.

Les formules explicites, déduites de (1.6), par inversion, et de (1.3) sont les suivantes [5] :

$$(1.7)\quad \left\{\begin{aligned} F_{tr} &= -2\,\mathcal{R}e\,\Phi_1 - \frac{2\sqrt{2}a\sin\theta}{\Delta}\mathcal{I}m\,[(r-ia\cos\theta)\Phi_2] \\ F_{t\theta} &= 2a\sin\theta\,\mathcal{I}m\,\Phi_1 - 2\sqrt{2}\,\mathcal{R}e\,[(r-ia\cos\theta)\Phi_2] \\ F_{r\varphi} &= -2a\sin^2\theta\,\mathcal{R}e\,\Phi_1 = \frac{2\sqrt{2}(r^2+a^2)\sin\theta}{\Delta}\mathcal{I}m\,[(r-ia\cos\theta)\Phi_2] \\ F_{\theta\varphi} &= 2(r^2+a^2)\sin\theta\,\mathcal{I}m\,\Phi_1 - 2\sqrt{2}a\sin^2\theta\,\mathcal{R}e\,[(r-ia\cos\theta)\Phi_2]. \end{aligned}\right.$$

Le problème posé se ramène maintenant à la détermination des fonctions à valeurs complexes Φ_1, Φ_2. Pour y parvenir, on utilisera : premièrement, l'une des équations aux dérivées partielles du second ordre, séparées, déduites des équations de Maxwell par Teukolsky [9], [5] :

$$(1.8)\quad \begin{aligned} &\Delta\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) - (1+\operatorname{cotg}^2\theta)\Psi \\ &\qquad = -\frac{4\pi q}{2\sqrt{2}}\frac{a^2+b^2-2mb}{b+ia}\delta(r-b)\delta'(\cos\theta-1) \end{aligned}$$

avec les notations

$$(1.9)\quad \Psi = \frac{\Phi_2}{\rho}$$

et

$$(1.10)\quad \rho = -\frac{1}{r-ia\cos\theta};$$

deuxièmement, les deux équations de Maxwell suivantes [5] :

$$(1.11)\quad \frac{\rho^2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\Phi_1}{\rho^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi_2}{\rho}\right),$$

$$(1.12)\quad \frac{\Delta\rho^2\sin\theta}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi_1}{\rho^2}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\Phi_2\sin\theta}{\rho}\right).$$

2. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS. CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE. QUADRIPOTENTIEL

a) On va commencer par résoudre l'équation portant sur Φ_2. Pour ce faire, il y a lieu, tout d'abord, d'effectuer le changement de variable

$$(2.1)\quad r_S = r - r_-$$

d'où il résulte la formulation de (1.8) suivante :

$$(2.2)\quad \begin{aligned}&\left(r_S^2 - 2Mr_S\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial r_S^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) - (1+\operatorname{cotg}^2\theta)\Psi \\ &\qquad = -\frac{4\pi q}{2\sqrt{2}}\frac{b_S^2 - 2Mb_S}{b_S + r_- + ia}\delta(r_S - b_S)\delta'(\cos\theta - 1)\end{aligned}$$

avec $M = (m^2 - a^2)^{1/2}$ et $b_S = b - r_-$ conformément à (2.1).

La solution $\Psi^S(r_S, \theta)$ de cette équation correspondant à la valeur $a = 0$, c'est-à-dire au cas de la métrique de Schwarzschild, est connue. En effet, compte tenu des relations (1.7), (1.9), (1.10) considérées pour $a = 0$, on obtient :

$$(2.3)\qquad \Psi^S(r_S, \theta) = \frac{r_S}{2\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial\theta}V^S(r_S, \theta)$$

où $V^S(r_S, \theta)$ désigne le potentiel électrostatique dû à une charge ponctuelle q située en $r_S = b_S$, $\theta = 0$ dans l'espace-temps de Schwarzschild, récemment déterminé, sous forme analytique, par Linet [*1*]. Comme le paramètre a n'apparaît que dans le coefficient constant figurant au second membre de (2.2), la solution $\Psi(r_S, \theta)$, valable pour toute valeur de a, ne diffère de Ψ^S que par une constante complexe; soit précisément, en tenant compte de (2.1) :

$$(2.4)\qquad \Psi(r, \theta) = \frac{b - r_-}{b + ia}\Psi^S(r_S(r), \theta).$$

En principe, pour obtenir la solution générale de (1.8), il faudrait ajouter au résultat précédent une solution partout régulière de l'équation homogène. On se convainc facilement qu'il n'en existe pas, aussi bien (2.4) est-elle la solution recherchée; son expression, déduite de celle de V^S, est :

$$(2.5)\quad \Psi(r, \theta) \equiv \frac{\Phi_2}{\rho^2} = -\frac{q\sin\theta}{2\sqrt{2}(b + ia)}\frac{(r^2 - 2mr + a^2)(b^2 - 2mb + a^2)}{R^3}$$

avec la notation

$$R^2 = (r - m)^2 + (b - m)^2 - 2(r - m)(b - m)\cos\theta - (m^2 - a^2)\sin^2\theta.$$

b) On résout maintenant les équations régissant Φ_1. Récrivons-les tout d'abord en faisant figurer la fonction Ψ aux seconds membres; on obtient :

$$(2.6)\qquad \frac{\rho^2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\Phi_1}{\rho^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}(\rho\Psi),$$

$$(2.7)\qquad \frac{\Delta\rho^2\sin\theta}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi_1}{\rho^2}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\sin\theta\Psi).$$

De la première équation (2.6) on déduit, en intégrant par rapport à θ, la quantité $\frac{\Phi_1}{\rho^2}$ sous forme de la somme d'une intégrale indéfinie et d'une fonction de r à valeurs complexes, pour le moment, arbitraire; soit :

$$\frac{\Phi_1}{\rho^2} = -\sqrt{2}\int^{\theta} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\Psi)d\theta + F(r). \tag{2.8}$$

Pour déterminer $F(r)$, la méthode consiste à substituer à la dérivée $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi_1}{\rho^2}\right)$ figurant dans le premier membre de (2.7), son expression calculée à partir de (2.8). Ce faisant, on aboutit au résultat :

$$F'(r) = 0,$$

d'où il suit

$$F = \text{constante complexe} \equiv c + id. \tag{2.9}$$

Pour fixer les valeurs de ces constantes c et d on requiert des composantes $F_{\mu\nu}$ du champ électromagnétique déduites, selon (1.7), de (2.5) et (2.8) :

1) qu'elles s'annulent asymptotiquement pour $r \to \infty$;

2) qu'elles conduisent, par application du théorème de Gauss à la sphère de l'infini, à une valeur de la charge totale égale à q.

Incluant les valeurs trouvées pour c et d dans l'expression de $\frac{\Phi_1}{\rho^2}$, on aboutit finalement au résultat explicite suivant :

$$\frac{\Phi_1}{\rho^2} = -\frac{q}{2(b+ia)}\left\{\frac{(r-m)(b-m)-(m^2-a^2)\cos\theta}{R}\left[1+(r-ia\cos\theta)\frac{(r-m)-(b-m)\cos\theta}{R^2}\right] - \frac{r(b-m)-ia(r-m)}{R} + m\right\}. \tag{2.10}$$

Grâce aux formules (1.7), (2.5), (2.10), les expressions des composantes $F_{\mu\nu}$ du champ électromagnétique recherché sont maintenant complètement déterminées, cependant, vu leur longueur, nous omettrons de les écrire.

c) Bien que la connaissance du champ électromagnétique suffise, du point de vue physique, on peut cependant aller plus avant dans l'intégration des équations de Maxwell et calculer explicitement les composantes A_α du quadri-potentiel. Les équations qui les régissent sont précisément les suivantes :

$$F_{tr} = -\partial_r A_t \quad \text{et} \quad F_{t\theta} = -\partial_\theta A_t \quad \text{pour la composante } A_t, \tag{2.11}$$

$$F_{\varphi r} = -\partial_r A_\varphi \quad \text{et} \quad F_{\varphi\theta} = -\partial_\theta A_\varphi \quad \text{pour la composante } A_\varphi; \tag{2.12}$$

les composantes A_r et A_θ étant prises identiquement nulles.

Pour intégrer ces équations, on procède de la façon exposée à l'alinéa précédent. Au terme du calcul, chacune des composantes A_t, A_φ est déterminée à une constante additive près que l'on fixe en demandant que A_t

et A_φ s'annulent asymptotiquement lorsque $r \to \infty$. On arrive ainsi aux expressions suivantes :

(2.13)
$$A_t = \frac{q}{(a^2+b^2)\Sigma}\left\{(br+a^2\cos\theta)\left[m+\frac{(r-m)(b-m)-(m^2-a^2)\cos\theta}{R}\right]\right.$$
$$\left.+a^2(r-b\cos\theta)\frac{(r-m)-(b-m)\cos\theta}{R}\right\},$$

(2.14)
$$A_\varphi = -\frac{qa}{a^2+b^2}\left\{\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left[(br+a^2\cos\theta)\left[m+\frac{(r-m)(b-m)-(m^2-a^2)\cos\theta}{R}\right]\right.\right.$$
$$\left.+a^2(r-b\cos\theta)\frac{(r-m)-(b-m)\cos\theta}{R}\right]-R$$
$$\left.+(r-b\cos\theta)\frac{(r-m)-(b-m)\cos\theta}{R}-m(1-\cos\theta)\right\}.$$

On a donc ainsi obtenu, sous forme analytique, le quadripotentiel électromagnétique engendré par une charge q au repos en un point de l'axe de symétrie de l'espace-temps de Kerr.

3. CONCLUSION

Pour terminer cette étude, indiquons quelques-unes des propriétés de la solution obtenue précédemment.

— Considérant le résultat (2.13), (2.14), on note que, bien que la source soit une charge ponctuelle au repos, un observateur également au repos ne perçoit pas seulement un champ électrique, mais aussi un champ magnétique. Ce fait est lié au caractère stationnaire non statique de l'espace-temps de Kerr.

— Lorsque le point où est localisé la charge tend vers l'horizon $b \to r_+$ en suivant l'axe de symétrie, les expressions (2.13) et (2.14) tendent alors respectivement vers

(3.1)
$$A_t = \frac{qr}{\Sigma}$$

et

(3.2)
$$A_\varphi = -\frac{qra\sin^2\theta}{\Sigma}$$

c'est-à-dire vers celles des composantes du quadripotentiel électromagnétique de la solution des équations d'Einstein-Maxwell de Kerr-Newman (ou Kerr chargée) [9]. Au lieu de $b > r_+$, on aurait pu supposer initialement $b < r_-$, les expressions (2.13) et (2.14) eussent été inchangées, de même leurs limites respectives (3.1) et (3.2) lorsque $b \to r_-$. Les valeurs de b telles que $r_- < b < r_+$ sont exclues car elles correspondent à des positions où la charge ne peut être en repos.

— L'étude des fonctions (2.13), (2.14) pour toute valeur admissible des coordonnées r et θ, d'une part, l'application du théorème de Gauss, d'autre part, permettent de mettre en évidence outre, bien entendu, la charge q en $r = b$, $\theta = 0$ les charges $q' \equiv q\left(1 - \frac{2mb}{a^2 + b^2}\right)$ en $r = 2m - b$, $\theta = \pi$ et $- q'$ en $r = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire sur la circonférence singulière Γ de la métrique de Kerr.

Cette situation est à rapprocher de celle que nous avions relevée dans [4] à propos de l'espace-temps de Reissner-Nordström, lorsque la charge ponctuelle q est incluse entre l'horizon extérieur $r_+ = m + (m^2 - e^2)^{1/2}$ et la sphère $r = 2m$. Comme dans ce cas, on ne saurait ici trouver aucune solution correspondant à la seule charge q.

RÉFÉRENCES

[1] B. LINET, *J. Phys. A Math. Gen.*, t. **9**, 1976, p. 1081.
[2] J. COHEN et R. WALD, *J. Math. Phys.*, t. **12**, 1971, p. 1845.
[3] R. HANNI et R. RUFFINI, *Phys. Rev.*, t. D **8**, 1973, p. 3259.
[4] B. LÉAUTÉ et B. LINET, *Phys. Letters*, t. **58** A, 1976, p. 5.
[5] J. COHEN, L. KEGELES, C. VISHVESHWARA et R. WALD, *Ann. Phys.*, t. **82**, 1974, p. 597.
[6] R. BOYER et R. LINDQUIST, *J. Math. Phys.*, t. **8**, 1967, p. 265.
[7] E. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 566.
[8] W. KINNERSLEY, *J. Math. Phys.*, t. **10**, 1969, p. 1195.
[9] E. NEWMAN, E. COUCH, R. CHINNAPARED, A. EXTON, A. PRAKASH et R. TORRENCE, *J. Math. Phys.*, t. **6**, 1965, p. 918.

(Manuscrit reçu le 15 octobre 1976).

Note ajoutée par l'auteur lors de la correction des épreuves.

Les résultats mentionnés dans cet article ont simultanément été obtenus par :

R. M. MISRA, *Prog. Theo. Phys.*, t. **57**, 1977, p. 694.