ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

V. GEORGESCU

Sur l'existence des opérateurs d'onde dans la théorie algébrique de la diffusion

Annales de l'I. H. P., section A, tome 27, nº 1 (1977), p. 9-29

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__27_1_9_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXVII, n° 1, 1977, p. 9. *Physique théorique.*

Sur l'existence des opérateurs d'onde dans la théorie algébrique de la diffusion

par

V. GEORGESCU
Section de Physique Théorique,
Institut de Physique Atomique, P. O. Box 5206, Bucarest, Roumanie

RÉSUMÉ. — Nous montrons que l'on peut obtenir tous les résultats essentiels de la théorie algébrique de la diffusion (c'est-à-dire des opérateurs d'onde et des évolutions libres modifiées) en posant des conditions de convergence seulement sur les valeurs moyennes des observables asymptotiquement libres, donc sans aucune hypothèse sur la convergence forte de ces observables.

ABSTRACT. — We show that one can obtain all the essential results of the algebraic theory of scattering (*i. e.* wave operators and modified free evolutions) by imposing conditions of convergence only on the mean values of the asymptoticaly free observables, without any hypothesis on the strong convergence of these observables.

1. INTRODUCTION

La théorie algébrique de la diffusion est apparue comme réponse à la nécessité d'avoir une condition asymptotique qui soit vérifiée même dans le cas des collisions avec des potentiels à longue portée. En fait, assez vite après la formulation mathématique de la condition asymptotique traditionnelle (Jauch [*11*]), Dollard [7] a remarqué qu'elle ne peut pas être utilisée si $H = \overset{\circ}{H} + V$, où $\overset{\circ}{H}$ est l'extension autoadjointe habituelle du laplacien dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et V le potentiel coulombien. Plus exactement, dans ce cas, la relation :

$$w\text{-}\lim_{|\pm| \to \infty} e^{iHt} e^{-i\mathring{H}t} = 0$$

(voir Dollard [8], p. 806) montre qu'il est impossible de définir des opérateurs d'onde isométriques $\Omega_\pm$ par la formule :

$$\Omega_\pm = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{iHt} e^{-i\mathring{H}t}$$

Pour éviter cette difficulté, Dollard a donné une autre définition des opérateurs d'onde. Sa méthode a été développée et généralisée dans Amrein-Martin-Misra [2], Buslaev-Matveev [4], Alsholm [1], Hörmander [9].

L'idée de justifier d'une manière algébrique la construction de Dollard apparaît simultanément dans les travaux de Amrein-Martin-Misra [2] et de Lavine [14] (voir aussi Combes [5]). Nous allons exposer en quelques lignes leur point de vue, dans le cas plus général de la diffusion à N corps, c'est-à-dire dans le cas des systèmes à plusieurs canaux (voir Amrein-Georgescu-Martin [3] pour une discussion plus détaillée).

Supposons donné un système physique, dont l'évolution est décrite dans l'espace de Hilbert (séparable) $\mathscr{H}$ par l'hamiltonien H. Nous définirons ses canaux en suivant (partiellement) Hunziker [10], ce qui nous permettra de traiter des potentiels avec de très grandes singularités locales (qui demandent un changement de l'espace de Hilbert du système; cf. Hunziker, *loc. cit.*). Nous appellerons *canal de diffusion* (à $t = \pm\infty$) du système l'objet $(\mathscr{H}_\alpha, J_\alpha, \mathscr{A}_\alpha, P_\alpha^\pm)$, où $\mathscr{H}_\alpha$ est un espace de Hilbert (séparable), $J_\alpha : \mathscr{H}_\alpha \to \mathscr{H}$ une application linéaire continue, $\mathscr{A}_\alpha$ une algèbre de Von Neumann à commutant abélien dans $\mathscr{H}_\alpha$ et $P_\alpha^\pm$ un projecteur orthogonal dans $\mathscr{H}$ commutant avec H; ces données sont supposées satisfaire la condition : $\forall \psi \in P_\alpha^\pm \mathscr{H}$, $\forall A \in \mathscr{A}_\alpha$, la limite :

$$\lim_{t \to \pm\infty} (J_\alpha^* e^{-iHt}\psi, AJ_\alpha^* e^{-iHt}\psi) \tag{1}$$

existe; de plus, si $A = I_{\mathscr{H}_\alpha}$, alors la limite vaut $\|\psi\|^2$, *i. e.* :

$$\lim_{|t| \to \infty} \left\| J_\alpha^* e^{-iHt}\psi \right\| = \|\psi\| \tag{2}$$

Remarques. — 1) La dernière condition est inutile pour les systèmes à un canal (*i. e.* $\mathscr{H}_\alpha = \mathscr{H}$, J_α = identité). Elle est nécessaire dans le cas à plusieurs canaux pour obtenir des opérateurs d'onde isométriques [1].

---

[1] Dans la proposition 1 de [3], il faut rajouter cette condition; car dans [3] on a identifié $\mathscr{A}_\alpha$ à une algèbre sur $\mathscr{H}$ en posant $A_\alpha \equiv A_\alpha E_\alpha$ (les notations de [3]), donc à $A_\alpha = I_{\mathscr{H}_\alpha}$ correspond E_α et on doit avoir $s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} V_t^* E_\alpha V_t P_\alpha^\pm = P_\alpha^\pm$ pour obtenir $\Omega_\alpha^\pm \Omega_\alpha^{\pm *} = P_\alpha^\pm$.

2) On justifie la condition (1) de la manière suivante : supposons, pour plus de clarté, que le système est une particule en mouvement dans un champ de forces qui tend vers 0 à l'infini. Si le champ n'a pas de singularités locales trop grandes et si H n'a pas de spectre singulièrement continu, il est naturel de considérer que nous avons un seul canal, avec $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}$, $J_\alpha =$ identité de $\mathcal{H}$ et $P_\alpha^\pm = P =$ projecteur associé au spectre absolument continu de H. Si la particule est dans l'état $\psi \in P\mathcal{H}$ ($\| \psi \| = 1$), alors sa probabilité de présence dans toute région finie de l'espace devient nulle pour $t \to \pm\infty$, donc asymptotiquement la particule se trouve très loin dans l'espace, où les forces sont faibles, donc elle est pratiquement libre. Mais une particule libre est caractérisée par la constance de son impulsion. Donc si Q est le projecteur associé à l'observable élémentaire « l'impulsion de la particule se trouve dans la région (borélienne) Δ de l'espace des impulsions $\mathbb{R}^3$ », alors on s'attend à ce que la valeur moyenne de Q dans l'état ψ soit asymptotiquement ($t \to \pm\infty$) constante, c'est-à-dire il est naturel de supposer que

$$\lim_{t \to \pm\infty} (e^{-iHt}\psi, Qe^{-iHt}\psi)$$

existent. Mais il est facile de voir que ceci implique (1), avec $\mathcal{A}_\alpha =$ algèbre de Von Neumann engendrée par les impulsions (elle est maximale abélienne). Si la partie non radiale des forces est à courte portée, on peut considérer que le moment cinétique de la particule est aussi asymptotiquement constant, donc on doit prendre $\mathcal{A}_\alpha$ égale à l'algèbre de Von Neumann engendrée par les impulsions et les moments cinétiques de la particule, dans $L^2(\mathbb{R}^3)$; elle est à commutant abélien (voir Thomas [*18*] et Amrein-Georgescu-Martin [*3*], pour les différents choix possibles de $\mathcal{A}_\alpha$).

Il est clair que la condition (1) est équivalente à l'existence de la limite *faible* :

$$\omega_\alpha^\pm(A) = w\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} P_\alpha^\pm e^{iHt} J_\alpha A J_\alpha^* e^{-iHt} P_\alpha^\pm \tag{3}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}_\alpha$ $\big(\omega_\alpha^\pm(A)$ sera considéré comme opérateur dans l'espace de Hilbert $P_\alpha^\pm \mathcal{H}\big)$. La condition (2) équivaut alors à :

$$\omega_\alpha^\pm(I_{\mathcal{H}_\alpha}) = I_{P_\alpha^\pm \mathcal{H}} \tag{4}$$

On a obtenu une application $\omega_\alpha^\pm : \mathcal{A}_\alpha \to B\big(P_\alpha^\pm \mathcal{H}\big)$ linéaire, positive, ultrafaiblement et ultrafortement continue (voir [*3*]). Elle n'est, en général, pas un homomorphisme d'algèbre; plus exactement, on peut montrer que si J_α est une isométrie, alors $\omega_\alpha^\pm$ est un homomorphisme d'algèbre si et seulement si on a les relations (pour tout $A \in \mathcal{A}_\alpha$) :

$$\omega_\alpha^\pm(A) = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{iHt} J_\alpha A J_\alpha^* e^{-iHt} P_\alpha^\pm \tag{5}$$

$$0 = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} \big(1 - P_\alpha^\pm\big) e^{iHt} J_\alpha A J_\alpha^* e^{-iHt} P_\alpha^\pm \tag{6}$$

la deuxième relation étant équivalente (sous l'hypothèse (5)) à : $[\omega_\alpha^\pm(A), P_\alpha^\pm] = 0$ (²).

Dans tous les travaux précédents sur la théorie algébrique, on a pris comme axiome de départ l'existence des limites *fortes* (5) et (6). Il est facile de voir que dans ce cas $\omega_\alpha^\pm(\mathscr{A}_\alpha)$ est une algèbre de Von Neumann sur $P_\alpha^\pm\mathscr{H}$ (sous l'hypothèse J_α = isométrie). Si cette algèbre est à commutant abélien et si $\omega_\alpha^\pm$ est injectif, un théorème connu sur l'implémentation unitaire des isomorphismes d'algèbres de Von Neumann à commutant abélien, montre qu'il existe des opérateurs unitaires $\Omega_\pm^\alpha : \mathscr{H}_\alpha \to P_\alpha^\pm\mathscr{H}$ tels que :

$$\omega_\alpha^\pm(A) = \Omega_\pm^\alpha A \Omega_\pm^{\alpha *} \qquad (\forall) A \in \mathscr{A}_\alpha$$

De plus, dans [*15*] Mourre a démontré que si l'on a (5) et (6), si $\mathscr{A}_\alpha$ est maximale abélienne, J_α isométrique et $\omega_\alpha^\pm$ injectif, alors pour que $\omega_\alpha^\pm(\mathscr{A}_\alpha)$ soit maximale abélienne sur $P_\alpha^\pm\mathscr{H}$, il suffit que la limite dans (1) existe uniformément en $A \in \mathscr{A}_\alpha$ avec $\| A \| = 1$.

La connexion entre la théorie algébrique basée sur (5) et (6) et la méthode de construction des opérateurs d'onde imaginée par Dollard, est due à Amrein-Martin-Misra [*2*] (les évolutions libres modifiées). Nous renvoyons au papier cité pour des détails et à Mourre [*15*] pour l'existence des évolutions libres modifiées unitaires.

Le but de ce travail est de montrer que l'on peut obtenir tous les résultats essentiels de la théorie algébrique sans poser aucune condition de convergence *forte* sur les observables (*i. e.* des conditions de type (5) et (6)). Il est clair que les seules quantités accessibles à l'expérimentateur sont les valeurs moyennes des observables, donc c'est seulement sur ces valeurs moyennes qu'il est naturel de poser des conditions. Nous allons voir qu'il suffit d'avoir (1) et (2) avec de plus convergence uniforme en A lorsque A parcourt les projecteurs de $\mathscr{A}_\alpha$, pour obtenir des opérateurs d'onde (partiellement isométriques) et des évolutions libres modifiées unitaires. Comme nous avons vu plus haut, dans ce cas, les $\omega_\alpha^\pm$ ne sont plus des homomorphismes d'algèbres

(²) Ce résultat est dû à Combes [*5*] et se démontre comme suit : si $\omega_\alpha^\pm$ est multiplicative, alors

$$\omega_\alpha^\pm(A)^*\omega_\alpha^\pm(A) = \omega_\alpha^\pm(A^*A)$$

donc pour $\psi \in P_\alpha^\pm\mathscr{H}$:

$$\| \omega_\alpha^\pm(A)\psi \|^2 = (\psi, \omega_\alpha^\pm(A^*A)\psi) = \lim \| AJ_\alpha^* e^{-iHt}\psi \|^2 \overset{(*)}{=} \lim \| e^{iHt}J_\alpha AJ_\alpha^* e^{-iHt}\psi \|^2$$
$$\geqslant \lim\sup \| P_\alpha^\pm e^{iHt}J_\alpha AJ_\alpha^* e^{-iHt}\psi \|^2$$

Un critère connu de convergence forte implique alors

$$\omega_\alpha^\pm(A)\psi = s\text{-}\lim P_\alpha^\pm e^{iHt}J_\alpha AJ_\alpha^* e^{-iHt}\psi$$

Si on utilise l'égalité (*), on obtient (6), donc (5).

Q. E. D.

de Von Neumann, ce qui demande une méthode de démonstration entièrement nouvelle.

Remarquons encore que l'uniformité de la convergence dans (1) est une condition naturelle. Pour nous convaincre, revenons à l'exemple donné dans la remarque 2) et supposons que la convergence de $(e^{-iHt}\psi, Qe^{-iHt}\psi)$ vers sa limite $\langle Q, \psi \rangle_{as}$ n'est pas uniforme en Q (Q est une proposition du même type que dans la remarque 2)). Alors $\exists \varepsilon > 0 \ \forall T < \infty \ \exists t \geqslant T \ \exists Q$ tels que

$$|(e^{-iHt}\psi, Qe^{-iHt}\psi) - \langle Q, \psi \rangle_{as}| \geqslant \varepsilon$$

Nous pouvons supposer ε en dessus de l'erreur expérimentale (on a besoin d'un temps fini pour perfectionner suffisamment les instruments de mesure, et T peut être pris aussi grand que l'on désire) donc il est clair que, à chaque moment, on pourra faire une distinction nette entre la particule sous l'action du champ et la particule libre, en mesurant seulement son impulsion. Ceci est impossible dans le cas uniforme, car alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T < \infty \quad \forall t \geqslant T \quad \forall Q :$$
$$|(e^{-iHt}\psi, Qe^{-iHt}\psi) - \langle Q, \psi \rangle_{as}| \leqslant \varepsilon$$

et il suffit de considérer ε en dessous de l'erreur expérimentale due à l'appareil de mesure que nous possédons.

2. DISCUSSION DES RÉSULTATS

Les résultats essentiels de ce travail seront réunis dans ce paragraphe :

THÉORÈME 1. — Soient :

a) H un opérateur autoadjoint dans l'espace de Hilbert (séparable) $\mathcal{H}$.

b) Un espace de Hilbert (séparable) $\mathcal{H}_\alpha$, une application linéaire continue $J_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{H}$ et une algèbre de Von Neumann à commutant abélien $\mathcal{A}_\alpha$ dans $\mathcal{H}_\alpha$.

c) $P_\alpha^\pm$ un projecteur orthogonal dans $\mathcal{H}$; et supposons que : $\forall\psi \in P_\alpha^\pm\mathcal{H}$ la limite :

$$\lim_{t\to\pm\infty} (J_\alpha^* e^{-iHt}\psi, QJ_\alpha^* e^{-iHt}\psi) \tag{7}$$

existe uniformément en Q lorsque Q parcourt les projecteurs orthogonaux de $\mathcal{A}_\alpha$ (la limite dans (3) existera pour tout $A \in \mathcal{A}_\alpha$; $\omega_\alpha^\pm$ sera défini par la formule (3)).

Alors il existe une application linéaire continue $\Omega_\pm^\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to P_\alpha^\pm\mathcal{H}$ telle que

$$\omega_\alpha^\pm(A) = \Omega_\pm^\alpha A \Omega_\pm^{\alpha *} \qquad (\forall) A \in \mathcal{A}_\alpha \tag{8}$$

Si $\Omega_{\pm}'^{\alpha} : \mathscr{H}_\alpha \to P_\alpha^{\pm}\mathscr{H}$ est un autre opérateur vérifiant cette égalité, alors il existe $U \in \mathscr{A}'_\alpha$ unitaire tel que :

$$\Omega_{\pm}'^{\alpha} = \Omega_{\pm}^{\alpha} U \tag{9}$$

Nous avons $\lim_{t\to\pm\infty} \| J_\alpha^* e^{-iHt}\psi \| = \| \Omega_{\pm}^{\alpha *}\psi \|$. Donc $\Omega_{\pm}^{\alpha}$ est une isométrie partielle surjective si et seulement si $\forall \psi \in P_\alpha^{\pm}\mathscr{H}$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \| J_\alpha^* e^{-iHt}\psi \| = \| \psi \| \tag{10}$$

Remarque. — Il est naturel de poser encore une condition, appelée « abondance des états de diffusion » dans [3] : $\forall \varphi \in \mathscr{H}_\alpha \exists \psi \in P_\alpha^{\pm}\mathscr{H}$ tel que :

$$\lim_{t\to\pm\infty} (J_\alpha^* e^{-iHt}\psi, A J_\alpha^* e^{-iHt}\psi) \equiv (\Omega_{\pm}^{\alpha *}\psi, A\Omega_{\pm}^{\alpha *}\psi) = (\varphi, A\varphi)$$

Elle nous assure l'injectivité de $\omega_\alpha^{\pm}$. Si on suppose de plus que les limites fortes (5) et (6) existent, alors il est facile de voir que $\Omega_{\pm}^{\alpha}$ est une isométrie (*i. e.* elle est injective). Mais ceci n'est plus vrai, en général, car le domaine initial $\mathring{P}_\alpha^{\pm}\mathscr{H}_\alpha$ de $\Omega_{\pm}^{\alpha}$ (donc $\mathring{P}_\alpha^{\pm} = \Omega_{\pm}^{\alpha *}\Omega_{\pm}^{\alpha}$) peut avoir la propriété :

$$\forall \varphi \in \mathscr{H}_\alpha \exists \mathring{\varphi} \in \mathring{P}_\alpha^{\pm}\mathscr{H}_\alpha \qquad \text{tel que} \qquad \forall A \in \mathscr{A}_\alpha :$$

$$(\mathring{\varphi}, A\mathring{\varphi}) = (\varphi, A\varphi)$$

sans qu'il soit égal à $\mathscr{H}_\alpha$. C'est dans ce fait (*i. e.* $\mathring{P}_\alpha^{\pm} \neq I_{\mathscr{H}_\alpha}$ même si $\omega_\alpha^{\pm}$ est injective) que réside la différence essentielle entre le cas que nous étudions et le cas habituel, avec l'existence de (5) et (6), comme le montrera le théorème 2. Remarquons aussi que $\mathring{P}_\alpha^{\pm}$ peut dépendre du choix de $\Omega_{\pm}^{\alpha}$.

Faisons encore quelques remarques d'ordre technique. Si la condition du théorème 1 est vérifiée, alors il est facile de voir que la limite (7) existe en fait uniformément en Q lorsque Q parcourt la boule unité de $\mathscr{A}_\alpha$. De même, si $\mathscr{C}_\alpha$ est une sous-algèbre involutive de $\mathscr{A}_\alpha$, avec $I_{\mathscr{H}_\alpha} \in \mathscr{C}_\alpha$ et faiblement dense dans $\mathscr{A}_\alpha$, alors au lieu de (7) on peut demander l'existence de la limite en (7) uniformément sur la boule unité de $\mathscr{C}_\alpha$ (on utilise le théorème de densité de Kaplansky). Il est évident qu'il suffit d'avoir une forme ou autre de (7) pour des ψ appartenant à un sous-espace dense de $P_\alpha^{\pm}\mathscr{H}$. D'autre part, supposons que les conditions du théorème 1 sont vérifiées et que de plus les limites (5), (6) existent pour $A \in \mathscr{C}_\alpha$ ($\mathscr{C}_\alpha$ une sous-algèbre comme plus haut); alors les limites (5). (6) existent pour tout $A \in \mathscr{A}_\alpha$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\omega_\alpha^{\pm}(A)^*\omega_\alpha^{\pm}(A) = \omega_\alpha^{\pm}(A^*A)$, $\forall A \in \mathscr{A}_\alpha$ et il est clair que le cas général suit du cas $A = A^*$. D'après le théorème de densité de Kaplansky, il existe une suite $\{A_i\}$, $A_i = A_i^*$, $\| A_i \| \leqslant \| A \|$, $A_i \in \mathscr{C}_\alpha$ telle que $A_i \to A$ fortement. Comme les topologies forte et ultraforte coïncident sur les parties bornées, en utilisant aussi

1.8.12 de Sakai [16], il suit que $A_i \to A$ et $A_i^2 \to A^2$ ultrafortement. Mais $\omega_\alpha^\pm$ est ultrafortement continue et $\| \omega_\alpha^\pm(A_i) \| \leqslant$ const. $\| A_i \| \leqslant$ const. $\| A \|$; de $\omega_\alpha^\pm(A_i^2) = \omega_\alpha^\pm(A_i)^2$ pour tout i, le résultat désiré suit

Q. E. D.

Exemple. — Supposons $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, $P_\alpha \equiv P$ = projecteur associé au spectre absolument continu d'un opérateur autoadjoint H dans $\mathscr{H}$, $\mathscr{A}_\alpha \equiv \mathscr{A}$ algèbre de Von Neumann (maximale abélienne) engendrée par l'impulsion ($\mathscr{H}_\alpha \equiv \mathscr{H}$; $J_\alpha \equiv I_{\mathscr{H}}$). Si on suppose que l'on est dans la représentation de l'impulsion, *i. e.* $\mathscr{A} = L^\infty(\mathbb{R}^3)$, alors la condition du théorème 1 s'écrit : pour tout $\psi \in P\mathscr{H}$ (ou à un sous-espace dense) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} | e^{-iHt}\psi |$ existe dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Un cas légèrement plus compliqué correspond au choix $\mathscr{A}_\alpha \equiv \mathscr{A}$ = algèbre de Von Neumann engendrée par l'impulsion et le moment cinétique. Soit $\overset{\circ}{H}$ l'extension autoadjointe habituelle de $-\Delta(\Delta$ = laplacien); on passe dans la représentation où $\mathscr{H} = L^2((0, \infty); d\lambda; L^2(S))$ (S = sphère unité de $\mathbb{R}^3$ avec sa mesure invariante) et $\overset{\circ}{H}$ est l'opérateur de multiplication par λ (donc $\mathscr{A} = \{ \overset{\circ}{H} \}'$ est l'algèbre des opérateurs décomposables). Si $\psi \in P\mathscr{H}$ et $\| \psi \| = 1$, on note $\psi_t = e^{-iHt}\psi$, donc ψ_t est une fonction $\psi_t : (0, \infty) \to L^2(S)$. Alors la condition du théorème 1 équivaut à l'existence de la limite de la suite $\psi_t(t \to \pm\infty)$ dans la pseudo-métrique ($\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{H}$ et $\| \varphi_1 \| = \| \varphi_2 \| = 1$) :

$$\left[1 - \int_0^\infty | (\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda))_{L^2(S)} | \, d\lambda\right]^{1/2}$$

Cette forme de la condition asymptotique suit des résultats de la section 3.

Le théorème suivant montre que la condition asymptotique du théorème 1 peut être formulée à l'aide d'évolutions libres modifiées unitaires.

THÉORÈME 2. — 1) Supposons que les conditions du théorème 1 sont vérifiées, (10) inclus; on note $\overset{\circ}{P}{}_\alpha^\pm = \Omega_\pm^{\alpha *}\Omega_\pm^\alpha$ le projecteur sur le domaine initial de l'isométrie partielle $\Omega_\pm^\alpha$. Alors il existe une famille d'opérateurs unitaires $\{ T_t^\alpha \}$ dans $\mathscr{A}'_\alpha$ telle que :

$$\Omega_\pm^\alpha = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{iHt} J_\alpha T_t^\alpha \overset{\circ}{P}{}_\alpha^\pm \tag{11}$$

2) Réciproquement, on suppose donnés les objets suivants : *a*) et *b*) du théorème 1, une famille d'opérateurs unitaires $\{ T_t^\alpha \}$ dans $\mathscr{A}'_\alpha$ et un projecteur $\overset{\circ}{P}{}_\alpha^\pm$ dans $\mathscr{H}_\alpha$. Supposons que la limite (11) existe (alors $\Omega_\pm^\alpha$ est défini par (11)) et que $\forall \varphi \in \overset{\circ}{P}{}_\alpha^\pm \mathscr{H}_\alpha$:

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| J_\alpha T_t^\alpha \varphi \| = \| \varphi \| \tag{12}$$

Alors, si $P_\alpha^\pm$ est la projection orthogonale sur l'image de l'isométrie partielle $\Omega_\pm^\alpha$, les conditions ((10) inclus) du théorème 1 sont vérifiées (et les conclusions, avec le même $\Omega_\pm^\alpha$).

Les théorèmes 1 et 2 seront des conséquences des théorèmes 3, 4, démontrés dans la section 4. Ces théorèmes seront suffisamment généraux pour inclure comme cas particuliers tous les résultats précédents et aussi tous les résultats de Jauch-Misra-Gibson [*12*] (dans cet article, on étudie la convergence d'objets de la forme $e^{iHt}J_\alpha e^{-i\overset{\circ}{H}_\alpha t}\varphi$, considérés comme états sur l'algèbre $B(\mathscr{H})$, donc comme éléments du dual $B(\mathscr{H})^*$, dans la norme de $B(\mathscr{H})^*$; essentiellement ceci revient à remplacer $J_\alpha^* e^{-iHt}$ par $e^{iHt}J_\alpha e^{-i\overset{\circ}{H}_\alpha t}$ et $\mathscr{A}_\alpha$ par $B(\mathscr{H})$).

La section suivante sera consacrée à quelques propositions préliminaires sur la convergence des états vectoriels d'une algèbre de Von Neumann.

3. SUR LES ÉTATS VECTORIELS D'UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN A COMMUTANT ABÉLIEN

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Von Neumann à commutant abélien sur un espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$. Nous savons (voir Dixmier [*6*], ch. II, § 6, nº 2, théorème 2) qu'il existe un isomorphisme d'espace de Hilbert de $\mathscr{H}$ sur une intégrale directe d'espaces hilbertiens qui transforme $\mathscr{A}$ en l'algèbre de tous les opérateurs décomposables de l'intégrale directe; de plus, le théorème 3.2.2 (voir aussi 2.1.10 et 1.1.5) de Sakai [*16*] donne une représentation explicite du prédual $\mathscr{A}_*$ de $\mathscr{A}$. Plus exactement, dans les démonstrations, nous pourrons supposer que l'on a un espace borélien $\mathscr{Z}$, une mesure positive et σ-finie ν sur $\mathscr{Z}$ et un champ mesurable d'espaces hilbertiens $(\mathscr{H}(z))_{z\in\mathscr{Z}}$ sur $\mathscr{Z}$, tels que

$$\mathscr{H} = \int_{\mathscr{Z}}^{\oplus} \mathscr{H}(z)\nu(dz) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{A} = \int_{\mathscr{Z}}^{\oplus} B(\mathscr{H}(z))\nu(dz)$$

i. e. $\mathscr{A}$ = algèbre de Von Neumann de tous les opérateurs décomposables dans $\mathscr{H}$ ([3]). Nous définirons $\int_{\mathscr{Z}}^{\oplus} B(\mathscr{H}(z))_*\nu(dz)$ comme l'espace vectoriel des (classes de) champs mesurables d'opérateurs $f = (f(z))_{z\in\mathscr{Z}}$ ayant les propriétés suivantes :

1) $$f(z) \in B(\mathscr{H}(z))_* \quad \nu - \text{p. p.}$$

2) $$\int_{\mathscr{Z}} \|f(z)\|_*\nu(dz) < \infty$$

([3]) Si $\mathcal{K}$ est un espace de Hilbert, on note $B(\mathcal{K})$ l'algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{K}$ et $B(\mathcal{K})_*$ l'algèbre de Banach des opérateurs nucléaires sur $\mathcal{K}$, munie de la norme trace $\|\,.\,\|_*$. On identifie toujours le prédual de $B(\mathcal{K})$ avec $B(\mathcal{K})_*$, comme décrit dans SAKAI [*16*], théorème 1.15.3.

et nous le munissons de la norme :

$$\| f \|_* = \int_{\mathscr{Z}} \| f(z) \|_* \nu(dz)$$

Il devient un espace de Banach. A tout $f = (f(z))_{z \in \mathscr{Z}} \in \int_{\mathscr{Z}}^{\oplus} B(\mathscr{H}(z))_* \nu(dz)$ on associe la forme linéaire $\langle f, . \rangle$ sur $\mathscr{A}$ définie par :

$$A = (A(z))_{z \in \mathscr{Z}} \in \mathscr{A} \Rightarrow \langle f, A \rangle = \int_{\mathscr{Z}} \operatorname{Tr}(f(z)A(z))\nu(dz)$$

Alors $f \mapsto \langle f, . \rangle$ est une bijection isométrique de $\int_{\mathscr{Z}}^{\oplus} B(\mathscr{H}(z))_* \nu(dz)$ sur l'espace de Banach $\mathscr{A}_*$ prédual de $\mathscr{A}$; nous allons toujours identifier $\mathscr{A}_* \equiv \int_{\mathscr{Z}}^{\oplus} B(\mathscr{H}(z))_* \nu(dz)$ à l'aide de cette application.

LEMME 1. — Deux éléments φ, ψ de $\mathscr{H}$ ont la propriété :

$$(\varphi, A\varphi) = (\psi, A\psi) \qquad (\forall) A \in \mathscr{A}$$

si et seulement si il existe $U \in \mathscr{A}'$ unitaire tel que $\psi = U\varphi$.

Démonstration. — Pour tout $A = (A(z))_{z \in \mathscr{Z}} \in \mathscr{A}$ nous avons :

$$\int_{\mathscr{Z}} (\varphi(z), A(z)\varphi(z))\nu(dz) = \int_{\mathscr{Z}} (\psi(z), A(z)\psi(z))\nu(dz)$$

Soit $\{ y_1, y_2, \dots \}$ une suite de champs mesurables comme dans Dixmier [6], p. 142, remarque 1. En particulier, pour tout i la fonction $z \mapsto \| y_i(z) \|^2$ est bornée, donc $(| y_i(z) \rangle \langle y_i(z) |)_{z \in \mathscr{Z}}$ est un opérateur ([4]) dans $\mathscr{A}$ (voir Dixmier [6], p. 156, proposition 6). On applique la relation précédente à $A(z) = f(z) \, | y_i(z) \rangle \langle y_i(z) |$, avec $f \in L^{\infty}(\mathscr{Z}, \nu)$; f étant quelconque on obtient

$$| (\varphi(z), y_i(z)) |^2 = | (\psi(z), y_i(z)) |^2$$

presque partout, pour tout i. Mais i parcourt un ensemble dénombrable, donc on peut trouver $N \subset \mathscr{Z}$, $\nu(N) = 0$ tel que l'égalité précédente ait lieu pour $z \notin N$ pour tout i. D'après Dixmier [6], p. 142, la suite $\{ y_i(z) \}_{i \in \mathbb{N}}$ est dense dans $\mathscr{H}(z)$; il suit que si $z \notin N$:

$$| (\varphi(z), y) | = | (\psi(z), y) | \qquad (\forall) y \in \mathscr{H}(z)$$

En particulier $\varphi(z) = 0$ si et seulement si $\psi(z) = 0$; si $\varphi(z) \neq 0$, alors il existe $\lambda(z) \in \mathbb{C}$, $| \lambda(z) | = 1$ tel que $\psi(z) = \lambda(z)\varphi(z)$. Si on pose $\lambda(z) = 1$ pour $\varphi(z) = 0$, on a pour tout $z \in \mathscr{Z}$: $\lambda(z) \| \varphi(z) \|^2 = (\varphi(z), \psi(z))$. Donc λ est une fonction mesurable de module 1 et on peut prendre comme U l'opérateur de multiplication par λ; alors $U \in \mathscr{A}'$ est unitaire et $U\varphi = \psi$.

([4]) Si φ, ψ sont des éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{K}$, on note $| \varphi \rangle \langle \psi |$ l'opérateur $x \mapsto (\psi, x)\varphi$; le produit scalaire est linéaire dans la deuxième variable.

Remarque. — Il existe même des facteurs de type I pour lesquels ce lemme n'est pas juste (exemple construit par S. Teleman [*17*]).

Si $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, nous allons noter $s^{\mathcal{A}}_{\varphi,\psi}$ la forme linéaire $A \mapsto (\varphi, A\psi)$ sur $\mathcal{A}$. La formule :

$$(\varphi, A\psi) = \int_{\mathfrak{Z}} (\varphi(z), A(z)\psi(z))\nu(dz) = \int_{\mathfrak{Z}} \operatorname{Tr}\,(|\,\psi(z)\rangle\langle\varphi(z)\,|\,A(z))\nu(dz)$$

montre que $s^{\mathcal{A}}_{\varphi,\psi} \equiv (|\,\psi(z)\rangle\langle\varphi(z)\,|)_{z\in\mathfrak{Z}} \in \mathcal{A}_*$. Par définition :

$$\mathcal{V}^{\mathcal{A}} = \{ s^{\mathcal{A}}_{\varphi,\varphi} \mid \varphi \in \mathcal{H},\ \|\varphi\| = 1 \} \subset \mathcal{A}_*$$

constitue l'ensemble des états vectoriels de $\mathcal{A}$. Le lemme précédent montre que l'on peut identifier $\mathcal{V}^{\mathcal{A}}$ à l'espace quotient de la sphère unité $S(\mathcal{H}) = \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \|\varphi\| = 1 \}$ par la relation d'équivalence :

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{A}' \text{ unitaire} \qquad \text{tel que} \qquad \psi = U\varphi$$

Il est facile de voir que pour tout espace de Hilbert $\mathcal{K}$ et $\forall x, y \in \mathcal{K}$:

$$(13) \qquad \|\,|\,x\rangle\langle x\,| - |\,y\rangle\langle y\,|\,\|_* = [(\|x\|^2 + \|y\|^2)^2 - 4\,|(x, y)|^2]^{1/2}$$

Donc, si $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, alors :

$$\begin{aligned}\| s^{\mathcal{A}}_{\varphi,\varphi} - s^{\mathcal{A}}_{\psi,\psi} \|_* &= \int_{\mathfrak{Z}} \|\,|\,\varphi(z)\rangle\langle\varphi(z)\,| - |\,\psi(z)\rangle\langle\psi(z)\,|\,\|_*\nu(dz) \\ &= \int_{\mathfrak{Z}} [(\|\varphi(z)\|^2 + \|\psi(z)\|^2)^2 - 4\,|(\varphi(z), \psi(z))|^2]^{1/2}\nu(dz)\end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que :

$$\inf \{ \|U\varphi - V\psi\| \mid U, V \in \mathcal{A}' \text{ unitaires} \} = \left[\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 - 2\int_{\mathfrak{Z}} |(\varphi(z), \psi(z))|\,\nu(dz) \right]^{1/2}$$

Si on note cette expression par $\frac{1}{\sqrt{2}} d(\widehat{\varphi}^{\mathcal{A}}, \widehat{\psi}^{\mathcal{A}})$, un calcul facile donne :

$$\frac{1}{2}[d(\widehat{\varphi}^{\mathcal{A}}, \widehat{\psi}^{\mathcal{A}})]^2 \leqslant \| s^{\mathcal{A}}_{\varphi,\varphi} - s^{\mathcal{A}}_{\psi,\psi} \|_* \leqslant (\|\varphi\| + \|\psi\|)\frac{1}{\sqrt{2}} d(\widehat{\varphi}^{\mathcal{A}}, \widehat{\psi}^{\mathcal{A}})$$

Sur l'ensemble $\mathcal{V}^{\mathcal{A}}$ on peut considérer deux métriques : la première provient du fait que $\mathcal{V}^{\mathcal{A}}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_*$, donc on peut le munir de la métrique induite; on obtient $\| s^{\mathcal{A}}_{\varphi,\varphi} - s^{\mathcal{A}}_{\psi,\psi} \|_*$ comme distance entre $s^{\mathcal{A}}_{\varphi,\varphi}$ et $s^{\mathcal{A}}_{\psi,\psi}$. La deuxième provient de l'identification de $\mathcal{V}^{\mathcal{A}}$ avec l'espace quotient $S(\mathcal{H})/\sim$, muni de la métrique quotient $\frac{1}{\sqrt{2}} d(\widehat{\varphi}^{\mathcal{A}}, \widehat{\psi}^{\mathcal{A}})$. La relation précédente montre que les deux métriques sont équivalentes. Dorénavant, nous allons considérer $\mathcal{V}^{\mathcal{A}}$ comme un espace métrique muni de la distance (Notation : $s^{\mathcal{A}}_{\varphi,\varphi} \equiv \widehat{\varphi}^{\mathcal{A}}$ pour $\|\varphi\| = 1$)

$$(14) \qquad d(\widehat{\varphi}^{\mathcal{A}}, \widehat{\psi}^{\mathcal{A}}) = \left[1 - \int_{\mathfrak{Z}} |(\varphi(z), \psi(z))|\,\nu(dz) \right]^{1/2}$$

LEMMA 2. — $\mathscr{V}^{\mathscr{A}}$ est un espace métrique complet.

Démonstration. — Soit $\{ s^{\mathscr{A}}_{\varphi_n,\varphi_n} \}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite Cauchy dans $\mathscr{V}^{\mathscr{A}}$. $\mathscr{A}_*$ étant un espace de Banach, il existe $f \in \mathscr{A}_*$ tel que $\| s^{\mathscr{A}}_{\varphi_n,\varphi_n} - f \|_* \to 0$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{Z}} \| \, | \varphi_n(z) \rangle \langle \varphi_n(z) | - f(z) \|_* \nu(dz) = 0$$

Il existe $N \subset \mathscr{Z}$, $\nu(N) = 0$ et il existe une sous-suite $\{ s^{\mathscr{A}}_{\varphi_{n_k},\varphi_{n_k}} \}_{k\in\mathbb{N}}$ avec la propriété :

(*) si $z \notin N$ alors $\lim\limits_{k\to\infty} \| \, | \varphi_{n_k}(z) \rangle \langle \varphi_{n_k}(z) | - f(z) \|_* = 0$

Nous allons montrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{H}$, $\| \varphi \| = 1$ tel que

$$f(z) = | \varphi(z) \rangle \langle \varphi(z) | \qquad (\forall z \in \mathscr{Z}),$$

i. e. $f = s^{\mathscr{A}}_{\varphi,\varphi}$ (ce qui finit la démonstration). Si $f(z) = 0$, on pose $\varphi(z) = 0$. Si $f(z) \neq 0$, de (*) il suit que $\lim\limits_{k\to\infty} \| \varphi_{n_k}(z) \|^2 = \| f(z) \|_*$ donc

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \left| \frac{\varphi_{n_k}(z)}{\| \varphi_{n_k}(z) \|} \right\rangle \left\langle \frac{\varphi_{n_k}(z)}{\| \varphi_{n_k}(z) \|} \right| - \frac{f(z)}{\| f(z) \|_*} \right\|_* = 0$$

Ceci montre que $g(z) = f(z) \| f(z) \|_*^{-1}$ est un opérateur nucléaire, positif, de trace 1 et tel que $g(z) = g(z)^2$. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un $\psi(z) \in \mathscr{H}(z)$, $\| \psi(z) \| = 1$ tel que

$$g(z) = | \psi(z) \rangle \langle \psi(z) | ;$$

$\psi(z)$ est unique en dehors d'une phase; nous allons montrer que l'on peut choisir la phase de manière que $(\psi(z))_{z\in\mathscr{Z}}$ soit un champ mesurable de vecteurs (pour $f(z) \neq 0$, on prendra alors $\varphi(z) = \psi(z) \| f(z) \|_*^{1/2}$). En prenant un sous-ensemble borélien au lieu de $\mathscr{Z}$, dans la suite, on pourra supposer g défini et ayant les propriétés indiquées sur tout $\mathscr{Z}$.

Soit $(y_1, y_2, \dots)$ un champ mesurable de bases orthonormales (Dixmier [*6*], p. 144). On définit par induction ($p = 1, 2, \dots$) :

$$\mathscr{Z}_1 = \{ z \in \mathscr{Z} \mid \| g(z) - | y_1(z) \rangle \langle y_1(z) | \|_* < 2 \}$$

$$\mathscr{Z}_p = \{ z \in \mathscr{Z} \backslash (\mathscr{Z}_1 \cup \dots \cup \mathscr{Z}_{p-1}) \mid \| g(z) - | y_p(z) \rangle \langle y_p(z) | \|_* < 2 \}$$

Il est clair que les $\mathscr{Z}_p$ constituent une partition mesurable de $\mathscr{Z}$ (rappelons que l'on a convenu $\operatorname{Tr} g(z) = 1 \ \forall z \in \mathscr{Z}$, *i. e.* $g(z) \neq 0 \ \forall z$).

Pour $z \in \mathscr{Z}_p$, soit :

$$\psi(z) = g(z) y_p(z) \left[1 - \frac{1}{4} \| g(z) - | y_p(z) \rangle \langle y_p(z) | \|_*^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

($g(z) \in B(\mathscr{H}(z))_*$, donc $g(z) y_p(z)$ est bien défini). Il est clair alors que $z \mapsto (\psi(z), y_i(z))$ est mesurable sur $\mathscr{Z}_p$, pour tout p et tout i. Donc $(\psi(z))_{z\in\mathscr{Z}}$ est un champ mesurable de vecteurs. La relation $g(z) = | \psi(z) \rangle \langle \psi(z) |$

suit du fait que l'on sait déjà que $g(z)$ est de la forme $| x \rangle \langle x |$ pour un $x \in \mathscr{H}(z)$, $\| x \| = 1$ et un calcul facile (utilisez (13)) donne alors :

$$\psi(z) = \frac{(x, y_p(z))}{|(x, y_p(z))|} x \qquad \text{Q. E. D.}$$

PROPOSITION 1. — Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de Von Neumann à commutant abélien dans l'espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$ et $\{ \varphi_t \}_{t \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{H}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim\limits_{t \to \infty} (\varphi_t, A\varphi_t)$ (finie) existe uniformément en $A \in \mathscr{A}$ avec $\| A \| \leq 1$;

2) il existe $\varphi \in \mathscr{H}$ tel que $\mathscr{A}_*\text{-}\lim\limits_{t \to \infty} s^{\mathscr{A}}_{\varphi_t, \varphi_t} = s^{\mathscr{A}}_{\varphi,\varphi}$ (dans ce cas φ est unique à un opérateur unitaire dans $\mathscr{A}'$ près);

3) il existe une suite $\{ \xi_t \}_{t \geq 0}$ d'opérateurs unitaires dans $\mathscr{A}'$ telle que $s\text{-}\lim\limits_{t \to \infty} \xi_t \varphi_t$ existe (dans ce cas, il existe $U \in \mathscr{A}'$ unitaire tel que la limite soit $U\varphi$, φ étant choisi dans 2)).

Démonstration. — En particulier (prendre $A = I$) $\lim\limits_{t \to \infty} \| \varphi_t \|$ existe; si cette limite est 0, la proposition est évidente ($\xi_t \equiv I$, $\varphi = 0$). Si la limite est non nulle, en considérant la suite $\{ \varphi_t \| \varphi_t \|^{-1} \}_{t \geq 0}$ (pour t suffisamment grand), nous pouvons nous limiter au cas $\| \varphi_t \| = 1 (\forall t)$. Nous avons déjà démontré $1 \Leftrightarrow 2$ et $3 \Rightarrow 2$ suit de (voir (14)) :

$$d(\widehat{\varphi}_t^{\mathscr{A}}, \widehat{\varphi}^{\mathscr{A}}) \leq \| \xi_t \varphi_t - \varphi \|$$

Réciproquement, on définit :

$$\xi_t(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (\varphi_t(z), \varphi(z)) = 0 \\ \dfrac{(\varphi_t(z), \varphi(z))}{|(\varphi_t(z), \varphi(z))|} & \text{si} \quad (\varphi_t(z), \varphi(z)) \neq 0 \end{cases}$$

et on note ξ_t l'opérateur de multiplication par cette fonction; alors $\xi_t \in \mathscr{A}'$ est unitaire et :

$$\begin{aligned} \| \xi_t \varphi_t - \varphi \|^2 &= \int_{\mathfrak{X}} \| \xi_t(z)\varphi_t(z) - \varphi(z) \|^2 \nu(dz) \\ &= 2 - 2\int_{\mathfrak{X}} \mathrm{Re}\,(\xi_t(z)\varphi_t(z), \varphi(z))\nu(dz) \\ &= 2 - 2\int_{\mathfrak{X}} |(\varphi_t(z), \varphi(z))|\, \nu(dz) = 2[d(\widehat{\varphi}_t^{\mathscr{A}}, \widehat{\varphi}^{\mathscr{A}})]^2 \to 0 \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Remarques. — 1) Si $\mathscr{A}'$ est totalement atomique et si $\| \varphi_t \| = 1$ pour tout t, alors un résultat de Dell'Antonio montre que la convergence uniforme en A de la suite $(\varphi_t, A\varphi_t)$ suit de sa convergence simple.

2) Si $\mathscr{A}'$ est totalement atomique, ou si $\mathscr{A}$ est abélienne, il est clair que l'existence de la limite $\lim\limits_{t \to \infty} (\varphi_t, A\varphi_t)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$ entraîne l'existence

d'un $\varphi \in \mathscr{H}$, $\| \varphi \| = 1$ (on suppose $\| \varphi_t \| \equiv 1$) tel que la limite soit $(\varphi, A\varphi)$ (utilisez la semi-complétude de L^1 pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ dans le deuxième cas). Ceci n'est pas vrai en général (*i. e.* en général la limite doit être uniforme en A pour qu'il existe un tel φ).

LEMME 3. — Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $\{ x_n \}$, $\{ y_n \}$ deux suites d'éléments de $\mathscr{H}$ telles que $\{ | x_n \rangle \langle y_n | \}$ soit une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $B(\mathscr{H})_*$ et que, de plus, les limites (finies) :

$$\lim \| x_n \| = a \quad , \quad \lim \| y_n \| = b$$

existent.

Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $\lim | x_n \rangle \langle y_n | = 0 = | 0 \rangle \langle 0 |$.

Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Alors :

1) Les suites $\{ | x_n \rangle \langle x_n | \}$ et $\{ | y_n \rangle \langle y_n | \}$ convergent dans $B(\mathscr{H})_*$. En particulier, il existe $x, y \in \mathscr{H}$ ($\| x \| = a$, $\| y \| = b$), uniques à des phases près, tels que :

$$\lim | x_n \rangle \langle x_n | = | x \rangle \langle x | \quad , \quad \lim | y_n \rangle \langle y_n | = | y \rangle \langle y |$$

2) Supposons x, y choisis plus haut; alors il existe un unique $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim | x_n \rangle \langle y_n | = \alpha | x \rangle \langle y |$$

De plus $| \alpha | = 1$.

Démonstration. — $B(\mathscr{H})_*$ étant un espace de Banach, il existe $\rho \in B(\mathscr{H})^*$ tel que $| x_n \rangle \langle y_n | \to \rho$. Mais $B(\mathscr{H})_*$ est une algèbre de Banach involutive, donc $| x_n \rangle \langle x_n | \cdot \| y_n \|^2 \to \rho\rho^*$, $| y_n \rangle \langle y_n | \cdot \| x_n \|^2 \to \rho^*\rho$ et $\| \rho\rho^* \|_* = \| \rho^*\rho \|_* = a^2b^2$. Remarquons que si $a = 0$ ou $b = 0$, alors :

$$\rho\rho^* = \rho^*\rho = 0$$

c'est-à-dire $\rho = 0$. Dans la suite, on suppose $a \neq 0 \neq b$. Alors :

$$\lim \left| \frac{x_n}{\| x_n \|} \right\rangle \left\langle \frac{x_n}{\| x_n \|} \right| = \frac{\rho\rho^*}{a^2b^2} ; \qquad \lim \left| \frac{y_n}{\| y_n \|} \right\rangle \left\langle \frac{y_n}{\| y_n \|} \right| = \frac{\rho^*\rho}{a^2b^2}$$

Il suit que les opérateurs $a^{-2}b^{-2}\rho\rho^*$ et $a^{-2}b^{-2}\rho^*\rho$ sont nucléaires, positifs, de trace 1 et idempotents. Alors il existe $x_0, y_0 \in \mathscr{H}$, $\| x_0 \| = \| y_0 \| = 1$, uniques à des phases près, tels que :

$$a^{-2}b^{-2}\rho\rho^* = | x_0 \rangle \langle x_0 | \quad ; \quad a^{-2}b^{-2}\rho^*\rho = | y_0 \rangle \langle y_0 |$$

Donc l'opérateur $a^{-1}b^{-1}\rho$ est une isométrie partielle de domaine initial $\mathbb{C}y_0$ et de domaine final $\mathbb{C}x_0$. Il existe un unique $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$a^{-1}b^{-1}\rho = \alpha | x_0 \rangle \langle y_0 |$$

(on a : $a^{-1}b^{-1}\rho y_0 = \alpha x_0$) et il est clair que $| \alpha | = 1$. On prend $x = ax_0$ et $y = by_0$.

Soit $\varphi = (\varphi(z))_{z \in \mathscr{Z}}$ une classe de champs mesurables de vecteurs (deux champs de la classe sont égaux ν-p. p.). Nous dirons que $\mathscr{Z}_0 \subset \mathscr{Z}$ est *un support* de φ si :

1) $\mathscr{Z}_0$ est ν-mesurable et $\varphi(z) \neq 0$ ν-p. p. sur $\mathscr{Z}_0$.

2) Si $\mathscr{Z}'_0 \supset \mathscr{Z}_0$ et a la propriété 1), alors $\nu(\mathscr{Z}'_0 \backslash \mathscr{Z}_0) = 0$. Il est clair que deux supports $\mathscr{Z}_1$ et $\mathscr{Z}_2$ de φ ont la propriété $\nu(\mathscr{Z}_1 \backslash \mathscr{Z}_2) = \nu(\mathscr{Z}_2 \backslash \mathscr{Z}_1) = 0$.

Si $\varphi \in \mathscr{H} = \int_{\mathscr{Z}}^{\oplus} \mathscr{H}(z)\nu(dz)$ et $\mathscr{Z}_0$ est un support de φ, on note $\mathrm{E}(\varphi)$ l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de $\mathscr{Z}_0$; donc $\mathrm{E}(\varphi) \in \mathscr{A}'$ coïncide avec le projecteur orthogonal sur la fermeture du sous-espace $\mathscr{A}\varphi$.

PROPOSITION 2. — Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de Von Neumann à commutant abélien dans l'espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$ et $\{ \varphi_t \}$, $\{ \psi_t \}$ deux suites d'éléments de $\mathscr{H}$ telles que $\{ s^{\mathscr{A}}_{\varphi_t,\varphi_t} \}$, $\{ s^{\mathscr{A}}_{\psi_t,\psi_t} \}$ et $\{ s^{\mathscr{A}}_{\varphi_t,\psi_t} \}$ soient des suites Cauchy dans l'espace de Banach $\mathscr{A}_*$. D'après la proposition 1, on peut choisir $\varphi \in \mathscr{H}$ tel que

$$\lim_t s^{\mathscr{A}}_{\varphi_t,\varphi_t} = s^{\mathscr{A}}_{\varphi,\varphi}$$

Alors il existe $\psi \in \mathscr{H}$ tel que :

1) $$\lim_t s^{\mathscr{A}}_{\psi_t,\psi_t} = s^{\mathscr{A}}_{\psi,\psi}$$

2) $$\lim_t s^{\mathscr{A}}_{\varphi_t,\psi_t} = s^{\mathscr{A}}_{\varphi,\psi}$$

De plus la projection de ψ sur le sous-espace $\mathrm{E}(\varphi)\mathscr{H}$ (sous-espace qui ne dépend pas du choix de φ) est uniquement déterminée par ces deux propriétés.

Démonstration. — $\mathscr{A}_*$ étant un espace de Banach, il existe

$$f \in \mathscr{A}_* \equiv \int_{\mathscr{Z}}^{\oplus} \mathrm{B}(\mathscr{H}(z))_* \nu(dz)$$

tel que :

$$\| s^{\mathscr{A}}_{\varphi_t,\psi_t} - f \|_* \equiv \int_{\mathscr{Z}} \| \, | \psi_t(z) \rangle \langle \varphi_t(z) | - f(z) \|_* \nu(dz) \to 0$$

On sait (proposition 1) qu'il existe $\psi' \in \mathscr{H}$ tel que :

$$\int_{\mathscr{Z}} \| \, | \varphi_t(z) \rangle \langle \varphi_t(z) | - | \varphi(z) \rangle \langle \varphi(z) | \, \|_* \nu(dz) \to 0$$

$$\int_{\mathscr{Z}} \| \, | \psi_t(z) \rangle \langle \psi_t(z) | - | \psi'(z) \rangle \langle \psi'(z) | \, \|_* \nu(dz) \to 0$$

On peut trouver une sous-suite $\{ n \} \subset \{ t \}$ et un sous-ensemble ν-négligeable $\mathrm{N} \subset \mathscr{Z}$, tel que si $z \notin \mathrm{N}$:

$$\begin{aligned} | \psi_n(z) \rangle \langle \varphi_n(z) | &\to f(z) \\ | \varphi_n(z) \rangle \langle \varphi_n(z) | &\to | \varphi(z) \rangle \langle \varphi(z) | \\ | \psi_n(z) \rangle \langle \psi_n(z) | &\to | \psi'(z) \rangle \langle \psi'(z) | \end{aligned}$$

dans l'espace de Banach $B(\mathscr{H}(z))_*$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 3 pour chaque $z \notin N$. Sur $\{ z \in \mathscr{Z} \backslash N \mid \varphi(z) = 0 \text{ ou } \psi'(z) = 0 \}$, nous aurons aussi $f(z) = 0$; sur cet ensemble (mesurable), on pose $U(z) = 1$. Si

$$\varphi(z) \neq 0 \neq \psi'(z) \qquad \text{et} \qquad z \notin N,$$

alors on a $f(z) = \alpha(z) \mid \psi'(z) \rangle \langle \varphi(z) \mid$ pour un unique $\alpha(z) \in \mathbb{C}$, $\mid \alpha(z) \mid = 1$, donné par :

$$\alpha(z) = \frac{\langle \psi'(z), f(z)\varphi(z) \rangle}{\| \psi'(z) \|^2 \| \varphi(z) \|^2}$$

relation qui montre aussi la mesurabilité de α. Sur

$$\{ z \in \mathscr{Z} \backslash N \mid \varphi(z) \neq 0 \neq \psi'(z) \}$$

on pose $U(z) = \alpha(z)$. Alors $U \in L^\infty(\mathscr{Z}) \equiv \mathscr{A}'$, U est unitaire

$(\mid U(z) \mid = 1 \; \nu\text{-p. p.})$ et $f(z) = \mid U(z)\psi'(z) \rangle \langle \varphi(z) \mid$ pour $z \notin N$. Si $\psi = U\psi'$, alors $f = s^{\mathscr{A}}_{\varphi,\psi}$. Remarquons aussi que :

$$f(z)\varphi(z) = \| \varphi(z) \|^2 \psi(z)$$

donc $\psi(z)$ est uniquement déterminé sur tout support de φ, *i. e.* $E(\varphi)\psi$ est uniquement déterminé par φ ($E(\varphi)$ ne dépend pas du choix de φ car si φ' a la même propriété que φ, alors $\exists U \in \mathscr{A}'$ unitaire tel que $\varphi' = U\varphi$, *i. e.*

$$\varphi'(z) \equiv U(z)\varphi(z) \qquad \text{et} \qquad \mid U(z) \mid = 1 \;\; \nu\text{-p. p.})$$

Q. E. D.

COROLLAIRE. — On garde les conditions et les notations de la proposition 2. D'après la proposition 1, il existe une suite $\{ \xi_t \}$ d'opérateurs unitaires dans $\mathscr{A}'$ telle que :

$$s\text{-}\lim_t \xi_t \varphi_t = \varphi$$

Alors, avec la même suite $\{ \xi_t \}$, on a :

$$s\text{-}\lim_t E(\varphi)\xi_t\psi_t = E(\varphi)\psi$$

Démonstration. — Nous avons :

$$\begin{aligned} \| E(\varphi)\xi_t\psi_t \|^2 = \| \xi_t E(\varphi)\psi_t \|^2 &= \| E(\varphi)\psi_t \|^2 \\ &= (\psi_t, E(\varphi)\psi_t) \to (\psi, E(\varphi)\psi) = \| E(\varphi)\psi \|^2 \end{aligned}$$

car $E(\varphi) \in \mathscr{A}'$. Il suffit donc de montrer que $w\text{-}\lim_t E(\varphi)\xi_t\psi_t = E(\varphi)\psi$. Comme les vecteurs de la forme $A\varphi$ sont denses dans $E(\varphi)\mathscr{H}$, il suffit de voir que pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\lim_t (\xi_t\psi_t, A\varphi) = (\psi, A\varphi)$$

On sait que :

$$(\xi_t\psi_t, A\xi_t\varphi_t) = (\psi_t, A\varphi_t) \to (\psi, A\varphi)$$

et :

$$(\xi_t\psi_t, A\xi_t\varphi_t) - (\xi_t\psi_t, A\varphi) \to 0$$

car :

$$\| A^* \xi_t \psi_t \| \leqslant \| A \| \cdot \| \psi_t \| \leqslant \text{const.}$$

Remarque. — Dans la section suivante, nous aurons besoin du fait suivant : pour toute famille $\{ E_i \mid i \in \mathscr{I} \}$ de parties mesurables de $\mathscr{Z}$, il existe une sous-famille dénombrable $\{ E_i \mid i \in J \}$ ($J \subset \mathscr{I}$ dénombrable) telle que pour tout $i \in \mathscr{I}$, l'ensemble $E_i \backslash \left[\bigcup_{j \in J} E_j \right]$ est ν-négligeable.

Démonstration. — On note $\mathscr{B}$ la σ-algèbre des parties mesurables de $\mathscr{Z}$ et $\widehat{\mathscr{B}}$ l'algèbre de Boole complète obtenue en prenant le quotient de $\mathscr{B}$ par l'idéal des ensembles ν-négligeables (voir Kappos [*13*], ch. I.9; la complétude suit du fait que ν est σ-finie, donc on peut supposer $\nu(\mathscr{Z}) = 1$). Soit $E \mapsto \widehat{E}$ la projection canonique. Alors la borne supérieure $\widehat{E}$ de la famille $\{ \widehat{E}_i \mid i \in \mathscr{I} \}$ existe dans $\widehat{\mathscr{B}}$. D'après la démonstration du théorème 2.8, ch. II, de Kappos [*13*], il existe $J \subset \mathscr{I}$ dénombrable telle que $\widehat{E}$ soit la borne supérieure de $\{ \widehat{E}_i \mid i \in J \}$. On a $\widehat{E}_i \subset \widehat{E}$ pour tout $i \in \mathscr{I}$, donc, si $E = \bigcup_{j \in J} E_j$, alors

$$\nu(E_i \backslash E) = 0.$$

Q. E. D.

4. DÉMONSTRATION DES PRINCIPAUX THÉORÈMES

THÉORÈME 3. — Soient $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ deux espaces de Hilbert (séparables), $\mathscr{A}$ une algèbre de Von Neumann à commutant abélien dans $\mathscr{H}$ et $\{ X_t \}$ une famille d'opérateurs linéaires uniformément bornés $X_t : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ telle que pour tout $\psi \in \mathscr{K}$ la limite :

$$\lim_t \, (\psi, X_t Q X_t^* \psi)$$

existe uniformément en Q lorsque Q parcourt les projecteurs orthogonaux de $\mathscr{A}$.

Alors il existe une application linéaire continue $\Omega : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ telle que pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\omega(A) = w\text{-}\lim_t X_t A X_t^* = \Omega A \Omega^*$$

Si $\Omega' : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ est un autre opérateur vérifiant cette égalité ($\forall A \in \mathscr{A}$), alors il existe $U \in \mathscr{A}'$ unitaire tel que :

$$\Omega' = \Omega U$$

Nous avons $\| \Omega^* \psi \| = \lim_t \| X_t^* \psi \|$ ($\forall \psi \in \mathscr{K}$) donc Ω^* est une isométrie si et seulement si $\lim_t \| X_t^* \psi \| = \| \psi \|$ ($\forall \psi \in \mathscr{K}$).

Démonstration. — Pour $\varphi \in \mathcal{K}$ on note $\varphi_t = X_t^* \varphi$. Par hypothèse, si $\varphi, \psi \in \mathcal{K}$ alors la suite $\{ s^{\mathcal{A}}_{\varphi_t, \psi_t} \}$ est convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{A}_*$; nous allons noter $\omega_*(| \psi \rangle \langle \varphi |)$ sa limite (il est facile de voir, mais inutile pour la suite, que ω_* provient d'une application linéaire continue $B(\mathcal{K})_* \to \mathcal{A}_*$, dont la transposée est ω).

D'après la proposition 1, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$ il existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}$ tel que

$$\omega_*(| \varphi \rangle \langle \varphi |) = s^{\mathcal{A}}_{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}};$$

si $\tilde{\varphi}' \in \mathcal{H}$ a la même propriété, alors $\exists U \in \mathcal{A}'$ tel que $\tilde{\varphi}' = U\tilde{\varphi}$. En particulier ceci montre que $\tilde{\varphi}'$ et $\tilde{\varphi}$ ont les mêmes supports ($\tilde{\varphi}'(z) = U(z)\tilde{\varphi}(z)$ et $| U(z) | = 1$ ν-p. p.). Pour chaque $\varphi \in \mathcal{K}$ nous choisissons un support $\mathcal{Z}(\varphi)$ d'un $\tilde{\varphi}$ correspondant (à des ensembles ν-négligeables près, $\mathcal{Z}(\varphi)$ est uniquement déterminé par φ). La dernière remarque de la section 3 montre que l'on peut trouver une partie dénombrable $\{ \varphi_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ dans $\mathcal{K}$ telle que, si $\tilde{\mathcal{Z}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}(\varphi_n)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$ et tout $\tilde{\varphi} \in \mathcal{K}$ ayant la propriété $\omega_*(| \varphi \rangle \langle \varphi |) = s^{\mathcal{A}}_{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}}$, le champ $\tilde{\varphi}$ est nul ν-p. p. en dehors de $\tilde{\mathcal{Z}}$. Nous définissons $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}(\varphi_1)$, $\mathcal{Z}_{n+1} = \mathcal{Z}(\varphi_{n+1}) \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{Z}_k$ si $n \geqslant 1$. Donc $\{ \mathcal{Z}_k \}$ est une partition mesurable de $\tilde{\mathcal{Z}}$.

Il existe $\tilde{\varphi}'_n \in \mathcal{H}$ tel que $\omega_*(| \varphi_n \rangle \langle \varphi_n |) = s^{\mathcal{A}}_{\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_n}$, pour tout n. On définit la suite $\{ \tilde{\varphi}_n \}$ par induction :

1) $$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}'_1$$

2) Supposons $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$ définis. Alors $\tilde{\varphi}_{n+1}$ sera de la forme $U\tilde{\varphi}'_{n+1}$ où $U \in \mathcal{A}'$ unitaire est construit de la manière suivante : sur $\mathcal{Z}_{n+1}$ et sur $\{ z \in \mathcal{Z} \mid \tilde{\varphi}'_{n+1}(z) = 0 \}$, on pose $U(z) = 1$; si $z \in \mathcal{Z}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ et $\tilde{\varphi}'_{n+1}(z) \neq 0$, alors :

$$U(z) = \frac{\langle \tilde{\varphi}'_{n+1}(z), \omega_*(| \varphi_{n+1} \rangle \langle \varphi_k |)(z)\tilde{\varphi}_k(z) \rangle}{\| \tilde{\varphi}'_{n+1}(z) \|^2 \, \| \tilde{\varphi}_k(z) \|^2}$$

D'après la proposition 2, $\exists V_k \in \mathcal{A}'$ unitaire tel que

$$\omega_*(| \varphi_{n+1} \rangle \langle \varphi_k |) = s^{\mathcal{A}}_{\tilde{\varphi}_k, V_k \tilde{\varphi}'_{n+1}}$$

c'est-à-dire :

$$\omega_*(| \varphi_{n+1} \rangle \langle \varphi_k |)(z) = V_k(z) | \tilde{\varphi}'_{n+1}(z) \rangle \langle \tilde{\varphi}_k(z) |$$

Donc $U(z) = V_k(z)$ si $z \in \mathcal{Z}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ et $\tilde{\varphi}'_{n+1}(z) \neq 0$ ce qui montre l'unitarité de $U \in \mathcal{A}'$.

En conclusion, on a $\omega_*(|\varphi_{n+1}\rangle\langle\varphi_{n+1}|) = s^{\mathscr{A}}_{\tilde{\varphi}_{n+1},\tilde{\varphi}_{n+1}}$ et, pour $z \in \mathscr{Z}_k$:

$$\tilde{\varphi}_{n+1}(z) = \frac{\omega_*(|\varphi_{n+1}\rangle\langle\varphi_k|)(z)\tilde{\varphi}_k(z)}{\|\tilde{\varphi}_k(z)\|^2}$$

(Remarquer que le $\tilde{\varphi}_k$ construit a $\mathscr{Z}(\varphi_k)$ comme un support, donc $\tilde{\varphi}_k$ est non nul ν-p. p. sur $\mathscr{Z}_k$).

Pour $\psi \in \mathscr{K}$ quelconque, nous allons définir $\tilde{\psi} \equiv \Omega^*\psi \in \mathscr{H}$ de la manière suivante :

1) $z \notin \tilde{\mathscr{Z}} \Rightarrow \tilde{\psi}(z) = 0$

2) $z \in \mathscr{Z}_k \Rightarrow \tilde{\psi}(z) = \dfrac{\omega_*(|\psi\rangle\langle\varphi_k|)(z)\tilde{\varphi}_k(z)}{\|\tilde{\varphi}_k(z)\|^2}$

On sait alors que $\omega_*(|\psi\rangle\langle\psi|) = s^{\mathscr{A}}_{\tilde{\psi},\tilde{\psi}}$ (voir la démonstration de la proposition 2 ou le calcul précédent; tenir aussi compte du choix de $\tilde{\mathscr{Z}}$).

L'application $\Omega^* : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ ainsi définie est linéaire, car

$$\psi \mapsto \omega_*(|\psi\rangle\langle\varphi_k|)$$

est linéaire d'où il suit facilement que ν-p. p. sur $\mathscr{Z}_k$:

$$\widetilde{(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)}(z) = \lambda_1\tilde{\psi}_1(z) + \lambda_2\tilde{\psi}_2(z)$$

De plus $\|\Omega^*\psi\| = \lim \|X_t^*\psi\| \leqslant M \,.\, \|\psi\|$, où $M = \sup_t \|X_t\|$. Soit Ω l'opérateur adjoint. Nous avons $\omega_*(|\psi\rangle\langle\psi|) = s^{\mathscr{A}}_{\Omega^*\psi,\Omega^*\psi}$, d'où :

$$\langle\psi, \omega(A)\psi\rangle = \langle\Omega^*\psi, A\Omega^*\psi\rangle = \langle\psi, \Omega A\Omega^*\psi\rangle$$

pour tout $\psi \in \mathscr{K}$, c'est-à-dire : $\omega(A) = \Omega A\Omega^*$.

Soit maintenant $\Omega' : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un autre opérateur ayant la propriété précédente. Alors

$$\omega_*(|\psi\rangle\langle\psi|) = s^{\mathscr{A}}_{\Omega'^*\psi,\Omega'^*\psi} \qquad \forall\psi \in \mathscr{K}$$

Si on utilise le lemme 1, pour chaque k, on trouve une fonction mesurable $U_k : \mathscr{Z}_k \to \mathbb{C}$, $|U_k(z)| = 1$ ν-p. p. telle que :

$$(\Omega'^*\varphi_k)(z) = U_k(z)(\Omega^*\varphi_k)(z) \qquad \text{si } z \in \mathscr{Z}_k$$

On définit $U : \mathscr{Z} \to \mathbb{C}$ par : $U|\mathscr{Z}_k = U_k$ et $U|_{\mathscr{Z}\setminus\tilde{\mathscr{Z}}} = 1$; donc $U \in \mathscr{A}'$ est unitaire. Remarquons, d'autre part, que par polarisation et sesquilinéarité, pour $\varphi, \psi \in \mathscr{K}$:

$$\omega_*(|\psi\rangle\langle\varphi|) = s^{\mathscr{A}}_{\Omega'^*\psi,\Omega'^*\varphi}$$

donc

$$\varphi_*(|\psi\rangle\langle\varphi|)(z) = |(\Omega'^*\psi)(z)\rangle\langle(\Omega'^*\varphi)(z)|$$

Il suit que, si $\psi \in \mathscr{K}$, $z \in \mathscr{Z}_k$:

$$(\Omega^*\psi)(z) = \frac{\omega_*(|\,\psi\rangle\langle\,\varphi_k\,|)(z)(\Omega^*\varphi_k)(z)}{\|\,(\Omega^*\varphi_k)(z)\,\|^2}$$
$$= \frac{(\Omega'^*\psi)(z)\langle(\Omega'^*\varphi_k)(z),\ (\Omega^*\varphi_k)(z)\rangle}{\|\,(\Omega^*\varphi_k)(z)\,\|^2} = \overline{\mathrm{U}_k(z)}(\Omega'^*\psi)(z)$$

donc :

$$\Omega^*\psi = \mathrm{U}^*\Omega'^*\psi$$

Q. E. D.

THÉORÈME 4. — Soient $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ deux espaces de Hilbert (séparables), $\mathscr{A}$ une algèbre de Von Neumann à commutant abélien dans $\mathscr{H}$ et $\{\mathrm{X}_t\}$ une famille d'opérateurs linéaires uniformément bornés $\mathrm{X}_t : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout $\psi \in \mathscr{K}$ la limite :

$$\lim_t\,(\psi,\ \mathrm{X}_t\mathrm{Q}\mathrm{X}_t^*\psi)$$

existe uniformément en Q, lorsque Q parcourt les projecteurs orthogonaux de $\mathscr{A}$.

2) Il existe une famille d'opérateurs unitaires $\{\mathrm{T}_t\}$ dans $\mathscr{A}'$ telle que la limite :

$$s\text{-}\lim_t\,\mathrm{T}_t^*\mathrm{X}_t^*$$

existe.

Dans ce cas, l'opérateur :

$$\Omega = w\text{-}\lim_t\,\mathrm{X}_t\mathrm{T}_t$$

a la propriété du théorème 3, *i. e.* :

$$\omega(\mathrm{A}) = \Omega\mathrm{A}\Omega^* \qquad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{A}$$

Démonstration. — Si on a 2), alors :

$$\begin{aligned}
&|\,(\psi,\ \mathrm{X}_t\mathrm{Q}\mathrm{X}_t^*\psi) - (\Omega^*\psi,\ \mathrm{Q}\Omega^*\psi)\,| \\
&\qquad \leqslant |\,(\mathrm{T}_t^*\mathrm{X}_t^*\psi,\ \mathrm{Q}\mathrm{T}_t^*\mathrm{X}_t^*\psi) - (\mathrm{T}_t^*\mathrm{X}_t^*\psi,\ \mathrm{Q}\Omega^*\psi)\,| \\
&\qquad + |\,(\mathrm{T}_t^*\mathrm{X}_t^*\psi,\ \mathrm{Q}\Omega^*\psi) - (\Omega^*\psi,\ \mathrm{Q}\Omega^*\psi)\,| \\
&\qquad \leqslant \|\,\mathrm{X}_t^*\psi\,\|.\|\,\mathrm{T}_t^*\mathrm{X}_t^*\psi - \Omega^*\psi\,\| + \|\,\mathrm{T}_t^*\mathrm{X}_t^*\psi - \Omega^*\psi\,\|.\|\,\Omega^*\psi\,\|
\end{aligned}$$

donc nous avons 1). Dans la suite, on démontre la réciproque, en gardant les notations de la démonstration précédente.

D'après la proposition 1, il existe une suite $\{\,\xi_t^n\,\}$ d'opérateurs unitaires dans $\mathscr{A}'$ telle que :

$$s\text{-}\lim_t\,\xi_t^n\mathrm{X}_t^*\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$$

Nous allons définir T_t comme l'opérateur de multiplication par la fonction :

$$T_t(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z \notin \tilde{\mathscr{Z}} \\ \xi_t^{n*}(z) & \text{si} \quad z \in \mathscr{Z}_n \end{cases}$$

Soit E_n (resp. F) l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de $\mathscr{Z}_n$ (resp. $\mathscr{Z}\backslash\tilde{\mathscr{Z}}$). Il est clair alors que

$$T_t = \sum_n \xi_t^{n*} E_n + F$$

somme convergente dans la topologie forte.

Pour tout $\psi \in \mathscr{K}$ la relation :

$$\| T_t^* X_t^* \psi - \Omega^* \psi \|^2 = \| X_t^* \psi \|^2 + \| \Omega^* \psi \|^2 - 2\mathrm{R}e(T_t^* X_t^* \psi, \Omega^* \psi)$$

et le fait que :

$$\lim_t \| X_t^* \psi \| = \| \Omega^* \psi \|$$

montrent que la convergence forte de $T_t^* X_t^* \psi$ vers $\Omega^* \psi$ est une conséquence de :

$$\lim_t (T_t^* X_t^* \psi, \Omega^* \psi) = \| \Omega^* \psi \|^2$$

Mais $\Omega^* \psi \in \sum_n E_n \mathscr{H}$ et le sous-espace $\mathscr{A} E_n \tilde{\varphi}_n$ est dense dans $E_n \mathscr{H}$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini d'opérateurs $A_i \in \mathscr{A}$ tel que :

$$\| \Omega^* \psi - \Sigma A_i E_i \tilde{\varphi}_i \| \leqslant \varepsilon$$

(somme finie).

Il est clair qu'il suffit de montrer que :

$$\lim_t (T_t^* X_t^* \psi - \Omega^* \psi, \Sigma A_i E_i \tilde{\varphi}_i) = 0$$

et, la somme étant finie, on peut considérer qu'elle a un seul terme. Alors :

$$\begin{aligned}(T_t^* X_t^* \psi, A_i E_i \tilde{\varphi}_i) &= (X_t^* \psi, T_t A_i E_i \tilde{\varphi}_i) \\ &= (X_t^* \psi, \xi_t^{i*} A_i E_i \tilde{\varphi}_i) = (X_t^* \psi, \xi_t^{i*} A_i E_i (\tilde{\varphi}_i - \xi_t^i X_t^* \varphi_i)) \\ &+ (X_t^* \psi, \xi_t^{i*} A_i E_i \xi_t^i X_t^* \varphi_i)\end{aligned}$$

Le premier terme converge vers 0. Le deuxième vaut $(X_t^* \psi, A_i E_i X_t^* \varphi_i)$ et converge vers

$$(\Omega^* \psi, A_i E_i \Omega^* \varphi_i) = (\Omega^* \psi, A_i E_i \tilde{\varphi}_i) \qquad \text{Q. E. D.}$$

Le théorème 2 est une conséquence facile du théorème précédent si on tient compte du fait suivant : si, de plus, Ω^* est une isométrie, alors

$$\Omega = s\text{-}\lim_t X_t T_t \overset{\circ}{P},$$

où $\overset{\circ}{P}$ est la projection sur l'image de Ω^*. Réciproquement, (12) nous assure que $\Omega_\pm^\alpha$ est une isométrie partielle dont l'image est $P_\alpha^\pm \mathscr{H}$, donc (10) est juste.

REMERCIEMENTS

Je remercie MM. les Docteurs W. O. Amrein (Université de Genève) et Ph. A. Martin (E. P. F. de Lausanne) pour les nombreuses et utiles discussions que nous avons eues pendant l'achèvement de ce travail; le sujet m'a été suggéré par W. O. Amrein. Je tiens aussi à remercier M. le Professeur S. Teleman (Institut de mathématique de Bucarest) pour l'amabilité avec laquelle il a répondu à toutes mes questions sur les algèbres de Von Neumann et pour le contrexemple [17].

« *Note ajoutée à la correction des épreuves :* L'équivalence de 1) et 2) dans la proposition 1 est vraie pour une algèbre de Von Neumann quelconque (voir R. V. Kadison, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **103**, 1963, p. 304, théorème D, lemme E). Je remercie le Dr. S. Strătilă pour cette remarque. »

RÉFÉRENCES

[1] P. K. ALSHOLM, *Wave operators for long-range scattering*. Preprint, Math. Dept., Univ. of California, Berkeley, 1972.
[2] W. O. AMREIN, Ph. A. MARTIN, B. MISRA, *Helv. Phys. Acta*, t. **43**, 1970, p. 313.
[3] W. O. AMREIN, V. GEORGESCU, Ph. A. MARTIN, dans *Physical Reality and Mathematical Description*. Enz/Mehra (eds.), 1974, p. 255-276.
[4] V. S. BUSLAEV, V. B. MATVEEV, *Theor. Math. Phys.*, t. **2**, 1970, p. 266 (English translation from Russian).
[5] J. M. COMBES, *An algebraic approach to scattering theory*. Preprint, Centre de Physique Théorique, C. N. R. S., Marseille, 1969.
[6] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*. Gauthier-Villars, Paris, 1969.
[7] J. D. DOLLARD, *J. Math. Phys.*, t. **5**, 1964, p. 729.
[8] J. D. DOLLARD, *J. Math. Phys.*, t. **7**, 1966, p. 802.
[9] L. HÖRMANDER, *Math. Zeit.*, t. **146**, 1976, p. 69.
[10] HUNZIKER, *Helv. Phys. Acta*, t. **40**, 1967, p. 1052.
[11] J. M. JAUCH, *Helv. Phys. Acta*, t. **31**, 1958, p. 127 et 661.
[12] J. M. JAUCH, B. MISRA, A. G. GIBSON, *Helv. Phys. Acta*, t. **41**, 1968, p. 513.
[13] D. A. KAPPOS, *Probability algebras and stochastic spaces*. Acad. Press, New York and London, 1969.
[14] R. LAVINE, *J. Functional Analysis*, t. **5**, 1970, p. 368.
[15] E. MOURRE, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **18**, n° 3, 1970, p. 215.
[16] S. SAKAI, *C*-algebras and W*-algebras*. Springer, Berlin, 1971.
[17] S. TELEMAN, Communication privée.
[18] L. E. THOMAS, *J. Functional Analysis*, t. **15**, 1974, p. 364.

(Manuscrit reçu le 22 juillet 1976).