

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. RONVEAUX

M. C. DUMONT-LEPAGE

**Potentiels sphéroïdaux pour l'équation de Schrödinger.
II. Bornes sur le nombre d'états liés**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 26, n° 4 (1977), p. 333-342

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__26_4_333_0

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Potentiels sphéroïdaux pour l'équation de Schrödinger. II. Bornes sur le nombre d'états liés

par

A. RONVEAUX et M. C. DUMONT-LEPAGE

Département de Physique,
Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, Belgique

RÉSUMÉ. — Des bornes supérieures et inférieures au nombre d'états liés de potentiels sphéroïdaux sont établies. Ces conditions se réduisent asymptotiquement aux conditions nécessaires et suffisantes de Calogero lorsque le potentiel est central.

ABSTRACT. — Upper and lower bounds on the number of (l, m) states of a spheroidal potential are given. These bounds reduce asymptotically to the well known necessary and sufficient conditions of Calogero in the central case.

1. INTRODUCTION

1. Dans une première partie [1] nous avons examiné le *premier* état lié à énergie nulle d'un potentiel sphéroïdal prolata ou oblate de portée finie ξ_0 et obtenu une condition nécessaire et une condition suffisante pour l'obtention d'un état lié après avoir montré que le nombre d'états liés était égal au nombre de pôles de l'équation de phase associée à l'équation de Schrödinger. Cette équation de phase s'écrit en coordonnées sphéroïdales prolates :

$$\frac{dS(\xi)}{d\xi} = S'(\xi) = \frac{f^2 g_p(\xi)}{(\xi^2 - 1)W} [P_l^m(\xi) + (-1)^m Q_l^m(\xi)S(\xi)]^2, \quad (1)$$

et en coordonnées sphéroïdales oblates :

$$S'(\xi) = \frac{f^2 g_0(\xi)}{\xi(\xi^2 - 1)^{1/2} W} \left[i^{-l} P_l^m(i\sqrt{\xi^2 - 1}) + i^{l+1} (-1)^m Q_l^m(i\sqrt{\xi^2 - 1}) S(\xi) \right]^2, \quad (2)$$

utilisant les définitions suivantes :

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{2f} \quad 1 \leq \xi \leq \infty, \quad (3)$$

$$\eta = \frac{r_1 - r_2}{2f} \quad -1 \leq \eta \leq +1, \quad (4)$$

où r_1 et r_2 sont les distances respectives du point $M(\xi, \eta)$ à deux points fixes F_1 et F_2 distants d'une longueur $2f$, et où les « potentiels réduits » $g_p(\xi)$ et $g_o(\xi)$ sont liés au potentiel $V(\xi, \eta)$ par les relations

$$V(\xi, \eta) (\xi^2 - \eta^2) \equiv g_p(\xi) \quad (\text{prolate}) \quad (5)$$

$$\frac{V(\xi, \eta) \xi (\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)^{1/2}} \equiv g_o(\xi) \quad (\text{oblate}). \quad (6)$$

W est le Wronskien des fonctions de Legendre suivantes :

$$P_l^m(\xi) \quad \text{et} \quad (-1)^m Q_l^m(\xi)$$

dans le cas prolate et

$$i^{-l} P_l^m(i\sqrt{\xi^2 - 1}) \quad \text{et} \quad (-1)^m i^{l+1} Q_l^m(i\sqrt{\xi^2 - 1})$$

dans le cas oblate [1].

2. Des approximations au nombre d'états liés n_l de moment angulaire l susceptibles d'entrer dans un puits de potentiel central $V(r)$ sont connues depuis Bargmann [2] et Calogero [3] qui donnent respectivement :

$$n_l \leq \frac{I_1}{2l + 1} \quad (\text{Bargmann}), \quad (7)$$

$$n_0 \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (I_0 I_2)^{1/2} \quad (\text{Calogero}), \quad (8)$$

$$n_0 \leq 1 + \frac{2}{\pi} (I_0 I_2 - I_1^2)^{1/2} \quad (\text{Calogero}), \quad (9)$$

$$n_0 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty |V(r)|^{1/2} dr \quad (\text{Calogero}), \quad (10)$$

et

$$n_l \geq \left\{ \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \min_r \left[q(qr)^{2l}, \frac{-V(r)}{q} (qr)^{-2l} \right] dr \right\} \right\} \quad (\text{Calogero}), \quad (11)$$

ou

$$I_i = \int_0^\infty |V(r)| r^i dr, \quad q \text{ positif quelconque.} \quad (12)$$

Utilisant ces bornes, Calogero montre que, pour un potentiel central, le nombre d'états liés croît asymptotiquement comme la racine carrée de la constante de couplage v du potentiel $vV(r)$.

Dans cette deuxième partie, nous nous proposons d'étendre ces résultats aux potentiels sphéroïdaux et de donner plusieurs limites supérieures et inférieures au nombre d'états liés.

2. NOMBRE DE PÔLES D'UNE SOLUTION D'UNE ÉQUATION DE PHASE

Le nombre d'états liés est égal au nombre de pôles d'une solution d'une équation de Riccati dans un intervalle donné. Résumons brièvement des résultats plus généraux récents [4].

Étant donnée l'équation de Riccati satisfaite par la phase $S(x)$:

$$S'(x) = \frac{dS(x)}{dx} = \frac{V(x)}{p(x)W(x)} [u_1(x) + S(x)u_2(x)]^2, \quad S(a) = 0, \quad (13)$$

et les hypothèses (19), (28), (29) et (30) de [1], des bornes *supérieures* sur le nombre n de pôles de la phase $S(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ sont exprimées au moyen des intégrales suivantes :

$$U_1 : n \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sqrt{I_0 I_2}, \quad (14)$$

et

$$U_2 : n \leq 1 + \frac{2}{\pi} (I_0 I_2 - I_1^2)^{1/2} \quad (15)$$

avec

$$I_i = \int_a^b \frac{V(x)}{p(x)W(x)} u_1^i(x) u_2^{2-i}(x) dx \quad (i = 0, 1, 2). \quad (16)$$

D'autre part, imposant $f(x)$ bornée, nous obtenons la borne *inférieure* suivante

$$\left(f(x) = \frac{u_1(x)}{u_2(x)} \right) :$$

$$L : n \geq \left\{ \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{v} f(a)}{\beta} \right) + \frac{\sqrt{v}}{\pi} \int_a^b \min_x \left\{ \frac{f'(x)}{\beta}, \frac{v(x)\beta}{p(x)W(x)} u_2^2(x) \right\} dx \right\} \right\} \quad (17)$$

avec

$$V(x) = v v(x); \quad v > 0, \quad \beta \text{ positif quelconque.} \quad (18)$$

où $v(x)$ est une fonction de référence négative fixant la forme de $V(x)$ et v

est la constante de couplage. La valeur du paramètre β dépend du problème particulier traité; elle peut être prise de façon à rendre maximum le second membre de l'inégalité (17) où de façon à le simplifier.

Remarquons que la double inégalité $L \leq n \leq U$ peut être remplacée par les deux conditions équivalentes; $n \leq U$ est une condition *nécessaire* pour l'existence d'au plus n pôles et $L \leq n$ est une condition *suffisante* assurant au moins n pôles.

3. NOMBRE D'ÉTATS LIÉS D'UN POTENTIEL SPHÉROÏDAL PROLATE

A. Les bornes (14) et (15) appliquées à l'équation (1) donnent respectivement :

$$U_1 : \quad n_{l,m} \leq \frac{1}{2} + \frac{2(l-m)!}{\pi(l+m)!} f^2 \left[\left(\int_1^{\xi_0} |g_p(\xi)| (Q_l^m(\xi))^2 d\xi \right) \left(\int_1^{\xi_0} |g_p(\xi)| (P_l^m(\xi))^2 d\xi \right) \right]^{1/2} \quad (19)$$

et

$$U_2 : \quad n_{l,m} \leq 1 + \frac{2(l-m)!}{\pi(l+m)!} f^2 \left[\left(\int_1^{\xi_0} |g_p(\xi)| (Q_l^m(\xi))^2 d\xi \right) \left(\int_1^{\xi_0} |g_p(\xi)| (P_l^m(\xi))^2 d\xi \right) - \left(\int_1^{\xi_0} |g_p(\xi)| P_l^m(\xi) Q_l^m(\xi) d\xi \right)^2 \right]^{1/2} \quad (20)$$

où ξ_0 définit la « portée » du potentiel prolate partout attractif

$$\begin{aligned} (g_p(\xi) \leq 0 & \quad 1 \leq \xi \leq \xi_0 \\ = 0 & \quad \xi > \xi_0) \end{aligned}$$

Il reste à étudier l'existence de ces intégrales pour le potentiel réduit $g_p(\xi)$, sachant que les fonctions de Legendre associées au voisinage de $\xi = 1$ se comportent de la façon suivante :

$$(\xi = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \varepsilon > 0) [5] :$$

$$\begin{cases} P_l^m(\xi) \simeq \frac{(l+m)!}{m!(l-m)!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m+2} \\ Q_l^m(\xi) \simeq \frac{(-1)^m}{2} (m-1)! \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\frac{m}{2}} \end{cases} \quad (m \neq 0) \quad (21)$$

$$\begin{cases} P_l(\xi) \simeq 1 + \varepsilon P_l'(1) \\ Q_l(\xi) \simeq \frac{1}{2} 1n \frac{2}{\varepsilon} \end{cases} \quad (m = 0) \quad (22)$$

Enfin, les comportements asymptotiques sont donnés par [5] [1] :

$$\begin{cases} P_l^m(z) \simeq \frac{(2l-1)!!}{(l-m)!} z^l \\ Q_l^m(z) \simeq \frac{(-1)^m(l+m)!}{(2l+1)!!} z^{-l-1} \end{cases} \quad (23)$$

B. La borne inférieure s'obtient sans hypothèses supplémentaires et donne :

$$L : \left\{ \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{v}}{\pi} \int_1^{\xi_0} \min_{\xi} \left[\frac{1}{(\xi^2-1)(Q_l^m(\xi))^2}, |v(\xi)|(Q_l^m(\xi))^2 \right] d\xi \right\} \right\} \quad (24)$$

où

$$\begin{aligned} f^2 g_p(\xi) &= v v(\xi) \\ \beta &= \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \end{aligned} \quad (25)$$

C. *Comportement asymptotique.* — Comparons les conditions précédentes pour ξ grand avec les conditions équivalentes en coordonnées sphériques. A grande distance, ξ se comporte comme $\frac{r}{f}$ où r est la distance à l'origine (milieu de $F_1 F_2$), $(\xi^2 - 1)^{1/2} \sim \xi$ et $g_p(\xi) \sim V(\xi)\xi^2$.

Les relations (19) et (20) deviennent respectivement :

$$1^\circ \quad n_l \leq \frac{1}{2} + \frac{2f^2}{\pi(2l+1)} \left[\int^{\xi_0} |V(\xi)| \xi^{-2l} d\xi \int^{\xi_0} |V(\xi)| \xi^{2l+2} d\xi \right]^{1/2} \quad (26)$$

ou encore :

$$n_l \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi(2l+1)} \left[\int^R |V(r)| r^{-2l} dr \int^R |V(r)| r^{2l+2} dr \right]^{1/2}; \quad (27)$$

2°

$$n_l \leq 1 + \frac{2}{\pi(2l+1)} \left[\int^{\xi_0} |V(\xi)| \xi^{-2l} d\xi \int^{\xi_0} |V(\xi)| \xi^{2l+2} d\xi - \left(\int^{\xi_0} |V(\xi)| \xi d\xi \right)^2 \right]^{1/2} \quad (28)$$

ou encore :

$$n_l \leq 1 + \frac{2}{\pi(2l+1)} \left[\int^R |V(r)| r^{-2l} dr \int^R |V(r)| r^{2l+2} dr - \left(\int^R |V(r)| r dr \right)^2 \right]^{1/2}; \quad (29)$$

Les relations (27) et (29) se réduisent aux relations (8) et (9) de Calogero pour $l = 0$.

4. NOMBRE D'ÉTATS LIÉS D'UN POTENTIEL SPHÉROÏDAL OBLATE

A. L'application des bornes (14) et (15) à l'équation (2) donnent respectivement :

$$U_1 : \quad n_{l,m} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \frac{f^2(l-m)!}{(l+m)!} \left[\left(\int_1^{\xi_0} |g_0(\xi)| |Q_l^m(i\sqrt{\xi^2-1})|^2 d\xi \right) \left(\int_1^{\xi_0} |g_0(\xi)| |P_l^m(i\sqrt{\xi^2-1})|^2 d\xi \right) \right]^{1/2}, \quad (30)$$

et

$$n_{l,m} \leq 1 + \frac{2f^2(l-m)!}{\pi(l+m)!} \left\{ \left(\int_1^{\xi_0} |g_0(\xi)| |Q_l^m(i\sqrt{\xi^2-1})|^2 d\xi \right) \left(\int_1^{\xi_0} |g_0(\xi)| |P_l^m(i\sqrt{\xi^2-1})|^2 d\xi \right) - \left(\int_1^{\xi_0} |g_0(\xi)| |P_l^m(i\sqrt{\xi^2-1})Q_l^m(i\sqrt{\xi^2-1})| d\xi \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (31)$$

où ξ_0 défini la « portée » du potentiel oblate partout attractif

$$\begin{aligned} g_0(\xi) &\leq 0 & 1 \leq \xi \leq \xi_0 \\ &= 0 & \xi > \xi_0. \end{aligned}$$

L'existence des intégrales intervenant dans (30) et (31) est à vérifier dans chaque cas particulier en tenant compte de la forme de $g_0(\xi)$, du développement asymptotique de la fonction $P_l^m(i\sqrt{\xi^2-1})$ donné en (23) et en sachant que les fonctions de Legendre d'argument imaginaire n'ont aucune singularité à distance finie.

La relation (17) donne :

$$L : \quad n_{l,m} \geq \left\{ \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{v}f(1)(l-m)!}{(l+m)!(-1)^{l+1}} \right) + \frac{\sqrt{v}}{\pi} \int_1^{\xi_0} \min \left(\frac{1}{\xi\sqrt{\xi^2-1} |Q_l^m(i\sqrt{\xi^2-1})|^2}, \frac{1}{|v(\xi)| |Q_l^m(i\sqrt{\xi^2-1})|^2} \right) d\xi \right\} \right\} \quad (32)$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} f^2 g_0(\xi) = v(\xi) \\ \beta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (-1)^{l+1} \end{cases} \quad (33)$$

B. Les relations (30) et (31) se réduisent asymptotiquement aux conditions établies dans le cas sphérique.

5. APPLICATION : POTENTIEL CARRÉ EN COORDONNÉES SPHÉROÏDALES PROLATES

Le potentiel carré

$$V(\xi) \begin{cases} = -V_0 & 1 \leq \xi \leq \xi_0 \\ = 0 & \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (V_0 > 0) \quad (34)$$

peut être approché par les deux potentiels $V_1(\xi, \eta)$, $V_2(\xi, \eta)$ définis dans l'intervalle $[1, \xi_0]$ par

$$V_1(\xi, \eta) = -V_0 \frac{\xi^2}{\xi^2 - \eta^2} \leq -V_0 \leq -V_0 \left(\frac{(\xi^2 - 1)}{\xi^2 - \eta^2} \right) = V_2(\xi, \eta) \quad (35)$$

et nuls à l'extérieur de $[1, \xi_0]$. V_1 et V_2 découpent les équations radiales (ξ) et angulaires (η) obtenues par séparation de l'équation de Schrödinger en coordonnées sphéroïdales et génèrent respectivement les « potentiels réduits » suivants

$$g_1(\xi) \begin{cases} = -V_0 \xi^2 & 1 \leq \xi \leq \xi_0 \\ = 0 & \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (36)$$

$$g_2(\xi) \begin{cases} = -V_0(\xi^2 - 1) & 1 \leq \xi \leq \xi_0 \\ = 0 & \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (37)$$

Si $(-V_0)$ possède $n_{l,m}$ états liés, $V_1(\xi, \eta)$ étant plus profond en possède au moins $n_{l,m}$ et les conditions (33) (dans I), (19) et (20) (dans II) deviennent respectivement

$$B. S(l, m) \Rightarrow \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (-1)^m f^2 V_0 \int_1^{\xi_0} \xi^2 P_l^m(\xi) Q_l^m(\xi) d\xi > 1 \quad (38)$$

$$n_{l,m} \leq \frac{1}{2} + \frac{2(l-m)!}{\pi(l+m)!} f^2 V_0 \left(\int_1^{\xi_0} \xi^2 (Q_l^m(\xi))^2 d\xi \int_1^{\xi_0} \xi^2 (P_l^m(\xi))^2 d\xi \right)^{1/2} \quad (39)$$

$$n_{l,m} \leq 1 + \frac{2(l-m)!}{\pi(l+m)!} f^2 V_0 \left(\int_1^{\xi_0} \xi^2 (Q_l^m(\xi))^2 d\xi \int_1^{\xi_0} \xi^2 (P_l^m(\xi))^2 d\xi - \left(\int_1^{\xi_0} \xi^2 P_l^m(\xi) Q_l^m(\xi) d\xi \right)^2 \right)^{1/2} \quad (40)$$

Inversement, $(-V_0)$ possède $n_{l,m}$ états liés si $V_2(\xi, \eta)$ en possède $n_{l,m}$, auquel cas les conditions (34) (dans I) et (24) (dans II) donnent :

$$\frac{(l-m)! Q_l^m(\xi_0) (-1)^m f^2 V_0}{(l+m)! P_l^m(\xi_0)} \int_1^{\xi_0} (\xi^2 - 1) (P_l^m(\xi))^2 d\xi > 1$$

$$\Rightarrow (-V_0) \quad \text{possède un état lié } (l, m) \quad (41)$$

$$n_{l,m} \geq \left\{ \left\{ \frac{1}{2} + \frac{f\sqrt{V_0}}{\pi} \int_1^{\xi_0} \min \left(\frac{1}{(\xi^2 - 1)(Q_l^m(\xi))^2}, (\xi^2 - 1)(Q_l^m(\xi))^2 \right) d\xi \right\} \right\}. \quad (42)$$

L'équation radiale est exactement résoluble pour les potentiels réduits approchés $g_1(\xi)$ et $g_2(\xi)$. La condition :

$$\text{B. S.} \Leftrightarrow \left. \frac{R'_{\text{in}}(\xi)}{R_{\text{in}}(\xi)} \right|_{\xi \rightarrow \xi_0} = \left. \frac{R'_{\text{out}}(\xi)}{R_{\text{out}}(\xi)} \right|_{\xi \rightarrow \xi_0} \quad (43)$$

fixe la valeur de ξ_0 permettant au potentiel connu (V_1 ou V_2) de posséder exactement un état lié ($E = 0$). $R_{\text{in}}(\xi)$ est la solution de l'équation radiale dans $[1, \xi_0)$ et $R_{\text{out}}(\xi)$ est la solution pour $\xi > \xi_0$. Cette équation radiale

$$(\xi^2 - 1)R''(\xi) + 2\xi R'(\xi) + f^2 |g_i(\xi)| R(\xi) = 0 \quad (44)$$

$$(i = 1, 2; l = m = 0)$$

possède pour $i = 1$ les solutions bornées suivantes ($f^2 V_0 = 1$)

$$R_{\text{in}}(\xi) = 1 - \frac{1}{2}(\xi - 1) - \frac{1}{16}(\xi - 1)^2 + \frac{7}{288}(\xi - 1)^3 + \dots \quad (1 \leq \xi \leq \xi_0) \quad (45)$$

et

$$R_{\text{out}}(\xi) = \text{cotgh}^{-1}(\xi) \quad (\xi > \xi_0). \quad (46)$$

Dans ce cas, la condition (43) impose $\xi_0 \simeq 1,645$.

Les solutions radiales bornées relatives au potentiel $g_2(\xi)$ s'écrivent ($f^2 V_0 = 1$)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{in}}(\xi) = 1 - \frac{1}{3}(\xi - 1)^2 + \frac{1}{18}(\xi - 1)^3 + \dots \quad (1 \leq \xi \leq \xi_0) \quad (47) \\ R_{\text{out}}(\xi) = \text{cotgh}^{-1}(\xi) \quad (\xi > \xi_0) \quad (48) \end{array} \right.$$

et la condition (43) appliquée à ces fonctions fixe $\xi_0 \simeq 1,935$.

Ces deux valeurs ξ_0 sont compatibles avec les valeurs déduites très simplement des conditions nécessaires ou suffisantes (38) et (41) c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{BS} \Rightarrow \xi_0 > 1,4 \\ \xi_0 > 2,3 \Rightarrow \text{BS} \end{array} \right. \quad (l = m = 0; f^2 V_0 = 1) \quad (49)$$

Les relations (39), (40) et (42) permettent à présent de déduire la varia-

tion du nombre d'états liés ($n_{l,m}$) en fonction de f^2V_0 pour les valeurs calculées de ξ_0 . Pour $\xi_0 = 1,645$, (39) et (49) s'écrivent :

$$\begin{aligned} n_{00} &\leq 0,5 + 0,784 f^2V_0 \\ n_{00} &\leq 1 + 0,771 f^2V_0 \end{aligned} \quad (50)$$

tandis que la borne (42) qui se réduit à

$$n_{00} \geq \left\{ \left\{ \frac{1}{2} + \frac{f\sqrt{V_0}}{\pi} \int_1^{\xi_0} (\xi^2 - 1) (\operatorname{cotgh}^{-1} \xi)^2 d\xi \right\} \right\} \quad (51)$$

calculée en tenant compte du comportement convexe croissant de l'intégrant donne

$$n_{00} \geq \left\{ \left\{ \frac{1}{2} + 0,22236 f\sqrt{V_0} \right\} \right\}. \quad (52)$$

6. REMARQUES ET CONCLUSIONS

Il est utile de rappeler que le nombre quantique magnétique est lié au moment angulaire l par la relation

$$|m| \leq l \quad (53)$$

et il prend des valeurs soit positives soit négatives. Cependant les $P_l^{-m}(\xi)$ et $Q_l^{-m}(\xi)$ sont liés aux fonctions $P_l^m(\xi)$ et $Q_l^m(\xi)$ par :

$$\begin{cases} P_l^{-m}(\xi) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\xi) & m \text{ entier} \\ Q_l^{-m}(\xi) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} Q_l^m(\xi). \end{cases} \quad (54)$$

Les bornes (19), (20) et (24) sont donc valables quel que soit le signe du nombre quantique magnétique si m représente sa valeur absolue.

Étant données les difficultés analytiques ou numériques de calculer exactement des états liés de potentiels sphéroïdaux, il est utile de connaître *a priori* des limites supérieures ou inférieures au nombre d'états liés. L'application numérique au potentiel carré montre que des approximations raisonnables peuvent être calculées aisément. Certaines bornes dépendent linéairement de la constante de couplage v , d'autres de la racine carrée de v . La dépendance linéaire en v n'est pas bonne *a priori* pour des grandes constantes de couplage étant donné que pour des potentiels centraux le nombre total d'états liés croît asymptotiquement comme $v^{3/2}$ [6] (comme $v^{1/2}$ si l'on se fixe le nombre quantique orbital l). Une borne inférieure en $v^{1/2}$ pour les potentiels prolates et oblates est donnée par les équations (24) et (32), mais aucune borne supérieure ne peut être déduite

pour tout (l, m) . Cependant on peut toujours enfermer le potentiel sphéroïdal de portée finie dans un potentiel central plus attractif et contenant au moins autant d'états liés que le potentiel sphéroïdal et conclure à nouveau qu'asymptotiquement le nombre d'états liés croît comme la racine carrée de la constante de couplage.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. RONVEAUX, M.-C. DUMONT-LEPAGE et R. GÉRARD, Potentiels sphéroïdaux pour l'équation de Schrödinger. I. Caractérisation d'un état lié. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section A, Vol. **22**, n° 4, 1975, p. 291-304.
- Remarques* : 1. L'expression du Wronskien donnée en (43) doit être multipliée par ξ .
2. Les expressions $(l - m)!!$ et $(l + m)!!$ dans (55) et (56) doivent être remplacées par $(l - m)!$ et $(l + m)!$.
- [2] V. BARGMANN, *Oroc. Acad. Sci., U. S. A.*, t. **38**, 1952, p. 961.
- [3] F. CALOGERO, *Communications in Mathematical Physics*, vol. **1**, n° 1, 1965, p. 80-88.
- [4] A. RONVEAUX, M.-C. DUMONT-LEPAGE and J. HABAY, Bounds on the Number of Poles of the Solution of a General Riccati Equation. *S. I. A. M. Journal on Mathematical Analysis* (sous presse).
- [5] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER and R. P. SONI, *Formula and theorems for the special functions of Mathematical Physics*. Springer Verlag, Berlin, 1966.
- [6] B. SIMON, *J. Math. Phys.*, t. **10**, 1969, p. 1123.

(Manuscrit reçu le 7 avril 1976).