ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ERIC MOURRE

Applications de la méthode de Lavine au problème à trois corps

Annales de l'I. H. P., section A, tome 26, n° 3 (1977), p. 219-262
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__26_3_219_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXVI, n° 3, 1977, p. 219-262.

Section A :
Physique théorique.

Applications de la méthode de Lavine au problème à trois corps

par

Eric MOURRE (*)

Centre de Physique Théorique,
C. N. R. S., 31, chemin Joseph-Aiguier,
13274, Marseille, Cedex 2 (France)

ABSTRACT. — Les méthodes actuellement proposées dans le problème à trois corps en mécanique quantique, utilisant l'approche de Faddeev pour démontrer la complétude asymptotique, se heurtent à la présence de nouvelles singularités si l'on considère des potentiels d'interactions $v_\alpha(x_\alpha)$ entre deux particules qui décroissent moins vite que $|x_\alpha|^{-2}$, ou encore si l'on essaie de résoudre le problème lorsque la dimension de l'espace de représentation d'une particule est strictement inférieure à trois.

Dans cet article, nous développons, en en donnant des applications, une méthode qui permet de poursuivre l'étude mathématique du problème à trois corps, malgré ces singularités.

INTRODUCTION

Récemment deux articles, de J. Ginibre et M. Moulin [*1*] d'une part, de L. Thomas [*2*] d'autre part, ont reformulé l'approche du problème de la diffusion de trois particules quantiques non relativistes donnée par L. D. Faddeev [*3*], de façon à utiliser les progrès mathématiques obtenus dans le cadre de la diffusion de deux particules ; dans [*1*] les auteurs utilisent en particulier les résultats de T. Kato [*4*] et de S. Agmon [*5*], et dans [*2*], l'auteur utilise les inégalités de Sobolev [*6*] et la théorie des intégrales spectrales (voir les références citées dans [*2*]).

(*) Centre de Physique Théorique, C. N. R. S., Marseille.

Alors, la complétude asymptotique est démontrée pour des systèmes de trois particules interagissant deux à deux par des potentiels qui essentiellement décroissent comme $(1 + |x_\alpha|)^{-2-\varepsilon}$ quand $|x_\alpha|$ tend vers l'infini; $x_\alpha \in \mathrm{R}^n$ avec $n \geqslant 3$.

Néanmoins, si l'on considère des potentiels v_α qui décroissent comme $(1 + |x_\alpha|)^{-\mu}$, $\mu \in]1, 2]$, ou encore si la dimension n de l'espace de représentation d'une particule (R^n) est inférieur à 3, il apparaît de nouvelles singularités dans le noyau de la version des équations de Faddeev utilisée dans [*1*] et [*2*].

Dans cet article, nous nous proposons de développer une méthode qui permette de poursuivre l'étude mathématique du problème à trois corps malgré ces nouvelles singularités.

Nous modifions tout d'abord la version des équations de Faddeev donnée dans [*1*]. Le noyau des équations ainsi obtenues peut alors être étudiée par une adaptation de la méthode des commutateurs positifs de R. Lavine [*7*].

Dans le chapitre I, nous rappelons les résultats de Lavine concernant le problème à deux corps, et les inégalités fondamentales de sa méthode, que nous utiliserons par la suite.

Dans le chapitre II, nous rappelons les notations et l'approche du problème à trois corps, basée sur les équations de Faddeev.

Finalement, nous décrivons les équations que nous utiliserons. Le contenu du chapitre III est le suivant :

A) Nous démontrons une série de lemmes techniques.

B) Nous dérivons les inégalités essentielles concernant des opérateurs fondamentaux intervenant dans le problème à trois corps en mécanique quantique.

Nous appliquons ensuite ces inégalités pour démontrer que ces opérateurs sont uniformément bornés en z, lorsque $\operatorname{Im} z \neq 0$ et $\operatorname{Re} z$ appartient à des régions convenablement choisies, sous essentiellement l'hypothèse suivante :

$$\text{(H.1)} \qquad |\nabla v_\alpha|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + v_\alpha - z\right)^{-1} |\nabla v_\alpha|^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathrm{C}, \qquad \forall z$$

dans un voisinage complexe de l'axe positif $[0, \infty[$, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

C) Bien que les résultats ci-dessus soient valables pour des classes de potentiels plus généraux (incluant des potentiels à longue portée) et bien que les Lemmes III.10 et III.11 admettent des généralisations, nous restreignons au paragraphe III.C à étudier le noyau $\mathrm{A}(z)$ des équations proposées sous les hypothèses suivantes :

$$\text{(H.2)} \qquad \forall \alpha, \qquad \exists\, \rho_\alpha(x_\alpha) = (1 + |x_\alpha|)^{-\mu}, \qquad \mu > 1$$

tel que

i) $|v_\alpha(x_\alpha)| \leqslant d\rho_\alpha(x_\alpha)$; $|\nabla v_\alpha(x_\alpha)|^{\frac{1}{2}} \leqslant d'\rho_\alpha(x_\alpha)$

et

$$ii) \ \rho_\alpha \left(\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + v_\alpha - z \right)^{-1} \rho_\alpha \leqslant C \qquad \forall z, \operatorname{Im} z \neq 0 \ (*)$$

Nous démontrons alors que le noyau A(z) est uniformément borné au voisinage de l'axe réel, ceci quelle que soit la dimension n de l'espace de représentation d'une particule (R^n).

De plus, si $n \geqslant 3$, nous en démontrons les propriétés de continuité quand $\operatorname{Im} z \to 0^\pm$.

Dans le chapitre IV, nous démontrons la complétude asymptotique sous les hypothèses (H.2) dans le cas $n \geqslant 3$.

CHAPITRE I

MÉTHODE DES COMMUTATEURS DANS LE PROBLÈME A DEUX CORPS

Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats dont nous aurons besoin par la suite, concernant le problème à deux corps, en insistant sur les points de la méthode de Lavine [7], que nous utiliserons dans l'étude de la diffusion de trois particules.

A) Principaux résultats concernant le problème à deux corps

THÉORÈME I.1 (Lavine [7]). — *Soit* $H_0 = -\Delta$, Δ *le laplacien agissant dans* $L^2(R^n)$. *Soit* $v = v_1 + v_2$ *tel que :*

$D(H_0 + v) \subset D(H_0^{\frac{1}{2}})$ *et où* v_1 *et* v_2 *sont des fonctions de la forme suivante :*

(I.1) $$v_1 = (1 + |x|)^{-\lambda}(f_p + f_\infty), \qquad \lambda > 1$$

et

$$f_p \in L_p(R^n), \qquad p > \sup\left(\frac{n}{2}, 1\right); \qquad f_\infty \in L_\infty(R^n)$$

(I.2) v_2 *est une fonction continûment dérivable telle que :*

$$\lim_{|x| \to \infty} |v_2(x)| = 0$$

$$\left| \frac{\partial v_2}{\partial r}(x) \right| \leqslant C(1 + r)^{-\gamma}, \qquad \gamma > 1\,.$$

Alors il existe une extension self-adjointe unique telle que $D(H) \subset D(H_0^{\frac{1}{2}})$;

(*) Dans l'hypothèse (H.2), nous excluons, pour simplifier, le cas où les hamiltoniens $(2m_\alpha)^{-1}k_\alpha^2 + v_\alpha$ présentent un nombre fini d'états liés d'énergie strictement négative. Ce cas pourrait être traité en utilisant simultanément les méthodes présentées dans [*1*] et dans ce qui suit.

Les valeurs propres strictement positives de H *sont de multiplicités finies et ne peuvent s'accumuler qu'en zéro.*

De plus, soit h une fonction telle que h^2 satisfasse (I.1), *et a et b deux nombres strictement positifs tels que* $[a, b]$ *ne contienne pas de valeurs propres de* H, *alors* $h(\mathrm{H} - z)^{-1}h$ *est une famille d'opérateurs uniformément bornée pour* $z \in \mathrm{N}(a, b)$.

$$\mathrm{N}(a, b) = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ree}\, z \in [a, b],\ \mathrm{Im}\, z \neq 0 \}.$$

Remarque. — Lorsque v satisfait les conditions de ce théorème, il n'est pas exclu que l'hamiltonien H ne présente des états liés d'énergies strictement positives. Néanmoins, les cas pathologiques peuvent être exclus en supposant plus de régularité sur le potentiel ([4.*b*] [*12*]).

Le théorème ci-dessus est très général et il a permis de démontrer un certain nombre de propriétés dans le cadre de la théorie de la diffusion par des potentiels à longue portée [7] et [*13*]. Néanmoins, il présente un inconvénient pour la méthode utilisée par la suite dans le problème à trois corps : il ne donne pas de renseignements sur le comportement des opérateurs $h(\mathrm{H} - z)^{-1}h$ lorsque Ree z approche la valeur zéro. A ce sujet, nous pouvons rappeler le théorème démontré par Ginibre et Moulin [*1*] :

THÉORÈME I.2. — *Soit $n \geqslant 3$ et v satisfaisant la condition* 1.3

$$v(x) = (1 + |x|)^{-(2+\varepsilon)}(f_p + f_\infty) \tag{I.3}$$

où

$$f_p \in \mathrm{L}_p(\mathrm{R}^n), \quad p > \frac{n}{2} \qquad et \qquad f_\infty \in \mathrm{L}_\infty(\mathrm{R}^n).$$

Soit h telle que h^2 vérifie (1.3).

Alors

a) $\mathrm{H}_0 + v$ *n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres qui sont toutes de multiplicité finie et négatives.*

b) $h(\mathrm{H} - z)^{-1}h$ *sont des opérateurs uniformément bornés et uniformément Hölder continus pour*

$$z \in \mathrm{N}^+(a, b) \cup \mathrm{N}^-(a, b) \Leftrightarrow [a, b] \cap \sigma_p(\mathrm{H}) = \emptyset$$

ou

$$\mathrm{N}^\pm(a, b) = \mathrm{N}(a, b) \cap \mathbb{C}^\pm$$

$$\mathbb{C}^\pm = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \gtrless 0 \}.$$

B) Quelques rappels sur la méthode des commutateurs positifs de Lavine

DÉFINITION. — Soit h une fonction décroissante $\in \mathrm{L}^1(\mathrm{R}^+)$ et deux fois dérivable. Définissons :

$$g(r) = \int_0^r h(s)ds$$

et l'opérateur :

$$\text{(I.4)} \qquad \mathrm{A}g = g(r).\frac{x}{r}.\mathrm{P} + \mathrm{P}.\frac{x}{r}\,g(r)$$

$$x \in \mathrm{R}^n, \qquad x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \qquad r = |x|$$

et

$$\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_i, \ldots, \mathrm{P}_n) \qquad \mathrm{P}_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$x.\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}_i$$

Nous avons tout d'abord la propriété suivante pour tout $n \geqslant 1$

$$\text{(I.5)} \quad i[\mathrm{H}_0, \mathrm{A}g] \geqslant 4\sum_i \mathrm{P}_i h \mathrm{P}_i - h'' - 2(n-1)\frac{h'}{r} + 2(n-1)(n-3)\frac{(g-rh)}{r^3}$$

L'on peut trouver la démonstration de cette inégalité dans [*14*].

En utilisant cette formule, nous pouvons alors majorer

$$\mathrm{Ree}\,\langle \mathrm{H}_0\varphi \,|\, h\varphi \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ree}\,\langle \mathrm{H}_0\varphi \,|\, h\varphi \rangle &= \sum_i \mathrm{Re}\,\langle \mathrm{P}_i\varphi \,|\, h\mathrm{P}_i\varphi \rangle \\ &\quad - \mathrm{Re}\, i\sum_{i=1}^{n}\left\langle \varphi \,\middle|\, \mathrm{P}_i\frac{\partial}{\partial x_i}h - \frac{\partial}{\partial x_i}h\mathrm{P}_i\varphi \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \mathrm{P}_i\varphi \,|\, h\mathrm{P}_i\varphi \rangle - \frac{1}{2}\left\langle \varphi \,\middle|\, \frac{(n-1)}{r}h' + h''\varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Les formules (I.5) et (I.6) permettent donc de déduire :

$$\begin{aligned} \text{(I.7)} \quad 2\,\mathrm{Ree}\,\langle \mathrm{H}_0\varphi \,|\, h\varphi \rangle &\leqslant \mathrm{Im}\,\langle \mathrm{A}g\varphi \,|\, \mathrm{H}_0\varphi \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2}\langle \varphi \,|\, h''\varphi \rangle - (n-1)(n-3)(g-rh)\frac{1}{r^3} \end{aligned}$$

Proposition I.3. — a) *Si nous choisissons pour h une fonction de la forme*

$$\left(1 + \frac{r}{\mathrm{R}}\right)^{-(1+\varepsilon)}, \qquad \forall \mathrm{R} \geqslant 1$$

nous obtenons :

$$\text{(I.8)} \qquad 2\,\mathrm{Ree}\,\langle \mathrm{H}_0\varphi \,|\, h\varphi \rangle \leqslant \mathrm{Im}\,\langle \mathrm{A}g\varphi \,|\, \mathrm{H}_0\varphi \rangle \quad \textit{si} \quad n \neq 2$$

(Puisque $g - rh$ et h'' sont des fonctions positives).

b) *Si nous choisissons* $h_R = \rho_R^{1+\varepsilon}(r) = \rho^{1+\varepsilon}\left(\frac{r}{R}\right)$; $\rho(r) = (1 + r^2)^{-\frac{1}{2}}$

Nous avons la propriété suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists R_0 \qquad \textit{tel que} \qquad \forall R \geqslant R_0$$

$$(I.9) \qquad 2 \operatorname{Ree} \langle H_0\varphi \mid h_R\varphi \rangle \leqslant \operatorname{Im} \langle Ag_R\varphi \mid H_0\varphi \rangle + \varepsilon \langle \varphi \mid h_R\varphi \rangle$$

Pour la démonstration de la proposition *b*) nous renvoyons à [*7*]. Nous avons des relations analogues aux relations (1.7) et (1.9) quand on estime Ree $\langle H\varphi \mid h\varphi \rangle$ au lieu de Ree $\langle H_0\varphi \mid h\varphi \rangle$; voir [*7*]. Néanmoins, il s'avérera par la suite, dans l'étude du problème à trois corps, que les inégalités essentielles qui sont utilisées dans cet article, peuvent se déduire, d'une adaptation de inégalités se trouvant dans la proposition I.3, et de considérations intrinsèques aux problèmes à trois corps. Voir les Lemmes III.9 et III.10.

L'on peut remarquer que la méthode de Lavine s'est avérée très intéressante, principalement pour l'étude de la diffusion par des potentiels à longue portée, parce qu'elle permettait justement d'obtenir des estimations sur la résolvante d'opérateurs $H = H_0 + v$ sans passer par la traditionnelle équation résolvante :

$$(H - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1}(1 + v(H_0 - z)^{-1})^{-1}$$

Cette équation est dans ce cas sans intérêt du fait de la présence des potentiels à longue portée.

L'on peut alors penser qu'il n'est pas naturel d'essayer d'utiliser cette méthode dans le problème à trois corps, simultanément avec les équations de Faddeev, comme cela sera fait au chapitre III, puisque celles-ci sont une des versions dans ce problème de l'équation résolvante. Néanmoins, il risque d'être difficile d'adapter directement la méthode de Lavine à un processus de diffusion à plusieurs canaux. D'autre part, cette méthode s'est avérée suffisamment élégante pour obtenir des estimations déjà connues [*4*] sur la résolvante de l'hamiltonien libre pour qu'il soit intéressant de l'utiliser pour obtenir des renseignements sur le noyau des équations de Faddeev (ou d'une version modifiée), dans le problème à trois corps.

CHAPITRE II

PROBLÈME A TROIS CORPS

A) Cinématique et Notations

Soit un système de trois particules non relativistes de masse m_j, $i \in \{1, 2, 3\}$; $x_i \in R^n$ les positions de ces particules ; α, β, γ des couples d'indices : $\alpha = (i, j)$, $i \neq j$ et $x_\alpha = x_j - x_i$ les coordonnées relatives des particules i et j, et m_α leur masse réduite : $m_\alpha^{-1} = m_i^{-1} + m_j^{-1}$. Soit y_α les coordonnées relatives de la troisième particule et du centre de masse du couple α : $y_\alpha = x_k - \dfrac{m_i x_i + m_j x_j}{m_i + m_j}$ $k \notin \alpha$, et n_α la masse réduite correspondante : $n_\alpha^{-1} = m_k^{-1} + (m_i + m_j)^{-1}$. L'hamiltonien classique libre s'exprime alors sous les différentes formes :

$$\text{(II.1)} \qquad E = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{x}_i^2\right) = \frac{1}{2}(M\dot{X}^2 + m_\alpha \dot{x}_\alpha^2 + n_\alpha \dot{y}_\alpha^2), \qquad \forall\alpha$$

$$M = \sum_i m_i, \qquad X = M^{-1}\left(\sum_{i=1}^{3} m_i x_i\right)$$

Pour deux couples de particules différents α et β, il existe une matrice 2×2, A, de déterminant égal à 1, telle que :

$$\text{(II.2)} \qquad \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \end{pmatrix}$$

En raison de l'équation (II.1), si (x_α, y_α) et (x_β, y_β) vérifient (II.2), nous avons :

$$m_\alpha x_\alpha^2 + n_\alpha y_\alpha^2 = m_\beta x_\beta^2 + n_\beta x_\beta^2$$

$m_\alpha \dot{x}_\alpha$ et $n_\alpha \dot{y}_\alpha$ sont les variables conjuguées de x_α et y_α et soit k_α et P_α les opérateurs quantiques associés. Après réduction du centre de masse, l'hamiltonien quantique libre s'écrit :

$$\text{(II.3)} \qquad H_0 = \frac{1}{2m_\alpha}k_\alpha^2 + \frac{1}{2n_\alpha}P_\alpha^2, \qquad \forall\alpha$$

et nous devons avoir la relation linéaire suivante entre les couples de vecteurs (k_α, P_α)

$$\text{(II.4)} \quad \begin{pmatrix} k_\alpha \\ P_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_\alpha & 0 \\ 0 & n_\alpha \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} m_\beta^{-1} & 0 \\ 0 & n_\beta^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_\beta \\ P_\beta \end{pmatrix} = \underset{\sim}{A}\begin{pmatrix} k_\beta \\ P_\beta \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det \underset{\sim}{A}, \quad \text{puisque} \quad m_\alpha n_\alpha = m_\beta n_\beta = \frac{m_1 m_2 m_3}{M}$$

α étant fixé, si l'on considère la représentation diagonale des opérateurs self-adjoints P_α, k_α, nous avons l'espace de Hilbert $\mathscr{H} = L^2(R^{2n})$ et pour tout vecteur ϕ, $\psi \in L^2(R^{2n})$ et toute fonction $f \in L_\infty(R^{2n})$

$$\langle \phi \mid f(k_\alpha, P_\alpha)\psi \rangle = \int d^n k d^n P \bar{\phi}(k, P) f(k, P)\psi(k, P)$$

La transformation linéaire classique (II.4), a comme conséquence, si nous l'exprimons en terme d'opérateurs :

$$\left\langle \phi \,\middle|\, \begin{pmatrix} k_\beta \\ P_\beta \end{pmatrix} \psi \right\rangle = \left\langle \phi \,\middle|\, \underset{\sim}{A}^{-1} \begin{pmatrix} k_\alpha \\ P_\alpha \end{pmatrix} \psi \right\rangle = \int d^n k d^n P \bar{\phi}(k, P) \underset{\sim}{A}^{-1} \begin{pmatrix} k \\ P \end{pmatrix} \psi(k, P)$$

$$\text{(II.5)} \qquad = \int d^n k' d^n P' \bar{\phi}'(k', P') \begin{pmatrix} k' \\ P' \end{pmatrix} \psi'(k', P')$$

où ϕ' et ψ' se déduisent de ϕ et ψ par la transformation unitaire

$$U^{-1} : L^2(R^{2n}) \mapsto L^2(R^{2n}) :$$

$$\text{(II.6)} \qquad \psi' = U^{-1}\psi \; ; \quad U^{-1}\psi(k', P') = \psi\left(A \begin{pmatrix} k' \\ P' \end{pmatrix} \right)$$

La formule (II.5) nous dit donc :

$$\begin{pmatrix} k_\beta \\ P_\beta \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} k_\alpha \\ P_\alpha \end{pmatrix} U^{-1}$$

De plus, nous pouvons écrire explicitement en terme de fonction $g(k_\beta, P_\beta)$ tout opérateur $f(k_\alpha, P_\alpha)$. g est donné par :

$$\text{(II.7)} \qquad g(k, P) = U^{-1} f(k, P) U$$

Nous pouvons encore remarquer que nous avons encore la formule suivante :

$$\frac{1}{2m_\alpha} \langle \phi \mid k_\alpha \phi \rangle^2 + \frac{1}{2n_\alpha} \langle \phi \mid P_\alpha \phi \rangle^2 = \frac{1}{2m_\beta} \langle \phi \mid k_\beta \phi \rangle^2 + \frac{1}{2n_\beta} \langle \phi \mid P_\beta \phi \rangle^2$$

ainsi que des relations analogues en ce qui concerne les variables x_α, y_α.

B) Les potentiels d'interactions et l'hamiltonien

Nous supposerons que les couples de particules $(i, j) = \alpha$ admettent des potentiels d'interaction qui satisfassent la condition locale suivante :

$$\text{(II.8)} \qquad \forall \alpha, \qquad v_\alpha \in L_p(R^n) + L_\infty(R^n) \; ; \qquad p > \sup \left\{ \frac{n}{2}, 1 \right\}$$

Alors, dans ce cas, l'on définit (voir [*10*]) l'hamiltonien par l'unique opérateur self-adjoint associé à la forme quadratique Q :

$$\forall \varphi \in D(H_0^{\frac{1}{2}}), \qquad \langle \varphi \mid H\varphi \rangle = Q(\varphi)$$

$$\text{(II.9)} \quad Q(\varphi) = \frac{1}{2m_\alpha} \langle \varphi \mid k_\alpha^2 \varphi \rangle + \frac{1}{2n_\alpha} \langle \varphi \mid P_\alpha^2 \varphi \rangle + \left\langle \varphi \,\middle|\, \sum_\alpha v_\alpha \varphi \right\rangle$$

Pour une valeur a suffisamment grande, $H + a$ est alors un opérateur positif et l'on a entre les domaines :

$$\text{(II.10)} \quad D(a + H)^{\frac{1}{2}} = D(a + H_\alpha)^{\frac{1}{2}} = D(a + H_0)^{\frac{1}{2}} \subseteq D\,|\,v_\alpha\,|^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall\alpha.$$

C) Équations de Faddeev

Dans le but d'étudier les propriétés d'un tel système à trois particules, on est amené à étudier les propriétés de la résolvante $G(z)$ de l'hamiltonien H. Une des méthodes pour cette étude est celle de Faddeev. Nous suivons l'exposition de Ginibre et Moulin [*1*]. Soit :

$$\text{(II.11)} \quad \begin{gathered} -\,G(z) = (H_0 + V - z)^{-1}\,; \quad -\,G_0(z) = (H_0 - z)^{-1} \\ H_0 = \frac{1}{2m_\alpha} k_\alpha^2 + \frac{1}{2n_\alpha} P_\alpha^2\,; \quad V = \sum_\alpha v_\alpha. \end{gathered}$$

Soit :

$$\text{(II.12)} \quad T(z) = V + VG(z)V$$

Alors :

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)T(z)G_0(z)$$

Définissons :

$$\text{(II.13)} \quad M_{\alpha\beta} = v_\alpha \delta_{\alpha\beta} + v_\alpha G v_\beta$$

T s'exprime de la façon suivante :

$$\text{(II.14)} \quad T = \sum_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta}$$

et les opérateurs $M_{\alpha\beta}$ vérifient le système d'équations :

$$\text{(II.15)} \quad M_{\alpha\beta} = T_\alpha \delta_{\alpha\beta} + T_\alpha G_0 \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}$$

où T_α est définie de la façon suivante :

$$\text{(II.16)} \quad T_\alpha = v_\alpha + v_\alpha G_\alpha v_\alpha\,; \quad -\,G_\alpha = (H_\alpha - z)^{-1}\,; \quad H_\alpha = H_0 + v_\alpha$$

Pour la suite, il est intéressant de modifier le système d'équations (II.15) de la façon suivante :

Posons :

$$\text{(II.17)} \quad T'_\alpha = v_\alpha^{\frac{1}{2}} + v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha v_\alpha \ (*).$$

(*) $v_\alpha^{\frac{1}{2}}$ est défini par $\dfrac{v_\alpha}{|\,v_\alpha\,|^{\frac{1}{2}}}$ = signe de $v_\alpha \times |\,v_\alpha\,|^{\frac{1}{2}}$.

Définissons implicitement de nouveaux opérateurs $L_{\alpha\beta}$ par :

(II.18) $$M_{\alpha\beta} = |v_\alpha|^{\frac{1}{2}} L_{\alpha\beta} T'_\beta$$

L'on peut donner aux opérateurs $L_{\alpha\beta}$ une forme explicite [1]; ils vérifient le système d'équations :

(II.19) $$L_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma \neq \alpha} v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha |v_\gamma|^{\frac{1}{2}} L_{\gamma\beta}$$

G(z) s'exprime alors de la façon suivante :

(II.20) $$G = G_0 + G_0 \sum_{\alpha,\beta} |v_\alpha|^{\frac{1}{2}} L_{\alpha\beta} v_\beta^{\frac{1}{2}} G_\beta$$

Parce que

$$T'_\beta G_0 = v_\beta^{\frac{1}{2}}(G_0 + G_0 T_\beta G_0) = v_\beta^{\frac{1}{2}} G_\beta$$

Les opérateurs intervenant dans le noyau des équations (II.19) sont bien définis lorsque z est complexe, et les v_α vérifient (II.8) en raison des propriétés (II.10). Le système (II.19) s'interprète naturellement comme une équation (II.19) pour un opérateur linéaire L agissant sur $\oplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha$ où $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H} = L^2(R^{2n})$, qui a pour éléments de matrices les opérateurs $L_{\alpha\beta}$:

(II.19′) $$L = \mathbb{1} + AL$$

A étant l'opérateur sur cet espace défini par ses éléments de matrice

$$A_{\alpha\beta} = v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha |v_\beta|^{\frac{1}{2}}(1 - \delta_{\alpha\beta})$$

Il est équivalent de considérer l'équation vectorielle pour le vecteur ϕ :

$$L\phi^0 = \phi \quad \phi = \phi^0 + A\phi\,; \quad \phi^0 \text{ et } \phi \in \oplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha$$

Nous avons explicitement le système d'équations suivant :

(II.21) $$\phi_\alpha = \phi_\alpha^0 + v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} |v_\gamma|^{\frac{1}{2}} \phi_\beta\,.$$

D) **Remarques**

Ginibre et Moulin ont montré que lorsque les potentiels à deux corps, $v_\alpha \in L^p(R^n) \cap L^q(R^n)$ pour des nombres p et q satisfaisant

$$1 \leqslant q < \frac{n}{2} < p, \quad \text{et lorsque} \quad \mathbb{1} + v_\alpha^{\frac{1}{2}}\left(\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} - \lambda \pm i0\right)^{-1} |v_\alpha|^{\frac{1}{2}}$$

est inversible à l'exception d'un nombre fini de valeurs λ réelles et strictement négatives correspondant aux états liés de $h_\alpha = \frac{1}{2m_\alpha} k_\alpha^2 + v_\alpha$, alors les singularités des opérateurs $v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha \mid v_\beta \mid^{\frac{1}{2}}$, proviennent de la seule présence de ces états liés. Les conditions requises sur les potentiels v_α imposent essentiellement une décroissance de $v_\alpha(x_\alpha)$ en $(1 + \mid x_\alpha \mid)^{-(2+\varepsilon)}$ quand $\mid x_\alpha \mid$ tend vers l'infini et simultanément que la dimension n de l'espace de représentation d'une particule soit supérieure ou égale à 3. En particulier, quand sous ces conditions les hamiltoniens d'interactions des couples de particules, h_α, ne présentent pas d'états liés, les opérateurs $v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha(z) \mid v_\beta \mid^{\frac{1}{2}}$ sont des opérateurs uniformément bornés en $z \in \mathbb{C}$ compacts et continus dans la fermeture du plan complexe coupé par $[0, \infty]$. En fait, pour des potentiels v_α qui se comportent comme $(1 + \mid x_\alpha \mid)^{-\mu}$ $\mu \in]1, 2]$, de nouvelles singularités apparaissent dans l'étude du noyau des équations (II.21) qui sont reliées à la singularité que l'on observe dans les opérateurs

$$(1 + \mid x \mid)^{-\frac{\mu}{2}} g_0(\lambda \pm i0)(1 + \mid x \mid)^{-\frac{\mu}{2}}$$

lorsque $\lambda \mapsto 0$. (On peut aisément évaluer la singularité en utilisant le groupe des dilatations).

Le but de ce qui suit est de présenter une méthode qui permette de poursuivre l'étude du problème à trois corps, en tenant compte de ces nouvelles singularités.

E) Modifications des équations de Ginibre et Moulin

Nous avions donc à étudier le système d'équations suivantes pour

$$\phi \text{ et } \phi^0 \in \oplus_\alpha \mathscr{H}_\alpha$$

$$\phi_\alpha = \phi_\alpha^0 + v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \mid v_\beta \mid^{\frac{1}{2}} \phi_\beta \tag{II.21}$$

Soit $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. Nous allons nous intéresser aux valeurs complexes :

$$z \in N_{a,\delta}$$

où

$$N_{a,\delta} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in [a - \delta, a + \delta], \quad \operatorname{Im} z \neq 0 \}$$

avec $a > a_0 > 0$; δ étant un nombre actuellement arbitraire, mais qui sera fixé par la suite petit mais non nul.

Rappelons que $-\, G_\alpha(z) = \left(\frac{1}{2m_\alpha} k_\alpha^2 + \frac{1}{2n_\alpha} P_\alpha^2 + v_\alpha - z \right)^{-1}$ où k_α et P_α sont les opérateurs conjugués respectivement de x_α et y_α.

Soit une fonction f de R dans R, indéfiniment dérivable, qui prend la valeur 1 pour $\lambda \in [a - 2\delta, a + 2\delta]$ et 0 sur $[-\infty, a - 3\delta] \cup [a + 3\delta, +\infty[$. L'on peut supposer de plus que $\sqrt[m]{f}$, $\sqrt[m]{1 - f}$ existent et possèdent les mêmes propriétés de différentiabilité.

Définissons les opérateurs F_α et F'_α sur $L^2(R^{2n})$ par :

$$\text{(II.22)}\quad F_\alpha^2 = f\left(\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}\right) \otimes \mathbb{1}_{k_\alpha}\,; \quad F_\alpha'^2 = (1-f)\left(\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}\right) \otimes \mathbb{1}_{k_\alpha} = \mathbb{1} - F_\alpha^2$$

Les opérateurs F_α et F'_α commutent avec x_α, k_α, P_α et donc avec v_α, et $G_\alpha(z)$.

Remarque. — Nous avons choisi pour définir ces opérateurs F_α^2 des fonctions suffisamment régulières ainsi que leurs racines carrées, et non des fonctions caractéristiques des intervalles $[a - 2\delta, a + 2\delta]$, pour démontrer les Lemmes III.1 et III.3.

Modifions le système d'équation (II.21) de la façon suivante :

Définissons ϕ_{α_0} et ϕ_{α_1} par :

$$\text{(II.23)}\quad \begin{aligned} \phi_{\alpha_0} &= F'_\alpha \phi^0_{\alpha_0} + v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha G_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} |v_\beta|^{\frac{1}{2}} \phi_\beta \\ \phi_{\alpha_1} &= F_\alpha \phi^0_{\alpha_1} + F_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} |v_\beta|^{\frac{1}{2}} \phi_\beta \end{aligned}$$

En imposant de plus la relation :

$$\text{(II.24)}\quad F_\alpha'^2 \phi^0_{\alpha_0} + F_\alpha^2 v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha \phi^0_{\alpha_1} = \phi^0_\alpha$$

Il s'ensuit que la composante α de la solution ϕ de l'équation (II.21) s'écrit :

$$\text{(II.25)}\quad \phi_\alpha = F'_\alpha \phi_{\alpha_0} + F_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha \phi_{\alpha_1}$$

Nous obtenons un système d'équation pour les vecteurs ϕ_{α_i}, $i = 0$ ou 1, en utilisant cette dernière relation dans les formules (II.23) :

$$\text{(II.26)}\quad \begin{aligned} \phi_{\alpha_0} &= F'_\alpha \phi^0_{\alpha_0} + v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha G_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} |v_\beta|^{\frac{1}{2}} (F'_\beta \phi_{\beta_0} + v_\beta^{\frac{1}{2}} G_\beta F_\beta \phi_{\beta_1}) \\ \phi_{\alpha_1} &= F_\alpha \phi^0_{\alpha_1} + F_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} |v_\beta|^{\frac{1}{2}} (F'_\beta \phi_{\beta_0} + v_\beta^{\frac{1}{2}} G_\beta F_\beta \phi_{\beta_1}) \end{aligned}$$

Pour interpréter ces équations, définissons les espaces de Hilbert suivants :

$$\text{(II.27)}\quad \begin{aligned} \bar{\mathscr{H}} &= \oplus_\alpha (\mathscr{H}_{\alpha_0} \oplus \mathscr{H}_{\alpha_1})\,; \quad \bar{\mathscr{H}}' = \oplus_\alpha (\mathscr{H}_{\alpha_0} \oplus \mathscr{H}'_{\alpha_1}) \\ \mathscr{H}_{\alpha_0} &= \mathscr{H} = L^2(R^{2n}) \\ \mathscr{H}_{\alpha_1} &= \left\{ \psi \in \mathscr{H} \;\middle|\; \int f_\alpha^2(x) |\psi(x)|^2 \, dx^{2n} < \infty \right\} \\ \mathscr{H}'_{\alpha_1} &= \textit{idem} \text{ avec } f'_\alpha(x) \text{ remplaçant } f_\alpha(x) \end{aligned}$$

$$f_\alpha^{-1} = \sum_{\beta\neq\alpha} (1 + |x_\beta|)^{-(\frac{1}{2}+\delta)}\,; \quad f_\alpha'^{-1} = f_\alpha^{-1} + (1 + |x_\alpha|)^{-c} \qquad \delta > 0, \quad c > 1$$

Nous avons alors à étudier les propriétés des opérateurs A_{α_i,β_i} en tant qu'opérateurs de $\mathscr{H}_{\beta_i}$ dans $\mathscr{H}_{\alpha_i}$.

$$\text{(II.28)} \quad \begin{aligned} &1)\ A_{\alpha_0,\beta_0} = v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha G_\alpha \mid v_\beta \mid^{\frac{1}{2}} F'_\beta \\ &2)\ A_{\alpha_0,\beta_1} = v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha G_\alpha v_\beta G_\beta F_\beta \\ &3)\ A_{\alpha_1,\beta_0} = F_\alpha \mid v_\beta \mid^{\frac{1}{2}} F'_\beta \\ &4)\ A_{\alpha_1,\beta_1} = F_\alpha v_\beta G_\beta F_\beta \end{aligned} \qquad \boxed{\beta \neq \alpha}$$

CHAPITRE III

ÉTUDES DES OPÉRATEURS $A_{\alpha_i,\beta_i}(z)$, AGISSANT DE $\mathscr{H}_{\beta_i}$ DANS $\mathscr{H}_{\alpha_i}$

A) Lemmes préliminaires

Pour l'étude de ces opérateurs, nous aurons besoin des Lemmes suivants.

Nous avons choisi des fonctions suffisamment régulières dans la définition des opérateurs F_α et F'_α, pour qu'ils satisfassent les conclusions des Lemmes III.1 et III.3. Le Lemme III.2 utilise les propriétés de la transformation $(k_\alpha, P_\alpha) \mapsto (k_\beta, P_\beta)$. Les Lemmes III.3, III.4, utilisent les propriétés de Lemmes précédents pour démontrer certaines caractéristiques d'opérateurs intervenant dans les opérateurs A_{α_i,β_i}. Ensuite, les Lemmes III.5, III.6, III.7, sont des adaptations de certains résultats de Lavine [7], dont nous aurons besoin par la suite pour poursuivre par une méthode analogue à la sienne l'étude des opérateurs A_{α_i,β_i}. On doit ajouter que les Lemmes III.2 et III.4 reposent sur le choix de valeurs δ suffisamment petites, intervenant dans la définition des opérateurs F_α.

Signalons que d'autres propriétés apparaissant quand δ tend vers zéro, grâce à l'introduction d'opérateurs semblables aux $F_\alpha(\delta)$, seront la base de la démonstration de la continuité, des opérateurs intervenant dans les théorèmes III.3, III.4, lorsque z approche l'axe réel.

LEMME III.1. — *Soit f une fonction suffisamment dérivable, à support compact dans R^n. Soit F_α l'opérateur agissant dans $L(R^{2n})$ défini par $f(P_\alpha) \otimes \mathbb{1}_{k_\alpha}$, c'est-à-dire :*

$$F_\alpha \psi(k_\alpha, P_\alpha) = f(P_\alpha).\psi(k_\alpha, P_\alpha)$$

Alors les opérateurs A :

$$A = (1 + \mid x_\beta \mid)^\lambda F_\alpha (1 + \mid x_\beta \mid)^{-\lambda}$$

sont bornés de $L^p(R^{2n})$ dans $L^p(R^{2n})$, $\forall p \geqslant 1$. Nous aurons la même propriété pour les opérateurs $(1 + \mid x_\beta \mid)^\lambda f(P_\alpha, k_\alpha)(1 + \mid x_\beta \mid)^{-\lambda}$, si f est suffisamment différentiable et à support compact dans R^{2n}.

Démonstration. — L'opérateur A admet un noyau $A(x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha)$ dans l'espace des fonctions $\psi(x_\alpha, y_\alpha)$, qui a la forme suivante :

$$\text{(III.1)}\quad A(x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha) = (1 + |ax_\alpha + by_\alpha|)^\lambda g(y_\alpha, y'_\alpha)\prod_{i=1}^{n}\delta(x^i_\alpha - x'^i_\alpha)(1 + |ax'_\alpha + by'_\alpha)^{-\lambda}$$

où

$$|g(y_\alpha, y'_\alpha)| \leqslant C\prod_{i=1}^{n}(1 + |y'_\alpha - y'^i_\alpha|)^{-m}$$

où m peut être choisi suffisamment grand si f est suffisamment dérivable. Pour $x \in R^n$, nous avons :

$$\text{(III.2)}\quad |a|^\lambda = \left(\sum_i |ai|^2\right)^{\frac{\lambda}{2}} \leqslant \left(\sum |ai|\right)^\lambda \leqslant (n \sup_i |ai|)^\lambda \leqslant n^\lambda\left(\sum_i |ai|^\lambda\right)$$

Il suffit de montrer que les opérateurs A_j suivants sont bornés en tant qu'opérateurs de $L^1(R^{2n}) \mapsto L^1(R^{2n})$ et de $L^\infty(R^{2n}) \mapsto L^\infty(R^{2n})$, conformément au théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, où les A_j sont définis par les noyaux :

$$\text{(III.3)}\quad A_j = |ax^j_\alpha + by^j_\alpha|^\lambda \prod_{i=1}^{n}(1 + |y^i_\alpha - y'^i_\alpha|)^{-m}\delta(x^i_\alpha - x'^i_\alpha) \times (1 + |ax'^j_\alpha + by'^j_\alpha|)^{-\lambda}$$

Nous avons :

$$\text{(III.4)}\quad {}_\infty|A^j|_\infty \leqslant \sup_{x_\alpha, y_\alpha} \int d^n x'_\alpha d^n y'_\alpha A_j(x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha)$$

En intégrant d'abord sur y'^j_α et en faisant le changement de variable $by'^j_\alpha + ax'^j_\alpha = x'^j_\beta$, nous obtenons :

$$\text{(III.5)}\quad {}_\infty|A^j|_\infty \leqslant \sup_{x_\alpha, y_\alpha} |x_\beta|^\lambda \int d^n x'_\alpha d^{n-1} y'_\alpha \prod_{\substack{i=1\dots n\\ j\neq i=1\dots n}} \delta(x^i_\alpha - x'^i_\alpha)(1 + |y^i_\alpha - y'^i_\alpha|)^{-m} \int dx'^j_\beta \frac{b^{-1}(1 + |x'^j_\beta|)^{-\lambda}}{(1 + b^{-1}|by^j_\alpha + ax'^j_\alpha - x'^j_\beta|)^m}$$

Remarquons qu'en posant $v^j = ax'^j_\alpha + by^j_\alpha$, l'intégrale sur dx^j_β donne une fonction $F(v^j)$

$$\text{(III.6)}\quad F(v^j) = b^{-1}\int dx'^j_\beta(1 + |b|^{-1}|v^j - x'^j_\beta|)^{-m} \times (1 + |x'^j_\beta|)^{-\lambda} \leqslant C(1 + |v^j|)^{-\lambda}$$

Ensuite, l'intégrale sur dx'^j_α fait apparaître $F(ax^j_\alpha + by^j_\alpha)$ qui compense donc le facteur $|ax^j_\alpha + by^j_\alpha|^\lambda$.

Les intégrales qui restent à effectuer donnent une constante.

On démontre d'une façon semblable que $_1|A^j|_1 \leqslant C$, ainsi que la deuxième proposition du Lemme 1.

LEMME III.2. — *Soit $\alpha \neq \beta$ et a et $b > 0$.*

Supposons que $a \leqslant \dfrac{P_\alpha^2}{2m_\alpha} \leqslant b$ *et* $a \leqslant \dfrac{P_\beta^2}{2n_\beta} \leqslant b$;

alors $\exists\, m \in]1, 2]$ *et* M *tel que*

$$ma \leqslant H_0 \leqslant Mb$$

Démonstration. — Nous pouvons exprimer H_0 comme fonction de P_α et P_β. En effet :

$$\text{(III.8)} \quad \begin{pmatrix} k_\alpha \\ P_\alpha \end{pmatrix} = \underset{\sim}{A} \begin{pmatrix} k_\beta \\ P_\beta \end{pmatrix} \text{ où la matrice } A = \begin{pmatrix} \sqrt{2m_\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{2n_\alpha} \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2m_\beta}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2n_\beta}} \end{pmatrix}$$

$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ étant une rotation dans R^2 d'angle $\theta \neq 0$ Mod π.

Il s'ensuit que

$$\text{(III.9)} \quad k_\alpha^2 = P_\alpha^2 \frac{m_\alpha}{n_\alpha} \operatorname{cotg}^2\theta + P_\beta^2 \frac{m_\beta}{n_\beta} \frac{1}{\sin^2\theta} - 2P_\alpha P_\beta \sqrt{\frac{m_\alpha m_\beta}{n_\alpha^2}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

et que :

$$\text{(III.10)} \quad H_0 = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} + \frac{P_\beta^2}{2n_\beta} - \frac{P_\alpha P_\beta}{\sqrt{n_\alpha n_\beta}}\cos\theta\right]$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\left(\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} + \frac{P_\beta^2}{2n_\beta}\right)(1 - |\cos\theta|) + |\cos\theta|\left(\frac{P_\alpha}{\sqrt{2n_\alpha}} \pm \frac{P_\beta}{\sqrt{2n_\beta}}\right)^2\right]$$

Ainsi, avec les hypothèses du Lemme, nous avons :

$$\text{(III.11)} \quad \begin{aligned} H_0 &\geqslant \frac{1 - |\cos\theta|}{\sin^2\theta}\left(\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} + \frac{P_\beta^2}{2n_\beta}\right) \geqslant 2\frac{(1 - |\cos\theta|)}{\sin^2\theta} a \\ H_0 &\leqslant 2b\frac{(1 + |\cos\theta|)}{\sin^2\theta} \end{aligned}$$

avec

$$\text{(III.12)} \quad m = 2\frac{(1 - |\cos\theta|)}{\sin^2\theta} \in]1, 2]$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de ce Lemme.

COROLLAIRE III.2. — *Soit* $ea, 3\delta\,(.)$ *la fonction caractéristique de l'intervalle* $[a - 3\delta, a + 3\delta]$,

et

$$E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[a - 3\delta, a + 3\delta] = ea, 3\delta\left(\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}\right) \otimes 1\!\!1_{k_\alpha}$$

i) *Soit* $0 < a_0 < \dot{a}$

Alors, il existe δ' *et* δ_0 *positifs tels que*

$$\forall\delta \leqslant \delta_0 \qquad E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[a - 3\delta, a + 3\delta]E_{\frac{P_\beta^2}{2n_\beta}}[a - 3\delta, a + 3\delta] \leqslant E_{H_0}[a + \delta', \mu a]$$

ii) *De plus, soit* δ *fixé et* $\operatorname{Re} z \in (a - \delta, a + \delta)$

$$\lim_{a \to +\infty} \left\| E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[a - 3\delta, a + 3\delta]E_{\frac{P_\beta^2}{2n_\beta}}[a - 3\delta, a + 3\delta]G_0(z) \right\| = 0$$

LEMME III.3. — Soit $a > a_0 > 0$, et δ fixé satisfaisant aux conditions d'application du Corollaire III.2. Soit $z \in N_{a,\delta}$. Alors la famille d'opérateurs $B(z)$ défini formellement par

$$B(z) = (1 + |x_\beta|)^{-\mu}(1 + |x_\alpha|)^{\lambda}G_0(z)F_\alpha F_\beta(1 + |x_\beta|)^{\mu}(1 + |x_\alpha|)^{-\lambda}$$
$$\alpha \neq \beta$$

est une famille d'opérateurs uniformément bornés de $L^P(R^{2n}) \mapsto L^P(R^{2n})$, $\forall P \geqslant 1$, $z \in N_{a,\delta}$ et dont la norme tend vers zéro quand $|\operatorname{Im} z|$ tend vers l'infini, $z \in N_{a,\delta}$. Les opérateurs F_α sont ceux définis dans (II.22).

Résumé de la démonstration. — D'après le Lemme III.2, l'opérateur $G_0(z)F_\alpha F_\beta$ est donc représenté comme multiplication par une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans l'espace des (k_α, P_α). De plus, il est évident que pour toutes valeurs finies m, les fonctions

$$\text{(III.13)} \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial^{m_i}}{\partial k_\alpha^{im_i}} \frac{\partial^{m_i'}}{\partial P_\alpha^{im_i'}} G_0(z)F_\alpha F_\beta \qquad m_i, m_i' \leqslant m$$

sont des fonctions à support compact fixé dans R^{2n} dont la norme $L_\infty(R^{2n})$ tend vers zéro quant $|\operatorname{Im} z|$ tend vers l'infini. Il s'ensuit que dans l'espace des x_α, y_α, l'opérateur $G_0(z)F_\alpha F_\beta$ est représenté par un noyau $k(z)$ qui satisfait :

$$\text{(III.14)} \qquad k(z) \leqslant C(z)\prod_{i=1}^{n}(1 + |x_\alpha - x_\alpha'|)^{-m}(1 + |y_\alpha - y_\alpha'|)^{-m}$$

où $C(z)$ tend vers zéro quand $\operatorname{Im} z \mapsto \infty$, et $C(z) \leqslant C_0$ $\forall z \in N_{a,\delta}$.

Ensuite, l'on montre facilement le Lemme III.3, en utilisant le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin de la même manière que dans le Lemme III.1 à condition d'avoir choisi une valeur m suffisamment grande, dépendant de λ et μ.

LEMME III.4. — *Soit* $0 < a_0 < a$. *Soit* β *fixé.*

$\exists\delta_0$ *satisfaisant aux conditions du Lemme* III.2, *tel que* $\forall\delta \leqslant \delta_0$, *il existe un ensemble de points isolés* $\mathcal{E}_\delta^\beta \subset \overline{N_{a,\delta}}$ *et une fonction* C_δ *à valeur dans* R^+, *définie et continue dans* $\overline{N_{a,\delta}}/\mathcal{E}_\delta^\beta$ *tels que :*

$$\| h_\alpha F_\beta G_\beta(z)\psi \| \leqslant C_\delta(\| h_\alpha F_\alpha'^2 F_\beta G_\beta(z)\psi \| + 1)$$

$$\forall z \in N_{a,\delta} - \mathcal{E}_\delta^\beta, \qquad \forall\psi \in L^2(R^{2n}), \qquad \|\psi\| = 1$$

$$\alpha \neq \beta \qquad h_\alpha = (1 + |x_\alpha|)^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)} \qquad \varepsilon > 0$$

$$v_\beta = (1 + |x_\beta|)^{-\varepsilon'}(f_\infty + f_p) \qquad p > \sup\left(\frac{n}{2}, 1\right), \qquad \varepsilon' > 0$$

Remarque. — Le lecteur peut omettre la démonstration de ce Lemme. Il est utilisé pour passer du Lemme III.11 au corollaire III.11 *a*, et n'est pas utilisé dans l'obtention du corollaire III.11 *b* ; c'est sur ce dernier que reposent les applications données au Chapitre III, paragraphe C, et au Chapitre IV. Néanmoins, il semble intéressant d'en donner la démonstration, parce que d'une part, il permet d'obtenir des estimations concernant le problème à trois corps avec des interactions à longue portée, et que d'autre part, la démonstration repose sur une nouvelle propriété due à l'introduction des opérateurs $F_\alpha(\delta)$, $F_\beta(\delta)$, lorsque δ est suffisamment petit. En effet, on sera amené à inverser un opérateur

(III.15) $\quad 1 + B(F_\alpha(\delta), F_\beta(\delta), z) \quad$ où $\quad B(F_\alpha(\delta), F_\beta(\delta), z) = B(z, \delta)$

est une famille analytique, en z, d'opérateurs non compacts dans $L^2(R^{2n})$.

Néanmoins, il apparaîtra que lorsque $\delta \mapsto 0$

$$B(z, \delta) = B_1(z, \delta) + B_2(z, \delta)$$

(III.16) $\quad$ avec $\quad \| B_1(z, \delta) \| \to 0 \quad$ quand $\quad \delta \mapsto 0 \quad$ et $\quad B_2(z, \delta)$

est un opérateur compact $\forall z, \delta$. De sorte que l'on pourra inverser l'opérateur $1 + B(z, \delta)$.

Démonstration. — Nous avons :

(III.17) $\quad h_\alpha F_\alpha^2 F_\beta G_\beta = h_\alpha F_\alpha^2 F_\beta G_0 + F_\alpha^2 h_\alpha F_\alpha^{(1)} F_\beta^{(1)} G_0 v_\beta h_\alpha^{-1} h_\alpha (F_\alpha'^2 + F_\alpha^2) G_\beta F_\beta$

où $F_\alpha^{(1)}$ et $F_\beta^{(1)}$ peuvent être fixés, de sorte qu'ils satisfassent à la fois, les relations $F_\alpha^{(1)} F_\alpha^2 = F_\alpha^2$; $F_\beta^{(1)} F_\beta = F_\beta$, et les conditions des Lemmes III.2 et III.3.

Donc, dans l'identité (III.17), seuls F_α^2 et F_β sont considérés comme dépendant de δ.

Définissons :

(III.18) $$B(z) = F_\alpha^2 h_\alpha F_\alpha^{(1)} F_\beta^{(1)} G_0 h_\alpha^{-1}$$

$B(z)$ est une famille d'opérateurs, analytique pour $z \in N_{a,\delta}$ dont la norme dans $L^2(R^{2n})$ tend vers zéro quand Im z tend vers l'infini, conformément au Lemme III.3.

D'autre part, nous pouvons encore écrire

$$v_\beta h_\alpha F_\alpha^2 G_\beta F_\beta = v_\beta F_\alpha^{(2)} h_\alpha F_\beta^{(2)} F_\alpha^2 F_\beta G_\beta \tag{III.19}$$

où $F_\alpha^{(2)}$ et F_β^2 peuvent être choisis de la forme suivante :

$$F_\alpha^{(2)} = f^{(2)}\left(\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}\right) \otimes \mathbb{1}_{k_\alpha} \quad \text{avec} \quad f^{(2)}(\lambda) f(\lambda) = f(\lambda)$$
$$\text{et} \quad \operatorname{supp} f^2 \subset [a - 4\delta, a + 4\delta]$$

Idem pour $F_\beta^{(2)}$.

Nous pouvons encore transformer (III.19) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v_\beta h_\alpha F_\alpha^2 G_\beta F_\beta &= v_\beta F_\alpha^{(2)} F_\beta^2 h_\alpha F_\alpha^2 F_\beta G_\beta \\ &\quad + v_\beta F_\alpha^{(2)} [h_\alpha, F_\beta^{(2)}] h_\alpha^{-1} h_\alpha F_\alpha^2 F_\beta G_\beta \end{aligned} \tag{III.20}$$

Soit

$$C_1(\delta) = v_\beta F_\alpha^{(2)} F_\beta^{(2)} \quad \text{et} \quad C_2(\delta) = v_\beta F_\alpha^{(2)} [h_\alpha, F_\beta^{(2)}] h_\alpha^{-1} \tag{III.21}$$

Alors, (III.17) s'écrit, d'après (III.18), (III.20) et (III.21) :

$$\begin{aligned} [\mathbb{1} - B(z)C_1(\delta) - B(z)C_2(\delta)] h_\alpha F_\alpha^2 F_\beta G_\beta(z) \\ = h_\alpha F_\alpha^2 F_\beta G_0(z) - B(z) v_\beta h_\alpha F_\alpha'^2 G_\beta(z) F_\beta \end{aligned} \tag{III.22}$$

Montrons qu'il existe δ_0 tel que :

$$\| B(z)C_1(\delta) \| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \forall \delta \leqslant \delta_0 \quad \text{et} \quad z \in N_{a,\delta} \tag{III.23}$$

En effet :

$$B(z)C_1(\delta) = B(z) v_\beta F_\alpha^{(2)} F_\beta^{(2)}$$

Pour éviter les singularités locales de v_β, nous pouvons donc décomposer v_β en $v_\beta^\varepsilon + v_\beta^L$ de sorte que v_β^L soit une fonction bornée tendant vers zéro à l'infini et $\| v_\beta^{\varepsilon\frac{1}{2}} \varphi \| \leqslant \varepsilon \| k_\beta \varphi \|$.

$$\begin{aligned} \langle \psi \mid B(z) v_\beta^2 F_\alpha^{(2)} F_\beta^{(2)} \varphi \rangle &\leqslant \varepsilon^2 \| k_\beta B^*(z) \psi \| \| k_\beta F_\alpha^{(2)} F_\beta^{(2)} \varphi \| \\ &\leqslant \varepsilon^2 \| k_\beta B^*(z) \| \| k_\beta F_\alpha^{(2)} F_\beta^{(2)} \| \| \varphi \| \| \psi \| \end{aligned} \tag{III.25}$$

Il est évident que les opérateurs $k_\beta B^*(z)$ et $k_\beta F_\alpha^{(2)} F_\beta^{(2)}$ sont bornés et de norme indépendante de δ, de sorte que nous pouvons choisir v_β^ε tel que

$$\| B(z) v_\beta^\varepsilon F_\alpha^{(2)} F_\beta^{(2)} \| \leqslant \frac{1}{4} \qquad \forall \delta$$

D'autre part, $B(z)$ est uniformément borné en z et de norme indépendante de δ, il suffit de montrer que $\lim_{\delta \to 0} \| v_\beta^L F_\alpha^{(2)} F_\beta^{(2)} \| = 0$. Mais, quand δ tend vers zéro, les opérateurs $F_\alpha^{(2)}$ et $F_\beta^{(2)}$ sont définis avec une fonction $f^2(\lambda)$ qui se condense autour du point a. Il s'ensuit qu'il existe un borélien Δ_δ de R de mesure de Lebesgue tendant vers zéro avec δ tel que

$$F_\alpha^{(2)} F_\beta^{(2)} = E_{\frac{k_\beta^2}{2m_\beta}}(\Delta\delta) F_\alpha^{(2)} . F_\beta^{(2)}$$

Donc, nous pouvons écrire :

$$(\mathrm{III}.26) \qquad v_\beta^{\mathrm{L}} \mathrm{F}_\beta^{(2)} \mathrm{F}_\alpha^{(2)} = v_\beta^{\mathrm{L}} \mathrm{E}_{\frac{k_\beta^2}{2m_\beta}}[0, \mu] \mathrm{E}_{\frac{k_\beta^2}{2m_\beta}}(\Delta\delta) \mathrm{F}_\alpha^2 \mathrm{F}_\beta^{(2)}$$

Dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n)$, $\mathrm{E}_{\frac{k_\beta^2}{2m_\beta}}(\Delta\delta)\mathrm{E}_{\frac{k_\beta^2}{2m_\beta}}[0, \mu] v_\beta^{\mathrm{L}}$ est le produit d'un opérateur compact par un opérateur qui converge fortement vers zéro ; il converge donc en norme vers zéro, et il en est de même de (cet opérateur) $\otimes \mathbb{1}_{y_\beta}$ dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n) \otimes \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n)$. Ainsi, il est possible de choisir δ_0 tel que

$$\forall \delta \leqslant \delta_0 \, || \, \mathrm{B}(z) v_\beta^{\mathrm{L}} \mathrm{F}_\alpha^{(2)} \mathrm{F}_\beta^{(2)} \, || \leqslant \frac{1}{4},$$

ce qui démontre (III.23).

Supposons pour l'instant que $\mathrm{B}(z)\mathrm{C}_2(\delta)_0$ soit une famille analytique d'opérateurs compacts lorsque $z \in \overline{\mathrm{N}_{a,\delta}}$.

Alors, pour une valeur δ satisfaisant (III.23) nous avons : $[\mathbb{1} - \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_1(\delta)]^{-1}$ existe et définit une famille d'opérateurs bornée pour $z \in \mathrm{N}_{a,\delta}$, convergent en norme vers 1 quand $\mathrm{Im}\, z \mapsto \infty$.

$$(\mathrm{III}.27) \qquad \mathrm{D}(z) = \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_2(\delta)[1 - \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_1(\delta)]^{-1}$$

est alors une famille analytique d'opérateurs compacts lorsque $z \in \mathrm{N}_{a,\delta}$, de sorte que $[\mathbb{1} - \mathrm{D}(z)]^{-1}$ existe, à l'exception d'un ensemble de points isolés ou bien n'existe nulle part : [*6*] ; mais cette dernière éventualité est exclue puisque

$$(\mathrm{III}.28) \qquad \lim_{\substack{|z| \to a \\ z \in \mathrm{N}_{a,\delta}}} || \, \mathrm{D}(z) \, || \leqslant \mathrm{Lim} \, || \, \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_2(\delta) \, || = 0$$

Ceci est évident d'après le Lemme III.3 si v_β est une fonction bornée, et il n'est pas difficile de vérifier (III.28) pour la classe de potentiels satisfaisant les conditions du Lemme III.4.

Ainsi, d'après l'équation résolvante, nous voyons que

$$(\mathrm{III}.29) \qquad \begin{aligned} \mathrm{I}(z) &= [\mathbb{1} - \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_1(\delta) - \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_2(\delta)]^{-1} \\ &= [\mathbb{1} - \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_1]^{-1}[\mathbb{1} - \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_2[\mathbb{1} - \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_1]^{-1}]^{-1} \end{aligned}$$

existe pour tout $z \in \mathrm{N}_{a,\delta} - \mathscr{E}^{\beta}_{a,\delta}$.

Et le Lemme III. découle donc des indentités (III.22) et (III.29).

Il nous reste donc à montrer que $\mathrm{B}(z)\mathrm{C}_2(\delta)$ est une famille analytique d'opérateurs compacts. Nous avons explicitement :

$$(\mathrm{III}.30) \qquad \mathrm{B}(z)\mathrm{C}_2(\delta) = \mathrm{F}_\alpha^2 h_\alpha \mathrm{F}_\alpha^{(1)} \mathrm{F}_\beta^{(1)} \mathrm{G}_0 h_\alpha^{-1} v_\beta \mathrm{F}_\alpha^{(2)} [h_\alpha, \mathrm{F}_\beta^{(2)}] h_\alpha^{-1}$$

Remarque. — Dans la preuve suivante, pour éviter des difficultés techniques, nous pouvons encore supposer que $v_\beta = v_\beta^{\mathrm{L}}$. Ainsi $\mathrm{F}_\alpha^2 h_\alpha \mathrm{F}_\alpha^1 \mathrm{F}_\beta^1 \mathrm{G}_0(z) h_\alpha^{-1} v_\beta$ est un opérateur borné dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^{2n})$, conformément au Lemme III.3 et en fait de norme indépendante de δ.

Étudions :

(III.31) $$[h_\alpha, F_\beta^{(2)}]h_\alpha^{-1} = D_2$$

$F_\beta^{(2)}$ est défini par $f^{(2)}\left(\frac{P_\beta^2}{2n_\beta}\right) \otimes \mathbb{1}_{k_{\beta'}}$ où $f^{(2)}$ est une fonction suffisamment dérivable. Ainsi, $f^{(2)}\left(\frac{P_\beta^2}{2n_\beta}\right) = g(P_\beta)$, où g est toujours une fonction aussi dérivable que l'on veut, et à support compact. Nous pouvons donc écrire :

(III.32) $$F_\beta^{(2)} = \int_{R^n} d^n\lambda\, \hat{g}(\lambda)e^{+iP_\beta\lambda} \otimes \mathbb{1}_{k_\beta}$$

où la fonction $\hat{g}(\lambda)$ est alors aussi décroissante que l'on veut en $|\lambda|$.

$$[h_\alpha, F_\beta^{(2)}]$$
$$= \int d^n\lambda\, \hat{g}(\lambda)e^{+iP_\beta\lambda} \otimes \mathbb{1}_{k_\beta}[(1+|ax_\beta+b(y_\beta-\lambda)|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}-(1+|ax_\beta+by_\beta|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}]$$

(III.33) $$x_\alpha = ax_\beta + by_\beta$$

Décomposons D_2 de la façon suivante :

(III.34) $$D_2 = [h_\alpha, F_\beta^{(2)}]h_\alpha^{-1} = D_2'(\mu) + D_2''(\mu)$$

où $D_2''(\mu)$ est l'opérateur obtenu en effectuant l'intégrale (III.33) à l'intérieur d'une sphère de R^n de rayon μ, et $D_2'(\mu)$ celui obtenu en effectuant l'intégrale à l'extérieur.

D'après l'inégalité suivante :

(III.35) $$\left[\frac{1}{(1+|x_\alpha - b\lambda|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} - \frac{1}{(1+|x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right](1+|x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$
$$\leqslant 1 + \frac{(1+|x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{(1+|x_\alpha - b\lambda|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \leqslant 1 + c\,|b\lambda|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

il découle que

(III.35') $$\lim_{\mu\to 0} \|D_2'(\mu)\| = 0$$

Montrons maintenant que $(1+|x_\alpha|)^1 C_2''(\mu)$ est un opérateur borné. Nous avons :

(III.36) $$(1+|x_\alpha|)^1 C_2''(\mu) = \int_{B(0,\mu)} d^n\lambda\, e^{+iP_\beta\lambda} \otimes \mathbb{1}_{k_\beta}(1+|x_\alpha - b\lambda|)^1$$
$$\left[\frac{1}{(1+|x_\alpha - b\lambda|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} - \frac{1}{(1+|x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right](1+|x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

Il est facile de voir qu'il existe une région compacte de R^n, k, telle que pour tout $x_\alpha \notin k$, l'on ait :

(III.37)
$$\left[\frac{1}{(1+|x_\alpha - b\lambda|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} - \frac{1}{(1+|x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right] \leqslant C(1+|x_\alpha - b\lambda|)^{-1}(1+|x_\alpha|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \qquad \forall\lambda \in B(0,\mu)$$

Donc, pour tout $x_\alpha \notin k$

$$(1+|x_\alpha - b\lambda|)^1[\text{III}.35] \leqslant \mathbb{C}\,.$$

D'autre part, pour tout $x_\alpha \in k$ et $\lambda \in B(0, \mu)$ l'intégrand est évidemment borné comme fonction continue définie sur un compact de $R \times R$. Ce qui finit de démontrer que :

(III.38)
$$(1+|x_\alpha|)^1 D_2''(\mu) \leqslant C\,.$$

La remarque (III.30) et la proposition (III.38), nous montrent alors que $B(z)C_2(\delta)$ est un opérateur compact, puisqu'il est obtenu comme limite en norme, des opérateurs

$$B(z)v_\beta F_\alpha^{(2)} D_2''(\mu) = B(z)v_\beta(1+|x_\alpha|)^{-1}F_\alpha^{(2)}(1+|x_\alpha|)^1 D_2''(\mu)$$

qui sont des opérateurs compacts. En effet $F_\alpha^{(2)}(1+|x_\alpha|)^1 D_2''(\mu)$ est un opérateur borné, et $B(z)v_\beta(1+|x_\alpha|)^{-1}$ est un opérateur compact.

Définition. — Soit h_α et Ag_α l'opérateur défini dans le Chapitre I avec $g_\alpha(r_\alpha) = \int_0^{r_\alpha} h_\alpha(s)ds$. Nous désignerons dans le reste ce travail par les mêmes notations les opérateurs $h_\alpha \otimes \mathbb{1}_{p_\alpha}$ et $Ag_\alpha \otimes \mathbb{1}_{p_\alpha}$.

LEMME III.5. — *Soit F'_α défini comme dans ce qui précède. Nous avons alors*

i) $\forall n \neq 2, \quad h_\alpha = (1+|x_\alpha|)^\mu, \quad \mu > 1\,.$

(III.39)
$$\text{Re}\left\langle \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha}\varphi \mid F'_\alpha h_\alpha \varphi \right\rangle \leqslant \frac{1}{2}\,\text{Im}\left\{ \langle Ag_\alpha F'_\alpha\varphi \mid (H_\beta - z)\varphi \rangle - \langle Ag_\alpha F'_\alpha \varphi \mid v_\beta\varphi\rangle + z\langle Ag_\alpha F'_\alpha\varphi \mid \varphi\rangle \right\}$$

ii) $\forall n \geqslant 1, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \exists\, R_0,$ *tel que* $\forall R > R_0$

(III.40)
$$\text{Re}\left\langle \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha}\varphi \mid F'_\alpha h_\alpha^R \varphi \right\rangle - \varepsilon\langle F'_\alpha\varphi \mid h_\alpha^R\varphi\rangle \leqslant \frac{1}{2}\,\text{Im}\left\{ \langle Ag_\alpha F'_\alpha\varphi \mid (H_\beta - z)\varphi \rangle + z\langle Ag_\alpha F'_\alpha\varphi \mid \varphi\rangle - \langle Ag_\alpha F'_\alpha \varphi \mid v_\beta\varphi\rangle \right\}$$

Avec

$$h_\alpha^R(r) = h_\alpha\left(\frac{r}{R}\right); \qquad h_\alpha = (1+|x_\alpha|^2)^{\frac{\mu}{2}}, \qquad \mu > 1\,.$$

Il suffit d'utiliser les inégalités (I.8) et (I.9) concernant les opérateurs sur $L^2(R^n)$ et d'en prendre l'intégrale directe en remarquant que F'_α est un opérateur positif qui commute avec h_α, k_α et Ag_α.

LEMME III.6. — *Supposons que v_β vérifie la condition suivante : $\exists\, a < 1$, $b > 0$ tel que*

$$\langle \phi \mid v_\beta \phi \rangle \leqslant a \left\langle \phi \,\middle|\, \frac{k_\beta^2}{2m_\beta} \phi \right\rangle + b \langle \phi \mid \phi \rangle$$

$$\forall \phi \in L^2(R^n) \cap D(\sqrt{k_\beta^2})$$

Alors il existe C_1 *et* $C_1 > 0$ *tels que* $\forall z$, $\operatorname{Re} z < \mu$

$$\| H_0^{\frac{1}{2}} h_\gamma G_\beta(z)\varphi \|^2 \leqslant C_1 \| \varphi \|^2 + C_2 \| h_\gamma G_\beta(z)\varphi \|^2$$

avec $h_\gamma = (1 + |x_\gamma|)^{-\mu}$, $\mu \geqslant 0$ *et* $\forall \gamma$; h_γ *peut aussi être remplacé par* h_γ^R, $R > 1$.

Démonstration du lemme III.6. — Soit

$$H_0 = \frac{k_\gamma^2}{2m_\gamma} + \frac{P_\gamma^2}{2n_\gamma}$$

La condition imposée à v_β entraîne que :

$$\text{(III.41)} \quad \begin{aligned} \| H_0^{\frac{1}{2}} h_\gamma \varphi \|^2 &= \langle h_\gamma \varphi \mid H_\beta h_\gamma \varphi \rangle - \langle h_\gamma \varphi \mid v_\beta h_\gamma \varphi \rangle \\ &\leqslant \langle h_\gamma \varphi \mid H_\beta h_\gamma \varphi \rangle + a \langle h_\gamma \varphi \mid H_0 h_\gamma \varphi \rangle + b \| h_\gamma \varphi \|^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\text{(III.42)} \quad \begin{aligned} \| H_0^{\frac{1}{2}} h_\gamma \varphi \|^2 &\leqslant d \langle h_\gamma \varphi \mid H_\beta h_\gamma \varphi \rangle + db \| h_\gamma \varphi \|^2 \qquad \text{où } d = (1-a)^{-1} \\ &\leqslant d \operatorname{Re} \langle h_\gamma^2 \varphi \mid (H_\beta - z)\varphi \rangle + d \operatorname{Re} \langle h_\gamma \varphi \mid \{ H_\beta h_\gamma - h_\gamma H_\beta \} \varphi \rangle \\ &\quad + (db + \operatorname{Re} z) \| h_\gamma \varphi \|^2 \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $H_\beta = \dfrac{k_\gamma^2}{2m_\gamma} + \dfrac{P_\gamma^2}{2n_\gamma} + v_\beta$, nous avons :

$$\text{(III.43)} \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \langle h_\gamma \varphi \mid [H_\beta, h_\gamma]\varphi \rangle &= \frac{1}{2m_\gamma} \operatorname{Re} \langle h_\gamma \varphi \mid [k_\gamma^2, h_\gamma]\varphi \rangle \\ &= \frac{1}{2m_\gamma} \left\| \frac{\partial h_\gamma}{\partial r_\gamma} \varphi \right\|^2 \end{aligned}$$

En remplaçant φ par $G_\beta(z)\varphi$ nous obtenons :

$$\text{(III.44)} \quad \| H_0^{\frac{1}{2}} h_\gamma G_\beta \varphi \|^2 \leqslant C'_1 \| \varphi \| \| h_\gamma G_\beta \varphi \| + C'_2 \| h_\gamma G_\beta \varphi \|^2$$

Car, pour tout $\lambda \geqslant 0$ nous avons $\dfrac{\partial h_\gamma}{\partial r_\gamma} \leqslant C\, h_\gamma$. Il est en outre clair que la Formule (III.44) démontre le Lemme.

LEMME III.7. — *En prenant les mêmes notations et les mêmes hypothèses que pour le Lemme* III.6, *nous avons l'identité suivante :*

$$h_\gamma A g_\alpha = -ih_\gamma\left[(n-1)\frac{g_\alpha}{r_\alpha} + g'_\alpha\right] + 2ig_\alpha h'_\gamma \frac{x_\alpha}{r_\alpha}\cdot\frac{x_\gamma}{r_\gamma}a + \sum_{i=1}^{n} 2\frac{g_\alpha}{r_\alpha}x_\alpha^i k_\alpha^i h_\gamma \quad \textit{avec} \quad x_\gamma = ax_\alpha + by_\alpha.$$

Démonstration.

$$\text{(III.45)}\qquad Ag = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{g_\alpha(r_\alpha)}{r_\alpha}x_\alpha^i . k_\alpha^i\right)\otimes \mathbb{1}_{y_\alpha} + \text{symétrique}$$

Nous pourrons donc écrire :

$$\text{(III.46)}\qquad h_\gamma A g_\alpha = \sum_i\left(2\frac{g_\alpha}{r_\alpha}h_\gamma x_\alpha^i k_\alpha^i - ih_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left(x_\alpha^i\cdot\frac{g_\alpha}{r_\alpha}\right)\right)$$
$$= \sum\left(2\frac{g_\alpha}{r_\alpha}x_\alpha^i\left(k_\alpha^i h_\gamma + i\frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\alpha^i}\right) - ih_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left(\frac{x_\alpha^i g_\alpha}{r_\alpha}\right)\right)$$

$$\text{(III.46)}\quad h_\gamma A g_\alpha = -ih_\gamma\left[(n-1)\frac{g_\alpha}{r_\alpha} + h_\alpha\right] + \sum_{i=1}^{n}2\frac{g_\alpha}{r_\alpha}x_\alpha^i . k_\alpha^i h_\gamma + \sum_i i2g_\alpha\frac{x_\alpha^i}{r_\alpha}\cdot\frac{x_\gamma^i}{r_\gamma}\frac{\partial h_\gamma}{\partial r_\gamma}\cdot a.$$

où l'on a supposé que $x_\gamma = ax_\alpha + by_\alpha$.

LEMME III.8. — *Toujours avec les mêmes notations que dans les Lemmes* III.6 *et* III.7, *nous avons :*

$$\| h_\gamma A g_\alpha \varphi \| \leqslant C_3 \| h_\gamma \varphi \| + C_4 \| H_0^{\frac{1}{2}} h_\gamma \varphi \|.$$

Nous avons des bornes évidentes sur les fonctions multiplications qui interviennent dans (III.7). De plus, on utilise le fait que

$$\text{(III.47)}\quad \sum_{i=1}^{n}\| k_\alpha^i h_\gamma \varphi \| \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\| k_\alpha^i h_\gamma\varphi\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n}\sqrt{2m_\alpha}\,\| H_0^{\frac{1}{2}} h_\gamma\varphi \|.$$

B) Lemmes principaux

Les résultats qui suivent, seront valables pour des valeurs de δ, intervenant dans la définition des opérateurs F_α, telles que les Lemmes III.2, 3 et 4 soient vérifiés.

LEMME III.9. — *Soit* $0 < a_0 \leqslant a$ *et* $h_\alpha = (1 + |x_\alpha|)^{-\mu}$, $\mu > \frac{1}{2}$; $\forall z \in N_{a,\delta}$; *nous avons :*

$$\delta \| h_\alpha F'_\alpha G_\beta \psi \|^2 \leqslant k_0 \| h_\alpha F'_\alpha G_\beta \psi \| [\| h_\alpha v_\beta G_\beta \psi \| + \| \psi \|] + \frac{1}{2m_\alpha} \operatorname{Re} \langle k_\alpha^2 G_\beta \psi \mid F'_\alpha h_\alpha^2 G_\beta \psi \rangle$$

Démonstration. — Écrivons :

$$\text{(III.48)} \quad \operatorname{Re} z \langle \varphi \mid h_\alpha^2 F'_\alpha \varphi \rangle \leqslant \operatorname{Re} \langle (z - H_\beta)\varphi \mid h_\alpha^2 F'_\alpha \varphi \rangle + \operatorname{Re} \left\langle \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} \varphi \mid h_\alpha^2 F'_\alpha \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} \varphi \mid h_\alpha^2 F'_\alpha \varphi \right\rangle + \operatorname{Re} \langle v_\beta \varphi \mid h_\alpha^2 F'_\alpha \varphi \rangle$$

Décomposons

$$\left\langle \varphi \,\middle|\, \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} F'_\alpha h_\alpha^2 \varphi \right\rangle$$

en :

$$\left\langle \varphi \,\middle|\, \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} (F'^{-}_\alpha + F'^{+}_\alpha) h_\alpha^2 \varphi \right\rangle$$

où

$$\bar{F}'_\alpha = F'_\alpha E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[0, a - 2\delta] \otimes \mathbb{1}_{k_\alpha} \quad \text{et} \quad F'^{+}_\alpha = F'_\alpha E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[a + 2\delta, +\infty] \otimes \mathbb{1}_{k_\alpha}.$$

La première contribution est inférieure ou égale à $(a - 2\delta) \langle \varphi \mid h_\alpha^2 F'_\alpha \varphi \rangle$ car h_α et P_α commutent. D'autre part, puisque $\operatorname{Re} z \in [a - \delta, a + \delta]$. Nous avons :

$$\text{(III.49)} \quad \delta \langle \varphi \mid h_\alpha^2 F'_\alpha \varphi \rangle \leqslant \operatorname{Re} \langle (z - H_\beta)\varphi \mid F'_\alpha h_\alpha^2 \varphi \rangle + \operatorname{Re} \left\langle \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} \varphi \mid F'_\alpha h_\alpha^2 \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} \varphi \mid F'^{+}_\alpha h_\alpha^2 \varphi \right\rangle + \operatorname{Re} \langle v_\beta \varphi \mid h_\alpha^2 F'_\alpha \varphi \rangle.$$

En utilisant l'équation résolvante pour $G_\beta(z)$ nous obtenons :

$$\text{(III.50)} \quad \left\langle \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} G_\beta \psi \mid F'^{+}_\alpha h_\alpha^2 G_\beta \psi \right\rangle \leqslant \| h_\alpha F'_\alpha G_\beta \psi \| \left\| h_\alpha \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} E'_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[a + 2\delta, \infty] G_0 h_\alpha^{-1} \right\| [\| \psi \| + \| h_\alpha v_\beta G_\beta \psi \|]$$

L'on peut montrer facilement que l'opérateur

$$h_\alpha \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} E'_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[a + 2\delta, \infty] G_0(z) h_\alpha^{-1} = \int_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} \geqslant a + 2\delta}^{\oplus} d^n P_\alpha \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} h_\alpha g_0\left(z - \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}\right) h_\alpha^{-1}$$

est borné dans $L^2(R^{2n})$.

En substituant $G_\beta(z)\psi$ à φ dans l'inégalité (III.49) et en utilisant (III.50), on obtient le Lemme III.9.

LEMME III.10. — *Soit* $\alpha \neq \beta$ *et* γ *quelconque,* F'_α, F_β *les opérateurs définis dans les Lemmes précédents, supposons de plus que*

$$|\nabla v_\beta|^{\frac{1}{2}} \leqslant d(1 + |x_\beta|)^{-C} = \rho_\beta(x_\beta)\,; \qquad C > \frac{1}{2}.$$

Nous avons alors dans le cas $n \neq 2$

$$\operatorname{Re} \langle k_\alpha^2 G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \,|\, F'_\alpha h_\alpha^2 G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \rangle \leqslant k_1 \|\varphi\| [\|\varphi\| + \|h_\gamma G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi\|] + k_2 \|\rho_\beta G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi\|^2$$

Dans le cas $n = 2$, *nous avons une inégalité analogue, mais avec un terme supplémentaire dans le membre de droite :*

$$\varepsilon \| h_\alpha F'_\alpha G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \|^2$$

où ε *peut être choisi aussi petit que l'on veut et où*

$$h_\alpha(x_\alpha) \doteq \left(1 + \left|\frac{x_\alpha}{R}\right|^2\right)^{-\mu},$$

avec

$$\mu > \frac{1}{4} \qquad et \qquad R \geqslant R_0(\varepsilon)$$

Il suffit de considérer le cas $n \neq 2$. D'après le Lemme III.5, nous avons :

$$\text{(III.51)} \quad \operatorname{Re} \langle k_\alpha^2 G_\beta \varphi \,|\, F'_\alpha h_\alpha^2 G_\beta \varphi \rangle \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ \langle A g_\alpha F'_\alpha G_\beta \varphi \,|\, \varphi \rangle - \langle A g_\alpha F'_\alpha G_\beta \varphi \,|\, v_\beta G_\beta \varphi \rangle + z \langle A g_\alpha F'_\alpha G_\beta \varphi \,|\, G_\beta \varphi \rangle \}.$$

Nous devons remplacer $G_\beta \varphi$ par $G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi$ dans (III.51), γ étant quelconque, le premier terme à étudier est :

$$\text{(III.52)} \qquad \operatorname{Im} \langle A g_\alpha F'_\alpha G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \,|\, F_\beta h_\gamma \varphi \rangle$$

En utilisant deux fois le Lemme III.1 et l'identité $F'_\alpha + \mathbb{1} - F'_\alpha = \mathbb{1}$, nous avons la majoration

$$\text{(III.53)} \qquad \text{(III.52)} \leqslant C \|\varphi\| \| h_\gamma A g_\alpha G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \|$$

$$\text{(III.54)} \qquad \leqslant C \|\varphi\| \left[C_3 \| h_\gamma G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \| + C_4 \| H_0^{\frac{1}{2}} h_\gamma G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \| \right]$$

(Nous avons utilisé le Lemme III.8 pour passer de (III.53) à (III.54), et par une application du Lemme III.6, nous obtenons :

$$\text{(III.55)} \qquad \text{(III.52)} \leqslant C \|\varphi\| [D_1 \|\varphi\| + D_2 \| h_\gamma G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \|]$$

Considérons maintenant :

$$\text{(III.56)} \quad |\operatorname{Im} z \langle A g_\alpha F'_\alpha G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \,|\, G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \rangle| \leqslant |\operatorname{Im} z| . C . \| G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \| \| H_0^{\frac{1}{2}} G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \| \leqslant |\operatorname{Im} z| . C . \| G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \| \left[C'_1 \|\varphi\| + C'_2 \| G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \| \right]$$

(Nous avons utilisé les Lemmes III.8 et III.6).

Puisque $| \operatorname{Im} z | G_\beta(z)$ sont des opérateurs bornés en z et que

$$2 \operatorname{Im} z \,||\, G_\beta(z)\psi \,||^2 = \langle \psi \,|\, G(\bar{z}) - G(z)\psi \rangle = -2 \operatorname{Im} \langle \psi \,|\, G_\beta(z)\psi \rangle$$

Le terme (III.56) est donc borné par :

(III.57) $$\text{(III.56)} \leqslant C' \,||\, \varphi \,|| + C'' \,||\, \varphi \,||\, ||\, h_\gamma G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \,||$$

Il nous reste à considérer le terme :

(III.58) $$\operatorname{Im} \langle A g_\alpha F'_\alpha G_\beta F_\beta h_\gamma \,|\, v_\beta G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \rangle = -\frac{i}{2} \langle G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \,|\, \{ F'_\alpha [A g_\alpha, v_\beta] + [F_\alpha, v_\beta] A g_\alpha \} G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \rangle$$

Mais nous avons :

$$| i[A g_\alpha, v_\beta] | = 2 \left| \sum_{i=1}^{n} g_\alpha(r_\alpha) \frac{x^i_\alpha}{r_\alpha} \cdot \frac{\partial v_\beta}{\partial x^i_\beta} \times a \right| \leqslant C \,|\, \nabla v_\beta \,|$$

avec $x_\beta = a x_\alpha + b y_\alpha$

De sorte qu'en utilisant l'hypothèse $| \nabla v_\beta |^{\frac{1}{2}} \leqslant \rho_\beta(x_\beta)$, le fait que l'opérateur $\rho_\beta^{-1} [F_\alpha, v_\beta] \rho_\beta^{-1}$ soit un opérateur borné et le Lemme III.5, nous voyons que le module de l'expression (III.58) peut être majoré par :

(III.59) $$\leqslant k_2 \,||\, \rho_\beta G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \,||^2$$

En utilisant les estimations (III.55), (III.57) et (III.59) dans la relation (III.51), nous démontrons donc le Lemme III.10.

Remarque. — Nous pouvons remplacer F_β par $\mathbb{1}$ ainsi que v_β par 0. Le Lemme III.10 reste vrai dans tous les cas alors possibles.

COROLLAIRE III.10. — *Soit* $a \geqslant a_0 > 0$ *et* $\operatorname{Re} z \in [a - \delta, a + \delta]$. *Nous avons les résultats suivants :*

1) $h_\alpha F'_\alpha G_0(z) F'_\gamma h_\gamma$, *avec* $h^\alpha_\gamma = (1 + | x^\alpha_\gamma |)^{-\mu}$, $\mu > \frac{1}{2}$, *est alors une famille d'opérateurs uniformément bornés en* $z \in N_{a,\delta}$.

2) *Supposons que* n *et* h_γ *soient tels que* $||\, h_\gamma G_0(z) h_\gamma \,|| \leqslant C \quad \forall z \in N_{a,\delta}$. *Alors :*

$$h_\alpha F'_\alpha G_0(z) h_\gamma, \quad \textit{avec} \quad h_\alpha = (1 + | x_\alpha |)^{-\mu}, \qquad \mu > \frac{1}{2}$$

est une famille d'opérateurs uniformément bornés quand $z \in N_{a,\delta}$.

Démonstration. — D'après les Lemmes (III.9) et (III.10) dans le cas $v_\beta \equiv 0$ et $F_\beta \equiv \mathbb{1}$ $\exists\, \varepsilon > 0$, tel que

(III.62) $$\varepsilon \,||\, h_\alpha F'_\alpha G_0 F'_\gamma h_\gamma \,||^2 \leqslant k_0 \,||\, h_\alpha F'_\alpha G_0 F'_\gamma h_\gamma \varphi \,||\, ||\, \varphi \,|| + k_1 [\, ||\, \varphi \,|| + ||\, h_\gamma G_0 F'_\gamma h_\gamma \varphi \,||\,]\, ||\, \varphi \,|| .$$

En prenant d'abord le cas $\alpha = \gamma$, l'inégalité ci-dessus nous montre que

$$||\, h_\gamma G_0 F'_\gamma h_\gamma \,|| \leqslant C, \qquad \forall z \in N_{a,\delta} .$$

Ceci n'est rien qu'un résultat contenu dans le théorème I.1 de Lavine sur le problème à deux corps.

Si nous prenons alors $\alpha \neq \gamma$, l'inégalité (III.62) démontre la proposition 1 du lemme. La deuxième proposition est aussi immédiate parce que l'on a alors :

$$\text{(III.63)} \quad \varepsilon \| h_\alpha F'_\alpha G_0 h_\gamma \varphi \|^2 \leqslant k_0 \| h_\alpha F'_\alpha G_0 h_\gamma \varphi \| \| \varphi \| + k_1 \| \varphi \| [\| \varphi \| + \| h_\gamma G_0 h_\gamma \varphi \|]$$

avec, par hypothèse :

$$\| h_\gamma G_0 h_\gamma \varphi \| \leqslant C \qquad \forall z \in N_{a,\delta} \quad \text{et} \quad \forall \varphi \text{ avec } \| \varphi \| \leqslant 1.$$

LEMME III.11. — *Soit* $a \geqslant a_0 > 0$ *et* $h_\alpha = (1 + |x_\alpha|)^{-\mu}$, $\mu > \frac{1}{2}$

$$h_\gamma = (1 + |x_\gamma|)^{-\nu}, \qquad \nu \geqslant 0,$$

et δ satisfaisant aux Lemmes III.1, ..., III.4. Supposons v_β différentiable et tel que

$$|\nabla v_\beta|^{\frac{1}{2}} \leqslant d(1 + |x_\beta|)^{-C} = \rho_\beta(x_\beta)\,; \qquad C > \frac{1}{2}$$

Alors $\exists\, \varepsilon > 0$ *tel que* $\forall z \in N_{a,\delta}$, $\forall \varphi$, $\| \varphi \| \leqslant 1$.

$$\varepsilon \| h_\alpha F'_\alpha G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \|^2 \leqslant k_0 \| h_\alpha F'_\alpha G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \| \| h_\alpha v_\beta G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \| + k_0 \| h_\alpha F'_\alpha G_\beta h_\gamma \varphi \| + k_1 \| h_\gamma G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \| + k_2 \| \rho_\beta G_\beta F_\beta h_\gamma \varphi \|^2 + k_1 .$$

C'est une conséquence immédiate des Lemmes III.9 et III.10.

Nous pouvons remarquer que les constantes ε, k_0 ne dépendent pas de $a \geqslant a_0 > 0$, pour une valeur de δ convenablement fixée. Elles ne dépendent évidemment pas de v_β. Comme illustration des estimations précédentes, nous donnons le résultat suivant qui est vrai avec des potentiels d'interaction v_β à longue portée.

COROLLAIRE III.11. *a*). — *Supposons* v_β *différentiable tel que*

i) $\| k_0 v_\beta \| < \varepsilon \qquad \varepsilon < \delta$

ii) $|\nabla v_\beta|^{\frac{1}{2}} \leqslant d(1 + |x_\beta|)^{-C} = \rho_\beta(x_\beta)$

iii) $\rho_\beta \left[\dfrac{k_\beta^2}{2m_\beta} + v_\beta - z \right]^{-1} \rho_\beta$ *est une famille d'opérateurs uniformément bornés lorsque* Re $z > -\alpha$, $\alpha > 0$ ($\alpha = 4\delta$). *Alors*, $\forall a \geqslant a_0 > 0$, *et* $\forall F \subset \mathbb{C}$ *tel que* $F^* = F = \bar{F}$ *et* $F \cap \mathscr{E}^\beta_{a,\delta} = \varnothing$.

$\exists\, C > 0$ *de sorte que*

$$\| h_\alpha G_\beta(z) F_\beta h_\gamma \| \leqslant C \qquad \forall z \in F \cap N_{a,\delta}$$

où h_α *sont des fonctions fixées, de la forme suivante :*

$$h_\alpha = \begin{cases} (1 + |x_\alpha|)^{-\mu} & \mu > \dfrac{1}{2} \quad \textit{si} \quad \alpha \neq \beta \\ d(1 + |x_\beta|)^{-C} = \rho_\beta(x_\beta) & \textit{si} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Démonstration. — Démontrons tout d'abord que $\| \rho_\beta G_\beta(\bar{z}) F_\beta h_\gamma \|$ est uniformément borné quand $z \in F = F^* = \bar{F}$.

En effet, d'après les Lemmes III.4 et III.11, $\exists\, \mathscr{E}^B_{a,\delta}$, de sorte que $\forall z \in F = \bar{F}$ et $F \cap \mathscr{E}^B_{a,\delta} = \emptyset$, $\forall \varphi$, $\| \varphi \| \leqslant 1$, nous ayons :

$$\text{(III.64)} \quad \begin{aligned} \| h_\gamma F_\beta G_\beta(z) \rho_\beta \varphi \|^2 &\leqslant C \| h_\gamma F'_\gamma G_\beta F_\beta \rho_\beta \varphi \| \\ &\leqslant C' \{ \| h_\gamma F'_\gamma G_\beta F_\beta \rho_\beta \varphi \| (\| \varphi_\beta G_\beta F_\beta \rho_\beta \varphi \| + 1) + \| \rho_\beta G_\beta F_\beta \rho_\beta \varphi \|^2 \} . \end{aligned}$$

D'autre part, on peut supposer δ suffisamment petit, de sorte que

$$\rho_\beta G_\beta(z) F_\beta \rho_\beta = \int^{\oplus} dP_\beta f_\beta\left(\frac{P_\beta^2}{2n_\beta}\right) \rho_\beta \left[\frac{k_\beta^2}{2n_\beta} - 2 + \frac{P_\beta^2}{2n_\beta} \right]^{-1} \rho_\beta$$

est un opérateur borné puisque $\operatorname{Re} \dfrac{P_\beta^2}{2n_\beta} - z > -\alpha$, lorsque

$$\operatorname{Re} z \in (a - \delta, a + \delta) \qquad \text{et} \qquad \frac{P_\beta^2}{2n_\beta} \in [a - 3\delta, a + 3\delta]$$

Donc $\| \rho_\beta G_\beta(\bar{z}) F_\beta h_\gamma \| \leqslant C \quad \forall z \in N_{a,\delta} \cap F$. Ensuite, on finit la démonstration du Corollaire III.11.*a*, en utilisant à nouveau les Lemmes III.11 et III.4, avec respectivement les hypothèses et $\alpha = \gamma$ et $\alpha \neq \gamma$.

Remarque. — Le résultat ci-dessus requiert que le potentiel v_β soit suffisamment petit en norme, mais n'impose aucune condition sur la décroissance du potentiel. La démonstration nécessite l'emploi du Lemme III.4. Néanmoins, dans le cas de potentiel v_β décroissant plus vite que $(1 + | x_\beta |)^{-1}$, la condition que $| v_\beta |$ soit suffisamment petit en norme, devient inutile. De plus, nous n'avons plus besoin d'utiliser dans la démonstration du corollaire suivant, le Lemme III.4 qui faisait apparaître dans $\overline{N_{a,\delta}}$ certaines singularités isolées : $\mathscr{E}^B_{a,\delta}$. (Je remercie J. Ginibre de m'avoir fait remarquer ce dernier point.)

COROLLAIRE III.11.*b*). — *Supposons v_β différentiable et supposons qu'il existe*

$$\rho_\beta(x_\beta) = d(1 + | x_\beta |)^{-C}, \qquad C > 1$$

tels que :

i) $| v_\beta | \leqslant \rho_\beta$ *et* $| \nabla v_\beta |^{\frac{1}{2}} \leqslant \rho_\beta$

ii) $\rho_\beta \left[\dfrac{k_\beta^2}{2m_\beta} + v_\beta - z \right]^{-1} \rho_\beta$ *est une famille d'opérateurs uniformément bornés* $\forall \operatorname{Re} z > -\alpha$, *pour une valeur* $\alpha > 0$. *Alors,* $\forall a_0 > 0$, $\exists \delta_0$ *tel que* $\forall a, \geqslant a_0$, $\forall \delta \leqslant \delta_0$,

$$\| h_\alpha G_\beta(z) F_\beta h_\gamma \| \leqslant C \qquad \forall z \in N_{a,\delta}$$

où $(h_\alpha)_\alpha$ sont des fonctions fixées, et de la forme suivante :

$$h_\alpha = \begin{cases} (1 + |x_\alpha|)^{-\mu} & \mu > \dfrac{1}{2} \quad \textit{si} \quad \alpha \neq \beta \\ \rho_\beta(x_\beta) & \qquad\quad\ \textit{si} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Démonstration. — Nous avons, en utilisant la première équation résolvante pour G_β et l'identité $\mathbb{1} = F'_\alpha + \mathbb{1} - F'_\alpha$

$$h_\alpha G_\beta F_\beta \psi = h_\alpha F'_\alpha G_\beta F_\beta \psi + h_\alpha(\mathbb{1} - F'_\alpha) F_\beta G_0(1 + v_\beta G_\beta) F_\beta \psi$$

où $F_\beta F_\beta = F_\beta$ avec $F_\beta = E_{\frac{P_\beta^2}{2n_\beta}}[a - 3\delta, a + 3\delta] \otimes \mathbb{1}_{k_\beta}$

D'après le Lemme III.2, nous avons, $\exists\, \delta_0$ tel que $\forall \delta \leqslant \delta_0$

$$\| (\mathbb{1} - F'_\alpha) E_\beta G_0(z) \| < C \qquad \forall z \in N_{a,\delta}$$

de sorte que l'on a :

$$\| h_\alpha G_\beta F_\beta \psi \|^2 \leqslant 2 \| h_\alpha F'_\alpha G_\beta F_\beta \psi \|^2 + C[\| \psi \| + \| v_\beta G_\beta F_\beta \psi \|]^2 \tag{III.65}$$

En utilisant le Lemme III.11 dans cette dernière relation, on démontrerait le Corollaire III.11.*b* sans difficultés. En outre, on peut remarquer que nous n'avons plus besoin d'estimer le commutateur $[F_\alpha, v_\beta]$ sous ces hypothèses.

C) Étude des opérateurs A_{α_i, β_i}

Nous nous proposons dans la suite de ce chapitre, d'étudier le système d'équations (II.26), qui ont été obtenues pour tenir compte des nouvelles singularités qui apparaissaient dans les équations de Ginibre-Moulin-Newton, lorsque les potentiels v_α cessaient de décroître comme $(1 + |x_\alpha|)^{-2-\varepsilon}$, ou quand la dimension n était inférieure à 3. Mais il nous faut remarquer que si les hamiltoniens d'interaction de deux particules $\dfrac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + v_\alpha = \hat{h}_\alpha$ présentent des états liés, alors il nous reste encore dans les équations (II.26) des singularités dues à ces valeurs propres. Dans cette hypothèse, nous pourrons distinguer deux éventualités :

a) les hamiltoniens $\hat{h}_\alpha$ présentent un nombre fini de valeurs propres strictement négatives ;

b) les valeurs propres de h_α s'accumulent en zéro.

Nous ne pouvons actuellement rien dire dans cette deuxième hypothèse sinon que nous pouvons espérer que la méthode s'avère intéressante.

En ce qui concerne l'hypothèse *a*), il est clair que les méthodes proposées dans cet article et dans l'article [*1*] permettent de définir un système d'équations généralisant les équations (II.26) et (4.27 dans [*1*]), et dont le noyau peut être contrôlé au voisinage de l'axe réel. Néanmoins, pour éviter des difficultés techniques qui ne seraient pas essentielles bien que physiquement intéressantes, nous nous placerons dans le cas le plus simple. Ainsi, nous supposerons dans le reste de l'article les hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSES. — $\forall\alpha$, $\exists\, \rho_\alpha = d(1+|x_\alpha|)^{-C_\alpha}$, $d > 0$, $C_\alpha > 1$ *tel que*

i) $|v_\alpha| \leqslant \rho_\alpha$ *et* $|\nabla v_\alpha|^{\frac{1}{2}} \leqslant \rho_\alpha$

ii)

$$\rho_\alpha\left[\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + v_\alpha - z\right]^{-1}\rho_\alpha \tag{III.66}$$

est une famille d'opérateurs uniformément bornés dans $\mathbb{C} - [0, \infty[$ *et continue dans la fermeture du plan complexe coupé pour* $[0, \infty[$.

THÉORÈME III.1. — *Sous les hypothèses* (III.66), *nous avons*

i) $\forall n \geqslant 1$, $A_{\alpha_0,\beta_0}(z)$ *est une famille analytique d'opérateurs compacts de* $\mathcal{H}_{\beta_0}$ *dans* $\mathcal{H}_{\beta_0}$, *uniformément bornée pour* $z \in N_{a,\delta}$.

ii) *Si* $n \geqslant 3$ *la famille est de plus supérieurement et inférieurement continue quand* $|\operatorname{Im} z|$ *tend vers zéro.*

$$\begin{aligned} A_{\alpha_0,\beta_0}(z) &= v_\alpha^{\frac{1}{2}}F'_\alpha G_\alpha(z)F'_\beta\,|v_\beta|^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbb{1} + E'_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}G_\alpha(z)\,|v_\alpha|^{\frac{1}{2}})v_\alpha^{\frac{1}{2}}F'_\alpha G_0(z)\,|v_\beta|^{\frac{1}{2}}F'_\beta \end{aligned} \tag{III.67}$$

où

$$E'_\alpha F'_\alpha = F'_\alpha \qquad E'_\alpha = (1 - e(a-3\delta, a+3\delta))\left(\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}\right) \otimes \mathbb{1}_{k_\alpha}$$

L'opérateur $E'_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}G_\alpha(z)\,|v_\alpha|^{\frac{1}{2}}$ qui s'écrit sous la forme d'une intégrale directe :

$$\int^{\oplus} d\vec{P}_\alpha(1 - e(a-3\delta, a+3\delta))\left(\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}\right)v_\alpha^{\frac{1}{2}}\left[\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + v_\alpha - z + \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}\right]^{-1}|v_\alpha|^{\frac{1}{2}}$$

où les opérateurs sous l'intégrale sont uniformément bornés en $z \in N_{a,\delta}$ et continus, d'après le théorème I.1 et l'hypothèse (III.66), puisque quand $z \in N_{a,\delta}$ et $\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} \notin [a-3\delta, a+3\delta]$, $\operatorname{Re} z - \frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha} \notin [-2\delta, +2\delta]$. Il suffit donc d'étudier $v_\alpha^{\frac{1}{2}}F'_\alpha G_0\,|v_\beta|^{\frac{1}{2}}F'_\beta$. D'après le Corollaire III.10.A, puisque

$$(1+|x_\alpha|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}F'_\alpha G_0 F'_\beta(1+|x_\beta|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

est une famille d'opérateurs bornée pour tout n et pour tout $\varepsilon > 0$, pour en démontrer la continuité et la compacité, on peut évidemment se restreindre à les démontrer pour des opérateurs $h_\alpha G_0 h_\beta$ où h_α et h_β sont aussi décroissantes que l'on veut en $|x_\alpha|$ et $|x_\beta|$. Dans le cas où $n \geqslant 3$, ceci a été démontré dans [*1*]; voir Théorème I.2.

THÉORÈME III.2. — $A_{\alpha_1,\beta_0} = F_\alpha v_\beta^{\frac{1}{2}}$ *est borné de* $\mathcal{H}_{\beta_0} \mapsto \mathcal{H}_{\alpha_1}$ *ou de*

$\mathcal{H}_{\beta_0} \mapsto \mathcal{H}'_{\alpha_1}$. *Il suffit de montrer que* $\begin{pmatrix} f_\alpha \\ f'_\alpha \end{pmatrix} F_\alpha v_\beta^{\frac{1}{2}}$ *est un opérateur borné dans* $L^2(R^{2n})$

$$f_\alpha^{-1} = \sum_{\beta \neq \alpha} (1 + |x_\beta|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} ; \qquad f_\alpha'^{-1} = \sum_{\beta \neq \alpha} (1 + |x_\beta|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} + (1 + |x_\alpha|)^{-C_\alpha}$$

le résultat découle alors du Lemme III.1. On choisit ε tel que

$$\frac{1}{2} + \varepsilon \leqslant \frac{C_\alpha}{2} \qquad \forall \alpha .$$

THÉORÈME III.3. — *Sous les hypothèses* (III.66), *nous avons :*

i) $\forall n \geqslant 1$, $A_{\alpha_0,\beta_1}(z)$ *est une famille analytique et uniformément bornée d'opérateurs compacts de* $\mathcal{H}_{\beta_1}$ *dans* $\mathcal{H}_{\alpha_0}$, *lorsque* $z \in N_{a,\delta}$.

ii) *Si* $n \geqslant 3$, *elle possède les mêmes propriétés en tant que famille d'opérateurs de* $\mathcal{H}'_{\beta_1}$ *dans* $\mathcal{H}_{\alpha_0}$, *et elle est de plus continue supérieurement et inférieurement quand* Im z *tend vers zéro.*

Démonstration. — *i*) $A_{\alpha_0,\beta_1}(z) = v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha G_\alpha(z) v_\beta G_\beta(z) F_\beta$.

Pour l'étudier en tant qu'opérateur de $\mathcal{H}_{\beta_1}$ dans $\mathcal{H}_{\beta_0}$, il suffit d'étudier les opérateurs $v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha G_\alpha v_\beta G_\beta F_\beta h_\gamma = A'_{\alpha_0,\beta_1}(z)$ où $\gamma \neq \beta$ et $h_\gamma = (1 + |x_\gamma|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$. Les propriétés d'analyticité et de compacité sont évidentes pour chaque $z \in N_{a,\delta}$. Montrons donc que ces opérateurs sont uniformément bornés pour $z \in N_{a,\delta}$.

(III.68) $\quad A'_{\alpha_0,\beta_1}(z) = \left(1 + v_\alpha^{\frac{1}{2}} E'_\alpha G_\alpha(z) |v_\alpha|^{\frac{1}{2}}\right) v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha [G_0(z) - G_\beta(z)] F_\beta h_\gamma$

Nous avons déjà vu que $1 + v_\alpha^{\frac{1}{2}} E'_\alpha G_\alpha(z) |v_\alpha|^{\frac{1}{2}}$ était une famille analytique dans $N_{a,\delta}$ et continue dans la fermeture.

D'autre part, d'après le corollaire III.11.*b*, la famille d'opérateurs $v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha [G_0 - G_\beta] F_\beta h_\gamma$ est bien uniformément bornée.

Ce qui démontre la première partie du théorème III.3.

ii) Supposons maintenant $n \geqslant 3$.

a) Pour démontrer que la famille $A_{\alpha_0,\beta_1}(z)$ est bornée de $\mathcal{H}'_{\beta_1}$ dans $\mathcal{H}_{\alpha_0}$ il reste à démontrer que les opérateurs $v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha [G_0 - G_\beta] F_\beta \rho_\beta$ sont uniformément bornés dans $L^2(R^{2n})$. Mais en ce qui concerne $v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha G_\beta(z) F_\beta \rho_\beta$, ceci a été démontré au cours du Corollaire III.11.B.

Et puisque nous supposons que $\rho_\beta(x_\beta) = d(1 + |x_\beta|)^{-C}$ avec $C > 1$, $v_\alpha^{\frac{1}{2}} F'_\alpha G_0 F_\beta \rho_\beta$ est borné d'après le corollaire III.10.*a* car nous savons que $\rho_\beta G_0(z) \rho_\beta$ est uniformément borné, si $n \geqslant 3$ (Th. I.2).

b) Démontrons maintenant la continuité de ces opérateurs au voisinage de l'axe réel dans le cas $n \geqslant 3$. Pour cela, il suffit de démontrer la continuité pour les opérateurs de $L^2(R^{2n}) \mapsto L^2(R^{2n})$ suivants.

(III.69)
a) $h_\alpha F'_\alpha G_0(z) v_\beta G_\beta(z) F_\beta h_\gamma \qquad \alpha$ et $\gamma \neq \beta$
b) $h_\alpha F'_\alpha G_0(z) v_\beta G_\beta(z) F_\beta \rho_\beta$

où les fonctions h_α et h_γ peuvent être supposées aussi décroissantes que l'on veut en $|x_\alpha|$ et $|x_\beta|$;

Démontrons b); celui-ci peut s'écrire :

$$(\text{III}.70) \qquad h_\alpha F'_\alpha G_0(z) v_\beta G_\beta(z) F_\beta [F^1_\beta(a', \varepsilon) + F^{1'}_\beta(a', \varepsilon)] \rho_\beta$$

où $F^1_\beta(a', \varepsilon) = \rho^1_{\beta,\varepsilon}\left(\frac{P^2_\beta}{2n_\beta}\right) \otimes \mathbb{1}_{k_\beta}$, et où $f^1_{\beta,\varepsilon}(\lambda)$ est une fonction indéfiniment dérivable égale à 1 sur un voisinage de $\text{Re } z = a' \in]a - \delta, a + \delta[$ et dont le support est inclus dans l'intervalle $[a' - \varepsilon, a' + \varepsilon[$.

i) Tout d'abord, il est facile de montrer que pour chaque ε

$$h_\alpha F'_\alpha G_0 v_\beta G_\beta F_\beta F^{1'}(a', \varepsilon) \rho_\beta$$

est continue quand $\text{Im } z \to 0^\pm$ et $\text{Re } z = a'$. En effet, nous savons que $v_\beta^{\frac{1}{2}} G_\beta F^{1'\frac{1}{2}}(a', \varepsilon)\rho_\beta$ est continue comme conséquence du théorème 1.1 de Lavine; $h_\alpha F'_\alpha G_0 F^{1'\frac{1}{2}}(a, \varepsilon) v_\beta^{\frac{1}{2}}$ est aussi continue quand $\text{Im } z \to 0^\pm$. Puisque pour chaque valeur de ε, une modification immédiate du corollaire III.10.*a*) *i*), nous montre que $h_\alpha F'_\alpha G_0 F^1(a', \varepsilon) v_\beta^{\frac{1}{2}}$ peut être approché en norme par des opérateurs où et h_α et $v_\beta^{\frac{1}{2}}$ peuvent être remplacées par des fonctions aussi décroissantes que l'on veut; ces opérateurs sont alors continus en z quand $n \geqslant 3$.

ii) Étudions maintenant :

$$\begin{aligned}(\text{III}.71) \quad & F'_\alpha h_\alpha G_0(z) v_\beta G_\beta F_\beta F^1_\beta(a', \varepsilon) \rho_\beta \\ &= F'_\alpha h_\alpha G_0 F^{1\frac{1}{2}}_\beta(a', \varepsilon)[E_{\frac{k^2_\beta}{2n_\beta}}(0, 2\varepsilon) + \mathbb{1} - E_{\frac{k^2_\beta}{2n_\beta}}(0, 2\varepsilon)] v_\beta G_\beta F_\beta F^{1\frac{1}{2}}_\beta(a', \varepsilon)\rho_\beta\end{aligned}$$

Le deuxième terme qui intervient dans le membre de droite de (III.71) est continu puisque pour chaque ε, $G_0(z) F^{1\frac{1}{2}}_\beta(a', \varepsilon)(\mathbb{1} - E_{\frac{k_\beta}{2n_\beta}}(0, 2\varepsilon))$ est uniformément continu quand $\text{Im } z \mapsto 0$ et que de plus $v_\beta G_\beta F_\beta P_\beta$ est évidemment continue d'après l'hypothèse (III.66).

Maintenant, il est commode de réécrire (III.71) de la façon suivante : Soit $\tilde{F}_\alpha(\varepsilon)$ un opérateur positif de norme $\leqslant 1$, commutant avec P_α, k_α et tel que :

$$(\text{III}.72) \qquad \tilde{F}_\alpha(\varepsilon) F^1_\beta(a', \varepsilon) E_{\frac{k^2_\beta}{2m_\beta}}(0, 2\varepsilon) = F^1_\beta(a', \varepsilon) E_{\frac{k^2_\beta}{2m_\beta}}[0, 2\varepsilon)$$

Nous avons alors

$$F^1_\beta(a', \varepsilon) \geqslant E_{\frac{k^2_\beta}{2m_\beta}}[0, 2\varepsilon] F^1_\beta(a', \varepsilon)$$

$$\tilde{F}_\alpha(\varepsilon) F^1_\beta(a', \varepsilon) \geqslant E_{\frac{k^2_\beta}{2m_\beta}}(0, 2\varepsilon) F^1_\beta(a', \varepsilon)$$

$$(\mathbb{1} - \tilde{F}_\alpha(\varepsilon)) F^1_\beta(a', \varepsilon) \leqslant E'_{\frac{k^2_\beta}{2m_\beta}}(0, 2\varepsilon) F^1_\beta(a', \varepsilon)$$

Nous pouvons réécrire (III.71) :

$$(\text{III}.71) = F'_\alpha h_\alpha G_0(z)[\tilde{F}_\alpha + 1 - \tilde{F}_\alpha] F^1_\beta(a', \varepsilon) v_\beta G_\beta(z) F_\beta \rho_\beta$$

le terme qui provient de $(1 - \tilde{F}_\alpha(\varepsilon))F^1_\beta(a', \varepsilon)$ est bien continu d'après ce qui précède, et ceci $\forall\varepsilon$. Montrons maintenant qu'il existe une famille $\tilde{F}_\alpha(\varepsilon)$ telle que :

(III.73) $$\lim_{\varepsilon\to 0} \| F'_\alpha h_\alpha G_0(z)\tilde{F}_\alpha(\varepsilon)v_\beta G_\beta F_\beta F^1_\beta(a', \varepsilon)\rho_\beta \| = 0$$

Pour démontrer ceci, il suffit de vérifier que :

(III.74) $$\lim_{\varepsilon\to 0} \| h_\alpha \tilde{F}_\alpha(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \| = 0 .$$

Puisque nous avons

$$\| (1 + |x_\alpha|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon_0} F'_\alpha G_0(z)v_\beta G_\beta F_\beta \rho_\beta \| < C , \qquad \forall z \in N_{a,\delta}\ (\mathrm{Re}\ z = a')$$

Montrons donc (III.74). Il est clair que nous pourrions choisir

$$\tilde{F}_\alpha(\varepsilon) = \int^\oplus dP_\alpha l_{0,\varepsilon}(|k_\alpha - U(P_\alpha)|)$$

où $l_{0,\varepsilon}$ est une fonction suffisamment dérivable qui s'annule à l'extérieur de l'intervalle $[0, \delta']$, et valant 1 sur un voisinage de 0, δ' tendant vers zéro quand ε tend vers zéro.

Mais il est encore plus intéressant de construire la famille $\tilde{F}_\alpha(\varepsilon)$ de la façon suivante :

(III.75) $$\tilde{F}_\alpha(\varepsilon) = \int^\oplus dP_\alpha l_{0,1}(R(\varepsilon)\,|k_\alpha - U(P_\alpha)|)$$

où $R(\varepsilon)$ tend vers l'infini quand $\varepsilon \mapsto 0$.

(III.76) $$\begin{aligned} &\| h_\alpha(x_\alpha)\tilde{F}_\alpha(\varepsilon)(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \| \\ &\quad = \sup_{P_\alpha} \| h_\alpha(x_\alpha)l_{0,1}(R\,|k_\alpha - U(P_\alpha)|)(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \| \\ &\quad = \| h_\alpha(x_\alpha)l_{0,1}(R\,|k_\alpha|)(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \| \\ &\quad = \| h_\alpha(x_\alpha)U(R)l_{0,1}(|k_\alpha|)U(R)(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}\varepsilon_0} \| \end{aligned}$$

$U(R)$ désignant le groupe des dilatations dans $L^2(R^n)$. Nous avons donc :

$$U(R) - (k_\alpha)U(-R) = Rk_\alpha ; \qquad U(R)x_\alpha U(-R) = R^{-1}x_\alpha$$

Si l'on prend par exemple, pour $h_\alpha(x_\alpha)$, $e^{-|x_\alpha|}$, il découle des propriétés de $U(R)$:

(III.77) $$\begin{aligned} &\| h_\alpha(x_\alpha)\tilde{F}_\alpha(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \| \\ &= \| e^{-R|x_\alpha|}l_{0,1}(|k_\alpha|)(1 + R\,|x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \| \leqslant C \| e^{-R|x_\alpha|}l_{0,1}(|k_\alpha|) \| \\ &+ CR^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \| e^{-R|x_\alpha|}(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}(1 + |x_\alpha|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon_0}l_{0,1}(|k_\alpha|)(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \| \end{aligned}$$

Puisque $l_{0,1}(|k_\alpha|)$ est une fonction suffisamment dérivable, $\exists\, C' > 0$ tel que, $\forall\psi \in L^2(R^n)$

$$\| (1 + |x_\alpha|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon_0}l_{0,1}(|k_\alpha|)(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}\psi \|_\infty \leqslant C' \| \psi \|_2$$

Nous avons donc :

$$\text{(III.78)} \quad \| h_\alpha(x_\alpha)\tilde{F}_\alpha(\varepsilon)(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}\psi \| \leqslant C_1 \| e^{-R|x_\alpha|} \| \| \psi \| + C_2 \| R^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} e^{-R|x_\alpha|}(1 + |x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \| \| \psi \| \leqslant C_3 R^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0 - \frac{n}{2}} \| \psi \| .$$

Notons que ceci tend vers zéro dès que $n \geqslant 2$.

Ainsi, nous avons démontré la continuité de l'opérateur b) dans (III.69) dès que $n \geqslant 3$. On démontrerait de façon analogue la continuité de l'opérateur a) dans (III.69).

THÉORÈME III.4. — *Toujours sous les mêmes hypothèses que les théorèmes précédents, nous avons :*

i) $\forall n$, *la famille d'opérateurs* $A_{\alpha_1,\beta_1}(z)$ *est une famille analytique d'opérateurs compacts de* $\mathcal{H}_{\beta_1}$ *dans* $\mathcal{H}_{\alpha_1}$ *et uniformément bornés.*

ii) *Si* $n \geqslant 3$, *la famille* $A_{\alpha_1,\beta_1}(z)$ *est une famille analytique d'opérateurs (non compacts) de* $\mathcal{H}'_{\beta_1}$ *dans* $\mathcal{H}'_{\alpha_1}$, *uniformément bornée lorsque* $z \in N_{a,\delta}$; *elle est de plus continue supérieurement et inférieurement quand* $|\operatorname{Im} z| \mapsto 0$.

Démonstration. — Soit n quelconque. Nous avons alors à étudier les opérateurs de $L^2(R^{2n})$ dans $\mathcal{H}_{\alpha_1}$ de la forme :

$$F_\alpha v_\beta G_\beta(z) F_\beta h_\gamma \qquad \text{avec} \qquad \gamma \neq \beta \quad h_\gamma = (1 + |x_\gamma|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

$$\text{(III.79)} \quad = F_\alpha F_\beta^1 v_\beta G_0(z)[1 + v_\beta G_\beta(z)] F_\beta h_\gamma = F_\alpha F_\beta^1 G_0 v_\beta [1 + v_\beta G_\beta] F_\beta h_\gamma + F_\alpha F_\beta^1 G_0 [H_0, v_\beta] G_\beta F_\beta h_\gamma$$

D'après le Lemme III.3, et l'hypothèse sur v_β, il suit :

$$\text{(III.80)} \quad \| (1 + |x_\beta|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} F_\alpha v_\beta G_\beta(z) F_\beta h_\gamma \| \leqslant C \| (1 + |x_\beta|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} F_\alpha F_\beta^1 G_0 \rho_\beta \| \| \rho_\beta G_\beta F_\beta h_\gamma \|$$

ce qui est borné d'après le Corollaire III.11 et le Lemme III.3, $\forall z$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 4.

Si $n \geqslant 3$, la propriété de l'opérateur A_{α_1,β_1} d'être borné de $\mathcal{H}'_{\beta_1} \mapsto \mathcal{H}'_{\alpha_1}$ découle encore du fait que l'on a par hypothèse : $\| \rho_\beta G_\beta F_\beta \rho_\beta \| \leqslant C$ et la continuité a déjà été démontrée dans le théorème précédent.

D) Propriétés des solutions de l'équation (II.26). Expressions de la résolvante en fonction de ces solutions

Soit $a \geqslant a, > 0$ et $z \in N_{a,\delta}$.

Soit $\varphi \in L^2(R^{2n})$ et $\mathring{J}(z)\varphi \in \oplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha (\mathring{J}(z)\varphi)_\alpha = v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha(z)\varphi$. D'après (II.20), nous avons (voir [*1*]).

$$\text{(III.81)} \qquad G(z)\varphi = G_0(z)\varphi + G_0(z) \sum_\alpha |v_\alpha|^{\frac{1}{2}} \phi_\alpha(z)$$

où $(\phi_\alpha(z))_\alpha$ est la solution de l'équation (II.21), avec pour condition initiale

$$\phi_\alpha^0 = v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha(z)\varphi$$

Si nous appelons alors $J(z)\varphi$ le vecteur $\in \oplus_\alpha(L^2(R^{2n}) \oplus L^2(R^{2n}))$ défini par

$$(J(z)\varphi)_{\alpha_0} = v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha(z)\varphi$$
$$(J(z)\varphi)_{\alpha_1} = \varphi$$

nous pouvons exprimer la résolvante $G(z)$ en utilisant (II.25) dans (III.81)

$$\text{(III.82)} \quad G(z)\varphi = G_0(z)\varphi + G_0(z)\sum_\alpha |v_\alpha|^{\frac{1}{2}}[F'_\alpha \phi_{\alpha_0}(z) + F_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha(z)\phi_{\alpha_1}(z)]$$

où $\phi_{\alpha_i}(z)$ est la solution de l'équation (II.26) avec comme condition initiale :

$$\text{(III.83)} \quad \bar{J}(z)\varphi = \begin{cases} F'_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}} G_\alpha \varphi & \alpha_0 \\ F_\alpha \varphi & \alpha_1 \end{cases}$$

$$\text{(III.84)} \quad G(z)\varphi = G_0(z)\varphi + \sum_\alpha \{ G_0(z)\,|v_\alpha|^{\frac{1}{2}} F'_\alpha \phi_{\alpha_0}(z) + [G_0(z) - G_\alpha(z)]F_\alpha \phi_{\alpha_1}(z) \}$$

Pour des valeurs purement complexes de $z \in N_{a,\delta}$, la formule ci-dessus est parfaitement justifiée à cause de l'unicité des solutions du système (II.21) qui découle de l'existence de l'opérateur $(1 - A(z))^{-1}$ (A étant défini dans la formule (II.19')) (voir [*1*]). Elle relie l'expression de la résolvante aux solutions du système (II.26).

Soit $a > a_0 > 0$ et $z \in N_{a,\delta}$.

PROPOSITION III.5. — *Soit $\tilde{A}$ et $\tilde{A}'$ les opérateurs de $\mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ et respectivement de $\mathscr{H}' \mapsto \mathscr{H}'$ définis par les éléments de matrices :*

$$\tilde{A}_{\alpha_i,\beta_i}(z) = A_{\alpha_i,\beta_i}(z)(1 - \delta_{\alpha\beta})$$

où les opérateurs $A_{\alpha_i,\beta_i}(z)$ sont définis dans la formule (II.28). *Nous avons alors les propriétés suivantes :*

i) *$\forall n$ $\tilde{A}(z)$ est une famille analytique d'opérateurs de $\mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$, uniformément bornés $\forall z \in \overline{N_{a,\delta}^{\pm}}$.*

De plus, pour tout $z \in N_{a,\delta}$, $A(z)^2$ est un opérateur compact de $\mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ et $\|A^2(z)\| \to 0$, quand $|\operatorname{Im} z| \mapsto \infty$ $z \in N_{a,\delta}$, et $(1 - A(z))^{-1}$ existe.

ii) *$\forall n \geqslant 3$ $\tilde{A}'(z)$ est une famille analytique d'opérateurs de $\mathscr{H}' \mapsto \mathscr{H}'$ $z \in N_{a,\delta}$, est continue dans les ensembles $\overline{N_{a,\delta}^{+-}}$.*

$A^2(z)$ est encore un opérateur compact de $\mathscr{H}' \mapsto \mathscr{H}'$ et $\|A^2(z)\| \to 0$ quand $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ et $z \in N_{a,\delta}$. De plus, il existe un ensemble $F_{a,\delta}$, contenu

dans l'intervalle $[a - \delta, a + \delta]$, fermé et de mesure nulle, *tel que* $[\mathbb{1} - \tilde{A}'(z)]^{-1}$ *existe et est une fonction continue de z dans les ensembles :* $\overline{N_{a,\delta}^{+,-}}/F_{a,\delta}$.

$z \in N_{a,\delta}$, on peut vérifier facilement que $\tilde{A}^2(z)$ et $\tilde{A}^2(z)$ sont des opérateurs compacts de $\mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ et de $\mathscr{H}' \mapsto \mathscr{H}'$, ce qui nous autorise à utiliser l'alternative de Freedhom pour inverser les opérateurs $\mathbb{1} - \tilde{A}(z)$ et $\mathbb{1} - \tilde{A}'(z)$. Ainsi, $[1 - \tilde{A}(z)]^{-1}$ existe $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{1} - \tilde{A}(z))\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$.

Mais il est évident qu'une solution non triviale à l'équation homogène associée à (II.26), pour une valeur z, donne lieu à une solution non triviale pour l'équation homogène associée à l'équation (II.21). Et il a été montré dans que pour une valeur complexe de z, son existence était impossible. Ceci démontre donc la partie (1) de la Proposition.

Dans le cas $n \geqslant 3$, $\tilde{A}'(z)$ admet, d'après les propriétés démontrées dans le paragraphe précédent, deux prolongements continus dans $\overline{N_{a,\delta}^{+,-}}$, dont le carré est compact. Ceci se vérifie facilement par z complexe et la propriété de compacité se conserve sur l'axe réel par continuité. Ainsi, puisque $[1 - \tilde{A}'(z)]^{-1}$ existe pour $\operatorname{Im} z \neq 0$, $\exists$ un ensemble fermé $\mathscr{F}_{a,\delta} \subset [a - \delta, a + \delta]$, de mesure de Lebesgue nulle, tel que $[\mathbb{1} - \tilde{A}'(z)]^{-1}$ existe et soit continue dans les ensembles $\overline{N_{a,\delta}^{+,-}}/\mathscr{F}_{a,\delta}$, voir [7].

Remarque. — Dans les résultats des chapitres III.C et III.D, nous avons fait une distinction entre les cas $n \geqslant 1$ et $n \geqslant 3$; et il est apparu pour un certain nombre de raisons que nous avons pu démontrer des résultats plus forts dans le cas $n \geqslant 3$; $\mathscr{H}_{\alpha_i}$ peut être remplacé par $\mathscr{H}'_{\alpha_i}$ dans le cas $n \geqslant 3$.

Nous utiliserons les espaces $\mathscr{H}'_{\alpha_i}$, pour démontrer plus simplement la complétude asymptotique dans le paragraphe suivant.

On a pu démontrer les propriétés de continuité de l'opérateur $\tilde{A}'(z)$ au voisinage de l'axe réel si $n \geqslant 3$ et non celle de $\tilde{A}(z)$ si $n < 3$.

Aussi, dans le chapitre qui suit, nous nous restreindrons au cas $n \geqslant 3$ pour démontrer la complétude asymptotique de certain système de trois particules. Néanmoins, il est clair que les résultats des paragraphes III.C et III.D peuvent déjà avoir des applications dans les cas $1 \leqslant n < 3$.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS

A) Rappel sur les opérateurs « smooth » au sens de Kato

Soit H un opérateur self-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et $-G(z) = (H - z)^{-1}$. Kato a démontré que pour un opérateur fermé quelconque les expressions suivantes sont égales. (Elles peuvent être infinies simultanément.)

$$\text{(IV.1)} \qquad |||\,\mathrm{T}\,|||_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\pi} \sup_{\substack{\varphi \neq 0 \\ \varepsilon \neq 0, \lambda \in \mathbf{R}}} \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|^2} \|\mathrm{TG}(\lambda + i\varepsilon)\varphi\|^2$$

$$\text{(IV.2)} \qquad = \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \neq 0} \frac{1}{\|\varphi\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathrm{T}e^{-it\mathrm{H}}\varphi\|^2 \, dt$$

l'opérateur T est dit « H-smooth » si les expressions ci-dessus sont finies. Soit B un ensemble borélien fermé de R, on dira que T est H-smooth sur l'ensemble B, si $\mathrm{TE_H(B)}$ est H-smooth ; nous avons alors (voir Lavine) :

$$|||\,\mathrm{TE_H(B)}\,|||_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\pi} \sup_{\substack{\varphi \neq 0 \\ \varepsilon \neq 0, \lambda \in \mathbf{R}}} \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|^2} \|\mathrm{TG}(\lambda + i\varepsilon)\varphi\|^2$$

PROPOSITION IV.1. — *Soit* $\mathrm{H_1}$ *et* $\mathrm{H_0}$ *deux opérateurs self-adjoints sur* $\mathscr{H}$ *et* J *un opérateur borné de* $\mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$.

Si $\mathrm{H_1J - JH_0}$ *peut s'écrire* $\sum_{j=1}^{m} \mathrm{T}_j^{1*}\mathrm{T}_j^0$ *où* $\forall j \mathrm{T}_j^1$ *est borné, et* T_j^1 *et* T_j^0 *sont respectivement des opérateurs* $\mathrm{H_1}$ *et* $\mathrm{H_0}$*-smooth dans* B,

$$\mathrm{s.}\lim_{t \to \pm\infty} e^{+i\mathrm{H}_1 t} \mathrm{J} e^{-i\mathrm{H}_0 t} \mathrm{E}_{\mathrm{H}_0}(\mathrm{B})$$

existent voir [*11*].

Soit $n \geqslant 3$.

THÉORÈME IV.1. — *Supposons que les potentiels d'interactions soient tels que les conditions* (III.66.*i, ii*) *soient satisfaites.*

Alors les opérateurs d'ondes existent et sont complets dans le sens suivant :

$$\mathrm{s.}\lim_{t \to \pm\infty} e^{+i\mathrm{H}t} e^{-i\mathrm{H}_0 t} = \Omega_0^{\pm}$$

existent et

$$\mathrm{R}\Omega_0^{\pm} = \mathrm{R}\Omega_0^{\pm} = \mathscr{H}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})$$

où $\mathrm{R}\Omega_0^{\pm}$ *désigne l'ensemble de valeurs des opérateurs* $\Omega_0^{\pm}$ *et* $\mathscr{H}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})$ *l'ensemble des vecteurs du spectre absolument continu de l'hamiltonien*

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + t \sum_{\alpha} v_{\alpha}$$

DÉMONSTRATION

A) *Existence des opérateurs d'ondes*

Soit $\varepsilon > 0$, définissons $\mathrm{P}_\alpha = f_{0,\varepsilon}\left(\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha}\right) \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{P}_\alpha}$ où $f_{0,\varepsilon}(\lambda)$ est une fonction positive, inférieure à 1, suffisamment régulière, prenant la valeur 1 sur $[0, \varepsilon]$ et 0 sur $[2\varepsilon, \infty[$.

Soit $P'_\alpha = \mathbb{1} - P_\alpha$. Puisque $\mathbb{1} - f_{0,\varepsilon}\left(\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha}\right)$ converge fortement vers $\mathbb{1}$ dans $L^2(R^n)$ quand $\varepsilon \mapsto 0$, il en est de même de P'_α (dans $L^2(R^{2n})$) d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Nous avons aussi :

$$s.\lim_{\varepsilon\to 0} \prod_\alpha P'_\alpha(\varepsilon) = \mathbb{1}$$

il est donc suffisant de démontrer l'existence des limites suivantes :

$$\text{(IV.3)} \qquad s.\lim\, e^{+iHt}e^{-iH_0t}\prod_\alpha P'_\alpha(\varepsilon)E_{H_0}[a_0, \mu]$$

pour chaque valeur $\varepsilon > 0$, $0 < a_0 < \mu$, fixées.

ε, a_0 et μ étant fixées, choisissons δ suffisamment petit, de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites :

i) $\exists\, C > 0$ tel que

$$\text{(IV.4)} \quad (H_0 - z)^{-1}P'_\alpha(\varepsilon)F_\alpha(3\delta) \leqslant C \qquad \forall a \geqslant a_0 \quad \text{et} \quad z \in N_{a,\delta}.$$

Nous avons :

ii)

$$\text{(III.5)} \qquad F_\alpha(\delta)F_\alpha^{2'}(3\delta) = 0$$

Nous pouvons alors trouver une suite finie d'ensembles $N_{a_n,\delta}$, $a_n \in [a_0, \mu]$ tels que $\bigcup_n N_{a_n,\delta} \supset N_{[a_0,\mu]}$. Soit $\mathscr{F}_{a_0,\mu,\delta} = \bigcup_n \mathscr{F}_{a_n,\delta}$ où $\mathscr{F}_{a_n,\delta}$ sont les ensembles fermés de mesure nulle définis dans la proposition (III.5 *ii*). Soit B une réunion finie quelconque d'intervalles fermés $\subset [a_0, \mu]$ tels que $B \cap \mathscr{F}_{a_0,\mu,\delta} = \emptyset$. Alors $[1 - \tilde{A}'(z)]^{-1}$ existe et est une famille continue d'opérateurs bornés de $\mathscr{H}' \mapsto \mathscr{H}'$, dans les ensembles $N^{+-}(B)$, conformément à la proposition (III.5 *ii*). Et pour démontrer (IV.3), il suffit de démontrer :

$$\text{(IV.5)} \qquad s.\lim_{t\to\pm\infty} e^{+iHt}e^{-iH_0t}\prod_\alpha P'_\alpha(\varepsilon)E_{H_0}(B) \quad \text{existent}$$

Nous avons :

$$\text{(IV.6)} \quad H\prod_\alpha P'_\alpha - \prod_\alpha P'_\alpha H_0 = \sum_\alpha v_\alpha P'_\alpha \prod_{\beta\neq\alpha} P'_\beta$$

$$= \sum_\alpha \left\{ P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha P'^{\frac{1}{2}}_\alpha + [v_\alpha, P'^{\frac{1}{2}}_\alpha]P'^{\frac{1}{2}}_\alpha \right\} \prod_{\beta\neq\alpha} P'_\beta .$$

Et d'après la proposition (IV.1), pour démontrer l'existence de

$$s.\lim e^{+iHt}e^{-iH_0t}\prod_\alpha P'_\alpha E_{H_0}(B),$$

il suffit de démontrer le Lemme suivant :

LEMME IV.1.

(IV.7) a) $|v_\alpha|^{\frac{1}{2}}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha$ *est* H *et* H_0-*smooth sur* B, *et*
b) $[v_\alpha, P'^{\frac{1}{2}}_\alpha]P'^{\frac{1}{2}}_\alpha = T_1^*T_0$ *où* T_1 *est borné et* H-*smooth et* T_0, H_0-*smooth sur*, B.

a) Il est facile de voir d'après la propriété (IV.4) *i*, le lemme III.1 et le corollaire III.10 que $v_\alpha^{\frac{1}{2}}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha G_0 P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}$ est uniformément borné en fait dans $N_{a_0,\mu}$, ce qui prouve que $v_\alpha^{\frac{1}{2}}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha$ est H_0-smooth puisque :

$$\sup_{\substack{\varepsilon\neq 0 \,\|\varphi\|=1\\ \lambda\in B}} \varepsilon \| v_\alpha^{\frac{1}{2}}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha G_0(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2 \leqslant \sup_{\substack{\lambda\in B\\ \varepsilon\neq 0}} \varepsilon \| G_0(\lambda+i\varepsilon)P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}\|^2$$
$$\leqslant 2\sup_{\substack{\lambda\in B\\ \varepsilon\neq 0}} \| v_\alpha^{\frac{1}{2}}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha G_0(\lambda+i\varepsilon)P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}\|$$

D'autre part, soit Re $z\in B$; $\exists\, n$ tel que $z\in(a_n-\delta, a_n+\delta)/\mathscr{F}_{a_n,\delta}$

(IV.8) $$v_\alpha^{\frac{1}{2}}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha G(z)P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}} = v_\alpha^{\frac{1}{2}}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha(1-GV)G_0(F_\alpha^2(3\delta)+F_\alpha^{2'}(3\delta))P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}$$

L'opérateur

(IV.9) $$(1+|x_\alpha|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}G_0(z)F_\alpha^2(3\delta)P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}$$

étant borné, si $z\in N_{a_n,\delta}$ d'après IV.4.*i* et le « Lemme III.3 ».
Il suffit donc de démontrer que les opérateurs suivants :

(IV.10) $$v_\alpha^{\frac{1}{2}}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha(1+G(z)V)(1+|x_\alpha|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

(IV.11) $$v_\alpha^{\frac{1}{2}}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha G(z)F_\alpha^{2'}(3\delta)P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}$$

sont uniformément bornés pour $z\in N_{a_n,\delta}$.
Ainsi, dans ces conditions, nous avons :

(IV.12)
$$\left.\begin{aligned}(\bar{J}(z)\varphi')_{\beta_0} &= F'_\beta v_\beta^{\frac{1}{2}}G_\beta(z)F_\alpha^{2'}(3\delta)P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}\varphi\\ (\bar{J}(z)\varphi')_{\beta_1} &= \bar{F}_\beta F_\alpha^{2'}P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}\varphi\end{aligned}\right\}\quad \beta\neq\alpha$$
$$(\bar{J}(z)\varphi')_{\alpha_0} = F'_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}G_\alpha(z)F_\alpha^{2'}(3\delta)P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}\varphi$$
$$(\bar{J}(z)\varphi')_{\alpha_1} = F_\alpha F_\alpha^{2'}(3\delta)P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}\varphi = 0$$
$$\varphi' = F_\alpha^{2'}(3\delta)P'^{\frac{1}{2}}_\alpha v_\alpha^{\frac{1}{2}}\varphi$$

D'après les résultats obtenus précédemment, il s'ensuit que $\bar{J}(z)\varphi$ est une fonction continue pour $z\in\overline{N^{+-}_{a_n,\delta}}$ à valeur dans $\mathscr{H}'$, ceci $\forall a_n$. D'après la proposition IV.1, il s'ensuit que pour chaque valeur a_n, lorsque $z \in N_{a_n,\delta} \cap B$

$$\text{(IV.13)} \quad G(z)F_\alpha^{2'}(3\delta)P_\alpha'^{\frac{1}{2}}v_\alpha^{\frac{1}{2}}\varphi = G_0(z)P_\alpha'^{\frac{1}{2}}v_\alpha^{\frac{1}{2}}\varphi + \sum_\alpha G_0(z)v_\alpha^{\frac{1}{2}}F_\alpha'\phi_{\alpha_0}(z) + \sum_\alpha (G_0(z) - G_\alpha(z))F_\alpha\phi_{\alpha_1}(z)$$

où les vecteurs $\phi_{\alpha_0}(z)$ et $\phi_{\alpha_i}(z)$ sont des vecteurs dans $\mathscr{H}_{\alpha_0}$ et $\mathscr{H}'_{\alpha_1}$ uniformément bornés et continus dans $N_{a_n,\delta} \cap B$ et $\| \varphi \| \leqslant 1$. Ainsi, d'après (III.81), pour

$$\text{(IV.14)} \quad \| v_\alpha^{\frac{1}{2}}P_\alpha'^{\frac{1}{2}}G(z)F_\alpha^{2'}(3\delta)P_\alpha'^{\frac{1}{2}}v_\alpha^{\frac{1}{2}} \| \leqslant C \{ \| v_\alpha^{\frac{1}{2}}P_\alpha'^{\frac{1}{2}}G_0(z)F_\alpha^{2'}(3\delta)v_\alpha^{\frac{1}{2}} \| + \| v_\alpha^{\frac{1}{2}}P_\alpha'G_0(z)F_\alpha'v_\alpha^{\frac{1}{2}} \| + \sum_{\alpha\beta} \| v_\alpha^{\frac{1}{2}}P_\alpha'^{\frac{1}{2}}[G_0(z) - G_\alpha(z)]F_\alpha h_\beta \|$$

où

$$h_\beta = (1 + |x_\beta|)^{-\mu}, \qquad \mu > \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \beta \neq \alpha$$

et

$$h_\alpha = \rho_\alpha(x_\alpha) = (1 + |x_\alpha|)^{-C} \qquad C > 1 .$$

Il est facile de voir, d'après les résultats démontrés précédemment et la propriété (IV.4.*i*), que le membre de droite de (IV.14) est alors uniformément borné, $z \in N_{a_n,\delta} \cap B$.

Regardons maintenant l'opérateur (IV.10).

D'après ce qui précède, il suffit de vérifier que la composition des opérateurs $\bar{J}_n(z) \vee (1 + |x_\alpha|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ est uniformément continue en $z \in \overline{N_{a_n,\delta}^{+-}}$ comme opérateurs de $L^2(R^{2n}) \mapsto \mathscr{H}'$. Ceci découle dans le cas $n \geqslant 3$ des théorèmes du chapitre III.C.

Ainsi, nous avons démontré l'assertion *a*) du Lemme IV.1. Pour démontrer l'assertion *b*), utilisons le fait que,

$$\rho_\alpha^{-1}(x_\alpha)[v_\alpha, P_\alpha^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)]\rho_\alpha^{-1}(x_\alpha) \quad \text{est borné de} \quad L^2(R^{2n}) \mapsto L^2(R^{2n})$$

Il faut alors montrer $\rho_\alpha(x_\alpha)$ est H et H_0-smooth sur B, et il suffit de vérifier que :

$$\sup_{\substack{\lambda \in B \\ \varepsilon \neq 0}} \left\| \rho_\alpha \begin{pmatrix} G(\lambda + i\varepsilon) \\ G_0(\lambda + i\varepsilon) \end{pmatrix} \rho_\alpha \right\| \leqslant C$$

Ceci découle sans difficulté de ce que $\bar{J}(z)\rho_\alpha : L^2(R^{2n}) \mapsto \mathscr{H}'$ est un opérateur continu pour $z \in N_{a_n,\delta} \cap B$, $\forall a_n$, de la proposition III.5 et du corollaire III.11.*b*.

B) *Complétude des opérateurs d'ondes*

Remarquons tout d'abord qu'exactement de la même façon que nous avons démontré l'existence, pour chaque ε, de la limite suivante :

$$\underset{t \to \pm\infty}{s.\text{Lim}}\, e^{+iHt} \prod_\alpha P_\alpha'(\varepsilon) e^{-iH_0 t}$$

nous pouvons démontrer l'existence de :

$$(\mathrm{IV}.15') \qquad s.\lim_{t\to\pm\infty} e^{+i\mathrm{H}_0 t}\prod_\alpha \mathrm{P}'_\alpha(\varepsilon)e^{-i\mathrm{H}t}\mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})$$

Cette propriété est importante dans la démonstration de la complétude, mais pour pouvoir l'utiliser, il faut tout d'abord démontrer les propriétés suivantes :

LEMME IV.2.

a) $s.\ \mathrm{Lim}\ e^{+i\mathrm{H}t}\mathrm{P}'_\alpha(\varepsilon)e^{-i\mathrm{H}t}\mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H}) = \mathrm{P}'^{\pm}_\alpha(\varepsilon)$ *existent.*
b) $\mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})\mathrm{P}'^{\pm}_\alpha(\varepsilon) = \mathrm{P}'^{\pm}_\alpha(\varepsilon)$
c) $s.\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{P}'^{\pm}_\alpha(\varepsilon) = \mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})$.

Supposons pour l'instant les propriétés du Lemme IV.2 satisfaites. D'après la propriété *c*) il suffit de démontrer l'existence pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé de :

$$(\mathrm{IV}.16) \qquad \lim_{t\to\pm\infty} e^{+i\mathrm{H}_0 t}e^{-i\mathrm{H}t}\prod_\alpha \mathrm{P}'^{\pm}_\alpha(\varepsilon)\varphi \qquad \forall\varphi\in\mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})$$

et d'autre part, à cause des propriétés *a*) et *b*), nous avons :

$$(\mathrm{IV}.17) \qquad \lim_{t\to\pm\infty} e^{+i\mathrm{H}_0 t}e^{-i\mathrm{H}t}\prod_\alpha \mathrm{P}'^{+}_\alpha(\varepsilon)\varphi - e^{+i\mathrm{H}_0 t}\prod_\alpha \mathrm{P}'_\alpha(\varepsilon)e^{-i\mathrm{H}t}\varphi = 0$$

Ce qui démontrerait ainsi d'après (IV.15'), l'existence de

$$s.\ \mathrm{Lim}\ e^{+i\mathrm{H}_0 t}e^{-i\mathrm{H}t}\mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})$$

et donc le théorème IV.1.

Il nous reste donc à démontrer le Lemme IV.2.

a) L'existence se démontre encore en utilisant la proposition IV.1, avec

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_0 = \mathrm{H}\ ; \quad \mathrm{J} = \mathrm{P}'_\alpha(\varepsilon)$$

et repose sur la propriété :

$$= [v_\alpha, \mathrm{P}'_\beta(\varepsilon)] = \rho_\alpha\ ; (x_\alpha)\mathrm{C}\ ; \rho_\alpha(x_a)$$

où C est un opérateur borné.

b) La propriété

$$\mathrm{P}'^{+}_\alpha(\varepsilon)\mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})\varphi = \mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})\mathrm{P}'^{+}_\alpha(\varepsilon)\mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})\rho$$

provient du fait que $[e^{+i\mathrm{H}s}, \mathrm{P}'^{+}_\alpha(\varepsilon)] = 0 \quad \forall s$, et donc (voir Kato [*10*]), $\mathrm{P}'^{+}_\alpha(\varepsilon)$ commute avec $\mathrm{E}_{\mathrm{a.c}}(\mathrm{H})$.

c) Démontrons que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{P}^{+}_\alpha(\varepsilon)\varphi = 0\,.$$

Puisque la famille $P_\alpha^+(\varepsilon)$ est évidemment uniformément bornée, il suffit de supposer que $\varphi = E_H[a_0, \mu]\varphi'$ où

$$(1 + |x_\alpha|)^\mu \varphi' \in L^2(R^{2n}), \qquad \forall\alpha \quad \mu > \frac{1}{2} \quad a_0 > 0 .$$

Nous pouvons fixer une valeur δ, suffisamment petite, une suite d'intervalles $]a_n - \delta, a_n + \delta[$, telle que $\bigcup_n N_{a_n,\delta} = N_{[a_0,\mu]}$; La suite de fermés de mesure nulle associée dans la proposition III.5 : $\mathscr{F}_{a_n,\delta}$. Nous pouvons nous restreindre à supposer que $\varphi = E_H[a, b]\varphi$ où

$$[a, b] \subset]a_n - \delta, a_n + \delta[/\mathscr{F}_{a_n,\delta} .$$

Alors :

(IV.18) $$\| P^+(\varepsilon)\varphi \| = \lim_{t\to+\infty} \| P_\alpha(\varepsilon)e^{-iHt}E_H[a, b]\varphi \|^2$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n\to 0} 2n \int_0^\infty e^{-2nt} \langle e^{-iHt}E_H[a, b]\varphi \mid P_\alpha^2(\varepsilon)e^{-iHt}E_H[a, b]\varphi \rangle \, dt$$

Et d'après l'égalité de Parseval

(IV.19) $$= \lim_{n\to 0} \mu^{-1}n \int_{-\infty}^{+\infty} dE \langle G(E + in)\varphi \mid P_\alpha^2(\varepsilon)G(E + in)\varphi \rangle$$

(IV.20) $$= \operatorname*{Lim}_{n\to 0} \mu^{-1}n \int_a^b dE \langle G(E + in)\varphi' \mid P_\alpha^2(\varepsilon)G(E + in)\varphi' \rangle$$

Ce dernier passage découle de façon standard du fait que $\varphi \in E_{a.c}(H)\mathscr{H}$ et du fait que $E_H[a, b]\varphi' = \varphi$, $[a, b] \subset [a', b'] \subset [a_n - \delta, a_n + \delta[/\mathscr{F}_{a_n,\delta} \subset \sigma_{a.c}(H)$, comme le prouve ce qui suit : IV.21.

Puisque le vecteur φ' est suffisamment décroissant dans toutes les directions, $\bar{J}(z)\varphi'$ est une fonction continue dans $z \in \overline{N_{a,\delta}^{+-}}$ à valeur dans

$$\bigoplus_\alpha (\mathscr{H}_{\alpha_0} \oplus \mathscr{H}'_{\alpha_1}) = \bar{\mathscr{H}}' .$$

$$(\phi_{\alpha_i}(z))_{\alpha_i} = [\mathbb{1} - \tilde{A}'(z)]^{-1}\bar{J}(z)\varphi'$$

est aussi une fonction continue de $\overline{N_{a,b}^{+-}}$ dans $\bar{\mathscr{H}}'$.

On vérifie alors facilement que

(IV.21) $$\sup_{\substack{E\in[a,b] \\ \varepsilon>0, n>0}} \eta \| P_\alpha(\varepsilon)G(E + in)\varphi' \|^2 \leqslant \sup_{\substack{E\in[a',b'] \\ n>0}} \eta \| G(E + in)\varphi' \|^2 \leqslant C$$

De sorte que nous avons l'inégalité suivante d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue :

(IV.22) $$\| P_\alpha^+(\varepsilon)\varphi \|^2 \leqslant \int_a^b dE \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to 0} \eta \| P_\alpha(\varepsilon)G(E + in)\varphi' \|^2$$

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \| P_\alpha^+(\varepsilon)\varphi \|^2 \leqslant \int_a^b dE \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to 0} \eta \| P_\alpha(\varepsilon)G(E + in)\varphi' \|^2$$

Pour $E \in [a, b]$, nous avons :

$$(\text{IV}.23) \quad \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to 0} \eta^{\frac{1}{2}} \| P_\alpha(\varepsilon) G(E+in)\varphi' \|$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to 0} \eta^{\frac{1}{2}} \Bigg\| P_\alpha(\varepsilon)\Bigg[G_0(E+in)\varphi' + \sum_\beta G_\beta(E+in)F'_\beta v_\beta^{\frac{1}{2}} \phi_{\beta_0}(E+in)\Bigg]$$

$$+ P_\alpha(\varepsilon)\Bigg[\sum_\beta (G_0(E+in) - G_\beta(E+in))F_\beta \phi_{\beta_1}(E+in)\Bigg]\Bigg\|$$

Puisque les opérateurs $\eta^{\frac{1}{2}}G_0(E + in)P_\alpha$, $\eta^{\frac{1}{2}}G_\beta(E + in)F'_\beta v_\beta^{\frac{1}{2}}$ $\eta^{\frac{1}{2}}[G_0(E + in) - G_\beta(E + in)]F_\beta$ sont respectivement uniformément bornés en tant qu'opérateurs de $L^2(R^{2n}) \mapsto L^2(R^{2n})$, de $\mathscr{H}_{\beta_0} \mapsto L^2(R^{2n})$ et de $\mathscr{H}_{\beta_1}$ dans $L^2(R^{2n})$, nous pouvons remplacer dans l'expression (IV.23), φ, $\phi_{\beta_0}(E + in)$, $\phi_{\beta_1}(E + in)$ par des vecteurs φ, $\phi_{\beta_0}(E + io)$, $\phi_{\beta_1}(E + io)$ appartenant respectivement à des ensembles denses dans $L^2(R^{2n})$, $\mathscr{H}_{\beta_0}$, $\mathscr{H}_{\beta_1}$: On peut donc les supposer à support compact dans $L^2(R^{2n})$.

Simultanément, on peut évidemment remplacer dans (IV.23) $P_\alpha(\varepsilon)$ par $P_\alpha(\varepsilon)E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[E, 2\varepsilon] \otimes \mathbb{1}_{k_\alpha}$.

Ainsi

$$(\text{IV}.24) \quad \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to 0} \eta^{\frac{1}{2}} \| P_\alpha(\varepsilon) G(E + in)\varphi' \|$$

$$\leqslant C \Bigg\{ \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to 0} \eta^{\frac{1}{2}} \| P_\alpha(\varepsilon)E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[E, 3\varepsilon]G_0(E + in)P_\alpha P_\alpha^{-1}\phi_0(E) \|^2$$

$$+ \sum_\beta \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to 0} \eta^{\frac{1}{2}} \| P_\alpha(\varepsilon)E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}[E, 3\varepsilon]G_\beta(E + in)P_\beta P_\beta^{-1}\phi_\beta(E) \|$$

où $P_\alpha^{-1}\phi_0(E)$ et $P_\beta^{-1}\phi_\beta(E) \in L^2(R^{2n})$.

Remarquons finalement que lorsque ε tend vers zéro, il existe un borélien Δ_ε^E de R^+ de mesure de Lebesgue tendant aussi vers zéro, tel que :

$$P_\alpha(\varepsilon)E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}(E, 2\varepsilon), E_{\frac{P_\beta^2}{2n_\alpha}}(\Delta_\varepsilon^E) = P_\alpha(\varepsilon)E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}(E, 2\varepsilon) \qquad \forall\beta$$

de sorte que

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to 0} \eta \| P_\alpha(\varepsilon)E_{\frac{P_\alpha^2}{2n_\alpha}}(E, 2\varepsilon)G_{\underset{\beta}{0}}(E + in)P_{\underset{\beta}{\alpha}} P_{\underset{\beta}{\alpha}}^{-1}\phi_{\underset{\beta}{0}}(E) \|^2$$

$$\leqslant \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{sup}_{n} \eta \| G_{\underset{\beta}{0}}(E + in)P_{\underset{\beta}{\alpha}} \|^2 \| E_{P_{\underset{\beta}{\alpha}}^2}(\Delta_\varepsilon^E)P_{\underset{\beta}{\alpha}}^{-1}\phi_{\underset{\beta}{0}}(E) \|^2 = 0$$

Puisque $E_{P_\beta^2}(\Delta_\varepsilon^E)$ commute avec P_β et tend fortement vers zéro en tant qu'opérateur sur $L^2(R^{2n})$.

RÉFÉRENCES

[1] J. GINIBRE et M. MOULIN, Hilbert Space Approach to Quantum Mechanical Three Body Problem. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. XXI, n° 2, 1974.

[2] L. THOMAS, Asymptotic Completeness in Two and Three Particle Quantum Mechanical Scattering. *Ann. Phys.*, t. **90**, 1975, p. 127-165.

[3] L. D. FADDEEV, Mathematical Aspects of the Three Body Problem in the Quantum Scattering Theory. *Israel Program for Scientific Translation*, Jerusalem, 1965.

[4] T. KATO, *a*) Wave Operators and Similarly for Some Non-Self-Adjoint Operators. *Math. Ann.*, t. **162**, 1966.
b) Growth Properties of Solutions of the Reduced Wave Equation with Variable Coefficient. *Comm. Pure Appl. Math.*, t. **12**, 1959.

[5] S. AGMON, *a*) *Jour. Anal. Math.*, t. **23**, 1970.
b) *International Congress of Mathematicians*, Nice, 1970.

[6] B. SIMON, *Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms* Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

[7] R. LAVINE, Absolute Continuity of Positive Spectrum for Schrödinger Operators with Long Range Potentials. *J. Functional Analysis*, t. **12**, 1973.

[8] M. REED and B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, New York, vol. III, *in preparation*.

[9] DUNFORD-SCHWARTZ, *Linear Operators*, Part I.

[10] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*.

[11] R. LAVINE, *Commutators and Scattering Theory II. A Class of One-Body Problems. Indiana Univ. Math. J.*, t. **21**, 1972, p. 643-655.

[12] B. SIMON, On Positive Eigenvalues of One-Body Schrödinger Operators, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. XXII, 1967.

[13] On the algebraic theory of scattering. *J. F. A.*, t. **15**, 1974, p. 364-377.

[14] Scattering theory with singular potential. I the two body problem. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **21**, 1974, p. 185-215.

(Manuscrit reçu le 8 janvier 1976).