

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MICHEL DAUMENS

## **Développement multipolaire des fonctions de vertex dans un référentiel arbitraire**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 26, n° 1 (1977), p. 19-54

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1977\\_\\_26\\_1\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__26_1_19_0)

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# **Développement multipolaire des fonctions de vertex dans un référentiel arbitraire**

par

**Michel DAUMENS**

Laboratoire de Physique Théorique (\*), Bordeaux

---

**RÉSUMÉ.** — Les fonctions de vertex sont développées sur les bases des harmoniques sphériques tensorielles et des multipôles tensoriels dans un référentiel arbitraire. Les coefficients de ces développements sont des facteurs de forme invariants par rotation. Nous effectuons le lien avec ceux définis par Durand, De Celles et Marr, et par De Rafael dans des référentiels particuliers. Enfin, nous construisons des facteurs de forme multipolaires irréductibles par transformations de Lorentz pures.

**ABSTRACT.** — Vertex functions are expanded on the bases of tensor spherical harmonics and tensor multipoles. The coefficients of the expansions are rotational invariant form factors. The relations with those defined in particular frames by Durand, De Celles and Marr, and by De Rafael are exhibited. Finally we build multipolar form factors which are irreducible under pure Lorentz transformations.

---

## 1. INTRODUCTION

Les fonctions de vertex sont les éléments de matrice d'un opérateur entre les états physiques à une particule initiale et une particule finale. Le but du développement multipolaire est d'extraire de ces fonctions des facteurs de forme contenant toute l'inconnue dynamique. De tels dévelop-

---

(\*) Équipe de Recherche associée au C. N. R. S.

Postal address : Laboratoire de Physique Théorique, Université de Bordeaux I, Chemin du Solarium 33170 Gradignan (France).

pements ont déjà été effectués dans un référentiel donné et pour des opérateurs scalaires ou quadrivectoriels par Durand, De Celles et Marr [1] d'une part et De Rafael [2] d'autre part. Tous ces auteurs choisissent leur référentiel en fonction du signe du carré du transfert  $q$ . Les premiers considèrent seulement le cas  $q^2 < 0$  et utilisent le système de Breit (ou du mur de briques), tandis que De Rafael considère les deux cas  $q^2 < 0$  et  $q^2 > 0$  et il utilise aussi le système de Breit pour  $q^2 < 0$  et le système du centre de masse pour  $q^2 > 0$ .

Dans ce travail, nous gardons notre référentiel arbitraire avec l'hypothèse naturelle que le quadrivecteur de genre temps  $\underline{e}$  appartienne au 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$  défini par les impulsions  $\underline{p}_1$  et  $\underline{p}_2$  des particules, ce qui est le cas pour tous les référentiels présentant un intérêt physique et nous effectuons le développement multipolaire pour des opérateurs tensoriels d'ordre quelconque. Pour cela, nous utilisons deux bases de fonctions tensorielles [3] [4] : les harmoniques sphériques tensorielles et les multipôles tensoriels. Les coefficients de la décomposition des fonctions de vertex sur la base des harmoniques tensorielles sont invariants par rotation et sont appelés facteurs de forme. Ils dépendent de  $q^2$  et du choix de  $\underline{e}$  dans le 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ , et sont du même type que ceux définis par De Rafael. En décomposant les fonctions de vertex sur les multipôles tensoriels irréductibles, nous définissons les facteurs de forme multipolaires irréductibles qui eux aussi dépendent *a priori* de  $q^2$  et de  $\underline{e}$  mais qui se transforment selon une représentation irréductible si on fait subir au quadrivecteur  $\underline{e}$  une transformation de Lorentz pure dans le 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ . Dans le cas d'un opérateur quadrivectoriel, on retrouve les résultats de Durand, De Celles et Marr ce qui permet de les relier à ceux de De Rafael.

Dans la section 2, nous donnons une paramétrisation simple des fonctions de vertex et nous définissons les fonctions de vertex réduites se transformant par rotation selon une seule représentation. Les sections 3 et 4 sont consacrées aux développements multipolaires sur les deux bases considérées ainsi qu'à la dérivation de règles de sélection sur les facteurs de forme résultant de la conservation de la parité, de l'invariance par renversement du temps et de la conservation du courant vectoriel. Dans l'Appendice A, nous donnons les définitions et quelques propriétés des harmoniques sphériques tensorielles et des multipôles tensoriels tandis que dans l'Appendice B, nous rappelons quelques résultats sur les rotations de Wigner généralisées et les lois de transformations des états à une particule.

Dans cet article, nous adoptons la métrique  $(+ - - -)$  de l'espace de Minkowski et nous utilisons les notations suivantes : les quadrivecteurs sont soulignés une fois ( $\underline{x}$ ), les tenseurs d'ordre 2 sont soulignés 2 fois ( $\underline{\underline{t}}$ ) tandis que les tenseurs d'ordre quelconque sont soulignés par un seul trait précédé de l'ordre ( $\underline{\underline{\underline{t}}}$ ). Nous utilisons la convention de sommation sur les indices de Minkowski ou magnétiques répétés mais nous explicitons les

sommations sur les moments angulaires. Les produits scalaires dans les espaces  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^{\otimes r}$  sont notés par un point ( $\cdot$ ), deux points ( $\cdot\cdot$ ) et ( $\cdot'$ ) respectivement, par exemple  $\underline{a}\cdot\underline{b}$ ,  $\underline{t}\cdot\underline{T}$ ,  ${}^r\underline{t}(\cdot')$ ,  ${}^r\underline{T}$ . Les coefficients de Clebsch-Gordan (C-G) sont notés indifféremment  $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle$  ou  $\langle j_3 m_3 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle$ . Pour tout ce qui concerne les matrices de rotations et les coefficients de Clebsch-Gordan, le lecteur est renvoyé aux livres de Wigner [5], Rose [6], Edmonds [7] et Brinck et Satchler [8]. Enfin, les formules sont numérotées par section.

## 2. FONCTIONS DE VERTEX RÉDUITES

Cette section commence par le rappel des propriétés d'un opérateur tensoriel et de la définition des fonctions de vertex. Ensuite, pour simplifier leurs lois de transformation, nous définissons les fonctions de vertex standard et réduites que nous paramétrons dans un référentiel quelconque alors que les paramétrisations données par plusieurs auteurs ne sont valables que dans des référentiels particuliers.

### 2.1. Lois de transformation d'un opérateur tensoriel

Soit  ${}^r\mathbf{A}$  un opérateur tensoriel d'ordre  $\Omega$ . Une transformation de Lorentz  $\Lambda$ , du groupe restreint, induit sur l'opérateur  ${}^r\mathbf{A}$ , par l'action de l'opérateur  $U(\Lambda)$  définie en (B-26), la transformation suivante

$$U(\Lambda) {}^r\mathbf{A} U(\Lambda)^{-1} = ({}^r\otimes \Lambda) {}^r\mathbf{A}. \quad (1)$$

L'opérateur tensoriel  ${}^r\mathbf{A}$  a une *parité intrinsèque*  $\varepsilon$  définie, si sa loi de transformation par parité P est

$$U(P) {}^r\mathbf{A} U(P)^{-1} = \varepsilon ({}^r\otimes P) {}^r\mathbf{A}. \quad (2)$$

où  $U(P)$  est l'opérateur unitaire défini en (B-27). La parité intrinsèque de l'opérateur est  $\varepsilon = +1$  pour les vrais tenseurs et  $\varepsilon = -1$  pour les pseudo-tenseurs.

L'invariance par renversement du temps T implique

$$U(T) {}^r\mathbf{A} U(T)^{-1} = \varepsilon_T ({}^r\otimes T) {}^r\mathbf{A}, \quad (3)$$

où  $U(T)$  est l'opérateur antiunitaire défini en (B-32) et  $\varepsilon_T = \pm 1$ .

### 2.2. Fonctions de vertex

Les fonctions de vertex de l'opérateur tensoriel  ${}^r\mathbf{A}$  sont les éléments de matrice de cet opérateur sur la base des états à une particule. Pour deux particules de spin  $s_1$  et  $s_2$ , deux bosons ou deux fermions, les  $(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)$  fonctions de vertex de l'opérateur tensoriel  ${}^r\mathbf{A}$  sont définies par

$${}^r\mathbf{A}(\{p_2\}, \{p_1\})^{n_2, n_1} = \langle \{p_2\} n_2 | {}^r\mathbf{A} | \{p_1\} n_1 \rangle. \quad (4)$$

Étudions les propriétés de transformation de ces fonctions de vertex.

Celles qui correspondent à des états d'impulsion  $\Lambda^{-1}p_i$  ( $i = 1, 2$ ), sont définies de la même manière par

$${}_r\mathbf{A}(\{\Lambda^{-1}p_2\}, \{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}_{m_1} = \langle \{\Lambda^{-1}p_2\}_{m_2} | {}_r\mathbf{A} | \{\Lambda^{-1}p_1\}_{m_1} \rangle, \quad (5)$$

et elles sont reliées aux précédentes. En effet, en utilisant successivement les lois de transformation des états (B-26) et de l'opérateur (1), nous obtenons d'abord,

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{A}(\{\Lambda^{-1}p_2\}, \{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}_{m_1} &= \mathbf{D}^{s_2}[\mathbf{R}_e^{-1}(\{\{p_2\}, \{\Lambda^{-1}p_2\}, \Lambda^{-1}\})]^{m_2}_{n_2} \\ &\quad \langle \{p_2\}_{n_2} | \mathbf{U}(\Lambda) {}_r\mathbf{A} \mathbf{U}(\Lambda)^{-1} | \{p_1\}_{n_1} \rangle \\ &\quad \mathbf{D}^{s_1}[\mathbf{R}_e(\{\{p_1\}, \{\Lambda^{-1}p_1\}, \Lambda^{-1}\})]^{n_1}_{m_1}, \quad (6) \end{aligned}$$

puis la relation

$$\begin{aligned} (\overset{r}{\otimes} \Lambda^{-1}) {}_r\mathbf{A}(\{\Lambda^{-1}p_2\}, \{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}_{m_1} \\ = \mathbf{D}^{s_2}(\mathbf{R}_{w_2}^{-1})^{m_2}_{n_2} {}_r\mathbf{A}(\{p_2\}, \{p_1\})^{n_2}_{n_1} \mathbf{D}^{s_1}(\mathbf{R}_{w_1})^{n_1}_{m_1}, \quad (7) \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\mathbf{R}_{w_i} = \mathbf{R}_e(\{p_i\}, \{\Lambda^{-1}p_i\}, \Lambda^{-1}). \quad (8)$$

La relation (B-35) conduit à l'équation

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{A}(\{\Lambda^{-1}p_2\}, \{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}_{m_1} \\ = \langle \{p_2\}^\Lambda_{m_2} | \mathbf{U}(\Lambda) {}_r\mathbf{A} \mathbf{U}^{-1}(\Lambda) | \{p_1\}^\Lambda_{m_1} \rangle, \quad (9) \end{aligned}$$

où les tétrades  $\{p_i\}^\Lambda$  sont définies en (B-17). La loi de transformation de l'opérateur (1) permet d'écrire l'expression précédente sous la forme

$$(\overset{r}{\otimes} \Lambda^{-1}) {}_r\mathbf{A}(\{\Lambda^{-1}p_2\}, \{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}_{m_1} = {}_r\mathbf{A}(\{p_1\}^\Lambda, \{p_2\}^\Lambda)^{m_2}_{m_1}, \quad (10)$$

et en comparant avec l'équation (7) on en déduit la loi de transformation des fonctions de vertex dans le changement de tétrade de référence de  $\{e\}$  à  $\Lambda\{e\}$

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{A}(\{p_2\}^\Lambda, \{p_1\}^\Lambda)^{m_2}_{m_1} \\ = \mathbf{D}^{s_2}(\mathbf{R}_{w_2}^{-1})^{m_2}_{n_2} {}_r\mathbf{A}(\{p_2\}, \{p_1\})^{n_2}_{n_1} \mathbf{D}^{s_1}(\mathbf{R}_{w_1})^{n_1}_{m_1} \quad (11) \end{aligned}$$

### 2.3. Fonctions de vertex standard

Les lois de transformation (7) et (11) font intervenir deux rotations de Wigner différentes  $\mathbf{R}_{w_1}$  et  $\mathbf{R}_{w_2}$  dépendant des impulsions  $p_1$  et  $p_2$ , nous allons définir les fonctions de vertex standard dont la loi de transformation s'écrit avec une seule rotation  $\mathbf{R}_\Lambda$ , indépendante de  $p_1$  et de  $p_2$ .

En utilisant les états standard  $|\{p_i\}_e n_i\rangle$ ,  $|\{p_i\}_e n'_i\rangle$  et  $|\{\Lambda^{-1}p_i\}_{\Lambda^{-1}e} n_i\rangle$  définis au paragraphe B.4, nous définissons les fonctions de vertex standard, notées  ${}_r\mathbf{A}(p_2, p_1, \{e\})^{n_2}_{n_1}$ ,  ${}_r\mathbf{A}(p_2, p_1, \Lambda\{e\})^{n_2}_{n_1}$ ,  ${}_r\mathbf{A}(\Lambda^{-1}p_2, \Lambda^{-1}p_1, \{e\})^{m_2}_{m_1}$  et définies par

$${}_r\mathbf{A}(p_2, p_1, \{e\})^{n_2}_{n_1} = {}_r\mathbf{A}(\{p_2\}_e, \{p_1\}_e)^{n_2}_{n_1}, \quad (12)$$

$${}_r\mathbf{A}(p_2, p_1, \Lambda\{e\})^{n_2}_{n_1} = {}_r\mathbf{A}(\{p_2\}^\Lambda_e, \{p_1\}^\Lambda_e)^{n_2}_{n_1}, \quad (13)$$

$${}_r\mathbf{A}(\Lambda^{-1}p_2, \Lambda^{-1}p_1, \{e\})^{m_2}_{m_1} = {}_r\mathbf{A}(\{\Lambda^{-1}p_2\}_{\Lambda^{-1}e}, \{\Lambda^{-1}p_1\}_{\Lambda^{-1}e})^{m_2}_{m_1}. \quad (14)$$

Les lois de transformation (7) et (11) deviennent alors

$$(\overset{r}{\otimes} \Lambda^{-1}) {}_r\mathbb{A}(\Lambda^{-1}p_2, \Lambda^{-1}p_1, \{e\})^{m_2}_{m_1} = D^{s_2}(\mathbf{R}_\Lambda^{-1})^{m_2}_{n_2} {}_r\mathbb{A}(p_2, p_1, \{e\})^{n_2}_{n_1} D^{s_1}(\mathbf{R}_\Lambda)^{n_1}_{m_1} \quad (15)$$

$${}_r\mathbb{A}(p_2, p_1, \Lambda\{e\})^{n_2}_{n_1} = D^{s_2}(\mathbf{R}_\Lambda^{-1})^{n_2}_{n_2} {}_r\mathbb{A}(p_2, p_1, \{e\})^{n_2}_{n_1} D^{s_1}(\mathbf{R}_\Lambda)^{n_1}_{n_1}. \quad (16)$$

Ces fonctions de vertex standard ne dépendent que des impulsions et du choix de la tétrade de référence. Elles sont reliées aux fonctions de vertex dans des tétrades arbitraires par

$${}_r\mathbb{A}(p_2, p_1, \{e\})^{n_2}_{n_1} = D^{s_2}[L(p_2)]^{-1}_{n_2} [p_2] {}_r\mathbb{A}(\{p_2\}, \{p_1\})^{n_2}_{n_1} D^{s_1}[[p_1]^{-1}L(p_1)]^{n_1}_{n_1}. \quad (17)$$

Étudions les lois de transformation des fonctions de vertex standard dans les opérations de parité **P** et de renversement du temps **T**.

Considérons d'abord la parité; en utilisant successivement les équations (B-40) et (2), nous obtenons

$${}_r\mathbb{A}(p_2, p_1, \{e\})^{n_2}_{n_1} = \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\overset{r}{\otimes} \mathbf{P}) {}_r\mathbb{A}(\mathbf{P}p_2, \mathbf{P}p_1, \{e\})^{n_2}_{n_1} \quad (18)$$

où  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  sont respectivement les parités intrinsèques de l'opérateur et de chacune des particules.

De même pour le renversement du temps, l'utilisation des équations (B-41) et (3) conduit à la loi de transformation

$${}_r\mathbb{A}(p_2, p_1, \{e\})^{n_2}_{n_1} = \varepsilon_T (-1)^{s_1 - s_2 + n_1 - n_2} (\overset{r}{\otimes} \mathbf{T}) {}_r\mathbb{A}(\mathbf{T}p_2, \mathbf{T}p_1, \{e\})^{-n_2}_{-n_1}^* \quad (19)$$

où  $\varepsilon_T = \pm 1$  caractérise le comportement de l'opérateur  ${}_r\mathbb{A}$  dans le renversement du temps et où la conjugaison complexe provient de l'antiunitarité de l'opérateur  $\mathbf{U}(\mathbf{T})$ .

Dans le cas où l'état initial et l'état final sont deux états d'une même particule et où l'opérateur tensoriel est hermitique,

$${}_r\mathbb{A}^+ = {}_r\mathbb{A}, \quad (20)$$

l'hermiticité de l'opérateur implique la condition suivante sur ses fonctions de vertex standard,

$${}_r\mathbb{A}(p_2, p_1, \{e\})^{n_2}_{n_1} = {}_r\mathbb{A}(p_1, p_2, \{e\})^{n_1}_{n_2}^*, \quad (21)$$

où l'on a remplacé  $\underline{p}_1$  par  $\underline{p}_2$  et *vice versa* dans le second membre.

#### 2.4. Paramétrisation des fonctions de vertex standard

Les fonctions de vertex standard dépendent de la tétrade de référence. Considérons les choix de référentiels présentant un intérêt physique. Quelle que soit la valeur de  $q^2$  où  $q = p_2 - p_1$ , on peut choisir  $\underline{e} = \hat{p}_1$  ou  $\underline{e} = \hat{p}_2$ . Ces deux possibilités correspondent au système où la particule 1 ou 2 est au repos. En outre on peut considérer deux autres systèmes selon

la valeur de  $q^2$ . Si  $q^2$  est positif on définit le système du centre de masse C caractérisé par le choix  $\underline{e} = \underline{e}_C$ ,

$$\underline{e}_C = \alpha \underline{q} / \sqrt{q^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = q^0 / |q^0|, \quad (22)$$

tandis que si  $q^2$  est négatif, on définit le système de Breit ou système du mur de briques B caractérisé par le quadrivecteur de genre temps  $\underline{e}_B$ , situé dans le 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$  et orthogonal au transfert  $\underline{q}$ ,

$$\underline{e}_B = N / \sqrt{-q^2} \{ -, q | \hat{p}_1, \hat{p}_2 \} \quad (23)$$

où la constante N et la notation  $\{ -, a | b, c \}$  sont définies en (B-6 et 7).

Dans ces quatre cas le quadrivecteur  $\underline{e}$  de genre temps des tétrades de référence est dans le 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$  ce que nous supposons toujours réalisé dans la suite,

$$\underline{e} \in (\underline{p}_1, \underline{p}_2) \quad (24)$$

Pour obtenir une base orthonormée du 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ , nous construisons un quadrivecteur  $\underline{u}$  unitaire de genre espace, orthogonal à  $\underline{e}$ , ( $\underline{u}^2 = -1$ ,  $\underline{u} \cdot \underline{e} = 0$ ), par, cf. Eq. (B-8)

$$\underline{u} = N \{ -, e | \hat{p}_1, \hat{p}_2 \} \quad (25)$$

Notons que le quadrivecteur  $\underline{u}$  ne dépend que du 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$  et de la position du quadrivecteur  $\underline{e}$  dans ce 2-plan, en particulier il ne dépend pas de la position relative des quadrivecteurs  $\underline{p}_1$  et  $\underline{p}_2$  dans le 2-plan.

Quand la tétrade de référence est choisie, les fonctions de vertex standard ne dépendent plus que des impulsions  $\underline{p}_1$  et  $\underline{p}_2$  dont les carrés sont donnés,  $p_1^2 = M_1^2$ ,  $p_2^2 = M_2^2$ . Les quadrivecteurs  $\underline{e}$  et  $\underline{u}$  définissent le 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ . La position relative des quadrivecteurs  $\underline{p}_1$  et  $\underline{p}_2$  dans ce 2-plan est donnée par l'invariant  $q^2$

$$q^2 = M_1^2 + M_2^2 - 2\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2. \quad (26)$$

On peut donc paramétrer les fonctions de vertex standard dans une tétrade de référence  $\{ e \}$  par l'invariant  $q^2$  et le quadrivecteur  $\underline{u}$

$${}_r\Delta(q^2, u, \{ e \})^{n_2 n_1} = {}_r\Delta(p_2, p_1, \{ e \})^{n_2 n_1}. \quad (27)$$

Cette paramétrisation est possible quand les quadrivecteurs  $\underline{p}_1$  et  $\underline{p}_2$  définissent un 2-plan, i. e.  $\underline{p}_1 \neq \lambda \underline{p}_2$ . Remarquons aussi que cette paramétrisation est valable quelle que soit la valeur de  $q^2$  et même pour  $q^2 = 0$  si les masses sont différentes ( $M_1 \neq M_2$ ). C'est pourquoi nous n'avons pas à considérer deux paramétrisations différentes pour  $q^2 > 0$  et pour  $q^2 < 0$  comme ce fut le cas pour De Rafael [2].

Considérons une nouvelle tétrade de référence  $\Lambda \{ e \}$ . La convention (24) impose au quadrivecteur  $\Lambda \underline{e}$  d'appartenir au 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ , ce qui implique des contraintes sur la transformation de Lorentz  $\Lambda$  considérée. Écrivons la décomposition canonique de  $\Lambda$  définie en (A-13)

$$\Lambda = L_\Lambda R_\Lambda \quad (28)$$

Pour que le quadrivecteur  $\Lambda \underline{e}$  reste dans le 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ , il faut que la transformation pure  $L_\Lambda$  agisse uniquement dans ce 2-plan et dorénavant nous supposons toujours cette condition réalisée.

Dans la nouvelle tétrade  $\Lambda \{ e \}$ , les fonctions de vertex standard peuvent être paramétrées par l'invariant  $q^2$  et par le quadrivecteur  $\underline{u}^\Lambda$  situé dans le 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$  et orthogonal à  $\Lambda \underline{e}$ ,

$$\underline{u}^\Lambda = N \{ -, \Lambda e \mid \hat{p}_1, \hat{p}_2 \}. \tag{29}$$

En utilisant l'identité  $\Lambda \underline{e} = L_\Lambda \underline{e}$  et le fait que le quadrivecteur  $\underline{u}^\Lambda$  ne dépende pas des positions de  $\underline{p}_1$  et  $\underline{p}_2$  dans le 2-plan, on obtient l'identité

$$\underline{u}^\Lambda = N \{ -, L_\Lambda e \mid L_\Lambda \hat{p}_1, L_\Lambda \hat{p}_2 \} = L_\Lambda \underline{u}. \tag{30}$$

Avec ces notations la loi de transformation (16) des fonctions de vertex standard s'écrit

$${}_r\Delta(q^2, L_\Lambda u, \Lambda \{ e \})^{m_2}_{m_1} = D^{s_2}(R_\Lambda^{-1})^{m_2}_{n_2} {}_r\Delta(q^2, u, \{ e \})^{n_2}_{n_1} D^{s_1}(R_\Lambda)^{n_1}_{m_1}. \tag{31}$$

Dans le cas où  $\Lambda$  est la transformation pure  $L$ , la rotation  $R_\Lambda$  devient l'identité et la relation (31) s'écrit

$${}_r\Delta(q^2, Lu, L \{ e \})^{m_2}_{m_1} = {}_r\Delta(q^2, u, \{ e \})^{m_2}_{m_1}, \tag{32}$$

i. e., les fonctions de vertex standard ne sont pas modifiées dans un changement de tétrade de référence par transformation de Lorentz pure.

### 2.5. Fonctions de vertex réduites

Les coefficients-CG permettent de réduire le produit tensoriel des matrices de rotation intervenant dans la loi de transformation des fonctions de vertex standard (31), on obtient

$$\langle s_1 m_1 \text{LM} \mid s_2 m_2 \rangle {}_r\Delta(q^2, L_\Lambda u, \Lambda \{ e \})^{m_2}_{m_1} = D^L(R_\Lambda^{-1})^M_N \langle s_1 n_1 \text{LN} \mid s_2 n_2 \rangle {}_r\Delta(q^2, u, \{ e \})^{n_2}_{n_1}. \tag{33}$$

Les fonctions définies par

$$\begin{aligned}
 & {}_r\Delta(q^2, u, \{ e \})^L_N{}^* \\
 &= \frac{2L + 1}{2s_2 + 1} \langle \text{LN} s_1 n_1 \mid s_2 n_2 \rangle {}_r\Delta(q^2, u, \{ e \})^{n_2}_{n_1}, \tag{34} \\
 & {}_r\Delta(q^2, L_\Lambda u, \Lambda \{ e \})^L_M{}^* \\
 &= \frac{2L + 1}{2s_2 + 1} \langle \text{LM} s_1 m_1 \mid s_2 m_2 \rangle {}_r\Delta(q^2, L_\Lambda u, \Lambda \{ e \})^{m_2}_{m_1} \tag{35}
 \end{aligned}$$

se transforment suivant la loi

$${}_r\Delta(q^2, L_\Lambda u, \Lambda \{ e \})^L_M = {}_r\Delta(q^2, u, \{ e \})^L_N D^L(R_\Lambda)^N_M, \tag{36}$$



c'est pourquoi elles sont appelées *fonctions de vertex réduites*. Si  $\Lambda$  est une rotation  $R$  du petit groupe de  $\underline{e}$ , la transformation de Lorentz pure  $L_\Lambda$  est égale à l'identité, tandis que si  $\Lambda$  est une transformation pure  $L$ , c'est la rotation  $R_\Lambda$  qui devient l'identité. Dans ces deux cas la relation (36) devient

$${}_r\Delta(q^2, u, R\{e\})_M^L = {}_r\Delta(q^2, u, \{e\})_N^L D^L(R)^N_M, \quad (37)$$

$${}_r\Delta(q^2, Lu, L\{e\})_M^L = {}_r\Delta(q^2, u, \{e\})_M^L. \quad (38)$$

Dans le second cas les fonctions de vertex réduites sont inchangées.

En utilisant l'orthogonalité et les propriétés des coefficients-CG on peut inverser les définitions (34) et (35) des fonctions de vertex réduites, on obtient

$${}_r\Delta(q^2, u, \{e\})^{n_2}_{n_1} = \sum_{LN} \langle s_2 n_2 | LN s_1 n_1 \rangle {}_r\Delta(q^2, u, \{e\})_N^{L*} \quad (39)$$

$${}_r\Delta(q^2, L_\Lambda u, \Lambda\{e\})^{m_2}_{m_1} = \sum_{LM} \langle s_2 m_2 | LM s_1 m_1 \rangle {}_r\Delta(q^2, L_\Lambda u, \Lambda\{e\})_M^{L*} \quad (40)$$

où la sommation sur  $L$  est finie :  $|s_1 - s_2| \leq L \leq s_1 + s_2$ .

Pour les plus petites valeurs du spin initial, à savoir  $s_1 = 0$  pour les bosons et  $s_1 = 1/2$  pour les fermions, nous pouvons effectuer la sommation sur  $L$  et calculer explicitement les coefficients-CG de la relation (39), on obtient

*Bosons* :  $s_1 = 0$

$${}_r\Delta(q^2, u, \{e\})^{n_2} = {}_r\Delta(q^2, u, \{e\})_{n_2}^{s_2*} \quad (41)$$

*Fermions* :  $s_1 = 1/2$

$${}_r\Delta(q^2, u, \{e\})^{n_2}_{\pm 1/2} = \left[ \mp \sqrt{\frac{s_2 + 1 \mp n_2}{2s_2 + 2}} {}_r\Delta(q^2, u, \{e\})_{n_2 \mp 1/2}^{s_2 \pm 1/2*} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{s_2 \pm n_2}{2s_2}} {}_r\Delta(q^2, u, \{e\})_{n_2 \mp 1/2}^{s_2 - 1/2*} \right] \quad (42)$$

## 2.6. Remarques

i) Les transformations de Lorentz du 2-plan ( $\underline{p}_1, \underline{p}_2$ ) sont pures et forment un groupe. C'est pourquoi quand le quadrivecteur  $\underline{e}$  est dans

le 2-plan  $(p_1, p_2)$  les tétrades  $\{p_1\}_e, \{p_2\}_e$  et  $\{e\}$  sont deux à deux conjuguées. En effet on a

$$\{p_1\}_e = L(p_1 \leftarrow e)\{e\}, \quad \{p_2\}_e = L(p_2 \leftarrow e)\{e\} \quad (43)$$

d'où on déduit

$$\{p_2\}_e = L(p_2 \leftarrow e)L^{-1}(p_1 \leftarrow e)\{p_1\}_e = L(p_2 \leftarrow p_1)\{p_1\}_e \quad (44)$$

Il en est de même des tétrades  $\{p_1\}_e^\wedge, \{p_2\}_e^\wedge$  et  $\Lambda\{e\}$ .

ii) Si le troisième axe de genre espace de la tétrade de référence est choisi égal au quadrivecteur  $u$ , les tétrades correspondantes  $\{p_i\}$  sont des tétrades d'hélicité, cf. Eq. (B-5). En effet soit  $u_{(i)3}$  l'axe de quantification des tétrades  $\{p_i\}_e$ , si on choisit  $e_3 = u$  la relation (B-10) implique

$$u_{(i)3} = L(p_i)e_3 = L(p_i)u = h_i \quad (45)$$

où les  $h_i$  sont les axes d'hélicité définis en (B-5).

iii) Nous savons que les transformations de Lorentz pures peuvent être paramétrées par un argument  $\kappa$ , cf. Eq. (A-16). Dans le tableau suivant nous donnons les valeurs explicites de  $\text{ch } \kappa$  et de  $\text{sh } \kappa$  pour les transformations pures qui relient les référentiels définis au § 2-4.

Transformation	$\text{ch } \kappa$	$\text{sh } \kappa$
$L(\hat{p}_2 \leftarrow \hat{p}_1)$	$\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2$	$-N$
$L(e_C \leftarrow \hat{p}_1)$	$ \hat{q} \cdot \hat{p}_1 $	$-M_2 \frac{N}{\sqrt{q^2}}$
$L(e_C \leftarrow \hat{p}_2)$	$ \hat{q} \cdot \hat{p}_2 $	$-M_1 \frac{N}{\sqrt{q^2}} \quad (46)$
$L(e_B \leftarrow p_1)$	$M_2 \frac{N}{\sqrt{-q^2}}$	$\hat{q} \cdot \hat{p}_1$
$L(e_B \leftarrow \hat{p}_2)$	$M_1 \frac{N}{\sqrt{-q^2}}$	$-\hat{q} \cdot \hat{p}_2$

où l'on a posé

$$\hat{q} = q/\sqrt{|q^2|}, \quad (47)$$

les quadrivecteurs  $e_C$  et  $e_B$  et l'invariant  $N$  étant respectivement définis en (22) et (23) et (B-7).

Enfin à l'aide des relations (23) et (25) on démontre l'identité

$$u_B \equiv N \{ -, e_B | \hat{p}_1, \hat{p}_2 \} = q/\sqrt{-q^2}. \quad (48)$$

### 3. DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE VERTEX EN FACTEURS DE FORME

Les facteurs de forme sont les coefficients du développement des fonctions de vertex réduites sur les harmoniques sphériques tensorielles. Notre développement est du même type que celui de De Rafael [2] dont nous retrouvons les résultats, mais il est effectué dans un référentiel arbitraire. Nous montrons que les facteurs de forme, invariants pour les rotations du petit groupe du quadrivecteur de genre temps de la tétrade de référence, dépendent du choix de ce quadrivecteur dans le 2-plan des quadrivecteurs  $(p_1, p_2)$ . Ensuite nous établissons les règles de sélection sur ces facteurs de forme, résultant de la conservation de la parité, de l'invariance par renversement du temps et de l'hermiticité de l'opérateur dans le cas des particules identiques.

#### 3.1. Facteurs de forme

La loi de transformation par rotation, des fonctions de vertex réduites (2-37), est identique à celle des harmoniques sphériques tensorielles, cf. Eq. (A-28). C'est pourquoi les fonctions  ${}_r\mathbb{A}(q^2, u, \{e\})_M^L$  peuvent être développées sur cette base

$${}_r\mathbb{A}(q^2, u, \{e\})_M^L = \sum_{l_{j_1 \dots j_2}} \sum_{k_1 \dots k_r} F(q^2, \underline{e})^{l_{j_1 \dots j_2} k_r L} {}_r\mathbb{Y}^{l_{j_1 \dots j_2} k_r}(u, \{e\})_M^L \quad (1)$$

avec des coefficients  $F(q^2, \underline{e})^{l_{j_1 \dots j_2} k_r L}$  invariants par rotation de la tétrade de référence. Ces coefficients appelés facteurs de forme des fonctions de vertex ne dépendent plus que de l'invariant  $q^2$  et du choix du quadrivecteur  $\underline{e}$  dans le 2-plan  $(p_1, p_2)$ .

Comme les harmoniques sphériques tensorielles, les facteurs de forme n'ont pas de bonnes propriétés dans une transformation de Lorentz pure de la tétrade de référence. Dans la suite nous définirons de nouveaux facteurs de forme qui ont de meilleures propriétés pour ces transformations.

Dans cette section, nous supposons dorénavant que le quadrivecteur  $\underline{e}$  est fixé et nous l'omettrons dans la notation, sauf dans la relation (2) inverse de la relation (1) qui s'obtient à l'aide de la relation d'orthonormalité (A-27)

des harmoniques sphériques tensorielles, avec  $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^r k_i$ ,

$$F(q^2, e)^{l_{j_1 \dots j_2} k_r L} = (-1)^{\mathbf{K}} \int {}_r\mathbb{Y}^{l_{j_1 \dots j_2} k_r}(u, \{e\})_M^L({}^r) {}_r\mathbb{A}(q^2, u, \{e\})_M^L d\Omega(u, \{e\}). \quad (2)$$

En multipliant scalairement la définition (1) par un tenseur de base

sphérique, cf. Eq. (A-23), on construit les composantes sphériques des fonctions de vertex réduites et on obtient le développement de ces composantes sur les harmoniques scalaires en fonction des facteurs de forme

$$[A(q^2, u)_M^{L*}]_n^{j_r k_r} = \sum_{lm} \langle LM | lmj_r n \rangle F(q^2)^{lj_r k_r L} Y_m^l(u)^* \quad (3)$$

Les relations (2-39), (1) et (3) permettent d'obtenir les développements en facteurs de forme des fonctions de vertex standard

$${}_r A(q^2, u)_{n_1}^{n_2} = \sum_{Ll} \sum_{j_r k_r} \langle s_2 n_2 | L M s_1 n_1 \rangle F(q^2)^{lj_r k_r L} Y_{l j_r k_r}^l(u)_M^{L*} \quad (4)$$

et de leurs composantes sphériques

$$[A(q^2, u)_{n_1}^{n_2}]_n^{j_r k_r} = \sum_{Llm} \langle s_2 n_2 | L M s_1 n_1 \rangle \langle LM | lmj_r n \rangle F(q^2)^{lj_r k_r L} Y_m^l(u)^* \quad (5)$$

Cette expression est une généralisation du développement obtenu par De Rafael, à des tenseurs d'ordre quelconque et pour n'importe quelle valeur de  $q^2$ . En nous plaçant successivement dans les systèmes du centre de masse  $\bar{C}$  et de Breit  $B$ , cf. Eq. (2-23, 24), nous pouvons relier nos facteurs de forme à ceux de De Rafael dans le cas d'un opérateur quadrivectoriel. On obtient

$$F(q^2, \underline{e}_C)^{L0L} = (-1)^{2s_2+L} \sqrt{\frac{4\pi}{2s_2+1}} A^{(L)}(q^2) \quad (6 a)$$

$$F(q^2, \underline{e}_C)^{l1L} = (-1)^{2s_2+l+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2s_2+1}} F^{(l,L)}(q^2) \quad (6 b)$$

$$F(q^2, \underline{e}_B)^{L0L} = (-1)^{2s_2+L} \sqrt{\frac{4\pi}{2s_2+1}} E^{(L)}(q^2) \quad (7 a)$$

$$F(q^2, \underline{e}_B)^{l1L} = (-1)^{2s_2+l+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2s_2+1}} H^{(l,L)}(q^2) \quad (7 b)$$

où les facteurs de forme  $A^{(L)}(q^2)$ ,  $H^{(L)}(q^2)$ ,  $F^{(l,L)}(q^2)$ ,  $H^{(l,L)}(q^2)$  sont définis par les équations (4-28) et (4-29) de l'article de De Rafael [2].

### 3.2. Quantification en hélicité

Quand on quantifie en hélicité, cf. Eq. (2-45), on choisit comme troisième axe de genre espace le quadrivecteur  $\underline{u}$  lui-même. Il en résulte que la dépendance en  $\underline{u}$  disparaît dans les harmoniques sphériques. On a

$$Y_m^l(e_3, \{e\}) = \delta_{m_0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \quad (8)$$

et dans ce cas, la relation (3) devient

$$[A(q^2, e_3)_M^{L*}]_n^{j_r k_r} = \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \langle LM | l0j_r n \rangle F(q^2)^{lj_r k_r L} \quad (9)$$

Les seules composantes non nulles sont telles que  $M = n$ , et pour ces composantes l'indice  $M$  sera omis

$$[A(q^2, e_3)_n^{L*}]_n^{j_r k_r} \equiv [A(q^2, e_3)_n^{L*}]_n^{j_r k_r} \quad (10)$$

En hélicité, l'équation (5) devient

$$[A(q^2, e_3)_{n_1}^{n_2}]_n^{j_r k_r} = \sum_L \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \langle s_2 n_2 | L n s_1 n_1 \rangle \langle L n | l0j_r n \rangle F(q^2)^{lj_r k_r L} \quad (11)$$

Cette équation montre que les seules fonctions  $[A(q^2, e_3)_{n_1}^{n_2}]_n^{j_r k_r}$  a priori non nulles sont telles que  $n = n_2 - n_1$ . Ce résultat est donné par Durand, De Celles et Marr [1], pour des fonctions scalaires ou quadrivectorielles dans le système de Breit.

En hélicité, les composantes sphériques des fonctions standard s'expriment à l'aide des composantes des fonctions réduites sous la forme

$$[A(q^2, e_3)_{n_1}^{n_2}]_n^{j_r k_r} = \sum_L \langle s_2 n_2 | L n s_1 n_1 \rangle [A(q^2, e_3)_n^{L*}]_n^{j_r k_r} \quad (12)$$

Pour les plus petites valeurs des spins initiaux, à savoir  $s_1 = 0$  pour les bosons et  $s_1 = 1/2$  pour les fermions, nous pouvons effectuer la sommation sur  $L$ . En utilisant les coefficients-CG calculés en (2-40, 41), on obtient

<p><i>Bosons</i> : <math>s_1 = 0</math></p> $[A(q^2, e_3)_{n_2}^{n_2}]_n^{j_r k_r} = [A(q^2, e_3)^{s_2*}]_{n_2}^{j_r k_r} \quad (13)$
<p><i>Fermions</i> : <math>s_1 = 1/2</math></p> $[A(q^2, e_3)_{n_2 \mp 1/2}^{n_2 \pm 1/2}]_{n_2 \mp 1/2}^{j_r k_r} = \left\{ \mp \sqrt{\frac{s_2 + 1 \mp n_2}{2s_2 + 2}} [A(q^2, e_3)^{s_2 + 1/2*}]_{n_2 \mp 1/2}^{j_r k_r} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{s_2 \pm n_2}{2s_2}} [A(q^2, e_3)^{s_2 - 1/2*}]_{n_2 \mp 1/2}^{j_r k_r} \right\} \quad (14)$

### 3.3. Règles de sélection dues à la parité

Si l'opérateur  ${}_r\mathbf{A}$  a une parité donnée  $\varepsilon$  nous avons vu, Eq. (2-18) que les fonctions de vertex standard satisfont la relation

$${}_r\mathbf{A}(p_2, p_1, \{e\})_{n_1}^{n_2} = \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( \bigotimes^r P \right) {}_r\mathbf{A}(Pp_1, Pp_2, \{e\})_{n_1}^{n_2}. \quad (15)$$

Les fonctions de vertex  ${}_{r}\Delta(\mathbb{P}p_1, \mathbb{P}p_2, \{e\})^{n_2}_{n_1}$  peuvent toujours être paramétrées par l'invariant  $q^2 = (\mathbb{P}p_2 - \mathbb{P}p_1)^2 = (p_2 - p_1)^2$  et par le quadri-vecteur  $\underline{u}^{\mathbb{P}}$  défini par

$$\underline{u}^{\mathbb{P}} = N \{ -, \underline{e} \mid \mathbb{P}\hat{p}_1, \mathbb{P}\hat{p}_2 \}. \tag{16}$$

En utilisant l'identité  $\mathbb{P}\underline{e} = \underline{e}$ , on en déduit

$$\underline{u}^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\underline{u}, \tag{17}$$

et on peut donc écrire la relation (15) sous la forme

$${}_{r}\Delta(q^2, u, \{e\})^{n_2}_{n_1} = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 \left( \overset{r}{\otimes} \mathbb{P} \right) {}_{r}\Delta(q^2, \mathbb{P}u, \{e\})^{n_2}_{n_1}. \tag{18}$$

Le développement (7) et l'orthogonalité des coefficients-CG permettent d'obtenir la relation

$$\begin{aligned} \sum_{l_{j_r \dots j_2}} \sum_{k_1 \dots k_r} F(q^2)^{l_{j_r k_r L}} {}_{r}\underline{Y}^{l_{j_r k_r}}(\underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} \\ = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 \sum_{l'_{j_r \dots j_2}} \sum_{k'_1 \dots k'_r} F(q^2)^{l'_{j_r k'_r L}} \left( \overset{r}{\otimes} \mathbb{P} \right) {}_{r}\underline{Y}^{l'_{j_r k'_r}}(\mathbb{P}\underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} \end{aligned} \tag{19}$$

A l'aide des équations (A-22, 29), on déduit de (19) la règle de sélection suivante sur les facteurs de forme

$$F(q^2)^{l_{j_r k_r L}} = (-1)^{l+K} \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 F(q^2)^{l_{j_r k_r L}} \tag{20}$$

En reportant cette règle de sélection sur les facteurs de forme dans les équations (9) et (12) on déduit des règles de sélection sur les composantes sphériques des fonctions de vertex réduites en hélicité

$$[A(q^2, e_3)^L]_{m_r}^{j_r k_r} = (-1)^{K+j_r+L} \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 [A(q^2, e_3)^L]_{-m_r}^{j_r k_r}, \tag{21}$$

et sur les composantes sphériques des fonctions de vertex standard en hélicité

$$[A(q^2, e_3)^{n_2}_{n_1}]_{m_r}^{j_r k_r} = (-1)^{K+j_r+s_2-s_1} \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 [A(q^2, e_3)^{-n_2}_{-n_1}]_{-m_r}^{j_r k_r} \tag{22}$$

### 3.4. Règles de sélection dues au renversement du temps

Comme nous l'avons vu en (2-19), l'invariance par renversement du temps impose aux fonctions de vertex standard la condition

$${}_{r}\Delta(q^2, u, \{e\})^{n_2}_{n_1} = \varepsilon_T (-1)^{s_1-s_2+n_1-n_2} \left( \overset{r}{\otimes} \mathbb{T} \right) {}_{r}\Delta(q^2, \mathbb{P}u, \{e\})^{-n_2}_{-n_1}^* \tag{23}$$

A l'aide du développement (7), on obtient l'expression

$$\begin{aligned} \sum_{Ll} \sum_{j_r \dots j_2} \sum_{k_1 \dots k_r} \langle s_2 n_2 LM | s_1 n_1 \rangle F(q^2)^{lj_r \dots k_r L} \underline{Y}^{lj_r \dots k_r}(\underline{u})_M^{L*} \\ = \varepsilon_T (-1)^{s_1 - s_2 + n_1 - n_2} \sum_{L'l'} \sum_{j_r \dots j_2} \sum_{k_1 \dots k_r} \langle s_2 - n_2 L'M' | s_1 - n_1 \rangle \\ F(q^2)^{l'j_r \dots k_r L'^*} (\overset{r}{\otimes} T) \underline{Y}^{l'j_r \dots k_r}(\underline{P}u)_{M'}^{L'}. \quad (24) \end{aligned}$$

En remarquant que  $T = -P$ , et en utilisant les identités (A-22, 26, 29) les propriétés des coefficients-CG, on obtient la règle de sélection suivante sur les facteurs de forme

$$F(q^2)^{lj_r k_r L} = (-1)^r \varepsilon_T F(q^2)^{lj_r k_r L^*} \quad (25)$$

Cette relation implique que les facteurs de forme sont réels si  $\varepsilon_T = (-1)^r$  et imaginaires si  $\varepsilon_T = -(-1)^r$ . En hélicité les composantes sphériques des fonctions de vertex standard et réduites sont des combinaisons linéaires réelles des facteurs de forme, cf. Eq. (9, 11), il en résulte que ces composantes sont également réelles ou imaginaires.

### 3.5. Cas des particules identiques

Nous avons vu que dans le cas particulier où l'état initial et l'état final sont deux états d'une particule de spin  $s$  et où l'opérateur tensoriel est hermitique, les fonctions de vertex standard satisfont la condition, cf. Eq. (2-20),

$${}_r\Delta(p_2, p_1, \{e\})^{n_2 n_1} = {}_r\Delta(p_1, p_2, \{e\})^{n_1 n_2^*} \quad (26)$$

La fonction de vertex  ${}_r\Delta(p_1, p_2, \{e\})^{n_1 n_2}$  peut être paramétrée par l'invariant  $q^2$  et par le quadrivecteur  $\underline{u}'$  défini par

$$\underline{u}' = N \{ -, e | \hat{p}_2, \hat{p}_1 \} = -\underline{u}, \quad (27)$$

car le symbole  $\{ -, e | \hat{p}_1, \hat{p}_2 \}$  est antisymétrique dans l'échange des quadrivecteurs  $\hat{p}_1$  et  $\hat{p}_2$ . La relation (26) s'écrit donc

$${}_r\Delta(q^2, u, \{e\})^{n_2 n_1} = {}_r\Delta(q^2, -u, \{e\})^{n_1 n_2^*}, \quad (28)$$

et en développant chacun des membres de cette équation selon (7), on obtient l'expression

$$\begin{aligned} \sum_{Ll} \sum_{j_r \dots j_2} \sum_{k_1 \dots k_r} \langle s n_2 LM | s n_1 \rangle F(q^2)^{lj_r k_r L} \underline{Y}^{lj_r k_r}(\underline{u})_M^{L*} \\ = \sum_{L'l'} \sum_{j_r \dots j_2} \sum_{k_1 \dots k_r} \langle s n_1 L'M' | s n_2 \rangle F(q^2)^{l'j_r k_r L'^*} \underline{Y}^{l'j_r k_r}(-\underline{u})_{M'}^{L'}. \quad (29) \end{aligned}$$

Des identités (A-26, 29) et des propriétés de symétrie des coefficients-CG, on déduit la règle de sélection suivante sur les facteurs de forme

$$F(q^2)^{l_j, k_r, L} = (-1)^{L+K} F(q^2)^{l_j, k_r, L^*} \quad (30)$$

En combinant la conservation de la parité, l'invariance par renversement du temps et l'hermiticité de l'opérateur, on obtient la nouvelle règle de sélection

$$F(q^2)^{l_j, k_r, L} = (-1)^{L+l+r} \varepsilon \varepsilon_T F(q^2)^{l_j, k_r, L} \quad (31)$$

En portant cette expression dans les équations (9) et (11) on déduit des règles de sélection sur les composantes sphériques des fonctions de vertex réduites en hélicité,

$$[A(q^2, e_3)^L]_{m_r}^{j_r, k_r} = (-1)^{r+j_r} \varepsilon \varepsilon_T [A(q^2, e_3)^L]_{-m_r}^{j_r, k_r}, \quad (32)$$

et sur les composantes sphériques des fonctions de vertex standard en hélicité

$$[A(q^2, e_3)^{n_2}_{n_1}]_{m_r}^{j_r, k_r} = (-1)^{r+j_r+m_r} \varepsilon \varepsilon_T [A(q^2, e_3)^{n_1}_{n_2}]_{-m_r}^{j_r, k_r} \quad (33)$$

Dans le cas particulier d'opérateurs quadrivectoriels,  $r = 1, k_1 = j_1$ , on a les conditions suivantes

$$[A(q^2, e_3)^n_n]_0^0 = 0 \quad \text{si } \varepsilon \varepsilon_T = +1, \quad (34)$$

$$[A(q^2, e_3)^n_n]_0^1 = 0 \quad \text{si } \varepsilon \varepsilon_T = -1. \quad (35)$$

#### 4. DÉVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE DES FONCTIONS DE VERTEX

Au lieu d'utiliser la base des harmoniques sphériques tensorielles, nous pouvons décomposer les fonctions de vertex réduites sur la base des multipôles tensoriels qui ont de meilleures propriétés géométriques [3] [4]. Les coefficients de ce développement sont les facteurs de forme multipolaires. Comme les facteurs de forme définis à la section précédente, ils n'ont pas de bonnes propriétés pour les transformations de Lorentz pures. C'est pourquoi, pour remédier à cette situation nous développons les fonctions de vertex sur la base des multipôles tensoriels irréductibles [3] [4], voir l'équation (A-35) pour les quadrivecteurs et (A-37) pour les tenseurs d'ordre 2. Ainsi nous définissons les facteurs de forme multipolaires irréductibles qui se transforment par couples selon une représentation B des transformations de Lorentz pures. Ensuite nous étudions les règles de sélection sur ces coefficients résultant de la conservation du courant vectoriel ou de diverses contraintes sur l'opérateur tensoriel d'ordre 2.



#### 4.1. Facteurs de forme multipolaires

Les fonctions réduites  ${}_r\mathbb{A}(q^2, u, \{e\})_{\mathbb{M}}^L$ , définies en (2-35) ont la même loi de transformation par rotation que les multipôles tensoriels  ${}_r\mathbb{X}_{\mu}^{j_r k_r}(\underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^L$ , cf. Eq. (A-33) et (2-37). Elles peuvent donc être décomposées sur cette base avec des coefficients invariants par rotation

$${}_r\mathbb{A}(q^2, u, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} = \sum_{\mu, j_2, \dots, j_r} \sum_{k_1, \dots, k_r} G(q^2, e)_{\mu}^{j_r k_r L} {}_r\mathbb{X}_{\mu}^{j_r k_r L}(\underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} \quad (1)$$

Les coefficients  $G(q^2, e)_{\mu}^{j_r k_r L}$  sont appelés les facteurs de forme multipolaires des fonctions de vertex. Ce sont des combinaisons linéaires orthonormées des facteurs de forme définis dans la section précédente. En effet en utilisant la relation d'orthonormalité (A-31) des multipôles, on peut

inverser la relation (1), on obtient, avec  $\mathbb{K} = \sum_{i=1}^r k_i$ ,

$$G(q^2, e)_{\mu}^{j_r k_r L} = (-1)^{\mathbb{K}} \int {}_r\mathbb{X}_{\mu}^{j_r k_r}(\underline{u}, \{e\})_{\mathbb{M}}^L(\tau) {}_r\mathbb{A}(q^2, u, \{e\})_{\mathbb{M}}^{L*} d\Omega(\underline{u}, \{e\}) \quad (2)$$

La définition des multipôles tensoriels (A-30) et l'équation (3-1) conduisent aux relations

$$G(q^2, e)_{0}^{j_r k_r L} = \sum_{\mathbb{T}} (\hat{l}/\hat{L}) \langle j_r, 0 | l_0 | L_0 \rangle F(q^2, e)^{l_j k_r L} \quad (3 a)$$

$$G(q^2, e)_{\pm \mu}^{j_r k_r L} = \sum_{\mathbb{T}} \frac{1 \pm (-1)^{L+l}}{\sqrt{2}} (\hat{l}/\hat{L}) \langle j_r, \mu | l_0 | L_{\mu} \rangle F(q^2, e)^{l_j k_r L}, \quad \mu > 0 \quad (3 b)$$

Ces facteurs de forme multipolaires ont donc les mêmes propriétés que les facteurs de forme. Ils sont invariants par rotation de la tétrade de référence et ils ne dépendent plus que de l'invariant  $q^2$  et du choix du quadrivecteur  $\underline{e}$ , mais ils n'ont pas de bonnes propriétés pour les transformations de Lorentz pures. Dans ce paragraphe et le prochain nous supposons que  $\underline{e}$  est fixé tandis que dans les suivants nous étudions l'influence de sa position dans le 2-plan  $(p_1, p_2)$ .

En multipliant scalairement la relation (1) par un tenseur de la base sphérique, on déduit le développement multipolaire des composantes

sphériques des fonctions de vertex réduites sur les harmoniques scalaires. Ce développement peut se mettre sous la forme

$$[A(q^2, u)_M^{L*}]_n^{j_r k_r} = \sum_{\mu \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{\mu 0}} \sum_{l'm'} (\hat{l}/\hat{L}) \langle j_r \mu l 0 | L \mu \rangle \langle LM | l m j_r n \rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(G(q^2)_\mu^{j_r k_r L} + G(q^2)_{-\mu}^{j_r k_r L}) + (-1)^{L+l} (G(q^2)_\mu^{j_r k_r L} - G(q^2)_{-\mu}^{j_r k_r L})] Y_m^l(u)^* \quad (4)$$

Si on quantifie en hélicité,  $\underline{u} = e_3$ , cf. Eq. (2-45), la dépendance en  $\underline{u}$  disparaît dans l'expression précédente, cf. Eq. (3-4), et en utilisant l'orthogonalité des coefficients-CG, on peut effectuer les sommations sur  $l, \mu$  et  $M$ . Il vient alors

$$[A(q^2, e_3)_n^{L*}]_n^{j_r k_r} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{n0}} \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}} [(-1)^{j_r} \theta(n) (G(q^2)_n^{j_r k_r L} - G(q^2)_{-n}^{j_r k_r L})$$

$$+ \theta(-n) (G(q^2)_{-n}^{j_r k_r L} + G(q^2)_n^{j_r k_r L})] \quad (5)$$

où la fonction échelon unité,  $\theta$ , est définie par

$$\theta(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \quad \text{et} \quad \theta(x) = 1 \text{ pour } x \geq 0. \quad (6)$$

Le développement multipolaire (5) est plus simple que la décomposition en facteurs de forme correspondante (2-9) car il n'y a plus aucune sommation à effectuer.

En utilisant les équations (2-39) et (4-1), nous obtenons le développement multipolaire des fonctions de vertex standard

$${}_r A(q^2, u, \{e\})_n^{n_2} = \sum_L \langle s_2 n_2 | L M s_1 n_1 \rangle \sum_{\mu j_r \dots k_r} G(q^2)_\mu^{j_r k_r L} {}_r X_\mu^{j_r k_r}(u, \{e\})_M^{L*} \quad (7)$$

#### 4.2. Règles de sélection sur les facteurs de forme multipolaires

Les facteurs de forme multipolaires étant des combinaisons linéaires des facteurs de forme, cf. Eq. (3), ils satisfont donc des règles de sélection analogues à celles établies dans la section précédente.

L'équation (3-20) donne les règles de sélection sur les facteurs de forme multipolaires résultant de la conservation de la parité

$$G(q^2)_0^{j_r k_r L} = (-1)^{j_r + L + K} \varepsilon_1 \varepsilon_2 G(q^2)_0^{j_r k_r L} \quad (8 a)$$

$$G(q^2)_\pm \mu^{j_r k_r L} = \pm (-1)^{L+K} \varepsilon_1 \varepsilon_2 G(q^2)_\pm \mu^{j_r k_r L}, \quad \mu > 0 \quad (8 b)$$

Cette dernière expression entraîne que pour  $k_1 \dots k_r$  et  $L$  fixés, soit les coefficients  $G(q^2)_\mu^{j_r k_r L}$  à  $\mu$  positif soit ceux à  $\mu$  négatif sont nuls.

La règle de sélection due à l'invariance par renversement du temps se déduit immédiatement de l'équation (3-25), on a

$$G(q^2)_\mu^{j_r k_r L} = (-1)^r \varepsilon_T G(q^2)_\mu^{j_r k_r L^*} \quad (9)$$

c'est-à-dire les facteurs de forme multipolaires sont réels ou imaginaires.

De même, on déduit de (3-30), que dans le cas de particules identiques, l'hermiticité de l'opérateur implique la condition

$$G(q^2)_\mu^{j_r k_r L} = (-1)^{L+K} G(q^2)_\mu^{j_r k_r L^*} \quad (10)$$

#### 4.3. Facteurs de forme invariants des fonctions de vertex scalaires

Considérons les fonctions de vertex réduites d'un opérateur scalaire,  $A(q^2, u, \{e\})_M^L$ . Nous avons vu, Eq. (2-38), que ces fonctions sont inchangées si on fait agir une transformation de Lorentz pure sur la tétrade  $\{e\}$ , en particulier, si on change de référentiel dans le 2-plan ( $p_1, p_2$ ). Les harmoniques sphériques scalaires sont elles aussi invariantes dans une telle transformation c'est pourquoi les facteurs de forme des fonctions de vertex scalaires ne dépendent pas du choix de  $\underline{e}$  et sont donc invariants. Ils sont définis par, Eq. (3-1),

$$A(q^2, u, \{e\})_M^L = F(q^2)^L Y_M^L(u, \{e\})^*, \quad (11)$$

et la relation inverse est

$$F(q^2)^L = \int Y_M^L(u, \{e\}) A(q^2, u, \{e\})_M^L d\Omega(u, \{e\}). \quad (12)$$

L'invariance par parité et par renversement du temps implique des règles de sélection sur ces facteurs de forme. Ces règles ont été établies de façon générale au paragraphe précédent, dans ce cas particulier elles deviennent

$$F(q^2)^L = \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^L F(q^2)^L, \quad (13)$$

$$F(q^2)^L = \varepsilon_T F(q^2)^{L^*}. \quad (14)$$

Pour  $\varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$  les coefficients à  $L$  impair sont nuls, tandis que pour  $\varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ , ce sont ceux à  $L$  pair qui sont nuls. Si  $\varepsilon_T = 1$ , les facteurs de forme sont réels tandis que pour  $\varepsilon_T = -1$ , ils sont imaginaires, mais dans les deux cas ils sont tous en phase.

**4.4. Facteurs de forme multipolaires irréductibles des fonctions de vertex quadrivectorielles**

Les fonctions de vertex réduites  $\underline{\Delta}(q^2, u, \{e\})_M^L$  d'un opérateur quadrivectoriel sont inchangées si on fait agir une transformation de Lorentz pure sur la tétrade de référence, cf. Eq. (2-38), c'est-à-dire

$$\underline{\Delta}(q^2, Lu, L\{e\})_M^L = \underline{\Delta}(q^2, u, \{e\})_M^L. \tag{15}$$

Par contre les quatre multipôles quadrivectoriels à L et M fixés,  $\underline{\mathcal{E}}_i(u)_M^L$ ,  $\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(u)_M^L$ ,  $\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{J}}(u)_M^L$  et  $\underline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{J}}(u)_M^L$  se transforment dans les transformations pures du 2-plan ( $p_1, p_2$ ) selon, cf. Eq. (A-35, 36),

$$\underline{\mathcal{E}}_i(Lu, L\{e\})_M^L = \text{ch } \kappa \underline{\mathcal{E}}_i(u, \{e\})_M^L + \text{sh } \kappa \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(u, \{e\})_M^L, \tag{16 a}$$

$$\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(Lu, L\{e\})_M^L = \text{sh } \kappa \underline{\mathcal{E}}_i(u, \{e\})_M^L + \text{ch } \kappa \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(u, \{e\})_M^L, \tag{16 b}$$

$$\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{J}}(Lu, L\{e\})_M^L = \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{J}}(u, \{e\})_M^L, \tag{17 a}$$

$$\underline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{J}}(Lu, L\{e\})_M^L = \underline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{J}}(u, \{e\})_M^L, \tag{17 b}$$

i. e. ce sont des multipôles irréductibles.

Les facteurs de forme multipolaires irréductibles sont les coefficients du développement des fonctions de vertex réduites sur les multipôles irréductibles. Ils sont définis par

$$\underline{\Delta}(q^2, u, \{e\})_M^L = \underline{\mathcal{E}}_i(q^2, e)^L \underline{\mathcal{E}}_i(u, \{e\})_M^L + \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^L \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(u, \{e\})_M^L + \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{J}}(q^2, e)^L \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{J}}(u, \{e\})_M^L + \underline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{J}}(q^2, e)^L \underline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{J}}(u, \{e\})_M^L \tag{18}$$

ou par les relations inverses

$$\underline{\mathcal{E}}_i(q^2, e)^L = \int \underline{\mathcal{E}}_i(u, \{e\})_M^L \cdot \underline{\Delta}(q^2, u, \{e\})_M^L d\Omega(u, \{e\}), \tag{19 a}$$

$$\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^L = - \int \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}(u, \{e\})_M^L \cdot \underline{\Delta}(q^2, u, \{e\})_M^L d\Omega(u, \{e\}), \tag{19 b}$$

$$\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{J}}(q^2, e)^L = - \int \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{J}}(u, \{e\})_M^L \cdot \underline{\Delta}(q^2, u, \{e\})_M^L d\Omega(u, \{e\}), \tag{19 c}$$

$$\underline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{J}}(q^2, e)^L = - \int \underline{\mathfrak{M}}_{\mathcal{J}}(u, \{e\})_M^L \cdot \underline{\Delta}(q^2, u, \{e\})_M^L d\Omega(u, \{e\}), \tag{19 d}$$

qui se déduisent de (18) à l'aide de la relation d'orthonormalité des multipôles (A-31).

Les relations (17) impliquent que les facteurs de forme transverses élec-

trique  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^L$  et magnétique  $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^L$ , sont invariants tandis que les lois de transformations (16) impliquent

$$\mathcal{E}_i(q^2, Le)^L = \text{ch } \varkappa \mathcal{E}_i(q^2, e)^L - \text{sh } \varkappa \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^L \quad (20 a)$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, Le)^L = -\text{sh } \varkappa \mathcal{E}_i(q^2, e)^L + \text{ch } \varkappa \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^L \quad (20 b)$$

L'invariance par parité et par renversement du temps imposent aux facteurs de forme irréductibles les règles de sélection

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^L = -(-1)^{L\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^L \quad (21 a)$$

$$\mathcal{E}(q^2)^L = (-1)^{L\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2} \mathcal{E}(q^2)^L \quad (21 b)$$

$$Z(q^2)^L = -\varepsilon_T Z(q^2)^{L*} \quad (22)$$

où la relation (21 b) est valable pour les trois facteurs de forme électriques et la relation (22) pour les quatre.

Comme en (4-4), les facteurs de forme irréductibles peuvent être utilisés pour développer les composantes sphériques des fonctions de vertex standard et réduites sur la base des harmoniques sphériques scalaires, on obtient

$$[A(q^2, u)^{n_2}_{n_1}]^j_n = \sum_L \langle s_2 n_2 | LM s_1 n_1 \rangle [A(q^2, u)^{L*}_M]^j_n \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [A(q^2, u)^{L*}_M]^j_n &= [\delta_{j_0} \mathcal{E}_i(q^2, e)^L + \delta_{j_1} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^L] \langle LM | L m j n \rangle Y_m^L(u)^* \\ &+ \left[ -\sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^L + \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^L \right] \\ &\quad \langle LM | L+1 m j n \rangle Y_m^{L+1}(u)^* \quad (24) \\ &+ \left[ +\sqrt{\frac{L}{2L+1}} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^L + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^L \right] \\ &\quad \langle LM | L-1 m j n \rangle Y_m^{L-1}(u)^* \end{aligned}$$

Cette relation est une généralisation, à un référentiel arbitraire, du développement multipolaire donné par Durand, De Celles et Marr [1] en hélicité et dans le système de Breit. Les relations entre nos facteurs de forme dans le système de Breit et ceux de ces auteurs sont données ci-dessous

$$\mathcal{E}_i(q^2, e_B)^L = (-1)^{L+s_1-s_2} \sqrt{\frac{4\pi}{(2L+1)(2s_2+1)}} Q_L(q^2) \quad (25 a)$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e_B)^L = (-1)^{L+s_1-s_2} \sqrt{\frac{8\pi}{(2L+1)(2s_2+1)}} E_L(q^2) \quad (25 b)$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2, e_B)^L = -(-1)^{L+s_1-s_2} \sqrt{\frac{8\pi}{(2L+1)(2s_2+1)}} M_L(q^2) \quad (25 c)$$

Ces auteurs ne définissent que trois facteurs de forme, car ils imposent d'emblée la conservation du courant vectoriel que nous étudions au paragraphe suivant.

En hélicité, l'équation (24) devient

$$[A(q^2, e_3)^{L*}]_0^j = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} [\delta_{j0} \mathcal{E}_i(q^2, e)^L + \delta_{j1} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^L] \quad (26 a)$$

$$[A(q^2, e_3)^{L*}]_{\pm}^1 = \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}} [\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^L \mp \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^L] \quad (26 b)$$

Dans les cas particuliers où  $s_1 = 0$  ou  $1/2$ , en explicitant la conservation de la parité, on peut écrire le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard, en hélicité, à l'aide des équations (3-13, 14) sous la forme

*Bosons* :  $s_1 = 0$

$$\sqrt{4\pi} [A(q^2, e_3)^{n_2}]_0^j = \delta_{n_2 0} \sqrt{2s_2+1} \frac{1 + \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^{s_2}}{2} [\delta_{j0} \mathcal{E}_i(q^2, e)^{s_2} + \delta_{j1} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^{s_2}] \quad (27 a)$$

$$\sqrt{8\pi} [A(q^2, e_3)^{n_2}]_{\pm 1}^1 = \delta_{n_2 \pm 1} \sqrt{2s_2+1} \left[ \frac{1 + \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^{s_2}}{2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2} \mp \frac{1 - \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^{s_2}}{2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2} \right] \quad (27 b)$$

*Fermions* :  $s_1 = 1/2$

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{4\pi} [A(q^2, e_3)^{n_2 \pm 1/2}]_0^j &= \delta_{n_2 \pm 1/2} \sqrt{s_2+1/2} \\ &\mp \frac{1 + \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^{s_2+1/2}}{2} [\delta_{j0} \mathcal{E}_i(q^2, e)^{s_2+1/2} + \delta_{j1} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^{s_2+1/2}] \\ &+ \frac{1 - \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^{s_2+1/2}}{2} [\delta_{j0} \mathcal{E}_i(q^2, e)^{s_2-1/2} + \delta_{j1} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^{s_2-1/2}] \end{aligned} \right\} \quad (28 a)$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{8\pi} [A(q^2, e_3)^{n_2 \pm 1/2}]_{\pm}^1 \\
&= \delta_{n_2 \pm 3/2} \left\{ \mp \frac{1 + \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^{s_2 + 1/2}}{2} [\sqrt{s_2 - 1/2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2 + 1/2} \right. \\
&+ \sqrt{s_2 + 3/2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2 - 1/2}] + \frac{1 - \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^{s_2 + 1/2}}{2} \\
&\left. [\sqrt{s_2 + 3/2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2 - 1/2} + \sqrt{s_2 - 1/2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2 + 1/2}] \right\} \quad (28 b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{8\pi} [A(q^2, e_3)^{n_2 \pm 1/2}]_{\mp}^1 \\
&= \delta_{n_2 \mp 1/2} \left\{ \mp \frac{1 + \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^{s_2 + 1/2}}{2} [\sqrt{s_2 + 3/2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2 + 1/2} \right. \\
&- \sqrt{s_2 - 1/2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2 - 1/2}] + \frac{1 - \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-1)^{s_2 + 1/2}}{2} \\
&\left. [\sqrt{s_2 - 1/2} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2 - 1/2} - \sqrt{s_2 + 3/2} \mathfrak{M}_{\mathcal{F}}(q^2)^{s_2 + 1/2}] \right\} \quad (28 c)
\end{aligned}$$

#### 4.5. Conservation du courant vectoriel

L'hypothèse de conservation du courant vectoriel s'exprime par la condition suivante sur les fonctions de vertex standard

$$\underline{q} \cdot \underline{A}(q^2, u, \{e\})^{n_2 n_1} = 0. \quad (29)$$

En utilisant l'équation (2-34) et l'orthogonalité des coefficients-CG, on obtient

$$\underline{q} \cdot \underline{A}(q^2, u, \{e\})_{\mathfrak{M}}^* = 0 \quad (30)$$

Les quadrivecteurs  $\underline{e}$  et  $\underline{u}$  forment une base orthonormale du 2-plan ( $\underline{p}_1, \underline{p}_2$ ),  $\underline{q}$  est donc une combinaison linéaire de  $\underline{e}$  et  $\underline{u}$ , et l'équation (30) peut s'écrire

$$(\underline{q} \cdot \underline{e}) \underline{e} \cdot \underline{A}(q^2, u, \{e\})_{\mathfrak{M}}^* - (\underline{q} \cdot \underline{u}) \underline{u} \cdot \underline{A}(q^2, u, \{e\})_{\mathfrak{M}}^* = 0 \quad (31)$$

L'équation (18) et les propriétés géométriques des multipôles, cf. [3] [4], conduisent à une relation entre deux facteurs de forme multipolaires irréductibles

$$(\underline{q} \cdot \underline{e}) \mathcal{E}_i(q^2, e)^L + (\underline{q} \cdot \underline{u}) \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(q^2, e)^L = 0 \quad (32)$$

Dans le cas particulier où  $q^2 = 0$ , elle devient

$$\mathcal{E}_i(0, e)^L = \pm \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(0, e)^L. \quad (33)$$

Selon le signe de  $q^2$ , on peut choisir judicieusement les quadrivecteurs  $\underline{e}$  et  $\underline{u}$  de sorte que la condition (32) annule un des facteurs de forme. A l'aide des relations (2-22, 48), on démontre les conditions

$$q^2 > 0 \quad \mathcal{E}_i(q^2, e_C)^L = 0, \quad (34 a)$$

$$q^2 < 0 \quad \mathcal{E}_\varphi(q^2, e_B)^L = 0. \quad (34 b)$$

Dans le cas de particules identiques et d'un opérateur hermitique, on peut faire les remarques suivantes. En hélicité, on extrait des équations (23) et (24) les relations

$$[A(q^2, e_3)^n_n]_0^0 = \sum_T \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \langle sn | L0sn \rangle \mathcal{E}_i(q^2, e)^L, \quad (35 a)$$

$$[A(q^2, e_3)^n_n]_0^1 = \sum_T \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \langle sn | L0sn \rangle \mathcal{E}_\varphi(q^2, e)^L. \quad (35 b)$$

La règle de sélection (3-31) implique que les membres de droite des équations (35 a et b) s'annulent respectivement pour  $\varepsilon\varepsilon_T = 1$  et  $-1$ , on a alors

$$\varepsilon\varepsilon_T = 1, \quad \mathcal{E}_i(q^2, e)^L = 0 \quad (36 a)$$

$$\varepsilon\varepsilon_T = -1, \quad \mathcal{E}_\varphi(q^2, e)^L = 0 \quad (36 b)$$

Donc les conditions de conservation du courant vectoriel (34 a) et (34 b) sont identiquement satisfaites si on a  $q^2 > 0$  et  $\varepsilon\varepsilon_T = 1$  ou  $q^2 < 0$  et  $\varepsilon\varepsilon_T = -1$ , respectivement. Ce résultat a déjà été remarqué par Ernst, Sachs et Wali [9] pour les spins 1/2 et il a été généralisé à des spins quelconques par Durand, De Celles et Marr [1] dans le cas particulier où  $q^2$  est négatif.

**4.6. Facteurs de forme multipolaires irréductibles des fonctions de vertex tensorielles d'ordre 2**

Les fonctions de vertex réduites  $\underline{\Delta}(q^2, u, \{e\})_M^L$  d'un opérateur tensoriel d'ordre 2 sont inchangées si on fait agir une transformation de Lorentz pure sur la tétrade de référence, cf. Eq. (2-38), i. e.,

$$\underline{\Delta}(q^2, Lu, L\{e\})_M^L = \underline{\Delta}(q^2, u, \{e\})_M^L \quad (37)$$

Par contre, dans une telle transformation, les multipôles  $\underline{Z}_n^{xi}(u)_M^L$  sont invariants tandis que les multipôles irréductibles  $\underline{\underline{Z}}_n^{xi}(u)_M^L$  se transforment suivant la loi (cf. Eq. A-37),

$$L \otimes L \underline{\underline{Z}}_n^{xi}(u)_M^L = \sum_j B(n\kappa)^i_j \underline{\underline{Z}}_n^{xj}(u)_M^L. \quad (38)$$

On définit les facteurs de forme multipolaires irréductibles en décomposant les fonctions de vertex réduites sur les multipôles irréductibles, soit,



$$A(q^2, u, \{e\})_M^{L*} = \sum_{Z,x} \left[ \sum_{n,i} Z_n^{xi}(q^2, e)^L \underline{Z}_n^{xi}(u, \{e\})_M^{L*} + \sum_{\eta} Z_{\eta}^x(q^2)^L \underline{Z}_{\eta}^x(u, \{e\})_M^{L*} \right] \quad (39)$$

On peut inverser cette équation en utilisant les définitions des multipôles irréductibles et la relation d'orthogonalité des multipôles tensoriels, Eq. (A-31), on obtient

$$Z_n^{xi}(q^2, e)^L = (-1)^{n+i} \int \underline{Z}_n^{xi}(u, \{e\})_M^L : \underline{A}(q^2, u, \{e\})_M^{L*} d\Omega(u, \{e\}), \quad (40 a)$$

$$Z_{\eta}^x(q^2)^L = \int \underline{Z}_{\eta}^x(u, \{e\})_M^L : \underline{A}(q^2, u, \{e\})_M^{L*} d\Omega(u, \{e\}), \quad (40 b)$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}^a(q^2)^L = - \int \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{Z}}^a(u, \{e\})_M^L : \underline{A}(q^2, u, \{e\})_M^{L*} d\Omega(u, \{e\}), \quad (40 c)$$

où l'équation (40 c) est une exception à (40 b).

La loi de transformation (38) entraîne que les facteurs de forme  $Z_{\eta}^x(q^2)^L$  sont invariants tandis que les facteurs de forme  $Z_n^{xi}(q^2, e)^L$  se transforment suivant la loi

$$Z_n^{xi}(q^2, Le)^L = \sum_j B(-n\lambda)^j Z_n^{xi}(q^2, e)^L \quad (41)$$

L'invariance par parité et par renversement du temps imposent aux facteurs de forme multipolaires irréductibles, les règles de sélection

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(q^2)^L &= (-1)^{L\epsilon\epsilon_1\epsilon_2} \mathcal{E}(q^2)^L & (42 a) \\ \mathfrak{M}(q^2)^L &= -(-1)^{L\epsilon\epsilon_1\epsilon_2} \mathfrak{M}(q^2)^L & (42 b) \\ \mathfrak{Z}(q^2)^L &= \epsilon_T \mathfrak{Z}(q^2)^{L*} & (43) \end{aligned}$$

où les relations (42 a, 42 b) sont valables respectivement pour les facteurs de forme magnétiques et électriques, et la relation (43) pour les deux types.

Les facteurs de forme multipolaires irréductibles s'expriment en fonction des facteurs de forme multipolaires de la même manière que les multipôles irréductibles s'expriment en fonction des multipôles tensoriels d'ordre 2, par les équations (A-38).

A l'aide de ces équations et de la relation (4-5), on peut exprimer les composantes sphériques des fonctions de vertex réduites, en hélicité, en fonction des facteurs de forme multipolaires irréductibles. Les résultats

sont rassemblés dans formule (45), où, pour ne considérer que des tenseurs symétriques ou antisymétriques, nous posons

$$[A(q^2, e_3)^{L*}]_n^{1s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [A(q^2, e_3)^{L*}]_n^{101} \pm [A(q^2, e_3)^{L*}]_n^{110} \} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} [A(q^2, e_3)^{L*}]_0^{000} \\ &= \frac{1}{2} [\sqrt{2} \mathcal{E}_2^{s0}(q^2, e)^L + \mathcal{E}_2^s(q^2)^L + \mathcal{E}_2^s(q^2)^L] \\ & \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} [A(q^2, e_3)^{L*}]_0^{011} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} [-\sqrt{2} \mathcal{E}_2^{s0}(q^2, e)^L + 3\mathcal{E}_2^s(q^2)^L - \mathcal{E}_2^s(q^2)^L] \\ & \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} [A(q^2, e_3)^{L*}]_n^{1s} \\ &= \delta_{n0} \mathcal{E}_2^{s1}(q^2, e)^L + \frac{1}{\sqrt{2}} [-n \mathfrak{M}_1^{s0}(q^2, e)^L + |n| \mathcal{E}_1^{s0}(q^2, e)^L] \\ & \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} [A(q^2, e_3)^{L*}]_n^{1a} \\ &= \delta_{n0} \mathcal{E}_2^a(q^2)^L + \frac{1}{\sqrt{2}} [-n \mathfrak{M}_1^{a0}(q^2, e)^L + |n| \mathcal{E}_1^{a0}(q^2, e)^L] \\ & \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} [A(q^2, e_3)^{L*}]_n^{111} \quad (45) \\ &= \delta_{n0} \mathfrak{M}_2^a(q^2)^L + \frac{1}{\sqrt{2}} [|n| \mathfrak{M}_1^{a1}(q^2, e)^L - n \mathcal{E}_1^{a1}(q^2, e)^L] \\ & \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} [A(q^2, e_3)^{L*}]_0^{211} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{E}_2^{s0}(q^2, e)^L - \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{E}_2^s(q^2)^L \\ & \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} [A(q^2, e_3)^{L*}]_{\pm 1}^{211} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\mp \mathfrak{M}_1^{s1}(q^2, e)^L + \mathcal{E}_1^{s1}(q^2, e)^L] \\ & \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} [A(q^2, e_3)^{L*}]_{\pm 2}^{211} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\mp \mathfrak{M}_2^s(q^2)^L + \mathcal{E}_2^s(q^2)^L] \end{aligned}$$

#### 4.7. Contraintes sur l'opérateur tensoriel

Quand on impose des contraintes sur l'opérateur tensoriel, cela se traduit par des conditions sur les facteurs de forme irréductibles.

i) Si l'opérateur tensoriel  $\underline{A}$  a une trace nulle, le facteur de forme scalaire est nul

$$\underline{A} : \underline{g} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^s(q^2)^L = 0 \quad (46)$$

ii) Si l'opérateur tensoriel  $\underline{A}$  est symétrique (ou antisymétrique) les facteurs de forme correspondant aux multipôles antisymétriques (ou symétriques) sont nuls

$$A^{\nu\nu} = A^{\nu\nu} \Rightarrow Z^a(q^2)^L = 0 \quad (47 a)$$

$$A^{\nu\nu} = -A^{\nu\nu} \Rightarrow Z^s(q^2)^L = 0 \quad (47 b)$$

iii) Si l'opérateur  $\underline{A}$  est symétrique, de trace nulle, et orthogonal au transfert  $\underline{q}$ ,

$$\underline{A} \cdot \underline{q} = \underline{q} \cdot \underline{A} = 0, \quad (48)$$

en plus des équations (46) et (47 a) on obtient, par la même méthode que pour la conservation du courant vectoriel, les quatre conditions

$$(\underline{q} \cdot \underline{e}) \mathcal{E}_2^{s0}(q^2, e)^L - (\underline{q} \cdot \underline{u}) \mathcal{E}_2^{s1}(q^2, e)^L = 0, \quad (49 a)$$

$$(\underline{q} \cdot \underline{u}) \mathcal{E}_2^{s0}(q^2, e)^L - (\underline{q} \cdot \underline{e}) \mathcal{E}_2^{s1}(q^2, e)^L = 0, \quad (49 b)$$

$$(\underline{q} \cdot \underline{e}) \mathcal{E}_1^{s0}(q^2, e)^L - (\underline{q} \cdot \underline{u}) \mathcal{E}_1^{s1}(q^2, e)^L = 0, \quad (49 c)$$

$$(\underline{q} \cdot \underline{e}) \mathfrak{M}_1^{s0}(q^2, e)^L - (\underline{q} \cdot \underline{u}) \mathfrak{M}_1^{s1}(q^2, e)^L = 0. \quad (49 d)$$

Dans le cas particulier où  $q^2 = 0$ , les équations (49) deviennent

$$\mathcal{E}_2^{s0}(0, e)^L = \pm \mathcal{E}_2^{s1}(0, e)^L, \quad (50 a)$$

$$\mathcal{E}_1^{s0}(0, e)^L = \pm \mathcal{E}_1^{s1}(0, e)^L, \quad (50 b)$$

$$\mathfrak{M}_1^{s0}(0, e)^L = \pm \mathfrak{M}_1^{s1}(0, e)^L. \quad (50 c)$$

Mais dans le cas où  $q^2$  n'est pas nul, les équations (49 a) et (49 b) sont incompatibles et on obtient

$$\mathcal{E}_2^{s0}(q^2, e)^L = \mathcal{E}_2^{s1}(q^2, e)^L = 0, \quad (51)$$

et en choisissant  $\underline{e}$  et  $\underline{u}$  judicieusement selon que  $q^2$  est positif ou négatif, les équations (49 c) et (49 d) se réduisent à

$$q^2 > 0, \quad \mathcal{E}_1^{s0}(q^2, e_C)^L = \mathfrak{M}_1^{s0}(q^2, e_C)^L = 0, \quad (52 a)$$

$$q^2 < 0, \quad \mathcal{E}_1^{s1}(q^2, e_B)^L = \mathfrak{M}_1^{s1}(q^2, e_B)^L = 0. \quad (52 b)$$

## 5. CONCLUSION

L'utilisation des bases harmoniques sphériques tensorielles et des multipôles tensoriels nous a permis de généraliser les développements

multipolaires effectués respectivement par De Rafael et par Durand, De Celles et Marr. En outre, nous avons gardé notre référentiel arbitraire en choisissant naturellement le quadrivecteur de genre temps  $\underline{e}$  dans le 2-plan des impulsions des particules. Nous avons pu ainsi définir une paramétrisation des facteurs de forme valable pour tout transfert  $q^2$ , alors que les paramétrisations des auteurs précités dépendent du genre du transfert. Enfin la base des multipôles tensoriels irréductibles nous a permis d'obtenir des facteurs de forme se transformant selon une représentation irréductible de la transformation de Lorentz pure effectuée quand on modifie le choix du quadrivecteur  $\underline{e}$  dans le 2-plan.

### REMERCIEMENTS

Je remercie Y. NOIROT pour les discussions préliminaires que nous avons eues sur ce sujet et P. MINNAERT pour son aide et ses encouragements tout au long de ce travail.

---

## APPENDICES

A. HARMONIQUES SPHÉRIQUES TENSORIELLES  
ET MULTIPÔLES TENSORIELS

Cet appendice est consacré d'une part à des rappels sur les tétrades sphériques et sur les transformations de Lorentz pures et d'autre part au résumé de résultats essentiels sur les harmoniques sphériques tensorielles et sur les multipôles tensoriels qui sont plus longuement exposés dans les références [3] et [4].

## A.1. Tétrades sphériques

Dans l'espace de Minkowski  $\mathcal{M}$ , nous utilisons le tenseur métrique  $g$ , de composantes  $g^{00} = -g^{ii} = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $g^{\mu\nu} = 0$  pour  $\mu \neq \nu$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ),  $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$  et le tenseur de Levi-Civita  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  qui est le tenseur complètement antisymétrique tel que  $\varepsilon_{0123} = 1$ . Avec ce dernier tenseur le déterminant de 4 quadrivecteurs est défini par  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma$  et nous le notons  $\{a, b, c, d\}$ .

Une tétrade  $\{e\}$  est un ensemble de 4 quadrivecteurs  $e_\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ), formant une base orthonormée, directe et complète de  $\mathcal{M}$ , i. e. satisfaisant les relations

$$e_\alpha \cdot e_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (1)$$

$$\{e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2)$$

$$g^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta = \underline{g} \quad (3)$$

La tétrade sphérique associée à  $\{e\}$  est l'ensemble de 4 quadrivecteurs complexes  $\underline{e}_n^j$  ( $j = 0, n = 0; j = 1, n = -, 0, +$ ) définis par

$$\underline{e}_0^0 = \underline{e}^0, \quad \underline{e}_0^1 = \underline{e}_3, \quad \underline{e}_\pm^1 = \mp (1/\sqrt{2}) (\underline{e}_1 \pm i\underline{e}_2). \quad (4)$$

Ils satisfont l'identité

$$\underline{e}_n^{j*} = (-1)^n \underline{e}_{-n}^j \quad (5)$$

où l'astérisque indique la conjugaison complexe, ainsi que trois relations équivalentes à (1), (2) et (3)

$$\underline{e}_n^{j*} \cdot \underline{e}_{n'}^j = (-1)^j \delta_{jj'} \delta_{nn'} \quad (6)$$

$$i \{ \underline{e}_0^0, \underline{e}_m^1, \underline{e}_n^1, \underline{e}_r^1 \} = \varepsilon_{mnr} \quad (7)$$

$$\sum_{j=0}^1 (-1)^j \underline{e}_n^{j*} \otimes \underline{e}_n^j = \underline{g} \quad (8)$$

où  $\varepsilon_{mnr}$  est le tenseur de Levi-Civita sphérique ( $\varepsilon_{+0-} = 1$ ).

Les composantes sphériques  $a_n^j$  d'un quadrivecteur  $\underline{a}$  sur la tétrade  $\{e\}$  sont définies par

$$a_n^j = (-1)^j \underline{a} \cdot \underline{e}_n^j \quad \text{ou} \quad \underline{a} = \sum_{j=0}^1 a_n^j \underline{e}_n^{j*} \quad (9)$$

Alors le produit scalaire de deux quadrivecteurs s'écrit à l'aide des composantes sphériques

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_0^0 b_0^0 + a_+^1 b_-^1 + a_-^1 b_+^1 - a_0^1 b_0^1. \quad (10)$$

Par la suite nous omettrons souvent les indices des quadrivecteurs de genre temps des tétrades, par exemple nous écrirons  $\underline{e}$  pour  $e^0$  ou  $e_0^0$ .

**A.2. Transformations de Lorentz pures**

Soient  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  deux quadrivecteurs unitaires de genre temps ( $a^2 = b^2 = 1$ ) tels que leur produit scalaire soit positif ( $\underline{a} \cdot \underline{b} > 0$ ). Une transformation de Lorentz  $L(b \leftarrow a)$  qui applique  $\underline{a}$  sur  $\underline{b}$  et laisse invariant le 2-plân orthogonal aux quadrivecteurs  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  est appelée transformation de Lorentz pure

$$L(b \leftarrow a) = \underline{g} \cdot - \frac{(\underline{b} + a) \otimes (\underline{b} + a)}{\underline{b} \cdot a + 1} + 2\underline{b} \otimes \underline{a}. \quad (11)$$

Si on conjugue une transformation pure par une transformation  $\Lambda$  quelconque, on obtient une nouvelle transformation pure

$$L(\Lambda b \leftarrow \Lambda a) = \Lambda L(b \leftarrow a) \Lambda^{-1}. \quad (12)$$

Étant donnés une transformation de Lorentz  $\Lambda$  et un quadrivecteur unitaire de genre temps  $\underline{e}$ , on peut décomposer  $\Lambda$  de manière unique sous la forme [10] [11]

$$\Lambda = L_\Lambda R_\Lambda. \quad (13)$$

où  $L_\Lambda$  est la transformation de Lorentz pure qui applique  $\underline{e}$  sur  $\Lambda \underline{e}$  et où  $R_\Lambda$  est une rotation du petit groupe de  $\underline{e}$ . L'action de  $\Lambda$  sur une tétrade  $\{e\}$  peut alors s'écrire

$$\Lambda e_n^j = L_\Lambda e_n^j \cdot D^j(R_\Lambda)^n. \quad (14)$$

Soient trois quadrivecteurs unitaires de genre espace formant avec  $\underline{e}$  une tétrade et tels que  $\underline{u}$  appartienne au 2-plan  $(\underline{e}, \Lambda \underline{e})$ . Alors la transformation  $L_\Lambda$  peut être paramétrée par un argument  $\varkappa$  défini par

$$\text{ch } \varkappa = \underline{e} \cdot \Lambda \underline{e}, \quad \text{sh } \varkappa = \underline{u} \cdot \Lambda \underline{e} \quad (15)$$

et l'action de  $L_\Lambda \equiv L(\varkappa)$  sur  $\underline{e}, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  est

$$L(\varkappa) \underline{e} = \text{ch } \varkappa \underline{e} + \text{sh } \varkappa \underline{u}, \quad (16 a)$$

$$L(\varkappa) \underline{u} = \text{sh } \varkappa \underline{u} + \text{ch } \varkappa \underline{e}, \quad (16 b)$$

$$L(\varkappa) \underline{v} = \underline{v}, \quad L(\varkappa) \underline{w} = \underline{w}. \quad (16 c)$$

Dans la base  $\underline{e}, \underline{u}$  la transformation  $L(\varkappa)$  est représentée par la matrice symétrique

$$B(\varkappa) = \begin{pmatrix} \text{ch } \varkappa & \text{sh } \varkappa \\ \text{sh } \varkappa & \text{ch } \varkappa \end{pmatrix} \quad (17)$$

Les éléments de  $B(\varkappa)$  sont notés  $B(\varkappa)_i^j$  où les indices  $i$  et  $j$  prennent les valeurs 0 et 1. Si on pose  $\underline{e}^0 \equiv \underline{e}$  et  $\underline{e}^1 \equiv \underline{u}$ , la loi de transformation de ces quadrivecteurs s'écrit

$$L(\varkappa) e^j = B(\varkappa)_i^j e^i. \quad (18)$$

**A.3. Bases tensorielles sphériques**

Les tenseurs de base sphérique d'ordre  $r$  sont construits par un processus itératif à partir des quadrivecteurs  $\underline{e}_n^j$  à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan de sorte qu'ils se transforment par rotation suivant une représentation irréductible

$$\underline{e}_m^{j_2 k_1 k_2} = \langle k_1 n_1 k_2 n_2 | j_2 m \rangle \underline{e}_{n_1}^{k_1} \otimes \underline{e}_{n_2}^{k_2} \quad (19 a)$$

$$\underline{e}_m^{j_r \dots j_2 k_1 \dots k_r} = \langle j_{r-1} m' k_r n | j_r m \rangle_{r-1} \underline{e}_m^{j_r \dots j_2 k_1 \dots k_{r-1}} \otimes \underline{e}_n^{k_r} \quad (19 b)$$

Pour alléger l'écriture, nous utiliserons souvent des abréviations telles que  $\underline{t}_m^{j\dots}$  ou  ${}_{r\underline{t}_m}^{j\dots kr}$ . Ces tenseurs satisfont la relation d'orthogonalité

$$(\underline{t}_m^{j\dots})^*(\underline{t}_{m'}^{j\dots}) = (-1)^K \left( \prod_{i=r}^r \delta_{j_i j'_i} \right) \left( \prod_{i=1}^r \delta_{k_i k'_i} \right) \delta_{mm'} \quad (20)$$

où nous avons posé  $K = \sum_{i=1}^r k_i$ .

Dans une transformation de Lorentz  $\Lambda$  du groupe restreint, ces tenseurs deviennent

$$\Lambda^{\otimes r} \underline{t}_m^{j\dots} = (\mathbf{L}_\Lambda^{\otimes r} \underline{t}_{m'}^{j\dots}) \mathbf{D}^{j\dots}(\mathbf{R}_\Lambda)^{m' m} \quad (21)$$

et l'opérateur parité  $\mathbf{P}$  agit sur eux selon

$$\mathbf{P}^{\otimes r} \underline{t}_m^{j\dots} = (-1)^K \underline{t}_m^{j\dots} \quad (22)$$

Les composantes sphériques  $\mathbf{T}_m^{j\dots}$  d'un tenseur arbitraire  ${}_{r\underline{\mathbf{T}}}$  sont définies par

$$\mathbf{T}_m^{j\dots kr} = (-1)^K {}_{r\underline{\mathbf{T}}}(\underline{t}) \underline{t}_m^{j\dots kr} \quad (23 a)$$

$${}_{r\underline{\mathbf{T}}} = \sum_{\substack{k_1 \dots k_r \\ j_2 \dots j_r}} \mathbf{T}_m^{j\dots kr} {}_{r\underline{t}_m}^{j\dots kr*} \quad (23 b)$$

#### A.4. Harmoniques sphériques tensorielles

Considérons la sphère unité  $\mathcal{S}^2(e)$  orthogonale au vecteur unitaire de genre temps  $\underline{e}$ . Un point sur  $\mathcal{S}^2(e)$  est repéré par un quadrivecteur unitaire de genre espace  $\underline{u}$  orthogonal à  $\underline{e}$  ( $\underline{u}^2 = -1$ ,  $\underline{u} \cdot \underline{e} = 0$ ). L'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2[\mathcal{S}^2(e)]$  des champs de tenseurs d'ordre  $r$  sur la sphère  $\mathcal{S}^2(e)$  à le produit scalaire

$$\langle {}_{r\underline{f}}, {}_{r\underline{g}} \rangle = \int {}_{r\underline{f}}^*(\underline{u})(\underline{u}) \cdot {}_{r\underline{g}}(\underline{u}) d\Omega(\underline{u}) \quad (24 a)$$

où la mesure invariante  $d\Omega(\underline{u})$  sur  $\mathcal{S}^2(e)$  est

$$d\Omega(\underline{u}) = 2\delta(\underline{u} \cdot \underline{e})\delta(\underline{u}^2 + 1)d\underline{u} \quad (24 b)$$

Les harmoniques sphériques tensorielles sont construites en couplant les harmoniques sphériques et les tenseurs de base sphérique à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan

$${}_{r\underline{Y}}^{lj\dots kr}(\underline{u})_M^L = \langle lmj, n | LM \rangle Y_m^L(\underline{u}) {}_{r\underline{t}_n}^{j\dots kr} \quad (25)$$

et elles satisfont l'identité

$${}_{r\underline{Y}}^{lj\dots kr}(\underline{u})_M^{L*} = (-1)^{K+l+L+M} {}_{r\underline{Y}}^{lj\dots kr}(\underline{u})_{-M}^L \quad (26)$$

Par construction ces harmoniques forment une base orthonormée de  $\mathcal{L}^2[\mathcal{S}^2(e)]$

$$\langle \underline{Y}^{lj\dots kr}_M^L, \underline{Y}^{l'j\dots k'r'}_{M'}^{L'} \rangle = (-1)^K \left( \prod_{i=1}^r \delta_{k_i k'_i} \right) \left( \prod_{i=2}^r \delta_{j_i j'_i} \right) \delta_{ll'} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (27)$$

et elles se transforment selon une représentation irréductible dans les rotations du petit groupe de  $\underline{e}$

$$\underline{Y}^{lj\dots kr}(\underline{u}, \mathbf{R} \{ e \})_M^L = \underline{Y}^{lj\dots kr}(\underline{u}, \{ e \})_M^L \mathbf{D}^L(\mathbf{R})^M_M \quad (28)$$

Dans l'opération de parité  $\mathbf{P}$  leur loi de transformation est

$$\underline{Y}^{lj\dots kr}(\underline{u}, \mathbf{P} \{ e \})_M^L = (-1)^{l+K} \underline{Y}^{lj\dots kr}(\underline{u}, \{ e \})_M^L \quad (29)$$

**A. 5. Multipôles tensoriels**

Les multipôles tensoriels sont des combinaisons linéaires orthogonales des harmoniques sphériques tensorielles avec les mêmes indices  $j_\nu, k_i$  et les mêmes parités. Les coefficients des combinaisons sont des coefficients de Clebsch-Gordan ( $\hat{x} = \sqrt{2x + 1}$ )

$${}_r X_{\hat{0}}^{j_r \dots L} = \sum_i (\hat{l}/\hat{L}) \langle j_r, 0 | 0 | L, 0 \rangle, {}_r Y^{j_r \dots L} \tag{30 a}$$

$${}_r X_{\pm \mu}^{j_r \dots L} = \sum_i \frac{1 \pm (-1)^{i+L}}{\sqrt{2}} (\hat{l}/\hat{L}) \langle j_r, \mu | 0 | L, \mu \rangle, {}_r Y^{j_r \dots L}, \mu > 0. \tag{30 b}$$

Par construction, les multipôles tensoriels forment une base orthonormée de  $\mathcal{L}_r^2[\mathcal{S}^2(e)]$

$$\langle X_{\mu}^{j_r \dots L}, X_{\mu'}^{j_r' \dots L'} \rangle = (-1)^K \left( \prod_{i=1}^r \delta_{k_i, k_i'} \right) \left( \prod_{i=2}^r \delta_{j_i, j_i'} \right) \delta_{\mu\mu'} \delta_{LL'} \delta_{MM'}, \tag{31}$$

et en outre pour L et M fixés ils sont deux à deux orthogonaux dans  $\mathcal{M}^{\otimes r}$

$${}_x X_{\mu}^{j_r \dots k_r L}({}_r) {}_r X_{\mu'}^{j_r' \dots k_r' L'} \propto \delta_{\mu\mu'} \left( \prod_{i=2}^r \delta_{j_i, j_i'} \right) \left( \prod_{i=1}^r \delta_{k_i, k_i'} \right). \tag{32}$$

Les multipôles tensoriels se transforment par rotation comme les harmoniques

$$X_{\mu}^{j_r \dots}(\underline{u}, \mathbf{R} \{ e \})_M^L = {}_r X_{\mu}^{j_r \dots}(\underline{u}, \{ e \})_M^L \mathbf{D}^L(\mathbf{R})_M^{M'} \tag{33}$$

et comme elles ils ont une parité définie

$$X_{\mu}^{j_r \dots}(\underline{u}, \mathbf{P} \{ e \})_M^L = \eta_{\mu} X_{\mu}^{j_r \dots}(\underline{u}, \{ e \})_M^L \tag{34}$$

avec  $\eta_{\mu} = (-1)^{L+K}$  pour  $\mu > 0$ ,  $(-1)^{L+K+j_r}$  pour  $\mu = 0$  et  $(-1)^{L+K+1}$  pour  $\mu < 0$ .

Les multipôles quadrivectoriels sont irréductibles pour les transformations de Lorentz pures dans le 2-plan ( $\underline{e}, \underline{u}$ ), c'est-à-dire

$$L(x) X_{\hat{0}}^i(\underline{u}, \{ e \})_M^L = \sum_{i=0}^1 B(x)^j {}_i X_{\hat{0}}^i(\underline{u}, \{ e \})_M^L, \tag{35 a}$$

$$L(x) X_{\pm}^1(\underline{u}, \{ e \})_M^L = X_{\pm}^1(\underline{u}, \{ e \})_M^L. \tag{35 b}$$

En suivant la terminologie de l'électromagnétisme, ces multipôles sont notés

$$\mathcal{E}_t \equiv X_0^0, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \equiv X_0^1, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \equiv X_{\pm}^1, \quad \mathfrak{M}_{\mathcal{T}} \equiv X_{\pm}^1 \tag{36}$$

avec les conventions :  $\mathcal{E}$  pour électrique,  $\mathfrak{M}$  pour magnétique ;  $t$  pour genre temps,  $\mathcal{L}$  pour longitudinal et  $\mathcal{T}$  pour transverse.

Les multipôles tensoriels d'ordre 2 ne sont pas irréductibles pour les transformations de Lorentz pures, mais on peut définir des combinaisons linéaires qui le soient et qui possèdent toutes les propriétés des précédents. Ces multipôles tensoriels irréductibles sont notés  $Z_{\mathcal{L}}^{xiL}$  ou  $Z_{\mathcal{T}}^{xiL}$  avec les conventions suivantes

- i) Z est  $\mathcal{E}$  ou  $\mathfrak{M}$  pour électrique ou magnétique,
- ii) x est s ou a pour symétrique ou antisymétrique,
- iii) n = 1, 2 indique la représentation  $B(n\kappa)$  par laquelle chaque paire de multipôles se transforme,
- iv) i = 0, 1 repère chaque multipôle dans une paire,
- v) pour les multipôles invariants, les deux indices n et i sont omis, tandis que l'indice  $\eta$  précise leurs propriétés géométriques dans  $\mathcal{M}^{\otimes 2}$ :  $\mathcal{S}$  pour scalaire,  $\mathcal{T}$  pour transverse,  $\mathcal{L}$  pour longitudinal.



La loi de transformation des multipôles tensoriels irréductibles s'écrit alors

$$L(\lambda)^{\otimes 2} \underline{\underline{Z}}_{nM}^{xL} = \sum_{j=0}^1 B(n\lambda)^j \underline{\underline{Z}}_{nM}^{xjL} \quad (37 a)$$

$$L(\lambda)^{\otimes 2} \underline{\underline{Z}}_{\eta M}^{xL} = \underline{\underline{Z}}_{\eta M}^{xL}. \quad (37 b)$$

La définition des multipôles tensoriels irréductibles est donnée dans la table (38) sous forme matricielle (Pour simplifier on a omis dans cette table les indices L et M).

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_2^{s0} \\ \mathcal{E}_2^s \\ \mathcal{E}_2^{a0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0^{000} \\ X_0^{011} \\ X_0^{211} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathcal{E}_2^{s1} \\ \mathcal{E}_2^{a1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0^{101} \\ X_0^{110} \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{s0} \\ \mathcal{E}_1^{a0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{-1}^{101} \\ X_{-1}^{110} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_1^{s0} \\ \mathfrak{M}_1^{a0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{+1}^{101} \\ X_{+1}^{110} \end{bmatrix} \\ \\ \mathcal{E}_1^{s1} = X_{+1}^{211}, \quad \mathfrak{M}_1^{s1} = X_{-1}^{211}, \quad \mathcal{E}_1^{a1} = X_{+1}^{111}, \quad \mathfrak{M}_1^{a1} = X_{-1}^{111}, \\ \mathcal{E}_2^s = X_{+2}^{211}, \quad \mathfrak{M}_2^s = X_{-2}^{211}, \quad \mathfrak{M}_2^a = X_0^{111}. \end{array} \quad (38)$$

## B. RAPPELS SUR LES ÉTATS A UNE PARTICULE

Dans cet appendice nous rappelons les notions de tétrade adaptée à une impulsion, de tétrades conjuguées, de rotation de Wigner généralisée, ainsi que les lois de transformation des états à une particule. Enfin, nous définissons les états standard à une particule, dont la loi de transformation ne dépend plus de l'impulsion de l'état.

### B.1. Tétrades spéciales [12]

Soit  $\underline{p}$  un quadrivecteur de genre temps  $p^2 > 0$  quelconque; nous lui associons un vecteur unitaire de genre temps  $\hat{\underline{p}}$  par

$$\hat{\underline{p}} = \frac{1}{\sqrt{p^2}} \underline{p}. \quad (1)$$

Nous disons qu'une tétrade, notée  $\{p\}$ , est adaptée au quadrivecteur  $\underline{p}$  si son quadrivecteur de genre temps est  $\hat{\underline{p}}$ .

Soient  $\underline{p}_1$  et  $\underline{p}_2$  deux quadrivecteurs de genre temps quelconques. Les tétrades  $\{p_i\}$  ( $i = 1, 2$ ), adaptées aux quadrivecteurs  $\underline{p}_i$  sont dites conjuguées si elles sont reliées par la transformation de Lorentz pure  $L(p_j \leftarrow p_i) \equiv L(\hat{p}_j \leftarrow \hat{p}_i)$  qui applique  $\hat{p}_i$  sur  $\hat{p}_j$  en laissant invariant le 2-plan orthogonal à  $\underline{p}_1$  et  $\underline{p}_2$ , cf. Eq. (A-11), c'est-à-dire

$$\{p_j\} = L(p_j \leftarrow p_i) \{p_i\}. \quad (2)$$

Dans la suite nous considérons une tétrade fixe, appelée tétrade de référence, notée  $\{e\}$

et nous utiliserons l'abréviation  $L(b)$  pour  $L(b \leftarrow e)$ . La tétrade adaptée à  $\underline{p}_i$  et conjuguée de  $\{e\}$  est notée  $\{p_i\}_e$ ,

$$\{p_i\}_e = L(p_i)\{e\}, \tag{3}$$

tandis que  $[p_i]$  représente la transformation de Lorentz qui applique la tétrade de référence  $\{e\}$  sur une tétrade adaptée à  $\underline{p}_i$  quelconque

$$\{p_i\} = [p_i]\{e\}. \tag{4}$$

Une tétrade adaptée à l'impulsion  $\underline{p}_i$  est appelée une tétrade d'hélicité pour le 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$  si son axe 3 est l'axe d'hélicité  $\underline{h}_i$  du 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ , défini par

$$\underline{h}_i = (-1)^i N \{-, \hat{p}_i | \hat{p}_1, \hat{p}_2\}, \tag{5}$$

avec

$$N = \{\hat{p}_2, \hat{p}_1 | \hat{p}_1, \hat{p}_2\}^{-1/2} = [(\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2)^2 - 1]^{-1/2}. \tag{6}$$

où nous avons utilisé les notations

$$\{-, b | c, d\} = \underline{c}(\underline{b} \cdot \underline{d}) - \underline{d}(\underline{b} \cdot \underline{c}), \tag{7 a}$$

$$\{a, b | c, d\} = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c}). \tag{7 b}$$

Dans le cas particulier où le quadrivecteur  $\underline{e}$  est situé dans le 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ , nous définissons un quadrivecteur  $\underline{u}$ , unitaire, de genre espace, orthogonal à  $\underline{e}$  ( $\underline{u}^2 = -1, \underline{u} \cdot \underline{e} = 0$ ), qui forme avec lui une base orthogonale du 2-plan  $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ ,

$$\underline{u} = N \{-, e | \hat{p}_1, \hat{p}_2\}, \quad \text{si } \underline{e} \in (\underline{p}_1, \underline{p}_2) \tag{8}$$

où la constante  $N$  est définie en (6).

Il faut remarquer que, inversement, le quadrivecteur  $\underline{e}$  s'exprime très simplement en fonction de  $\underline{u}$ ,

$$\underline{e} = N \{-, u | \hat{p}_1, \hat{p}_2\} \tag{9}$$

et que le quadrivecteur  $\underline{u}$  est relié aux axes d'hélicité par la transformation de Lorentz pure  $L(p_i)$

$$\underline{h}_i = L(p_i)\underline{u}. \tag{10}$$

### B.2. Rotations de Wigner généralisées

Soient  $\underline{p}$  un quadrivecteur de genre temps et  $\Lambda$  une transformation quelconque de  $\mathcal{L}^\dagger$ . Considérons deux tétrades  $\{p\}$  et  $\{\Lambda p\}$  adaptées à  $\underline{p}$  et  $\Lambda \underline{p}$ , déduites de la tétrade de référence  $\{e\}$  par

$$\{p\} = [p]\{e\}, \quad \{\Lambda p\} = [\Lambda p]\{e\}. \tag{11}$$

La transformation de Lorentz  $[\Lambda p][p]^{-1}$  qui relie ces deux tétrades,

$$\{\Lambda p\} = [\Lambda p][p]^{-1}\{p\} \tag{12}$$

est égale au produit de la transformation  $\Lambda$  par la rotation  $R_p$  du petit groupe de  $\underline{p}$ ,

$$R_p = \Lambda^{-1}[\Lambda p][p]^{-1}. \tag{13}$$

Par définition, la rotation de Wigner généralisée, associée aux tétrades  $\{p\}, \{\Lambda p\}$  et à la transformation de Lorentz  $\Lambda$ , est la rotation  $R_e(\{p\}, \{\Lambda p\}, \Lambda)$  du petit groupe de  $\underline{e}$  conjuguée par la transformation  $[p]$  de la rotation  $R_p$ ,

$$R_e(\{p\}, \{\Lambda p\}, \Lambda) = [p]^{-1}R_p[p], \tag{14}$$

soit en utilisant la définition (13)

$$R_e(\{p\}, \{\Lambda p\}, \Lambda) = [p]^{-1}\Lambda^{-1}[\Lambda p]. \tag{15}$$

Considérons deux tétrades  $\{\Lambda^{-1}p\}$  et  $\{p\}^\Lambda = \Lambda\{\Lambda^{-1}p\}$ . Elles se déduisent de  $\{e\}$  par

$$\{\Lambda^{-1}p\} = [\Lambda^{-1}p]\{e\}, \quad (16)$$

$$\{p\}^\Lambda \equiv \Lambda\{\Lambda^{-1}p\} = \Lambda[\Lambda^{-1}p]\{e\}. \quad (17)$$

A l'aide de la transformation de Lorentz  $[p]^\Lambda$  définie par

$$[p]^\Lambda = \Lambda[\Lambda^{-1}p]\Lambda^{-1}, \quad (18)$$

nous pouvons écrire la relation (17) sous la forme

$$\{p\}^\Lambda = [p]^\Lambda(\Lambda\{e\}). \quad (19)$$

En comparant cette équation avec l'équation (16), nous remarquons que les tétrades  $\{\Lambda^{-1}p\}$  et  $\{p\}^\Lambda$  se déduisent, d'une manière analogue des tétrades  $\{e\}$  et  $\Lambda\{e\}$ . Dans le premier cas, la transformation  $\Lambda^{-1}$  agit sur le quadrivecteur  $\underline{p}$  et la tétrade de référence est fixe, tandis que dans le second cas le quadrivecteur  $\underline{p}$  ne change pas et l'on choisit  $\Lambda\{e\}$  comme nouvelle tétrade de référence. Alors nous avons l'identité remarquable

$$\mathbf{R}_e(\{p\}, \{p\}^\Lambda, \mathbf{I}) = \mathbf{R}_e(\{p\}, \{\Lambda^{-1}p\}, \Lambda^{-1}), \quad (20)$$

où  $\mathbf{I}$  est la transformation identité qui sera omise dans la suite,

$$\mathbf{R}_e(\{p\}, \{p\}^\Lambda) \equiv \mathbf{R}_e(\{p\}, \{\Lambda^{-1}p\}, \mathbf{I}). \quad (21)$$

Plaçons-nous dans le cas particulier où la tétrade adaptée à  $\underline{p}$  est conjuguée de  $\{e\}$  et définie en (3). Considérons les trois tétrades définies ci-dessous

$$\{\Lambda^{-1}e\}_e = L_{\Lambda^{-1}}\{e\}, \quad (22)$$

$$\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e} = L(\Lambda^{-1}p \leftarrow \Lambda^{-1}e)\{\Lambda^{-1}e\}_e = L(\Lambda^{-1}p \leftarrow \Lambda^{-1}e)L(\Lambda^{-1}e \leftarrow e)\{e\}, \quad (23)$$

$$\{p\}_e^\Lambda = \Lambda\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e} = L(p \leftarrow e)L(e \leftarrow \Lambda e)(\Lambda\{e\}) = L(p)\mathbf{R}_\Lambda\{e\}. \quad (24)$$

La tétrade  $\{\Lambda^{-1}e\}_e$  est adaptée à  $\Lambda^{-1}e$  et conjuguée de  $\{e\}$ . La tétrade  $\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}$  est adaptée à  $\Lambda^{-1}p$  et conjuguée de la précédente et enfin  $\{p\}_e^\Lambda$  est adaptée à  $\underline{p}$  et se déduit par  $\Lambda$  de  $\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}$ , comme dans l'équation (17). La seconde égalité de (24) est obtenue à l'aide de l'identité (A-12). Pour ces tétrades les rotations de Wigner deviennent simplement,

$$\mathbf{R}_e(\{p\}_e, \{p\}_e^\Lambda) = \mathbf{R}_e(\{p\}_e, \{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}, \Lambda^{-1}) = \mathbf{R}_\Lambda, \quad (25)$$

elles sont donc indépendantes du quadrivecteur  $\underline{p}$ . C'est cette identité qui nous permettra de définir les états standard à une particule au § B-4.

### B.3. Lois de transformations des états à une particule [10] [13] [14]

Les états d'une particule de spin  $s$ , de masse  $M$  et d'impulsion  $\underline{p}$  ( $p^2 = M^2$ ) sont notés  $|\{p\}n\rangle$  où  $n$  est le nombre quantique magnétique le long du troisième axe de genre espace de la tétrade  $\{p\}$  adaptée à l'impulsion  $\underline{p}$ .

Une transformation de Lorentz  $\Lambda$ , du groupe restreint, induit une transformation sur les états par l'action d'un opérateur unitaire  $U(\Lambda)$ ,

$$U(\Lambda)|\{\Lambda^{-1}p\}n\rangle \equiv |\Lambda\{\Lambda^{-1}p\}n\rangle, \quad (26 a)$$

$$= |\{p\}n'\rangle D^s[\mathbf{R}_e(\{p\}, \{\Lambda^{-1}p\}, \Lambda^{-1})]_{n'n}^s, \quad (26 b)$$

où la rotation de Wigner généralisée est définie en (15).

La loi de transformation des états dans l'opération de parité  $P$  s'effectue par l'action d'un opérateur unitaire  $U(P)$ ,

$$U(P)|\{e\}'n\rangle = \varepsilon|\{e\}'n\rangle, \quad (27)$$

avec

$$\{e\}' = L(p)^{-1}\{p\}, \quad (28)$$

où  $|\{e\}'n\rangle$  représente les états de la particule au repos et où  $\varepsilon = \pm 1$  est la parité intrinsèque de la particule. A l'aide de l'équation (A-12) on démontre l'identité

$$PL(p) = L(Pp)P, \tag{29}$$

et on en déduit une relation équivalente sur les opérateurs

$$U(P)U[L(P)] = U[L(Pp)]U(P). \tag{30}$$

L'identité (30) permet d'obtenir la loi de transformation par parité des états d'impulsion  $\underline{p}$

$$U(P)|\{p\}n\rangle = \varepsilon |L(Pp)\{e\}'n\rangle, \tag{31 a}$$

$$= \varepsilon |\{Pp\}n'\rangle D^s[R_e(\{Pp\}, \{p\}, L^{-1}(Pp \leftarrow p))]n'. \tag{31 b}$$

Le renversement du temps T induit une transformation sur les états par l'action d'un opérateur antiunitaire U(T) tel que

$$U(T)|\{e\}'n\rangle = (-1)^{s+n} |\{e\}'-n\rangle. \tag{32}$$

Comme pour la parité, on démontre à l'aide de (5-34) la relation

$$U(T)U[L(p)] = U[L(Pp)]U(T), \tag{33}$$

qui permet d'obtenir la loi de transformation par renversement du temps des états d'impulsion  $\underline{p}$

$$U(T)|\{p\}n\rangle = (-1)^{s+n} |L(Pp)\{e\}'-n\rangle, \tag{34 a}$$

$$= (-1)^{s+n} |\{Pp\}n'\rangle D^s[R_e(\{Pp\}, \{p\}, L^{-1}(Pp \leftarrow p))]n'. \tag{34 b}$$

Remarquons que jusqu'ici nous avons adopté le point de vue actif c'est-à-dire nous avons transformé le quadrivecteur  $\underline{p}$  en maintenant fixe la tétrade de référence. Mais nous pouvons aussi étudier les lois de transformation des états en adoptant le point de vue passif, c'est-à-dire en maintenant fixe le quadrivecteur  $\underline{p}$  et en changeant de tétrade de référence.

Par exemple la loi de transformation des états dans une transformation  $\Lambda$  du groupe restreint s'écrit

$$|\{p\}^\wedge n\rangle = |\{p\}n'\rangle D^s[R_e(\{p\}, \{p\}^\wedge)]n'. \tag{35}$$

L'équivalence des relations (26) et (35), déduite des identités (17) et (20), traduit l'équivalence des points de vue actif et passif.

#### B. 4. États standard à une particule

Nous allons choisir des tétrades spéciales pour simplifier les rotations de Wigner apparaissant dans les lois de transformation des états. Les états correspondant à ces tétrades spéciales sont appelés les états standard.

Si nous choisissons comme tétrades  $\{\Lambda^{-1}p\}$ ,  $\{p\}$  et  $\{p\}^\wedge$ , respectivement les tétrades  $\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}$ ,  $\{p\}_e$ ,  $\{p\}_e^\wedge$  définies par les équations (23), (3) et (24), les rotations  $R_e(\{p\}_e)$ ,  $\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}$ ,  $\Lambda^{-1}$  et  $R_e(\{p\}_e)$ ,  $\{p\}_e^\wedge$  deviennent égales à  $R_\Lambda$ , voir équation (25), et les lois de transformation (26) et (35) s'écrivent alors

$$U(\Lambda)|\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}n\rangle = |\{p\}_e^\wedge n\rangle = |\{p\}_e n'\rangle D^s(R_\Lambda)n'. \tag{36}$$

Le quadrivecteur  $\underline{e}$  est invariant par parité,  $P\underline{e} = \underline{e}$ , et les quadrivecteurs  $\underline{e}$ ,  $\underline{p}$  et  $P\underline{p}$  sont dans le même 2-plan,

$$P\underline{p} + \underline{p} = 2(\underline{p} \cdot \underline{e})\underline{e}. \tag{37}$$

C'est pourquoi les transformations de Lorentz pure de ce 2-plan forment un groupe et l'on a

$$L(Pp \leftarrow e)L^{-1}(p \leftarrow e) = L(Pp \leftarrow p) \tag{38}$$

ce qui implique

$$R_e[\{Pp\}_e, \{p\}_e, L^{-1}(Pp \leftarrow p)] = I \tag{39}$$

et les lois de transformation (31) et (34) : deviennent

$$U(P)|\{p\}_e n\rangle = \varepsilon |\{Pp\}_e n\rangle, \quad (40)$$

$$U(T)|\{p\}_e n\rangle = (-1)^{s+n} |\{Pp\}_e - n\rangle. \quad (41)$$

## RÉFÉRENCES

- [1] L. DURAND III, P. C. De CELLES et R. B. MARR, *Phys. Rev.*, t. **126**, 1962, p. 1882.
- [2] E. DE RAFAEL, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **5**, 1966, p. 83.
- [3] M. DAUMENS, *Thèse n° 441*, 1974, Université de Bordeaux I.  
Les multipôles  $X_\mu^j$  définis dans la thèse diffèrent par un facteur  $(-1)^{j+\mu}$  de ceux de cet article et de la référence suivante.
- [4] M. DAUMENS et P. MINNAERT, *J. Math. Phys.*, t. **17**, 1976, p. 1903 et 2085.
- [5] E. P. WIGNER, *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press, New York, 1959.
- [6] M. E. ROSE, *Elementary theory of angular momentum*. Wiley, New York, 1957.
- [7] A. R. EDMONDS, *Angular momentum in quantum mechanics*. Princeton University Press, 1957.
- [8] D. M. BRINK et J. R. SATCHLER, *Angular momentum*. Clarendon Press, Oxford, 1968.
- [9] F. J. ERNST, R. G. SACHS et K. C. WALL, *Phys. Rev.*, t. **119**, 1960, p. 1105.
- [10] A. S. WIGHTMAN, *L'invariance dans la mécanique quantique relativiste*. Les Houches, 1960; Hermann, Paris, 1960.
- [11] M. A. NAIMARK, *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*. Dunod, Paris, 1962.
- [12] P. MINNAERT, *Thèse n° 365*, Série A, 1968, Orsay.
- [13] E. P. WIGNER, *Ann. Math.*, t. **40**, 1939, p. 149.
- [14] P. MOUSSA et R. STORA, dans *Angular analysis of elementary particles reactions*. Herceg-Novii, 1966. Gordon and Breach, New York, 1968.

(Manuscrit reçu le 31 octobre 1975)