ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LUIS BEL
XAVIER FUSTERO

Mécanique relativiste prédictive des systèmes de N particules

Annales de l'I. H. P., section A, tome 25, nº 4 (1976), p. 411-436
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__25_4_411_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré
Vol. XXV, n° 4, 1976, p. 411-436.

Section A :
Physique théorique.

Mécanique relativiste prédictive des systèmes de N particules

par

Luis BEL
Département de Mécanique. Université Pierre-et-Marie-Curie (*)
et Équipe de Recherche Associée n° 2, C. N. R. S.

Xavier FUSTERO
Becario del Grupo Interuniversitario de Fisica Téorica, Espana

ABSTRACT. — It has been pointed out by D. Hirondel that a variety of problems in Predictive Relativistic Mechanics can be equivalently formulated in terms of Integral or Integro-functional Equations. Using a slightly modified technique we consider here this approach to handle several problems: *i*) Calculation of Hamiltonian Forms and Generating Functions of the associated canonical realisation of the Poincaré Group;
ii) Integration of Predictive Poincaré Invariant Systems (P. I. S.), and *iii*) Construction of P. I. S. corresponding to the scalar or vector interactions.

INTRODUCTION

Le premier paragraphe de cet article contient un rappel de la définition de Système Prédictif Invariant par le Groupe de Poincaré (S. P. I.) et un examen de la notion de séparabilité. La notion de S. P. I. résulte de la juxtaposition de la notion de Prédictivité, dont l'expression manifestement covariante est due à Ph. Droz-Vincent [*1*] et de la notion d'Invariance par le Groupe de Poincaré. La définition que nous en donnons ici est celle de L. Bel [*2*], équivalente à celle de R. Arens [*3*], sous la forme utilisée par L. Bel et J. Martin [*4*]. La notion de S. P. I. séparable a été introduite pour

(*) Tours 65-66, 11, quai Saint-Bernard, 75005 Paris.

le cas de deux particules (N = 2) par L. Bel [*5*] et reprise sous une présentation différente dans [*6*]. Nous étendons ici cette notion au cas où N est quelconque.

Il a été remarqué par D. Hirondel [*7*] qu'un certain nombre de problèmes de Mécanique Relativiste Prédictive (M. R. P.), c'est-à-dire de la théorie des S. P. I., pouvaient être formulés en termes d'équations intégrales ou intégro-fonctionnelles complétées par des conditions subsidiaires. Cette formulation ne rend pas les problèmes à résoudre plus simples si l'on cherche des solutions exactes, mais se révèle particulièrement commode si on l'utilise dans le contexte de la théorie des perturbations. Elle permet alors de retrouver avec une économie certaine de calculs préliminaires et avec une présentation plus élégante des résultats qui avaient été obtenus utilisant des techniques plus lourdes par L. Bel, A. Salas et J. M. Sanchez-Ron [*8*], A. Salas et J. M. Sanchez-Ron [*9*] et X. Fustero [*10*]. Nous utilisons dans cet article l'essentiel de la technique de D. Hirondel, que nous exploitons d'une manière qui nous semble plus satisfaisante, pour discuter les problèmes qui faisaient l'objet des références [*5*] et [*7*]-[*10*] ainsi que d'autres auxquels elle n'avait pas jusqu'ici été appliquée.

Le deuxième paragraphe contient l'essentiel de la technique de calcul qui sera utilisée tout au long de cet article. Le problème de la résolution d'un système d'équations différentielles d'un type que l'on rencontre constamment en M. R. P. est ramené au problème de la résolution d'un système d'équations intégrales soumis à des conditions subsidiaires. L'intérêt de cette approche, par rapport à celles utilisées précédemment, est qu'elle incorpore de manière particulièrement commode l'Invariance par le Groupe de Poincaré et permet d'éviter le choix préalable d'une base pour exprimer des tenseurs invariants par le Groupe de Poincaré, choix qui est toujours délicat dès que N > 2. Le troisième paragraphe, où nous exposons les éléments de la théorie des perturbations, est le complément naturel du paragraphe précédent car, comme nous l'avons déjà dit, ce n'est que dans le cadre de cette théorie que l'approche choisie se révèle particulièrement utile. Les équations intégrales peuvent se résoudre ordre par ordre et les conditions subsidiaires sont, à chaque ordre, automatiquement satisfaites.

Nous appliquons une première fois au paragraphe quatre les résultats obtenus précédemment pour calculer la Forme Hamiltonienne (F. H.) dans le passé (ou futur) d'un S. P. I. donné, notion qui a été introduite dans la référence [*4*]. L'Energie-Impulsion P_α et le Moment Cinétique généralisé $J_{\alpha\mu}$ sont respectivement les fonctions génératrices infinitésimales du sous-groupe de translations d'espace-temps et du sous-groupe de Lorentz correspondant à la réalisation canonique du Groupe de Poincaré associée à la F. H. dans le passé. On obtient facilement ces quantités dès que cette F. H. est connue. Mais elles peuvent aussi se calculer directement et ce calcul constitue une illustration particulièrement simple de la méthode générale que nous employons.

Le paragraphe cinq est consacré à l'intégration des S. P. I. Le problème qu'il faut résoudre est apparemment d'une nature légèrement différente de celle des problèmes que nous avons examinés jusqu'ici. Mais après une reformulation appropriée on peut encore appliquer à ce problème les résultats généraux des paragraphes II et III. Nous démontrons en particulier que dans le cadre de la théorie des perturbations l'intégrale générale d'un S. P. I. s'obtient directement par des quadratures. Ce résultat est une illustration partielle d'un résultat plus fort démontré par L. Bel et J. Martin [*11*] d'après lequel tout S. P. I. est un Système Intégré. Autrement dit, on peut connaître l'intégrale générale sans autres manipulations que des inversions de fonctions et des calculs algébriques simples.

La M. R. P. a été considérée pendant un certain temps comme une théorie incompatible avec la théorie classique des champs ou plus particulièrement avec le Principe de Causalité, qui peut si facilement s'incorporer dans cette dernière. Or il a été démontré dans [*7*]-[*9*] qu'il n'en est rien en ce qui concerne l'interaction électromagnétique, et ce résultat a été étendu par L. Bel et J. Martin [*12*] au cas de l'interaction scalaire de courte portée. En fait M. R. P. et théorie classique des champs doivent être considérées comme des approches complémentaires. Le sixième paragraphe est consacré à un bref résumé des notions de base de la théorie classique des champs pour les interactions scalaire ou vectorielle de courte ou de longue portée. Nous y rappelons notamment l'expression des solutions avancées ou retardées des champs correspondants car ce sont ces expressions qui permettent de greffer la théorie de ces interactions sur la M. R. P. Choisir les solutions retardées revient à donner un sens technique très précis au Principe de Causalité. D'après ce Principe les solutions avancées devraient être exclues mais il ne coûte rien de les conserver comme une possibilité ouverte. Il en va de même des solutions qui sont la demi-somme des solutions retardées et avancées dont on connaît l'intérêt dans le cadre des théories d'action à distance, intérêt qui vient en partie du fait qu'elles conduisent à des interactions invariantes par renversement du temps. Il est possible que le choix de l'une ou l'autre de ces solutions élémentaires dépende du problème considéré. Quoi qu'il en soit nous les considérons ici sur un pied d'égalité.

Nous terminons cet article par un examen détaillé du problème que nous venons d'évoquer, c'est-à-dire le problème du jumelage de la M. R. P. et la théorie classique des champs scalaire et vectoriel. Nous y démontrons qu'à chaque type d'interaction et à chaque choix de solution élémentaire correspond un S. P. I. particulier que l'on construit en utilisant l'expression de la solution élémentaire choisie comme condition aux limites des équations qui expriment la Prédictivité du S. P. I. que l'on cherche. La méthode générale, maintes fois utilisée conduit à un système d'équations intégro-fonctionnelles, soumis à un certain nombre de conditions subsidiaires. La théorie des perturbations permet de calculer les termes des ordres les plus bas avec plus ou moins de peine suivant l'ordre et l'interaction considérés.

Nous aurions pu ajouter un nombre important d'applications immédiates. En fait comme nous l'avons déjà signalé les résultats intéressants figurent déjà dans les références que nous avons données. Cet article est essentiellement un article de mise au point qui devrait favoriser une meilleure connaissance des notions de base de la M. R. P. et des méthodes qui lui sont propres.

I. SYSTÈMES PRÉDICTIFS INVARIANTS PAR LE GROUPE DE POINCARÉ

Soit M_4 l'espace-temps de Minkowski et TM_4 la variété différentiable des couples [1] (x^α, π^β) où $x^\alpha \in M_4$, et π^β est un vecteur orienté dans le temps ($\pi^\beta\pi_\beta < 0$) et dans le futur ($\pi^0 > 0$) tangent à M_4 au point x^α. En mécanique Relativiste Prédictive (M. R. P.) l'espace des phases d'un système de N particules ponctuelles sans structure est $(TM_4)^N$ dont nous désignerons les points par [2] $(x_a^\alpha, \pi_b^\beta)$. Le Groupe de Poincaré agit sur $(TM_4)^N$ par l'action dérivée de l'extension triviale à $(M_4)^N$. Les générateurs des translations d'espace-temps et les générateurs du sous-groupe de Lorentz sont respectivement [3] :

$$\vec{P}_\lambda = -\,\varepsilon_a \delta_\lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial x_a^\alpha} \tag{1}$$

$$\vec{J}_{\lambda\mu} = (\delta_\lambda^\alpha \eta_{\mu\beta} - \delta_\mu^\alpha \eta_{\lambda\beta})\left(x_a^\beta \frac{\partial}{\partial x_a^\alpha} + \pi_a^\beta \frac{\partial}{\partial \pi_a^\alpha}\right)$$

où $\eta_{\lambda\mu}$ est le tenseur métrique de M_4.

Considérons le système différentiel du second ordre :

$$\frac{dx_a^\alpha}{d\tau} = \pi_a^\alpha \qquad \frac{d\pi_a^\alpha}{d\tau} = \theta_a^\alpha(x_b^\beta, \pi_c^\gamma) \tag{2}$$

les fonctions θ_a^α étant des fonctions suffisamment régulières de leurs arguments. Le système différentiel (2) est par définition un Système Prédictif Invariant par le Groupe de Poincaré (S. P. I.) si, $\vec{H}_a$ étant les champs de vecteurs de $(TM_4)^N$:

$$\vec{H}_a = \delta_{ab}\left(\pi_b^\alpha \frac{\partial}{\partial x_b^\alpha} + \theta_b^\alpha \frac{\partial}{\partial \pi_b^\alpha}\right) \tag{3}$$

---

(1) $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 0, 1, 2, 3$. Nous supposons que la signature de M_4 est $+ 2$.

(2) $a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, N$. Nous utiliserons indistinctement pour ces indices la position basse ou haute.

(3) $\varepsilon_a = 1$. Nous utiliserons la convention de sommation pour les indices grecs ainsi que pour les indices latins.

on a :

$$(4) \qquad L(\vec{H}_a)(\pi_a^\alpha \pi_{a\alpha}) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \theta_a^\alpha \pi_{a\alpha} = 0$$

L étant l'opérateur Dérivée de Lie, et [4] :

$$(5) \qquad L(\vec{P}_\mu)\vec{H}_a = 0 \qquad L(\vec{J}_{\lambda\mu})\vec{H}_a = 0$$

$$(6) \qquad L(\vec{H}_{a'})\vec{H}_a = 0$$

Ces dernières équations (6), développées, donnent :

$$(7) \qquad \pi_{a'}^\rho \frac{\partial \theta_a^\alpha}{\partial x^{a'\rho}} + \theta_{a'}^\rho \frac{\partial \theta_a^\alpha}{\partial \pi^{a'\rho}} \qquad \text{ou} \qquad D_{a'}\theta_a^\alpha = -\theta_{a'}^\rho \frac{\partial \theta_a^\alpha}{\partial \pi^{a'\rho}}$$

avec

$$(8) \qquad D_a \equiv \pi_a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^{a\alpha}}$$

Compte tenu de (4), $\pi_a^2 = -\pi_a^\alpha \pi_{a\alpha}$ sont des intégrales premières du système différentiel (2), et s'interprètent comme étant les masses des particules [5]

$$(9) \qquad \pi_a^2 = m_a^2$$

Soit $f(x_a^\alpha, \pi_b^\beta)$ une fonction scalaire ou tensorielle. Nous poserons :

$$(10) \qquad R_a(\lambda) f(x_a^\alpha, x_{a'}^\alpha, \pi_b^\beta) \equiv f(x_a^\alpha + \lambda \pi_a^\alpha, x_{a'}^\alpha, \pi_b^\beta)$$

Nous dirons que f tend vers zéro dans le passé (resp. futur) et écrirons :

$$(11) \qquad \lim_{x^2 \to \infty_{p(\text{resp. } f)}} f = 0$$

si

$$(12) \qquad \lim_{\mu \to -\infty (\text{resp. } \infty)} \prod_{a=1}^{N} R_a(h_a \mu) f = 0 \quad \text{où} \quad \prod_{a=1}^{N} R_a(\lambda_a) = R_1(\lambda_1) \ldots R_N(\lambda_N)$$

pour toutes les valeurs $h_a > 0$ telles que :

$$(13) \quad k_{aa'} - \Lambda_{aa'} \leqslant \frac{\pi_a^2 h_a}{h_{a'}} \leqslant k_{aa'} + \Lambda_{aa'} \quad \text{où} \quad k_{aa'} = -\pi_a^\alpha \pi_{a'\alpha} \quad \Lambda_{aa'}^2 = k_{aa'}^2 - \pi_a^2 \pi_{a'}^2$$

et toutes les configurations pour lesquelles $\Lambda_{aa'}^2 \neq 0$. Nous dirons que $r \geqslant 0$ est l'indice dans le passé (resp. futur) d'une fonction f qui tend vers zéro dans le passé (resp. futur) si r est la plus petite borne supérieure des nombres p pour lesquels on a :

$$(14) \qquad \lim_{\lambda \to -\infty (\text{resp. } \infty)} \lambda^p \prod_{a=1}^{N} R_a(\lambda) f = 0$$

---

[4] Par convention $a' \neq a$.

[5] Nous prenons la vitesse de la lumière dans le vide égale à 1.

Un S. P. I. est dit séparable si les fonctions θ_a^α tendent vers zéro dans le passé et dans le futur :

$$\lim_{x^2 \to \infty_{p \text{ et } f}} \theta_a^\alpha = 0 \tag{15}$$

Nous appelons indice de séparabilité du S. P. I. au plus petit des indices, dans le passé et dans le futur, des fonctions θ_a^α.

Remarque. — Si N > 2 il pourrait être intéressant d'introduire la notion de séparabilité partielle qui peut s'exprimer par les conditions :

$$\lim_{\mu \to \infty} \theta_a^\alpha(x_a^\alpha, x_{a'}^\alpha = x_a^\alpha + \mu n_{a'}^\alpha, \pi_b^\beta) = 0 \tag{16}$$

pour tous les vecteurs n_a^α, orientés dans l'espace. Mais ces conditions entraînent les conditions (15) et ce sont celles-ci qui jouent un rôle important dans les problèmes que nous aborderons dans cet article.

II. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS ET ÉQUATIONS INTÉGRALES

Tout l'intérêt de la technique introduite par D. Hirondel que nous allons utiliser tout au long de cet article, avec quelques modifications, repose sur les propriétés suivantes des opérateurs D_a et $R_a(\lambda)$ définis par les formules (I.8) et (I.10) :

$$D_aD_b - D_bD_a = 0 \tag{1}$$

$$R_a(\lambda)R_a(\mu) = R_a(\lambda + \mu) \qquad R_a(\lambda_a)R_b(\lambda_b) = R_b(\lambda_b)R_a(\lambda_a) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} R_a(\lambda) = R_a(\lambda)D_a = D_aR_a(\lambda) \tag{3}$$

Le système d'équations (I.7) est du type suivant :

$$D_{a_i}f^A = G_{a_i}^A \qquad i, j, \dots = 1, 2, \dots, s \leqslant N \quad A, B, \dots = 1, 2, \dots P \tag{4}$$

les fonctions $G_{a_i}^A$ étant des fonctions des fonctions inconnues et de leurs dérivées premières par rapport aux π_a^α. Nous rencontrerons constamment d'autres systèmes du même type et nous allons les étudier en général. La nature précise des seconds membres dépendra du problème considéré. Nous supposerons ici pour fixer les idées que les fonctions $G_{a_i}^A$ sont des fonctions des variables indépendantes $(x_a^\alpha, \pi_b^\beta)$, des inconnues f^A et de leurs dérivées premières par rapport aux variables indépendantes. Ceci couvrira l'ensemble des problèmes que nous aborderons ultérieurement.

Supposons que $\{ f^A \}$ soit une solution du système d'équations (4). D'après (1) nous aurons :

$$D_{a_i}G_{a_j}^A = D_{a_j}G_{a_i}^A \tag{5}$$

D'autre part, l'emploi de (3) permet facilement de démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\zeta_{a_i}) f^{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\zeta_{a_i}) \sum_{j=1}^{s} \zeta_{a_j} \mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_j} \tag{6}$$

Intégrant les deux membres de cette équation dans l'intervalle $[0, \mu]$ nous obtenons :

$$f^{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\mu\zeta_{a_i}) f^{\mathrm{A}} - \sum_{j=1}^{s} \zeta_{a_j} \int_0^{\mu} d\lambda \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\zeta_{a_i}) \mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_j} \tag{7}$$

équations intégro-fonctionnelles qui seront valables pour toutes les valeurs de μ et ζ_{a_i}.

Supposons maintenant que la solution $\{ f^{\mathrm{A}} \}$ satisfasse des conditions aux limites du type suivant :

$$\prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\hat{\zeta}_{a_i}) f^{\mathrm{A}} = f^{*\mathrm{A}} \tag{8}$$

$\hat{\zeta}_{a_i}$ et $f^{*\mathrm{A}}$ étant des fonctions connues de $(x^{\alpha}_{a}, \pi^{\beta}_{b})$. Compte tenu de (5), de (7), pour $\mu = 1$ et $\zeta_{a_i} = \hat{\zeta}_{a_i}$ et de (8) nous pouvons énoncer le résultat suivant :

R. 1. — Si $\{ f^{\mathrm{A}} \}$ est solution du système d'équations (4) et satisfait aux conditions aux limites (8), alors $\{ f^{\mathrm{A}} \}$ est solution des conditions d'intégrabilité (5) et des équations intégrales :

$$f^{\mathrm{A}} = f^{*\mathrm{A}} - \prod_{j=1}^{s} \hat{\zeta}_{a_j} \int_0^{1} d\lambda \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\hat{\zeta}_{a_i}) \mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_j} \tag{9}$$

Moyennant des hypothèses additionnelles ce résultat admet la réciproque que voici :

R. 2. — Si *i*) $\{ f^{\mathrm{A}} \}$ est solution du système d'équations intégrales (9) et des conditions d'intégrabilité (5), *ii*) les fonctions $\hat{\zeta}_{a_i}$ sont solutions du système d'équations :

$$\mathrm{D}_{a_i}\zeta_{a_j} = -\,\delta_{ij} \tag{10}$$

et *iii*) les fonctions $f^{*\mathrm{A}}$ vérifient les conditions :

$$\mathrm{D}_{a_i} f^{*\mathrm{A}} = 0 \tag{11}$$

alors $\{ f^{\mathrm{A}} \}$ est solution du système d'équations (4) et les conditions aux limites (8) sont satisfaites.

En effet de (9), (10) et (11) il vient :

$$(12)\quad \mathrm{D}_{a_k} f^{\mathrm{A}} = \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\hat{\zeta}_{a_i})\mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_k} - \sum_{j=1}^{s} \hat{\zeta}_{a_j} \int_0^1 d\lambda \mathrm{D}_{a_k} \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\hat{\zeta}_{a_i})\mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_j}$$

Mais :

$$(13)\quad \mathrm{D}_{a_k} \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\hat{\zeta}_{a_i})\mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_j} = (1-\lambda) \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\hat{\zeta}_{a_i})\mathrm{D}_{a_k}\mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_j}$$

par conséquent compte tenu de (5) nous avons :

$$(14)\quad \mathrm{D}_{a_k} f^{\mathrm{A}} = \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\hat{\zeta}_{a_i})\mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_k} - \sum_{j=1}^{s} \hat{\zeta}_{a_j} \int_0^1 d\lambda(1-\lambda) \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\hat{\zeta}_{a_i})\mathrm{D}_{a_j}\mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_k}$$

Soit, d'après (6)

$$(15)\quad \mathrm{D}_{a_k} f^{\mathrm{A}} = \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\zeta_{a_i})\mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_k} - \int_0^1 d\lambda(1-\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\hat{\zeta}_{a_i})\mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_k}$$

ce qui donne, moyennant une intégration par parties, les équations (4). Ces équations étant satisfaites, les formules (7) donnent en particulier :

$$(16)\quad f^{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\hat{\zeta}_{a_i}) f^{\mathrm{A}} - \sum_{j=1}^{s} \hat{\zeta}_{a_j} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{s} \mathrm{R}_{a_i}(\lambda\hat{\zeta}_{a_i})\mathrm{G}^{\mathrm{A}}_{a_j}$$

De la comparaison de ces équations aux équations (9) nous en déduisons que les équations (8) sont également satisfaites.

Supposons maintenant que $\{ f^{\mathrm{A}} \}$ soit solution du système (4) pour $s = \mathrm{N}$ et satisfasse les conditions asymptotiques

$$(17)\quad \lim_{x^2 \to \infty_{p(\text{resp. } f)}} f^{\mathrm{A}} = f^{*\mathrm{A}}$$

$f^{*\mathrm{A}}$ étant des fonctions connues. Compte tenu de (5) de (7) pour $\zeta_{a_i} = 1$ et μ tendant vers $-\infty$ (resp. ∞), et de (17) nous pouvons énoncer le résultat suivant :

R. 3. — Si *i*) $\{ f^{\mathrm{A}} \}$ est solution du système d'équations (4) pour $s = \mathrm{N}$ et satisfait aux conditions asymptotiques (17), *ii*) l'indice dans le passé (resp. futur) des fonctions $\varepsilon^a \mathrm{G}^{\mathrm{A}}_a$ correspondantes est supérieur à 1, alors $\{ f^{\mathrm{A}} \}$ est solution des conditions d'intégrabilité (5) et du système d'équations intégrales :

$$(18)\quad f^{\mathrm{A}} = f^{*\mathrm{A}} + \int_{-\infty(\text{resp. } \infty)}^{0} d\lambda \prod_{a=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{R}_a(\lambda)\varepsilon^b \mathrm{G}^{\mathrm{A}}_b$$

Le rôle de l'hypothèse *ii*) est celui d'assurer l'existence des intégrales. Démontrons enfin le résultat réciproque suivant :

R. 4. — Si *i*) $\{ f^A \}$ est solution du système d'équations intégrales (18) et des conditions d'intégrabilité (5) et *ii*) les fonctions f^{*A} vérifient les conditions (11), alors $\{ f^A \}$ est solution du système (4) et satisfait aux conditions asymptotiques (17).

Pour démontrer ce résultat remarquons tout d'abord que dire que $\{ f^A \}$ est solution de (18) suppose que *ii*) de R. 3 soit vérifié. De (6) et (11) il vient :

$$\prod_{a=1}^{N} R_a(\mu) f^{*A} = f^{*A} \tag{19}$$

donc, compte tenu de (18) et de (2) nous obtenons :

$$\prod_{a=1}^{N} R_a(\mu) f^A = f^{*A} + \int_{-\infty(\text{resp. } \infty)}^{0} d\lambda \prod_{a=1}^{N} R_a(\lambda + \mu) \varepsilon^b G_b^A \tag{20}$$

le changement de variable d'intégration $\lambda' = \lambda + \mu$ et l'emploi de *ii*) de R. 3 donnent immédiatement les conditions (17). D'autre part de (18) (5) et (11) il vient :

$$D_a f^A = \int_{-\infty(\text{resp. } \infty)}^{0} d\lambda \prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda) \varepsilon^c D_c G_a^A \tag{21}$$

soit, d'après la formule (6)

$$D_a f^A = \int_{-\infty(\text{resp. } \infty)}^{0} d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda) G_a^A \tag{22}$$

L'intégration et *ii*) de R. 3 nous donnent le système d'équations (4) pour $s = N$.

Tous ces résultats peuvent avoir un intérêt théorique, mais ce n'est que dans le cadre de la théorie des perturbations, dont nous allons préciser les hypothèses, qu'ils se sont révélés utiles en M. R. P.

III. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES PERTURBATIONS

Précisons la structure des seconds membres des équations (II.4). Nous supposerons compte tenu des applications que nous avons en vue que $G_{a_i}^A$ sont des fonctions des variables indépendantes $(x_a^\alpha, \pi_b^\beta)$, des fonctions inconnues f^A, de leurs dérivées premières par rapport aux variables indépendantes, et de N paramètres e_a. Nous écrirons symboliquement

$$D_{a_i} f^A = G_{a_i}^A(x_b^\beta, \pi_c^\gamma ; f^A ; e_\alpha) \tag{1}$$

La dépendance des seconds membres par rapport aux dérivées premières des fonctions f^{A} étant donc sous-entendue.

Supposons qu'il existe des solutions formelles du système d'équations (1) qui puissent s'exprimer sous la forme :

$$(2) \quad f^{A} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} e_1^{n_1} \dots e_N^{n_N} f^{A(n_1,\dots,n_N)}(x_a^{\alpha}, \pi_b^{\beta}) \qquad (n_a \text{ entiers} \geqslant 0)$$

expressions que nous écrirons symboliquement :

$$(3) \qquad f^{A} = \sum_{\{n\}} e^{\{n\}} f^{A\{n\}}$$

Supposons également qu'après substitution des expressions (2), ainsi que de celles que nous obtiendrions en dérivant ces dernières terme à terme, dans les seconds membres de (1) nous puissions écrire :

$$(4) \qquad G_{a_i}^{A} = \sum_{\{n\}} e^{\{n\}} G_{a_i}^{A\{n\}}(x_b^{\beta}, \pi_c^{\gamma} ; f^{B\{n_B\}})$$

où $\{ n_B \}$ n'est pas nécessairement une suite unique.

Ces hypothèses étant faites, les expressions (2) sont effectivement des solutions formelles du système (1) si :

$$(5) \qquad D_{a_i} f^{A\{n\}} = G_{a_i}^{A\{n\}} \qquad \forall \{ n \}$$

Nous dirons que le système d'équations (1) ou (5) est Décomposable si il est possible de décomposer l'ensemble $\{ f^{A} \}$ en une suite ordonnée de sous-ensembles disjoints $\{ f^{A} \}$ (I, J, ... = 1, 2, ... L $\leqslant$ P) de sorte que l'on ait :

$$(6) \qquad D_{a_i} f^{A_I\{n\}} = G_{a_i}^{A_I\{n\}}(x_b^{\beta}, \pi_c^{\gamma} ; f^{A_J\{n_{A_J}\}})$$

avec :

$$(7) \qquad \begin{aligned} \{ n_{A_J} \} &\leqslant \{ n \} \quad \text{si} \quad J < I \\ \{ n_{A_J} \} &< \{ n \} \quad \text{si} \quad J \geqslant I \end{aligned}$$

La première formule signifie $n_{A_{J_a}} \leqslant n_a$ pour tout a. La seconde formule signifie la même chose mais suppose en outre que l'inégalité est vérifiée au moins une fois.

Nous dirons qu'un système Décomposable est Complètement Intégrable si i)

$$(8) \qquad D_{a_i} G_{a_j}^{A_I\{0\}} = D_{a_j} G_{a_i}^{A_I\{0\}} \qquad \{ 0 \} = (0, \dots, 0)$$

ii)

$$(9) \qquad D_{a_i} f^{A_K\{n'\}} = G_{a_i}^{A_K\{n'\}}, \qquad \forall \{ n' \} \leqslant \{ n \}$$

$$(10) \qquad \Rightarrow D_{a_i} G_{a_j}^{A_I\{n+1\}} = D_{a_j} G_{a_i}^{A_I\{n+1\}}$$

la suite $\{ n + 1 \}$ étant une quelconque des suites $(n_1, \ldots, n_a + 1, \ldots, n_N)$, et *iii*) (9) plus :

$$D_{a_i} f^{A_I\{n+1\}} = G_{a_i}^{A_I\{n+1\}} \qquad \forall I < J \tag{11}$$

$$\Rightarrow D_{a_j} G_{a_i}^{A_J\{n+1\}} - D_{a_i} G_{a_j}^{A_J\{n+1\}} = 0 \tag{12}$$

Considérons un quelconque des systèmes (6) pour $\{ n \}$ donné, dans les seconds membres duquel nous considérons connues toutes les fonctions $f^{A_J\{n_{A_J}\}}$ sauf éventuellement la fonction $f^{A_I\{n\}}$. Ce système d'équations est du type (II.4) et par conséquent nous pouvons lui appliquer les résultats du paragraphe précédent. Sous les hypothèses qui nous ont permis de démontrer R. 1 et R. 3 de ce paragraphe nous pourrons écrire d'après (II.9), ou (II.18) suivant le cas :

$$f^{A\{n\}} = f^{*A\{n\}} - \sum_{j=1}^{s} \hat{\zeta}_{a_j} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{s} R_{a_i}(\lambda) G_{a_j}^{A\{n\}} \tag{13}$$

ou :

$$f^{A\{n\}} = f^{*A\{n\}} + \int_{-\infty (\text{resp. } \infty)}^{0} d\lambda \prod_{a=1}^{N} R_a(\lambda) \varepsilon^b G_b^{A\{n\}} \tag{14}$$

qui ne sont autres que les équations que l'on obtient en égalant les coefficients des mêmes monômes $e^{\{n\}}$ dans les deux membres des équations (II.9) ou (II.18) si :

$$f^{*A} = \sum_{\{n\}} e^{\{n\}} f^{*A\{n\}} \tag{15}$$

Si le système d'équations (5) est Décomposable et nous supposons connues les fonctions $f^{A\{n'\}}$ pour $\{ n' \} \leqslant \{ n \}$ alors d'après (7) les fonctions $G_{a_j}^{A_1\{n\}}$ sont connues et par conséquent les formules (13) ou (14) donnent directement par des quadratures les fonctions $f^{A_1\{n\}}$. Ces fonctions étant connues le même raisonnement donne les fonctions $f^{A_2\{n\}}$, et ainsi de suite jusqu'à $f^{A_L\{n\}}$. Les formules (13), ou (14) donnent donc par récurrence tous les termes des expressions (3) à partir des fonctions $f^{A_1\{0\}}$.

Nous supposerons dorénavant que :

$$G_{a_i}^{A_1\{0\}} = 0 \tag{16}$$

et par conséquent nous aurons :

$$f^{A_1\{0\}} = f^{*A_1\{0\}} \tag{17}$$

Nous obtenons ainsi des expressions du type (3) bien déterminées ce qui prouve l'unicité, sous les hypothèses faites de la solution formelle $\{ f^A \}$ du système (1).

Plaçons-nous maintenant sous les hypothèses qui nous ont permis de démontrer les R. 2 et R. 4 du paragraphe précédent en précisant que les équations (II.11) et la propriété *ii*) de R. 3 sont supposées ici être vérifiées à chaque ordre $\{ n \}$ séparément. Supposons que le système (6) est Décomposable et Complètement Intégrable et supposons que $f^{A_1\{n'\}}$ satisfassent les conditions (9). R. 2 ou R. 3 nous dit alors, compte tenu de (10), que les fonctions $f^{A_1\{n+1\}}$ calculées avec les formules (13), ou (14), sont effectivement solution du système (6) correspondant, ce qui entraîne, compte tenu de (12), que $f^{A_2\{n+1\}}$ est également solution du système (6) correspondant, et ainsi de suite jusqu'à $f^{A_L\{n+1\}}$. Pour que les formules (13), ou (14), fournissent des solutions formelles du système d'équations (1) il suffit donc, sous les hypothèses faites, que $f^{A_1\{0\}}$ soit solution du système (6) correspondant, ce qui est le cas compte tenu de (16), qui est compatible avec (8), et compte tenu de (17) et (II.11).

IV. FORMES HAMILTONIENNES ET FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Considérons un S. P. I. On dit que $\Omega_{p(\text{resp. } f)}$ est une Forme Hamiltonienne (F. H.) dans la passé (resp. futur) si $\Omega_{p(\text{resp. } f)}$ est une 2-forme symplectique de $(TM_4)^N$ qui est invariante par les groupes à un paramètre engendrés par les champs de vecteurs (I.1) et (I.3) :

$$(1) \qquad L(\vec{\Lambda})\Omega_{p(\text{resp. } f)} = 0 \qquad \vec{\Lambda} : \vec{P}_\alpha, \vec{J}_{\lambda\mu}, \vec{H}_a$$

et qui satisfait aux conditions asymptotiques :

$$(2) \qquad \lim_{x^2 \to \infty_{p(\text{resp. } f)}} \Omega_{p(\text{resp. } f)} = \Omega^{(0)} \qquad \text{où} \qquad \Omega^{(0)} = dx_a^\alpha \wedge d\pi_\alpha^a$$

Explicitons de manière précise ces dernières conditions. Toute 2-forme Ω de $(TM_4)^N$ peut s'écrire, avec des notations évidentes, sous la forme :

$$(3) \qquad \Omega = \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}^{ab} dx_a^\alpha \wedge dx_b^\beta + \frac{1}{2}\Omega_{\alpha^*\beta^*}^{ab} d\pi_a^\alpha \wedge d\pi_b^\beta + \Omega_{\alpha^*\beta^*}^{ab} dx_a^\alpha \wedge d\pi_b^\beta$$

($\alpha^* = \alpha$ numériquement) avec

$$(4) \qquad \Omega_{\alpha\beta}^{ab} = -\Omega_{\beta\alpha}^{ba}, \qquad \Omega_{\alpha^*\beta^*}^{a\,b} = -\Omega_{\beta^*\alpha^*}^{ba}$$

Les conditions (2) sont par définition équivalentes à :

$$(5) \qquad \lim_{x^2 \to \infty_{p(\text{resp. } f)}} \Omega_{\alpha\beta}^{ab} = 0, \qquad \lim_{x^2 \to \infty_{p(\text{resp. } f)}} \Omega_{\alpha^*\beta^*}^{ab} = 0, \qquad \lim_{x^2 \to \infty_{p(\text{resp. } f)}} \Omega_{\alpha\beta^*}^{ab} = \eta_{\alpha\beta}\delta^{ab}$$

Ω étant Ω_p ou Ω_f suivant le cas. Nous utiliserons souvent cette simplification d'écriture.

Pour $\vec{\Lambda} = \vec{H}_c$ les équations (1), compte tenu de (4), s'explicitent ainsi :

$$
\begin{aligned}
&D_c\Omega^{ab}_{\alpha\beta} = -\theta^\rho_c \frac{\partial\Omega^{ab}_{\alpha\beta}}{\partial\pi^{c\rho}} - \delta^d_c\left(\Omega^{ad}_{\alpha\gamma^*}\frac{\partial\theta^\gamma_d}{\partial x^\beta_b} - \Omega^{bd}_{\beta\gamma}\frac{\partial\theta^\gamma_d}{\partial x^\alpha_a}\right) \equiv G^{ab}_{c\alpha\beta}\\
(6)\quad &D_c\Omega^{ab}_{\alpha\beta^*} = -\theta^\rho_c \frac{\partial\Omega^{ab}_{\alpha\beta^*}}{\partial\pi^{c\rho}} - \delta^d_c\left(\Omega^{db}_{\gamma^*\beta^*}\frac{\partial\theta^\gamma_d}{\partial x^\alpha_a} + \Omega^{ad}_{\alpha\gamma^*}\frac{\partial\theta^\gamma_d}{\partial\pi^\beta_b}\right) - \delta^b_c\Omega^{ab}_{\alpha\beta} \equiv G^{ab}_{c\alpha\beta^*}\\
&D_c\Omega^{ab}_{\alpha^*\beta^*} = -\theta^\rho_c \frac{\partial\Omega^{ab}_{\alpha^*\beta^*}}{\partial\pi^{c\rho}} - \delta^d_c\left(\Omega^{db}_{\gamma^*\beta^*}\frac{\partial\theta^\gamma_d}{\partial\pi^\alpha_a} - \Omega^{da}_{\gamma^*\alpha^*}\frac{\partial\theta^\gamma_d}{\partial\pi^\beta_b}\right)\\
&\qquad\qquad - \delta^a_c\Omega^{ab}_{\alpha\beta^*} + \delta^b_c\Omega^{ba}_{\beta\alpha^*} \equiv G^{ab}_{c\alpha^*\beta^*}
\end{aligned}
$$

Les fonctions θ^α_a étant connues ce système d'équations est du type (II.4). Par conséquent en supposant que l'indice dans le passé (resp. futur) des fonctions G est supérieur à 1 nous aurons d'après (II.R. 3) et (5)

$$
\begin{aligned}
&\Omega^{ab}_{\alpha\beta} = \int_{-\infty(\text{resp. }\infty)}^{0} d\lambda \prod_{c=1}^{N} R_c(\lambda)\varepsilon^d G^{ab}_{d\alpha\beta}\\
(7)\quad &\Omega^{ab}_{\alpha\beta^*} = \eta_{\alpha\beta}\delta^{ab} + \int_{-\infty(\text{resp. }\infty)}^{0} d\lambda \prod_{c=1}^{N} R_c(\lambda)\varepsilon^d G^{ab}_{d\alpha\beta^*}\\
&\Omega^{ab}_{\alpha^*\beta^*} = \int_{-\infty(\text{resp. }\infty)}^{0} d\lambda \prod_{c=1}^{N} R_c(\lambda)\varepsilon^d G^{ab}_{d\alpha^*\beta^*}
\end{aligned}
$$

D'autre part étant donné que $\Omega^* = \Omega^{(0)}$ et que

$$
(8)\qquad D_c\Omega^{(0)\,ab}_{\ \ \alpha\beta} = 0\,, \qquad D_c\Omega^{(0)\,ab}_{\ \ \alpha\beta^*} = 0\,, \qquad D_c\Omega^{(0)\,ab}_{\ \ \alpha^*\beta^*} = 0
$$

d'après (II.R.4) une condition suffisante pour qu'une solution de (7) soit solution de (6) et satisfasse les conditions asymptotiques (5) est que les équations (II.5) soient satisfaites.

Remarquons que pour qu'une solution Ω de (6) qui satisfait aux conditions (5) soit une F. H. dans le passé (resp. futur) il faut encore que Ω soit fermée, de rang maximal et satisfasse les équations (1) pour $\vec{\Lambda} = \vec{P}_\alpha, \vec{J}_{\lambda\mu}$. Nous dirons un mot sur ce problème dans le cadre de la théorie des perturbations.

Considérons un S. P. I. donné et soit Ω_p la F. H. dans le passé, qui est d'après (1) invariante par le Groupe de Poincaré. L'Énergie-Impulsion P_α et le Moment Cinétique généralisé du S. P. I. sont par définition les fonctions génératrices des transformations canoniques infinitésimales de Ω_p engendrées respectivement par $\vec{P}_\alpha$ et $\vec{J}_{\lambda\mu}$. Autrement dit P_α et $J_{\lambda\mu}$ sont les fonctions définies, avec un choix approprié des constantes additives arbitraires, par les formules

$$
(9)\qquad i(\vec{P}_\alpha)\Omega_p = -dP_\alpha\,, \qquad i(\vec{J}_{\lambda\mu})\Omega_p = -dJ_{\lambda\mu}
$$

où $i(\vec{\Lambda})$ est l'opérateur produit intérieur par $\vec{\Lambda}$. Ces fonctions peuvent donc être calculées immédiatement dès que Ω_p est connue. On peut cependant les calculer directement ce qui est plus commode pour l'étude des problèmes qui ne demandent pas la connaissance de Ω_p. En effet P_α et $J_{\lambda\mu}$ sont caractérisées par les équations

$$(10) \qquad L(\vec{H}_a)P_\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad D_a P_\alpha = -\theta_a^\rho \frac{\partial P_\alpha}{\partial \pi^{a\rho}}$$

$$(11) \qquad L(\vec{H}_a)J_{\lambda\mu} = 0 \qquad \text{ou} \qquad D_a J_{\lambda\mu} = -\theta_a^\rho \frac{\partial J_{\lambda\mu}}{\partial \pi^{a\rho}}$$

et les conditions asymptotiques :

$$(12) \qquad \lim_{x^2 \to \infty_p} P_\alpha = P_\alpha^{(0)} \qquad \text{avec} \qquad P_\alpha^{(0)} = \varepsilon_a \pi_\alpha^a$$

$$(13) \qquad \lim_{x^2 \to \infty_p} J_{\lambda\mu} = J_{\lambda\mu}^{(0)} \qquad \text{avec} \qquad J_{\lambda\mu}^{(0)} = x_{a\lambda}\pi_\mu^a - x_{a\mu}\pi_\lambda^a$$

Les systèmes d'équations (10) et (11) sont du type (II.4) et les conditions aux limites (12) et (13) sont du type (II.17). Remarquons d'autre part que :

$$(14) \qquad D_a P_\alpha^{(0)} = 0 \qquad D_a J_{\lambda\mu}^{(0)} = 0$$

Nous sommes donc sous les conditions qui nous permettent d'appliquer encore (II.R.3) et (II.R.4). Bornons-nous à dire que si l'indice dans le passé des seconds membres des équations (10) et (11) est supérieur à 1 nous aurons :

$$(15) \qquad P_\alpha = P_\alpha^{(0)} - \int_{-\infty}^{0} d\lambda \prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda) \left(\theta_a^\rho \frac{\partial P_\alpha}{\partial \pi_a^\rho} \right)$$

$$(16) \qquad J_{\lambda\mu} = J_{\lambda\mu}^{(0)} - \int_{-\infty}^{0} d\lambda \prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda) \left(\theta_a^\rho \frac{\partial J_{\lambda\mu}}{\partial \pi_a^\rho} \right)$$

Nous supposerons que les fonctions θ_a^α sont fonction de N paramètres e_a et peuvent s'écrire sous la forme :

$$(17) \qquad \theta_a^\alpha = \sum_{\{n\}}^{\infty} e^{\{n\}} \theta_a^{\alpha\{n\}}$$

Et nous supposerons en outre, car tel est le cas pour les S. P. I. intéressants considérés à ce jour, que :

$$(18) \quad \theta_a^{\alpha\{0\}} = 0 \qquad \theta_a^{\alpha\{0+1\}} = 0 \qquad \text{où} \qquad \{0+1\} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

Introduisant des expressions du type (III.2) pour chaque composante de Ω, pour P_α et pour $J_{\lambda\mu}$ on constate que compte tenu de (18) les systèmes d'équations (6), (10) et (11) sont Décomposables. Pour Ω le nombre L de sous-ensembles dans la décomposition est trois. Le premier sous-ensemble est $\{ \Omega^{ab}_{\alpha\beta} \}$, le second est $\{ \Omega^{ab}_{\alpha\beta*} \}$ et le troisième est $\{ \Omega^{ab}_{\alpha*\beta*} \}$. Pour P_α et $J_{\lambda\mu}$ L vaut un. Étant donné que les fonctions θ^α_a sont solution des équations (I.7) et compte tenu de (18) on peut démontrer que les trois systèmes d'équations sont Complètement Intégrables. Démontrons-le pour les systèmes (10) ou (11). La formule (III.8) est une conséquence évidente de (18). D'autre part si f est une composante quelconque utilisant (I.7) on obtient :

$$(19)\quad D_a\left(\theta^\sigma_{a'}\frac{\partial f}{\partial\pi^{a'\sigma}}\right) - D_{a'}\left(\theta^\rho_a\frac{\partial f}{\partial\pi^{a\rho}}\right) = \theta^\sigma_{a'}\frac{\partial}{\partial\pi^{a'\sigma}}\left(D_a f + \theta^\rho_a\frac{\partial f}{\partial\pi^{a\rho}}\right) - \theta^\rho_a\frac{\partial}{\partial\pi^{a\rho}}\left(D_{a'} f + \theta^\sigma_{a'}\frac{\partial f}{\partial\pi^{a'\rho}}\right)$$

L'implication (III.10) est alors de nouveau une conséquence évidente de (18) quand on considère ces dernières formules à chaque ordre $\{ n \}$. Pour le système d'équations (6) la démonstration est plus longue mais le principe est le même.

Les systèmes d'équations (6), (10) et (11) étant Décomposables et Complètement Intégrables les équations (7), (15) et (16) considérées ordre par ordre permettent donc d'obtenir les solutions formelles souhaitées en partant de $\Omega^{ab\{0\}}_{\alpha\beta} = 0$, $P^{\{0\}}_\alpha = P^{(0)}$ et $J^{\{0\}}_{\lambda\mu} = J^{(0)}_{\lambda\mu}$. Il suffit pour cela d'appliquer le schéma développé au paragraphe précédent. Ce schéma suppose que les intégrales (7), (15) et (11) ont un sens à chaque ordre et ceci impose des conditions à l'indice de séparabilité des fonctions $\theta^{\alpha\{n\}}_a$. Supposons par exemple que nous voulions calculer $P^{\{1,1\}}_\alpha$ ou $J^{\{1,1\}}_{\lambda\mu}$ avec $\{ 1, 1 \} = (0, ..., 1 ... 1, ... 0)$. Les formules (15) et (16) donnent, compte tenu des expressions de $P^{(0)}_\alpha$ et $J^{(0)}_{\lambda\mu}$:

$$(20)\qquad P^{\{1,1\}}_\alpha = -\int_{-\infty}^{0} d\lambda \prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda)\varepsilon^a\theta^{\{1,1\}}_{a\alpha}$$

$$(21)\qquad J^{\{1,1\}}_{\lambda\mu} = -\int_{-\infty}^{0} d\lambda \prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda)(x^a_\lambda\theta^{\{1,1\}}_{a\mu} - x^a_\mu\theta^{\{1,1\}}_{a\lambda})$$

On voit alors facilement que les intégrales (20) ont sûrement un sens si l'indice de séparabilité des fonctions $\theta^{\alpha\{1,1\}}_a$ est supérieur à un, et que les intégrales (21) ont sûrement un sens si cet indice est supérieur à deux. En fait, il arrive dans certains cas que ces dernières ont encore un sens quand $s = 2$.

Étant donné que :

$$(22)\quad L(\vec{H}_c)L(\vec{P}_\alpha) = L(\vec{P}_\alpha)L(\vec{H}_c), \qquad L(\vec{H}_c)L(\vec{J}_{\lambda\mu}) = L(\vec{J}_{\lambda\mu})L(\vec{H}_c)$$
$$dL(\vec{H}_c) = L(\vec{H}_c)d$$

où d est l'opérateur différentiel extérieur, et étant donné que :

$$\text{(23)} \qquad L(P^\alpha)\Omega^{(0)} = 0\,, \qquad L(\vec{J}_{\lambda\mu})\Omega^{(0)} = 0\,, \qquad d\Omega^{(0)} = 0$$

on peut démontrer facilement par récurrence que les 2-formes Ω construites comme nous venons d'indiquer sont bien des 2-formes symplectiques ([1]) qui satisfont l'ensemble des équations ([6]).

V. INTÉGRATION DES S. P. I.

Considérons un S. P. I. et soit :

$$\text{(1)} \qquad x_a^\alpha = \varphi_a^\alpha(x_{0b}^\beta, \pi_{0c}^\gamma\,;\,\tau)\,, \quad \pi_a^\alpha = \mathring{\varphi}_a^\alpha(x_{0b}^\beta, \pi_{0c}^\gamma\,;\,\tau)\,; \qquad \mathring{\varphi}_a^\alpha \equiv \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\tau}$$

l'intégrale générale du système d'équations (I.2), $(x_{0a}^\alpha, \pi_{0b}^\beta)$ étant les données initiales pour $\tau = 0$:

$$\text{(2)} \qquad x_{0a}^\alpha = \varphi_a^\alpha(x_{0b}^\beta, \pi_{0c}^\gamma\,;\,0)\,, \quad \pi_{0a}^\alpha = \mathring{\varphi}_a^\alpha(x_{0b}^\beta, \pi_{0c}^\gamma\,;\,0)$$

On sait que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions $\varphi_a^\alpha(x_b^\beta, \pi_c^\gamma\,;\,\tau)$ et $\mathring{\varphi}_a^\alpha(x_b^\beta, \pi_c^\gamma\,;\,\tau)$ satisfassent les relations :

$$\text{(3)} \qquad \varphi_a^\alpha[\varphi_b^\beta(x, \pi\,;\,\tau_b), \mathring{\varphi}_c^\gamma(x, \pi\,;\,\tau_c)\,;\,\tau] = \varphi_a^\alpha(x_b^\beta, \pi_c^\gamma\,;\,\tau + \tau_a)$$

$$\text{(4)} \qquad \mathring{\varphi}_a^\alpha[\varphi_b^\beta(x, \pi\,;\,\tau_b), \mathring{\varphi}_c^\gamma(x, \pi\,;\,\tau_c)\,;\,\tau] = \mathring{\varphi}_a^\alpha(x_b^\beta, \pi_c^\gamma\,;\,\tau + \tau_a)$$

est que les fonctions θ_a^α soient solutions du système d'équations (I.7). Et que les conditions nécessaires et suffisantes pour que :

$$\text{(5)} \qquad \mathring{\varphi}_a^\alpha(x, \pi\,;\,\tau)\mathring{\varphi}_{a\alpha}(x, \pi\,;\,\tau) = \pi_a^\alpha\pi_{a\alpha}$$

est que les fonctions θ_a^α satisfassent les contraintes (I.4).

Si nous calculons les dérivées par rapport à τ_b, pour $\tau_b = 0$, des deux membres des équations (3) et (4) nous obtenons :

$$\text{(6)} \quad L(\vec{H}_a)\varphi_a^\alpha(\tau) = \frac{\partial\varphi_a^\alpha(\tau)}{\partial\tau} \qquad \text{ou} \qquad D_a\varphi_a^\alpha(\tau) = -\,\theta_a^\rho\frac{\partial\varphi_a^\alpha(\tau)}{\partial\pi^{a\rho}} + \frac{\partial\varphi_a^\alpha(\tau)}{\partial\tau}$$

$$\text{(7)} \quad L(\vec{H}_{a'})\varphi_a^\alpha(\tau) = 0 \qquad \text{ou} \qquad D_{a'}\varphi_a^\alpha(\tau) = -\,\theta_{a'}^\rho\frac{\partial\varphi_a^\alpha(\tau)}{\partial\pi^{a'\rho}}$$

ainsi que des équations identiques pour $\mathring{\varphi}_a^\alpha(\tau)$ et qui sont une conséquence de (6) et (7) que l'on obtient en dérivant celles-ci par rapport à τ. Réciproquement si des fonctions $\varphi_a^\alpha(\tau)$ satisfont aux équations (6) et (7) et $\varphi_a^\alpha(\tau)$ et $\mathring{\varphi}_a^\alpha(\tau)$ vérifient les conditions initiales (2) alors $\varphi_a^\alpha(\tau)$ est l'intégrale générale

---

([6]) Nous considérons que le rang de Ω est maximal du moment que tel est le cas pour $\Omega^{(0)}$.

du S. P. I. considéré. C'est sur ces résultats que nous nous appuyons pour intégrer les S. P. I.

Le système d'équations (6) et (7) est du type (II.4) mais les conditions initiales (2) ne sont pas du type (II.8). Cependant avec quelques modifications l'approche du paragraphe II est encore applicable ici. La formule (II.7) pour $\zeta_b = 1$ nous donne :

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda)\varphi_a^\alpha(\tau) = -\prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda)\left[\theta_c^\rho \frac{\partial\varphi_a^\alpha(\tau)}{\partial\pi_c^\rho}\right]$$

soit, en posant $\omega = \tau + \lambda$

$$(9) \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}\prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda)\varphi_a^\alpha(\omega - \lambda) = -\prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda)\left[\theta_c^\rho \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\pi_c^\rho}(\omega - \lambda)\right]$$

Intégrant cette équation dans l'intervalle $[0, \omega]$ et effectuant le changement de notation $\omega = \tau$ nous obtenons, compte tenu de (2) :

$$(10) \qquad \varphi_a^\alpha(\tau) = R_a(\tau)x_a^\alpha + \int_0^\tau d\lambda \prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda)\left[\theta_c^\rho \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\pi_c^\rho}(\tau - \lambda)\right]$$

Il est clair d'autre part que si $\varphi_a^\alpha(\tau)$ est solution de (6) et (7) compte tenu de (II.1) et de la commutativité de $D_{a'}$ et $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ nous aurons :

$$(11) \qquad D_c\left[\theta_b^\rho \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\pi^{b\rho}}(\tau)\right] = D_b\left[\theta_c^\rho \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\pi^{c\rho}}(\tau)\right] + \delta_{ac}\theta_b^\rho \frac{\partial\mathring{\varphi}_a^\alpha}{\partial\pi^{b\rho}} - \delta_{ab}\theta_c^\rho \frac{\partial\mathring{\varphi}_a^\alpha}{\partial\pi^{c\rho}}$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

R.1. — L'intégrale générale $\varphi_a^\alpha(\tau)$ d'un S. P. I. est solution du système d'équations intégrales (10) et des conditions d'intégrabilité (11).

Démontrons maintenant la réciproque :

R.2. — Si des fonctions $\varphi_a^\alpha(\tau)$ sont solution des équations (10) et (11) alors elles satisfont les conditions initiales (2) et sont solution du système d'équations (6) et (7) et sont donc l'intégrable générale du S. P. I. considéré.

En effet de (10) on déduit immédiatement que les conditions initiales (2) sont satisfaites. D'autre part de (10) et (11) on obtient :

$$(12) \qquad D_b\varphi_a^\alpha(\tau) = \delta_{ab}\pi_a^\alpha + \int_0^\tau d\lambda \prod_{d=1}^{N} R_d(\lambda)\left\{ \varepsilon^c D_c\left[\theta_b^\rho \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\pi^{b\rho}}(\tau - \lambda)\right] + \delta_{ab}\theta_c^\rho \frac{\partial\mathring{\varphi}_a^\alpha}{\partial\pi_c^\rho}(\tau - \lambda) - \theta_b^\rho \frac{\partial\mathring{\varphi}_a^\alpha}{\partial\pi^{b\rho}}(\tau - \lambda)\right\}$$

Mais de (II.6) il vient :

$$(13)\quad \prod_{d=1}^{N} R_d(\lambda)\varepsilon^c D_c\left[\theta_b^\rho \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\pi^{b\rho}}(\tau-\lambda)\right] = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\prod_{d=1}^{N} R_d(\lambda)\left[\theta_b^\rho \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\pi^{b\rho}}(\tau-\lambda)\right]\right\} + \prod_{d=1}^{N} R_d(\lambda)\left[\theta_b^\rho \frac{\partial\mathring{\varphi}_a^\alpha}{\partial\pi^{b\rho}}(\tau-\lambda)\right]$$

Par conséquent nous avons compte tenu de (2) :

$$(14)\quad D_b\varphi_a^\alpha(\tau) = -\,\theta_b^\beta \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\pi^{b\rho}} + \delta_{ab}\left\{\pi_a^\alpha + \int_0^\tau d\lambda \prod_{d=1}^{N} R_d(\lambda)\left[\theta_c^\rho \frac{\partial\mathring{\varphi}_a^\alpha}{\partial\pi_c^\rho}(\tau-\lambda)\right]\right\}$$

En dérivant (10) par rapport à τ nous voyons que le facteur de δ_{ab} est $\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_a^\alpha(\tau)$. Le système d'équations (14) est donc, avec une notation condensée, le système d'équations (6) et (7).

Écrivons pour une valeur de a donnée le système d'équations (6) et (7) sous la forme :

$$(15)\qquad \tilde{D}_b\varphi_a^\alpha = -\,\theta_b^\rho \frac{\partial\varphi_a^\alpha}{\partial\pi^{b\rho}} \qquad \text{avec} \qquad \tilde{D}_b \equiv D_b - \delta_{ab}\frac{\partial}{\partial\tau}$$

On comprend que la théorie des perturbations que nous avons développée au paragraphe III soit facilement adaptable aux systèmes d'équations du type (15) et aux conditions initiales (2). Cette adaptation étant faite on constate que le système d'équations (15) est Décomposable et Complètement Intégrable. Les équations intégrales (10) considérées à chaque ordre peuvent alors être utilisées pour obtenir les solutions formelles souhaitées. Les termes d'ordre le plus bas, compte tenu de (IV.18), sont :

$$(16)\qquad \begin{aligned} \varphi_a^{\alpha\{0\}} &= x_a^\alpha + \tau\pi_a^\alpha \\ \varphi_a^{\alpha\{1,1\}} &= \int_0^\tau d\lambda(\tau-\lambda)\prod_{b=1}^{N} R_b(\lambda)\theta_a^{\alpha\{1,1\}} \end{aligned}$$

VI. INTÉRACTIONS SCALAIRE ET VECTORIELLE

Nous rappelons ici quelques éléments de la théorie classique des champs dont nous aurons besoin au paragraphe suivant. Considérons une charge scalaire $e_{a'}$ dont le mouvement soit connu :

$$(1)\qquad x_{a'}^\alpha = \varphi_{a'}^\alpha(\tau), \qquad \pi_{a'}^\alpha = \frac{d\varphi_{a'}^\alpha}{d\tau}(\tau)$$

et supposons que le paramètre τ a été choisi de sorte que $\pi^\alpha_{a'}$, soit l'impulsion-énergie de cette charge. Nous aurons donc :

$$\pi^2_{a'} \equiv - \pi^\alpha_{a'}\pi_{a'\alpha} = m^2_{a'}, \qquad \pi^0_{a'} > 0 \tag{2}$$

$m_{a'}$ étant la masse de $e_{a'}$. Supposons que cette charge soit la source d'un champ scalaire $\varphi_{a'}(x^\alpha)$ solution de l'équation

$$(\square - \mu^2)\phi_{a'}(x^\alpha) = 4\pi e_{a'}\pi_{a'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\delta[x^\alpha - \varphi^\alpha_{a'}(\tau)] \tag{3}$$

$\mu^{-1} > 0$ étant la portée du champ. Les solutions retardée ($\varepsilon = -1$) ou avancée ($\varepsilon = 1$) de cette équation évaluées au point x^α_a sont :

$$\phi_{aa'}(x^\alpha_a ; \varepsilon) = e_{a'}\left[\varepsilon\hat{r}^{-1}_{aa'} + \mu\pi_{a'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\theta[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}_{aa'})] \frac{J_1(\mu\sqrt{- y^2_{aa'}(\tau)})}{\sqrt{- y^2_{aa'}(\tau)}} \right] \tag{4}$$

où :

$$y^\alpha_{aa'}(\tau) = x^\alpha_a - \varphi^\alpha_{a'}(\tau), \qquad \hat{r}_{aa'} = - \pi^{-1}_{a'}(x^\alpha_a - \hat{\varphi}^\alpha_{aa'})\hat{\pi}_{aa'\alpha} \tag{5}$$

et $\hat{\varphi}^\alpha_{aa'}$ étant le point d'intersection du cône isotrope passé, si $\varepsilon = -1$, ou futur, si $\varepsilon = +1$, de sommet le point x^α_a avec la trajectoire de $e_{a'}$; $\hat{\pi}^\alpha_{aa'}$ étant l'impulsion-énergie au point $\hat{\varphi}^\alpha_{aa'}$; $\hat{\tau}_{aa'}$ étant la valeur du paramètre pour lequel $\varphi^\alpha_{a'}(\tau_{aa'}) = \varphi^\alpha_{aa'}$; θ étant la fonction saut de Heaviside ; et J_1 étant la fonction de Bessel de première espèce et du premier ordre.

Nous considérerons également la solution invariante par renversement du temps :

$$\Phi_{aa'}(x^\alpha_a ; 0) = \frac{1}{2}[\Phi_{aa'}(x^\alpha_a ; +1) + \Phi_{aa'}(x^\alpha_a ; -1)] \tag{6}$$

Le problème se pose naturellement de savoir laquelle des solutions (4) ou (6), ou d'autres éventuellement, correspond au champ réellement créé par la charge $e_{a'}$. D'après le Principe de Causalité ce champ est le champ retardé. Si le mouvement de $e_{a'}$ est connu parce qu'il est un mouvement forcé, ce choix semble être le seul justifié. En ce qui concerne le problème que nous discuterons à la fin de ce paragraphe et au paragraphe suivant nous préférerons laisser ce problème ouvert.

Si nous avons N-1 charges qui soient des sources de champs scalaires suivant le Principe de Superposition des champs le champ scalaire total est :

$$\Phi_a = \varepsilon^{a'}\Phi_{aa'}(x^\alpha_a ; \nu) \qquad \nu = \varepsilon \quad \text{ou} \quad 0 \tag{7}$$

Considérons maintenant une N-ième charge scalaire e_a de masse m_a dont la position dans M_4 soit x_a et dont l'énergie-impulsion en ce point soit π^α_a. Si cette charge scalaire e_a n'est soumise qu'aux champs créés par les charges e_a, son mouvement devra satisfaire le système d'équations :

$$\frac{dx^\alpha_a}{d\tau} = \pi^\alpha_a, \qquad \frac{d\pi^\alpha_a}{d\tau} = W^\alpha_a(x^\lambda_a, \pi^\mu_a ; \nu) \tag{8}$$

où :

$$(9)\quad W_a^\alpha(v) = - e_a\pi_a[1 + \gamma\pi_a^{-1}e_a\Phi_a(v)](\eta^{\alpha\sigma} + \pi_a^{-2}\pi_a^\alpha\pi_a^\sigma)\frac{\partial\Phi_a(v)}{\partial x^{a\sigma}}\,; \qquad \pi_a = m_a$$

Remarque. — Nous avons écrit ces équations de sorte qu'elles dépendent d'un paramètre qui peut prendre les valeurs 0 et 1. Ces deux valeurs de γ déterminent des théories différentes de l'interaction scalaire. Puisque il n'est pas clair à l'heure actuelle laquelle de ces deux théories il faudrait choisir, nous avons préféré de les considérer ensemble.

Compte tenu de (4), tous calculs faits, on obtient pour $v = \varepsilon$:

$$(10)\quad \begin{aligned} W_a^\alpha(x_a^\lambda, \pi_a^\mu\,; \varepsilon) &= - e_a\pi_a[1 + \gamma\pi_a^{-1}e_a\Phi_a(\varepsilon)](\eta^{\alpha\sigma} + \pi_a^{-2}\pi_a^\alpha\pi_a^\sigma) \\ &\varepsilon^{a'}e_{a'}\Big\{ \varepsilon\hat{r}_{aa'}^{-2}\big[\pi_{a'}^{-1}\hat{\pi}_{aa'\sigma} - \hat{r}_{aa'}^{-1}(1 + \pi_{a'}^{-2}\hat{x}_{aa'}^\rho\hat{\theta}_{ad\rho})\hat{x}_{aa'\sigma}\big] \\ &+ \frac{\varepsilon}{2}\mu^2\hat{r}_{aa'}^{-1}\hat{x}_{aa'\sigma} - \mu^2\pi_{a'}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\theta[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}_{aa'})]y_{aa'\sigma}(\tau)\frac{J_2(\mu\sqrt{-y_{aa'}^2(\tau)})}{y_{aa'}^2(\tau)}\Big\} \end{aligned}$$

où :

$$(11)\qquad \hat{x}_{aa'} = x_a^\alpha - \hat{\varphi}_{aa'}\,, \qquad \hat{\theta}_{aa'}^\rho = \frac{d^2\varphi_{a'}^\rho}{d\tau^2}(\hat{\tau}_{aa'})$$

et J_2 est la fonction de Bessel de première espèce et du second ordre. Si $v = 0$:

$$(12)\qquad W_a^\alpha(x_a^\lambda, \pi_a^\mu\,; 0) = \frac{1}{2}\left[W_a^\alpha(x_a^\lambda, \pi_a^\mu\,; +1) + W_a^\alpha(x_a^\lambda, \pi_a^\mu\,; -1)\right]$$

Considérons maintenant N-1 charges vectorielles dont le mouvement (1) soit connu. Chacune de ces charges est la source d'un champ vectoriel $A_{a'}^\alpha(x^\beta)$ solution du système d'équations :

$$(13)\qquad (\Box - \mu^2)A_{a'}^\alpha(x^\beta) = - 4\pi e_{a'}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\delta(x^\rho - \varphi_{a'}^\rho(\tau))\pi_{a'}^\alpha(\tau)$$

Les solutions retardée si $\varepsilon = -1$, ou avancée, si $\varepsilon = +1$, de ces équations évaluées au point x_a^α sont :

$$(14)\quad \begin{aligned} &A_{aa'}^\alpha(x_a^\beta\,; \varepsilon) \\ &= - e_{a'}\left[\varepsilon\hat{r}_{aa'}^{-1}\pi_{a'}^{-1}\hat{\pi}_{aa'}^\alpha + \mu\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\theta[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}_{aa'})]\pi_{a'}^\alpha(\tau)\frac{J_1(\mu\sqrt{-y_{aa'}^2(\tau)})}{\sqrt{-y_{aa'}^2(\tau)}}\right] \end{aligned}$$

Et la solution symétrique par renversement du temps :

$$(15)\qquad A_{aa'}^\alpha(x_a^\beta\,; 0) = \frac{1}{2}\left[A_{aa'}^\alpha(x_b^\beta\,; +1) + A_{aa'}^\alpha(x_b^\beta\,; -1)\right]$$

Les équations du mouvement d'une charge vectorielle e_a soumise au champ de N-1 charges $e_{a'}$ sont les équations (8) avec cette fois

$$W_a^\alpha(x_a^\lambda, \pi_a^\mu ; v) = e_a \eta^{\alpha\rho}\left(\frac{\partial A_{a\sigma}(v)}{\partial x^{a\rho}} - \frac{\partial A_{a\rho}(v)}{\partial x^{a\sigma}}\right)\pi_a^\sigma \tag{16}$$

où :

$$A_a^\alpha(v) = \varepsilon^{a'} A_{aa'}^\alpha(v) \tag{17}$$

Le calcul de $W_a^\alpha(v)$ pour $v = \varepsilon$ donne :

$$\begin{aligned} W_a^\alpha(\varepsilon) = e_a \varepsilon^{a'} e_{a'} \Big\{ & \varepsilon \hat{r}_{aa'}^{-2} \pi_{a'}^{-2}[(\hat{\theta}_{aa'}\pi_a)\hat{x}_{aa'}^\alpha - (\hat{x}_{aa'}\pi_a)\hat{\theta}_{aa'}^\alpha] \\ & \varepsilon \hat{r}_{aa'}^{-3} \pi_{a'}^{-1}\left[1 + \pi_{a'}^{-2}(\hat{x}_{aa'}\hat{\theta}_{aa'}) - \frac{\mu^2}{2}\hat{r}_{aa'}^2\right][(\pi_a \hat{\pi}_{a'})\hat{x}_{aa'}^\alpha - (\hat{x}_{aa'}\pi_a)\hat{\pi}_{a'}^\alpha] \\ & + \mu^2 \pi_{a\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \theta[\varepsilon(\tau - \hat{\tau}_{aa'})][\pi_{a'}^\rho(\tau) y_{aa'}^\alpha(\tau) - \pi_{a'}^\alpha(\tau) y_{aa'}^\rho(\tau)] y_{aa'}^{-2}(\tau) J_2(\mu\sqrt{-y_{aa'}^2(\hat{\tau})}) \Big\} \end{aligned} \tag{18}$$

où nous avons utilisé la notation $(uv) = u^\alpha v_\alpha$ pour le produit scalaire de deux vecteurs. Si $v = 0$, $W_a^\alpha(0)$ est donné par (12) en utilisant les expressions (18) ci-dessus.

Le mouvement des N-1 charges $e_{a'}$, scalaires ou vectorielles, étant connu le système d'équations (8) est un système ordinaire d'équations différentielles du second ordre dans ce sens que les fonctions $W_a^\alpha(v)$ sont des fonctions de $(x_a^\alpha, \pi_b^\beta)$ calculables à partir des expressions (10), (12) ou (18). Ce système permet donc en principe, quelle que soit la fonction $W_a^\alpha(v)$ choisie, la détermination du mouvement d'une charge e_a libre à partir de conditions initiales $(x_{0a}^\alpha, \pi_{0a}^\alpha)$ données. Supposons maintenant que toutes les charges e_b soient libres, ou plus précisément que chacune d'elles soit uniquement soumise au champ total créé par les autres. Si nous nous bornons à affirmer que sous de telles conditions notre unique information est que le mouvement de ces charges doit satisfaire les équations (8) le problème change complètement de nature. Car dans ce cas ce système d'équations n'est plus un système ordinaire d'équations différentielles et par conséquent des données initiales $(x_{0a}^\alpha, \pi_{0b}^\beta)$ ne suffisent plus pour déterminer l'évolution future du système. Si on utilise les fonctions $W_a^\alpha(-1)$ le système (8) ne peut être résolu, même en principe, que si on se donne les mouvements passés de toutes les charges, ou des morceaux suffisamment longs du passé si $\mu = 0$, et les mouvements futurs ainsi obtenus ne seront en général que de classe C^1. Si on utilise les fonctions $W_a^\alpha(+1)$ ou $W_a^\alpha(0)$, le problème est complètement indéterminé dans le cas général, et seules quelques solutions particulières très spécifiques peuvent être obtenues dans le dernier cas.

Nous allons voir que dans le cadre de la M. R. P. les formules (10, (12) ou (18) peuvent être considérées comme des conditions aux limites qui permettent de déterminer des solutions des équations (I.7). L'intégrale générale des S. P. I. ainsi obtenus satisfaisant alors dans chaque cas les équations (8) correspondantes. Nous appellerons ces dernières les équations Critérielles de la théorie des champs.

VII. S. P. I. CORRESPONDANT AUX INTERACTIONS SCALAIRE ET VECTORIELLE

Considérons un S. P. I. Nous avons déjà vu ([7]) que l'intégrale générale du système d'équations (I.2) pouvait être obtenue en résolvant le système d'équations intégrales (V.10) ce qui pouvait se faire aisément dans le cadre de la théorie des perturbations. Soient $\hat{\varphi}^{\alpha}_{aa'}(\varepsilon)$, $\hat{\pi}^{\alpha}_{aa'}(\varepsilon)$, $\hat{\theta}^{\alpha}_{aa'}(\varepsilon)$ et $\hat{\tau}_{aa'}(\varepsilon)$ les quantités définies au paragraphe précédent correspondant à des mouvements déterminés par des conditions initiales $(x^{\beta}_{b}, \pi^{\gamma}_{c})$. Toutes ces quantités sont alors fonction de ces variables indépendantes. Fixons notre attention sur une valeur quelconque de a. D'après leur définition et la propriété (V.3) les fonctions $\hat{\varphi}^{\alpha}_{aa'}(\varepsilon)$ satisferont le système d'équations ([8]) :

$$(1) \quad L(\vec{H}_{a'_i})\varphi^{\alpha}_{aa'_j}=0 \quad \text{ou} \quad D_{a'_i}\varphi_{aa'_j} = -\theta^{\rho}_{a_i}\frac{\partial\hat{\varphi}_{aa'_j}}{\partial x^{a'_i\rho}} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, N-1)$$

Ce système d'équations est du type (II.4). Définissons :

$$(2) \quad \hat{\zeta}_{aa'}(\varepsilon) = -\pi_{a'}^{-2}\left[(x_{aa'}\pi_{a'}) - \varepsilon\sqrt{\pi^2_{a'}x^2_{aa'} + (x_{aa'}\pi_{a'})^2}\right]; \quad x^{\alpha}_{aa'} \equiv x^{\alpha}_{a} - x^{\alpha}_{a'}$$

Ces fonctions satisfont les équations (II.10), qui s'écrivent ici :

$$(3) \qquad D_{a'_i}\hat{\zeta}_{aa'_j} = -\delta_{ij}$$

D'autre part elles sont telles que :

$$(4) \qquad [x^{\alpha}_{a} - R_{a'}(\hat{\zeta}_{aa'})x^{\alpha}_{a'}][x_{a\alpha} - R_{a'}(\hat{\zeta}_{aa'})x_{a'\alpha}] = 0$$

Or :

$$(5) \qquad x^2_{aa'} = 0 \quad \text{et} \quad x^0_{aa'} = -\varepsilon\,|\,x^0_{aa'}\,| \;\Rightarrow\; \hat{\varphi}^{\alpha}_{aa'}(x^{\beta}_{b}, \pi^{\gamma}_{c}\,;\,\varepsilon) = x^{\alpha}_{a'}$$

Par conséquent :

$$(6) \qquad \prod_{i=1}^{N-1} R_{a'_i}(\hat{\zeta}_{aa'_i})\hat{\varphi}^{\alpha}_{aa'} = R_{a'}(\hat{\zeta}_{aa'})x^{\alpha}_{a'} = x^{\alpha}_{a'} + \hat{\zeta}_{aa'}\pi^{\alpha}_{a'} \equiv \hat{\varphi}^{*}_{aa'}$$

([7]) Nous ne nous appesantirons pas sur l'ensemble des hypothèses qui justifient nos affirmations. Celles-ci ont été précisées au moment opportun. Nous ne disons ici que ce qui est essentiel pour pouvoir appliquer la théorie des perturbations.

([8]) Nous éviterons souvent d'écrire la dépendance explicite en ε. Sauf mention contraire toutes les quantités figurant dans une même équation correspondent à la même valeur de ε.

Ces conditions sont du type (II.8) et les fonctions $\hat{\varphi}^*_{aa'}$, qu'elles définissent, compte tenu de (3), sont solution du système d'équations (II.11). De (II.9) il résulte alors que $\hat{\varphi}^\alpha_a$ seront les solutions du système d'équations intégrales :

$$(7)\qquad \hat{\varphi}^\alpha_{aa'} = x^\alpha_{a'} + \hat{\zeta}_{aa'}\pi^\alpha_{a'} + \prod_{j=1}^{N-1} \hat{\zeta}_{aa'_j} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{N-1} \mathrm{R}_{a'_i}(\lambda\hat{\zeta}_{aa'_i})\left(\theta^\rho_{a'_j}\frac{\partial\hat{\varphi}_{aa'}}{\partial\pi^{a'_j\rho}}\right)$$

Un raisonnement analogue appliqué aux fonctions $\hat{\pi}^\alpha_{aa'}$, et $\hat{\theta}^\alpha_{aa'}$, nous permet de conclure que ces fonctions seront les solutions des systèmes d'équations intégrales :

$$(8)\qquad \hat{\pi}^\alpha_{aa'} = \pi^\alpha_{a'} + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{\zeta}_{aa'_j} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{N-1} \mathrm{R}_{a'_i}(\lambda\hat{\zeta}_{aa'_i})\left(\theta^\rho_{a'_j}\frac{\partial\hat{\pi}^\alpha_{aa'}}{\partial\pi^{a'_j\rho}}\right)$$

et :

$$(9)\qquad \hat{\theta}^\alpha_{aa'} = \prod_{i=1}^{N-1} \mathrm{R}_{a'_i}(\hat{\zeta}_{aa'_i})\theta^\alpha_{a'} + \sum_{j=1}^{N-1} \zeta_{aa'_j} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{N-1} \mathrm{R}_{a'_i}(\lambda\hat{\zeta}_{aa'_i})\left(\theta^\rho_{a'_j}\frac{\partial\hat{\theta}^\alpha_{aa'}}{\partial\pi^{a'_j\rho}}\right)$$

D'après leur définition les fonctions $\hat{\tau}_{aa'}$, sont solution du système d'équations :

$$(10)\qquad \mathrm{L}(\vec{\mathrm{H}}_{a'_i})\hat{\tau}_{aa'_j} = -\,\delta_{ij} \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}_{a'_i}\hat{\tau}_{aa'_j} = -\,\delta_{ij} - \theta^\rho_{a'_i}\frac{\partial\hat{\tau}_{aa'_j}}{\partial\pi^{a'_i\rho}}$$

et satisfont aux conditions aux limites :

$$(11)\qquad \prod_{i=1}^{N-1} \mathrm{R}_{a'_i}(\hat{\zeta}_{aa'_i})\hat{\tau}_{aa'} = 0$$

On obtient alors :

$$(12)\qquad \hat{\tau}_{aa'} = \hat{\zeta}_{aa'} + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{\zeta}_{aa'_j} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{N-1} \mathrm{R}_{a'_i}(\lambda\hat{\zeta}_{aa'_j})\left(\theta^\rho_{a'_j}\frac{\partial\hat{\tau}_{aa'}}{\partial\pi^{a'_j\rho}}\right)$$

Le système d'équations (1), ainsi que les systèmes correspondants pour $\hat{\pi}^\alpha_{aa'}$ et $\hat{\theta}^\alpha_{aa'}$, et le système (10) sont Décomposables et Complètement Intégrables. Les équations (7), (8), (9) et (12) considérées ordre par ordre permettent donc d'obtenir les solutions formelles de ces systèmes.

Substituons dans une quelconque des expressions (VI.10) ou (VI.18) $\hat{\varphi}^\alpha_{aa'}$ par les solutions des équations (7), $\hat{\pi}^\alpha_{aa'}$ par les solutions (8), $\hat{\theta}^\alpha_{aa'}$ par les solutions de (9) et, si $\mu \neq 0$, $\hat{\tau}_{aa'}$ par les solutions de (12) et $\varphi^\alpha_{a'}$ par les solutions des équations (V.10) correspondantes. Les fonctions de $(x^\beta_b, \pi^\gamma_c)$ ainsi obtenues, que nous noterons symboliquement $\tilde{\mathrm{W}}^\alpha_a(x^\beta_b, \pi^\gamma_c\,;\,\theta^\delta_d\,;\,\varepsilon)$, sont clairement solution du système d'équations :

$$(13)\qquad \mathrm{L}(\vec{\mathrm{H}}_{a'})\tilde{\mathrm{W}}^\alpha_a = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}_{a'}\tilde{\mathrm{W}}^\alpha_a = -\,\theta^\rho_{a'}\frac{\partial\tilde{\mathrm{W}}^\alpha_a}{\partial\pi^{a'\rho}}$$

et satisfont aux conditions aux limites :

(14) $x^2_{aa'} = 0$ et $x^0_{aa'} = -\varepsilon \,|\, x^0_{aa'} \,| \Rightarrow \tilde{W}^\alpha_a(\varepsilon) = W^\alpha_a(\varepsilon)$

Nous dirons qu'un S. P. I. défini par des fonctions $\theta^\alpha_a(v)$ est le S. P. I. correspondant à l'interaction scalaire ou vectorielle, retardée, avancée ou invariante par renversement du temps suivant le cas si :

(15) $\theta^\alpha_a(\varepsilon) = \tilde{W}^\alpha_a[\theta^\beta_b(\varepsilon); \varepsilon]$ ou $\theta^\alpha_a(0) = \frac{1}{2}\{\tilde{W}^\alpha_a[\theta^\alpha_a(0); +1] + \tilde{W}^\alpha_a[\theta^\alpha_a(0); -1]\}$

De (13), (14) et (15) il résulte que si un S. P. I. est solution des équations (15) son intégrale générale est solution des équations Critérielles (VI.8) et réciproquement. La recherche des solutions des équations (15) apparaît ainsi comme une méthode qui donne un sens précis à ces équations Critérielles, et ramène le problème de l'interaction de N charges à l'étude de systèmes possédant un nombre fini de degrés de liberté. Compte tenu de (V.3), (V.4) et (V.5) ce nombre est 6 N.

Le système d'équations (15) est un système d'équations intégro-fonctionnelles. La recherche de solutions exactes paraît inextricable mais par contre ce système peut être résolu facilement dans le cadre de la théorie des perturbations si nous supposons (V.18). En effet si nous écrivons symboliquement

(16) $\theta^{\alpha\{n\}}_a = \tilde{W}^{\alpha\{n\}}_a(x^\beta_b, \pi^\gamma_c \,;\, \theta^{\delta\{p\}}_d)$

il résulte des expressions (VI.10) et VI.18) que $\{p\} < \{n\}$ et par conséquent l'hypothèse (V.18) fournit le départ du calcul récurrent des solutions formelles. Nous n'insisterons pas là-dessus car ce problème a été l'objet de quelques-uns des articles que nous avons mentionnés dans l'Introduction.

Pour terminer signalons que l'on peut procéder autrement et plus commodément pour étudier les équations (15). Substituons dans les expressions (VI.10) ou (VI.18) $\hat{\varphi}^\alpha_{aa'}$ par $R_{a'}(\hat{\zeta}_{aa'})x^\alpha_{a'}$, $\hat{\pi}^\alpha_{aa'}$ par π^α_a, $\hat{\theta}^\alpha_{aa'}$ par $R_{a'}(\hat{\zeta}_{aa'})\theta^\alpha_{a'}$ et, si $\mu \neq 0$, $\hat{\tau}_{aa'}$ par 0 et $\varphi^\alpha_{a'}(\tau)$ par la solution du S. P. I. considéré pour des données initiales x^α_a, $R_{a'}(\hat{\zeta}_{aa'})x^\alpha_{a'}$, π^β_b. Soient $\tilde{W}^{*\alpha}_a(x^\beta_b, \pi^\gamma_c \,;\, \theta^\delta_d \,;\, \varepsilon)$ les fonctions ainsi obtenues. Ces fonctions seront, compte tenu de (3), solutions de :

(17) $D_{a'_i}\tilde{W}^{*\alpha}_a = 0$

et satisferont aux conditions aux limites :

(18) $x^2_{aa'} = 0$ et $x^0_{aa'} = -\varepsilon \,|\, x^0_{aa'} \,| \Rightarrow \tilde{W}^{*\alpha}_a = W^\alpha_a$

De (4), (14) et (18) il vient :

(19) $$\prod_{i=1}^{N-1} R_{a'_i}(\hat{\zeta}_{aa'_i})\tilde{W}^\alpha_a = \prod_{i=1}^{N-1} R_{a'_i}(\hat{\zeta}_{aa'})\tilde{W}^{*\alpha}_a$$

Mais d'après (II.6) et (17) nous avons :

$$\prod_{i=1}^{N-1} R_{a'_i}(\zeta_{aa'_i})\tilde{W}_a^{*\alpha} = \tilde{W}_a^{*\alpha} \tag{20}$$

Donc :

$$\prod_{i=1}^{N-1} R_{a'_i}(\hat{\zeta}_{aa'_i})\tilde{W}_a^{\alpha} = W_a^{*\alpha} \tag{21}$$

Le système d'équations (13) est du type (II.4), les conditions (21) sont du type (II.8) et les fonctions $\hat{\zeta}_{aa'_i}$ sont solution des équations (3). Par conséquent le raisonnement maintes fois utilisé nous permet d'affirmer que les fonctions $\tilde{W}_a^{\alpha}(\varepsilon)$ seront les solutions du système d'équations intégrales :

$$\tilde{W}_a^{\alpha} = \tilde{W}_a^{*\alpha} + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{\zeta}_{aa'_j} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{N-1} R_{a'_i}(\lambda\hat{\zeta}_{aa'_i})\left(\theta^{\rho}_{a'_j} \frac{\partial \tilde{W}_a^{\alpha}}{\partial \pi^{a'_j\rho}}\right) \tag{22}$$

Les équations intégro-fonctionnelles (15) peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$\theta_a^{\alpha}(\varepsilon) = \tilde{W}_a^{*\alpha}[\theta_b^{\beta}(\varepsilon)\,;\varepsilon] + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{\zeta}_{aa'_j}(\varepsilon) \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{N-1} R_{a'_i}[\lambda\hat{\zeta}_{aa'_i}(\varepsilon)]\left(\theta^{\rho}_{a'_j}(\varepsilon) \frac{\partial \theta_a^{\alpha}(\varepsilon)}{\partial \pi^{a'_j\rho}}\right) \tag{23}$$

si $v = \varepsilon$, et si $v = 0$ elles peuvent s'écrire sous la forme (15) correspondante avec :

$$\begin{aligned}\tilde{W}_a^{\alpha}[\theta_b^{\beta}(0)\,;\varepsilon] &= \tilde{W}_a^{*\alpha}[\theta_b^{\beta}(0)\,;\varepsilon] \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \hat{\zeta}_{aa'_j}(\varepsilon) \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{N-1} R_{a'_i}[\lambda\hat{\zeta}_{aa'_i}(\varepsilon)]\left\{\theta^{\rho}_{a'_j}(0) \frac{\partial \tilde{W}_a^{\alpha}}{\partial \pi^{a'_j\rho}}[\theta_b^{\beta}(0)\,;\varepsilon]\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

Des résultats équivalents pour le cas particulier de l'interaction électromagnétique (Interaction vectorielle ; $\mu = 0$) ont été obtenus pour la première fois par D. Hirondel.

Le système d'équations (13) étant Décomposable et Complètement Intégrable, de même que le système d'équations (V.6) et (V.7), les équations intégro-fonctionnelles (23) ou (24) permettent la détermination formelle des S. P. I. cherchés.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Ph. Droz-Vincent, *Phys. Scripta*, t. **2**, 1970, p. 129.

[*2*] L. Bel, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **14**, 1971, p. 189.

[*3*] R. Arens, *Arch. for Rat. Mech. and Analysis*, t. **47**, 1972, p. 255.

[4] L. Bel et J. Martin, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **22**, 1975, p. 173.
[5] L. Bel, Contribution dans *Journées Relativistes de Toulouse*, 1974. Université de Toulouse. Departement de Mathématiques.
[6] L. Bel, Contribution au volume en l'honneur de A. Lichnerowicz *(à paraître)*.
[7] D. Hirondel, *J. Math. Phys.*, t. **15**, 1974, p. 1689.
[8] L. Bel, A. Salas et J. M. Sanchez-Ron, *Phys. Rev. D*, t. **7**, 1973, p. 1099.
[9] A. Salas et J. M. Sanchez-Ron, *Il Nuovo Cimento*, t. **20 B**, 1974, p. 209.
[10] X. Fustero, *Tesis*. Universidad Autonoma de Barcelona, 1974.
[11] L. Bel et J. Martin, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. **277**, 1973, p. 233.
[12] L. Bel et J. Martin, *Phys. Rev. D*, t. **9**, 1974, p. 2760.

(Manuscrit reçu le 4 février 1976).