

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

IULIAN POPOVICI

Représentations irréductibles des fibrés de Clifford

Annales de l'I. H. P., section A, tome 25, n° 1 (1976), p. 35-58

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__25_1_35_0

© Gauthier-Villars, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Représentations irréductibles des fibrés de Clifford

par

Iulian POPOVICI

Institut de Mathématique,
Str. Academiei 14, Bucarest, Roumanie

SOMMAIRE. — Les SC-structures ont été introduites et étudiées par G. Karrer dans [7]. Nous les caractérisons ici comme extensions de fibrés principaux, associées à un homomorphisme δ dont l'image est un groupe pseudoorthogonal réel $O(Q)$ de dimension finie et le noyau est un cercle T . Les structures spinorielles, considérées dans le cas non orientable [5] [11], sont des cas particuliers, correspondantes aux différentes restrictions de δ ayant comme noyau le groupe cyclique Z_2 .

Les propriétés de ces deux structures, que nous déduisons, résultent exclusivement des propriétés algébriques, topologiques et différentiables de δ . On évite ainsi toute hypothèse restrictive sur la topologie des espaces de base.

On étend au cas général l'indépendance par rapport à la forme quadratique Q , indiquée dans [7] pour les SC-structures, dans le cas orientable et paracompact. On montre que chaque connexion ∇ d'une SC-structure a une décomposition unique, relative aux groupes structuraux $O(Q)$ et T . On définit l'opérateur de Dirac D associé à ∇ , d'après la méthode classique [8]. Cette définition de D est aussi avantageuse pour les structures spinorielles, dans le cas des dimensions impaires, ou dans le cas non orientable.

1. INTRODUCTION

Les résultats principaux de ce travail ont été annoncés dans la note [14]. Soit X un espace topologique quelconque, choisi comme base pour

tous les fibrés que nous considérons. Si l'on a un fibré vectoriel réel ξ de dimension finie n muni de la forme quadratique non dégénérée q de signature $(m, n-m)$, désignons par (ξ^c, q^c) le complexifié du couple (ξ, q) et par $C(\xi^c, q^c)$ son fibré complexe de Clifford. Les fibres de $C(\xi^c, q^c)$ sont donc les algèbres de Clifford associées aux formes quadratiques induites par q^c sur les fibres correspondantes de ξ^c .

Une SC-structure [7] de (ξ, q) est un homomorphisme de fibrés algébriques $C(\xi^c, q^c) \rightarrow \text{End } \eta'$ avec η' fibré vectoriel complexe, qui se projette sur l'application identique de X et qui induit une représentation linéaire irréductible pour chaque fibre de $C(\xi^c, q^c)$. Le fibré des spineurs η est égal à η' ou $\eta' \oplus \eta'$ selon que n est pair resp. impair. Dans [7] on établit aussi la

PROPOSITION 1.1. — *Supposons que X est une variété C^∞ -différentiable paracompacte de dimension finie et ξ est orientable. Pour que (ξ, q) admette une SC-structure, il faut et il suffit que la classe de cohomologie entière $W_3(\xi) \in H^3(X, \mathbf{Z})$ soit nulle. Ainsi, l'existence d'une telle structure ne dépend que de ξ .*

Étant donné un espace vectoriel réel E de dimension n muni de la forme quadratique non dégénérée Q de signature $(m, n-m)$, désignons par (E^c, Q^c) le complexifié de (E, Q) et par $O(Q)$, $O(Q^c)$ les groupes orthogonaux correspondantes. Alors ξ admet, en vertu de l'existence de q , le groupe structural $O(Q)$.

D'autre part, en suivant une construction donnée dans [2], on obtient un épimorphisme $\gamma : \Gamma(Q^c) \rightarrow O(Q^c)$ dont le noyau est le groupe complexe multiplicatif C^* et $\Gamma(Q^c)$ est le groupe de Clifford. γ induit un autre épimorphisme $\delta : \Delta(Q) \rightarrow O(Q)$, dont le noyau est un cercle T central dans $\Delta(Q)$ (voir la section 2).

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier les SC-structures à l'aide des propriétés de δ , ne tenant pas compte de la topologie de X , qui sera absolument arbitraire.

Remarquons d'abord que la proposition 1.1 conduit au problème suivant : l'existence d'une SC-structure de (ξ, q) est-elle indépendante, dans le cas général, par rapport à q ? Dans la section 4 nous donnons une réponse affirmative à ce problème.

Soient un homomorphisme de groupes topologiques $g : G' \rightarrow G$ et un fibré principal P de groupe structural G . A. Haefliger a obtenu dans [6] des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une extension de P associée à g , en imposant quelques hypothèses restrictives sur X et g . Supposons, par exemple, que X est un complexe cellulaire et g est l'homomorphisme canonique $G' \rightarrow G'/T$ avec G' un groupe de Lie connexe compact et T central. Alors, P admet une extension si et seulement si un certain élément de $H^3(X, \mathbf{Z})$ est nul. Une comparaison entre ce résultat et la proposition 1.1 nous suggère la possibilité de caractériser les SC-

structures à l'aide des extensions de fibrés principaux, car ξ admet toujours, pour X paracompact, une métrique définie, donc le groupe structural compact $O(n)$. Dans la section 3 nous obtenons une telle caractérisation dans le cas général avec $g = \delta : \Delta(Q) \rightarrow O(Q)$.

Nous utiliserons le langage des fibrés principaux et alors choisissons, pour $G = O(Q)$, le fibré P tel que ξ soit associé à P et q soit induite par Q .

Les structures spinorielles ont été considérées, dans les dernières années, pour les espaces pseudoriemanniens non orientables (voir par exemple [5]). Le revêtement universel $\text{spin}_+ Q$ du sous-groupe connexe maximal $\text{SO}_+(Q)$ de $O(Q)$ ne s'étend pas à un revêtement unique de $O(Q)$. Dans [11] et [13] on construit un tel homomorphisme d'extension $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow O(Q)$, on définit une structure spinorielle Σ comme une extension de P associée à λ et on obtient les propriétés suivantes :

(i) λ admet une complexification $\text{pin } Q^c \rightarrow O(Q^c)$, qui ne dépend que de n , telle que Σ s'exprime par une extension associée à cette complexification ;

(ii) l'existence de Σ se réduit au cas du groupe structural $\text{SO}_+(Q)$, par un prolongement convenable de l'espace de base ;

(iii) on a une généralisation, au cas non orientable et non défini, du lemme de J. Milnor [10] concernant les structures spinorielles et la somme de Whitney ;

(iv) on peut prolonger les structures spinorielles dans le cas d'une structure pseudoriemannienne axiale ⁽¹⁾ ayant l'espace total orientable.

Dans la section 2 de ce travail, nous donnons une autre définition de $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow O(Q)$, comme une certaine restriction de $\delta : \Delta(Q) \rightarrow O(Q)$. On montre facilement qu'en utilisant cette nouvelle variante de λ , les propriétés (i)-(iii) restent vraies. De plus, on peut éviter dans (iv) l'orientation de l'espace total. Nous étudierons en détail le prolongement des structures spinorielles correspondant aux structures pseudoriemanniennes axiales dans un travail séparé.

A. Haefliger a donné dans [6] (voir aussi [1] et [9]) la

PROPOSITION 1.2. — *Si X est un complexe cellulaire, l'existence d'une structure spinorielle équivaut, dans le cas défini et orientable, à l'annulation de la classe de Stiefel-Whitney $w_2(\xi) \in H^2(X, \mathbf{Z}_2)$.*

L'auteur a montré dans [13] que la proposition 1.2 est aussi vraie dans le cas non défini, en supposant que P est réductible au groupe structural $\text{SO}_+(Q)$ ⁽²⁾. Alors, l'existence d'une structure spinorielle, correspondante à (ξ, q) , est-elle indépendante, dans le cas général, par rapport à q ? La réponse

⁽¹⁾ C'est une généralisation immédiate d'un espace fibré à métrique riemannienne invariante au sens de K. Yano et S. Ishihara [15].

⁽²⁾ K. Bichteler a obtenu dans [3] un résultat analogue, concernant le fibré des repères orthonormés d'un espace-temps.

est négative pour les structures spinorielles considérées dans [5] et [12].

Dans la section 4 nous construisons un homomorphisme $\mu : \text{pin } E \rightarrow \text{GL}(E)$ de noyau \mathbf{Z}_2 qui étend $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow \text{O}(Q)$, quelle que soit Q . Cette construction est basée sur quelques propriétés topologiques bien connues des groupes $\text{GL}(E)$, $\text{O}(Q)$ et sur l'étude algébrique de δ et λ que nous effectuons. En utilisant l'homomorphisme μ , on obtient l'indépendance par rapport à q des SC-structures et des structures spinorielles, où l'on peut prendre pour λ les deux variantes ci-dessus.

Les propositions 1.1 et 1.2 nous montrent que, si X est une variété C^∞ -différentiable paracompacte et si ξ est orientable, toute structure spinorielle est un cas particulier de SC-structure, car $w_2(\xi) = 0$ implique $W_3(\xi) = 0$. Cette propriété reste aussi vraie dans le cas général (voir la section 3).

Il est bien connu le calcul différentiel des structures spinorielles (voir par exemple [8]) pour les espaces pseudoriemanniens de dimension paire avec ξ le fibré tangent, mais il s'étend sans difficulté au cas où ξ est arbitraire et X est une variété différentiable. Il faut mentionner le rôle important de l'opérateur de Dirac dans le cas riemannien [1], grâce à son ellipticité.

Dans la section 5 nous montrons qu'on peut simplifier le calcul différentiel développé dans [7] pour les SC-structures, en les considérant comme extensions de fibrés principaux. Dans ce but, nous indiquons d'abord quelques compléments et spécifications concernant la théorie classique des algèbres de Clifford.

Étant donnée une structure spinorielle Σ de P , il existe une bijection entre les ensembles des connexions de ces fibrés, car λ est un isomorphisme local. Nous généralisons cette remarque pour une SC-structure arbitraire Σ' de P , à savoir : à chaque connexion ∇ de Σ' correspond biunivoquement un couple de connexions, l'une de P et l'autre d'un certain fibré associé à Σ' , de groupe structural T . L'opérateur de Dirac relatif à ∇ a la même expression, pour Σ' ainsi que pour Σ . Nous évitons l'orientabilité de ξ et réduisons le cas de la dimension impaire à celui de la dimension paire.

Le groupe $\text{O}(Q)$ a un sous-groupe remarquable $\text{O}_+(Q)$, dont les éléments contiennent, dans la décomposition de Cartan-Dieudonné, un nombre pair de symétries négatives (correspondantes aux vecteurs de carré négatif). Le groupe de Lorentz orthochrone est de la forme $\text{O}_+(Q)$.

Si l'on suppose la réductibilité de P au groupe $\text{O}_+(Q)$, nous montrons que le fibré des spineurs η admet une forme hermitienne non dégénérée h définissant l'adjonction de Dirac (voir aussi [12]). Chaque champ de Dirac conduit alors à un champ vectoriel de divergence nulle, qui signifie la densité de probabilité.

Dans [7] on indique une construction de h adaptée au cas où X est paracompact et P est réductible au groupe $\text{SO}_+(Q)$, telle que les deux fibrés des semi-spineurs soient orthogonaux ou totalement isotropes par rapport à h . Nous établissons la même propriété, en évitant la paracompacité.

2. HOMOMORPHISMES DE GROUPES CONSTRUITS A L'AIDE DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

Soit un corps commutatif K , supposé de caractéristique $\neq 2$. Une algèbre A sur K signifiera une algèbre associative à élément unité sur K . \underline{A} sera l'algèbre duale ⁽³⁾ de A et A^* sera le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A . En désignant toujours par 1 l'unité de A , le sous-espace $K1$ de A sera identifié à K .

Désignons aussi par 1 l'élément unité d'un groupe quelconque, dont la loi de composition est représentée sous la forme multiplicative.

Désignons, pour chaque couple d'ensembles $X \subset Y$, par $i : X \rightarrow Y$ l'application correspondante d'inclusion. Toute application $f : Y \rightarrow Y'$ induit, pour $\text{Im}(f \circ i) \subset Y'' \subset Y'$, une application naturelle de X dans Y'' , que nous désignerons par $f : X \rightarrow Y''$.

Un espace quadratique (E, Q) sur K sera donné par un K -espace vectoriel E de dimension finie n et par une forme quadratique non dégénérée Q sur E . Si $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$, (E, Q) sera dit réel resp. complexe. Désignons par $O(Q)$ le groupe orthogonal de Q , par $SO(Q)$ son sous-groupe spécial et par $C(Q)$ l'algèbre de Clifford associée à Q avec la décomposition naturelle \mathbf{Z}_2 -graduée $C(Q) = C(Q)^+ \oplus C(Q)^-$, $\mathbf{Z}_2 = \{1, -1\}$, l'espace E étant identifié à son image dans $C(Q)^-$.

La propriété d'universalité suivante définit $C(Q)$ à un isomorphisme près. Il existe, pour chaque algèbre A sur K et pour chaque homomorphisme d'espaces vectoriels $h : E \rightarrow A$ avec $h(v)^2 = Q(v)$ quel que soit $v \in E$, un homomorphisme unique d'algèbres $h^e : C(Q) \rightarrow A$ tel que $h = h^e \circ i$, $i : E \rightarrow C(Q)$.

En particulier, chaque transformation $k \in O(Q)$ s'étend à un automorphisme unique k^e de l'algèbre $C(Q)$. Si $k = -1$, k^e sera l'involution principale α de $C(Q)$. Si $h = i : E \rightarrow C(Q)$, h^e sera l'antiinvolution principale β de $C(Q)$.

Soient ω, ω' les représentations suivantes de $C(Q)^*$ dans l'espace vectoriel correspondant à $C(Q)$:

$$(2.1) \quad \omega(x)v = \alpha(x)v x^{-1}, \quad \omega'(x)v = x v x^{-1}, \quad x \in C(Q)^*, \quad v \in C(Q),$$

$\Gamma(Q)$ le sous-groupe de $C(Q)^*$ laissant invariant E par ω et γ la restriction de ω à E . On aura donc :

$$(2.2) \quad \gamma(x)v = \alpha(x)v x^{-1} = x v \alpha(x^{-1}), \quad x \in \Gamma(Q), \quad v \in E.$$

PROPOSITION 2.1. — *Le groupe $\Gamma(Q)$ est engendré dans $C(Q)^*$ par*

⁽³⁾ Si la multiplication de A est $(a, b) \rightarrow ab$, celle de \underline{A} sera $(a, b) \rightarrow a \cdot b = ba$.

$E - \text{Ker } Q$. Si $x \in E - \text{Ker } Q$, $\gamma(x)$ est la symétrie $s_x \in O(Q)$ par rapport au hyperplan orthogonal à x . $\text{Ker } \gamma = K^*$ et $\text{Im } \gamma = O(Q)$.

C'est une conséquence du théorème de Cartan-Dieudonné, d'après lequel toute transformation de $O(Q)$ est un produit de symétries. L'homomorphisme γ a été introduit par M. Atiyah, R. Bott et A. Shapiro [2] pour $K = \mathbf{R}$ et Q définie négative. Ses propriétés établies dans [2] (voir aussi [5]) s'étendent sans difficulté au cas général et conduisent à la démonstration de la proposition 2.1.

Remarque. — L'homomorphisme γ sera supposé de la forme $\Gamma(Q) \rightarrow O(Q)$.

Dans la suite, (E, Q) sera un espace quadratique réel, (E^c, Q^c) désignera son complexifié et alors $C(Q^c)$ sera le complexifié de $C(Q)$. Une base $\{e_i\}$ de E^c est orthonormée si et seulement si on a dans $C(Q^c)$:

$$(2.3) \quad e_i e_j + e_j e_i = 2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Considérons, pour n pair ($n = 2r$), l'élément f suivant qui ne dépend pas, au signe près, de $\{e_i\}$:

$$(2.4) \quad f = (-1)^{(r+1)/2} e_1 e_2 \dots e_n, \quad f^2 = -1$$

et l'involution h^e de $C(Q^c)$ définie par l'homomorphisme

$$(2.5) \quad h : E^c \rightarrow C(Q^c), \quad h(x) = fx.$$

D'après la proposition 2.1, h^e induit une involution α' de $\Gamma(Q^c)$, à savoir

$$(2.6) \quad \alpha'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \Gamma(Q^c) \cap C(Q^c)^+ \\ fx & \text{si } x \in \Gamma(Q^c) \cap C(Q^c)^- \end{cases}$$

PROPOSITION 2.2. — Si n est pair, $\Gamma(Q^c)$ est le sous-groupe de $C(Q^c)^*$ laissant invariant l'espace E^c par $\omega' : C(Q^c)^* \rightarrow \text{Aut } C(Q^c)$ et la restriction $\gamma' : \Gamma(Q^c) \rightarrow O(Q^c)$ de ω' à E^c coïncide avec $\gamma \circ \alpha'$. Alors $\omega'(x) = \gamma'(x)^e$ quel que soit $x \in \Gamma(Q^c)$.

Démonstration. — Soient Γ' le sous-groupe de $C(Q^c)^*$ laissant invariant E^c par ω' et $\gamma' : \Gamma' \rightarrow O(Q^c)$ la restriction de ω' à E^c .

D'après la proposition 2.1 et la relation (2.6),

$$(2.7) \quad \alpha(x) v x^{-1} = \alpha'(x) v \alpha'(x)^{-1}, \quad x \in \Gamma(Q^c), \quad v \in E^c.$$

Une comparaison entre (2.2) et (2.7) nous montre que $\Gamma(Q^c) \subset \Gamma'$ et la restriction de γ' à $\Gamma(Q^c)$ coïncide avec $\gamma \circ \alpha'$. Il nous reste à montrer que $\Gamma' = \Gamma(Q^c)$.

Remarquons d'abord que le noyau de γ' coïncide avec \mathbf{C}^* , l'algèbre $C(Q^c)$ étant centrale pour n pair. Si $y \in \Gamma'$, choisissons $x \in \Gamma(Q^c)$ tel que $\gamma'(y) = \gamma(x) = \gamma'(\alpha'(x))$; alors $y = c\alpha'(x)$ avec $c \in \mathbf{C}^*$. D'après la proposition 2.1, $y \in \Gamma(Q^c)$.

Si x est arbitraire dans $\Gamma(Q^c)$, d'après (2.1), $\omega'(x)$ est un automorphisme de $C(Q^c)$ induisant $\gamma'(x)$; donc $\omega'(x) = \gamma'(x)^e$, en vertu de l'unicité de $\gamma'(x)^e$.

Q. E. D.

Définissons l'homomorphisme $\Gamma(Q^c) \rightarrow \mathbf{R}^+$ (le groupe multiplicatif des nombres réels positifs), indiqué par $x \rightarrow |x|$ (le module de x) par

$$(2.8) \quad |x| = |x\beta(x)|^{1/2}.$$

D'autre part, l'inclusion $C(Q) \subset C(Q^c)$ conduit à l'épimorphisme $\gamma : \Gamma^c(Q) \rightarrow O(Q)$ de noyau \mathbf{C}^* , qui est la restriction de $\gamma : \Gamma(Q^c) \rightarrow O(Q^c)$. Dans la suite, il est convenable de remplacer le groupe $\Gamma(Q)$ par $\Gamma^c(Q)$.

PROPOSITION 2.3. — *On a les isomorphismes de groupes :*

$$(2.9) \quad \begin{cases} \Gamma(Q^c) \approx \mathbf{R}^+ \times \Delta(Q^c), & \Delta(Q^c) = \{x \in \Gamma(Q^c) : |x| = 1\}, \\ \Gamma^c(Q) \approx \mathbf{R}^+ \times \Delta(Q), & \Delta(Q) = \Delta(Q^c) \cap \Gamma^c(Q). \end{cases}$$

$\gamma = \delta \circ p$, où l'épimorphisme $\delta : \Delta(Q^c) \rightarrow O(Q^c)$ est la restriction de γ et p est la deuxième projection $\Gamma(Q^c) \rightarrow \Delta(Q^c)$. $\gamma : \Gamma^c(Q) \rightarrow O(Q)$ a une expression analogue, l'épimorphisme $\delta : \Delta(Q) \rightarrow O(Q)$ étant induit par $\delta : \Delta(Q^c) \rightarrow O(Q^c)$. Le noyau de δ est, dans les deux cas, le groupe multiplicatif T des nombres complexes unimodulaires.

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION 2.4. — *On a les isomorphismes de groupes :*

$$(2.10) \quad \begin{cases} \Delta(Q^c) \approx (T \times \text{pin } Q^c)/\mathbf{Z}_2, & \text{pin } Q^c = \{x \in \Gamma(Q^c) : x\beta(x) = 1\}, \\ \Delta(Q) \approx (T \times \text{pin } Q)/\mathbf{Z}_2, & \text{pin } Q = \text{pin } Q^c \cap \Gamma^c(Q), \end{cases}$$

où \mathbf{Z}_2 est engendré par $(-1, -1)$. Si $[c, x]$ est la classe dans $\Delta(Q^c)$ d'un élément quelconque $(c, x) \in T \times \text{pin } Q^c$, alors $\delta : [c, x] \rightarrow \lambda(x)$, où l'épimorphisme $\lambda : \text{pin } Q^c \rightarrow O(Q^c)$ est la restriction de γ . L'homomorphisme $\delta : \Delta(Q) \rightarrow O(Q)$ a une expression analogue, l'épimorphisme $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow O(Q)$ étant induit par $\lambda : \text{pin } Q^c \rightarrow O(Q^c)$ et vérifiant le diagramme commutatif

$$(2.11) \quad \begin{array}{ccc} \text{pin } Q & \xrightarrow{\lambda} & O(Q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{pin } (-Q) & \xrightarrow{\lambda} & O(-Q) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes. $\text{Ker } \lambda = \mathbf{Z}_2$ dans les deux cas. Les groupes $\text{pin } Q^c$ et $\Delta(Q^c)$ sont engendrés par

$$E' = \{x \in E^c : Q^c(x) = 1\} \text{ resp. } T \times E'.$$

Démonstration. — Soit $x = cx'$ avec $x \in \Delta(Q^c)$ et $c \in \mathbf{C}^*$. Si $x' \in \text{pin } Q^c$, $|c| = 1$ et $c^2 = x\beta(x)$, donc les c et x' sont déterminés au signe près par x , ce qui implique les isomorphismes (2.10).

L'expression indiquée pour δ , ainsi que la relation $\text{Ker } \lambda = \mathbf{Z}_2$, sont immédiates.

Pour établir la commutativité de (2.11), remarquons que (E^c, Q^c) est le complexifié de l'espace quadratique réel $(\sqrt{-1} E, -Q)$. On peut alors identifier $O(-Q)$ et $\text{pin}(-Q)$ avec $O(Q)$ resp. $\text{pin} Q$ et les deux flèches horizontales de (2.11) coïncideront.

Soient Λ le sous-groupe de $\text{pin} Q^c$ constitué par les éléments :

$$(2.12) \quad x = x_1 x_2 \dots x_h; x_1, \dots, x_h \in E'$$

et λ' la restriction de λ à Λ . Chaque élément $y \in \Gamma(Q^c)$ est donné, d'après la proposition 2.1, par :

$$(2.13) \quad y = y_1 y_2 \dots y_h; y_1, \dots, y_h \in E^c - \text{Ker } Q^c.$$

Chaque y_i de (2.13) définit, au signe près, un $x_i \in E'$ collinéaire à y_i , donc il existe x de la forme (2.12) collinéaire à y . D'autre part, -1 est donné par (2.12) avec $h = 2$ et $x_1 = -x_2$. Ainsi, $\text{Im } \lambda' = O(Q^c)$ et $\text{Ker } \lambda' = \mathbf{Z}_2$, donc $\Lambda = \text{pin } Q^c$. Q. E. D.

L'espace E définit l'application suivante $C(Q^c) \rightarrow C(Q^c)$, notée par $x \rightarrow \bar{x}$. Chaque élément $x \in C(Q^c)$ a une décomposition unique $x = x' + x''$ avec $x' \in C(Q)$, $x'' \in \sqrt{-1} C(Q)$ et posons $\bar{x} = x' - x''$. Considérons aussi l'application

$$(2.14) \quad C(Q^c) \rightarrow C(Q^c), \quad x \rightarrow x^+ = \beta(\bar{x})$$

et le sous-groupe unitaire de $C(Q^c)^*$

$$(2.15) \quad U = \{ x \in C(Q^c) : x x^+ = 1 \}.$$

Soient les groupes :

$$(2.16) \quad \begin{cases} \text{pin}_+ Q = \text{pin } Q \cap U, & \text{spin } Q = \text{pin } Q \cap C(Q^c)^+, \\ \text{spin}_+ Q = \text{pin}_+ Q \cap \text{spin } Q, & \Delta_+(Q) = \Delta(Q) \cap U, \end{cases}$$

$$(2.17) \quad \begin{cases} O_+(Q) = \lambda(\text{pin } Q) = \delta(\Delta_+(Q)), & \text{SO}(Q) = \lambda(\text{spin } Q), \\ \text{SO}_+(Q) = \lambda(\text{spin}_+ Q) = \text{SO}(Q) \cap O_+(Q). \end{cases}$$

On peut décrire d'une manière directe le groupe $\text{pin } Q$, ainsi que les groupes (2.16), par la

PROPOSITION 2.5. — *Le groupe $\text{pin } Q$ est constitué par les éléments (2.12) avec $x_i^+ = \pm x_i$ ($i = 1, \dots, h$), donc $s_{x_i} \in O(Q)$. Les sous groupes $\text{spin } Q$, $\text{pin}_+ Q$ correspondent aux cas où $\lambda(x)$ contient un nombre pair de symétries, resp. un nombre pair de symétries négatives. $\Delta_+(Q)$ est isomorphe à $(T \times \text{pin}_+ Q)/\mathbf{Z}_2$.*

Démonstration. — Si $x \in \text{pin } Q$, $\lambda(x) = s_{y_1} \dots s_{y_h}$ avec $y_i \in E$, $Q(y_i) = \pm 1$ et on peut prendre dans (2.12) :

$$(2.18) \quad x_i = \pm y_i [Q(y_i) = 1], \quad x_i = \pm \sqrt{-1} y_i [Q(y_i) = -1].$$

Donc $xx^+ = 1$ ou $xx^+ = -1$ selon qu'on a un nombre pair resp. impair de y_i avec $Q(y_i) = -1$. On a aussi $\det \lambda(x) = (-1)^h$. L'isomorphisme entre $\Delta_+(Q)$ et $(T \times \text{pin}_+ Q)/\mathbb{Z}_2$ résulte de (2.10). Q. E. D.

Remarque. — D'après la proposition 2.5, $\text{pin } Q \subset C(Q)^*$ si et seulement si Q est définie positive, $\text{spin } Q \subset C(Q)^*$ si et seulement si Q est définie et $\text{pin}_+ Q$ est toujours un sous-groupe de $C(Q)^*$. Si Q est définie positive, $O_+(Q) = O(Q)$ et si Q est définie négative, $O_+(Q) = SO(Q)$; donc $SO_+(Q) = SO(Q)$ pour Q définie. Si $n = 4$ et si Q est de signature $+++ -$, $O_+(Q)$ est le groupe de Lorentz orthochrone.

Remarque. — $SO_+(Q)$ est la composante connexe de $O(Q)$ qui contient 1 et λ réalise, pour $n > 2$, le revêtement universel de $SO_+(Q)$ par $\text{spin}_+ Q$. $O(Q)$ a deux ou quatre composantes connexes et $O_+(Q)$ a une ou deux.

PROPOSITION 2.6. — Si $n \equiv 1 \pmod{4}$,

$$(2.19) \quad \begin{cases} \text{pin } Q \approx \mathbb{Z}_2 \times \text{spin } Q, & O(Q) \approx \mathbb{Z}_2 \times SO(Q), \\ \lambda(x, y) = (x, \lambda(y)), & (x, y) \in \text{pin } Q. \end{cases}$$

Si $n \equiv 0 \pmod{4}$ et si Q est de signature $(m, n-m)^{(4)}$ avec m impair,

$$(2.20) \quad \begin{cases} \text{spin } Q \approx \mathbb{Z}_2 \times \text{spin}_+ Q, & SO(Q) \approx \mathbb{Z}_2 \times SO_+(Q), \\ \lambda(x, y) = (x, \lambda(y)), & (x, y) \in \text{spin } Q. \end{cases}$$

Démonstration. — En partant d'une base orthonormée $\{e_i\}$ de E^c , on déduit de (2.3) :

$$(2.21) \quad e^2 = (-1)^{m(n-1)/2}, \quad e = e_1 e_2 \dots e_n.$$

D'après les propositions 2.1 et 2.4,

$$(2.22) \quad e \in \text{pin } Q, \quad \lambda(e) = -1 \in O(Q).$$

Si n est impair, e est central dans $\text{pin } Q$ et $O(Q) \approx \mathbb{Z}_2 \times SO(Q)$. Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, (2.21) s'écrit $e^2 = 1$, donc $\text{pin } Q \approx \mathbb{Z}_2 \times \text{spin } Q$. Alors l'expression (2.19) de $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow O(Q)$ résulte de (2.22).

Si n est pair, e est central dans $\text{spin } Q$. Si de plus m est impair, $e \notin \text{spin}_+ Q$ [voir la proposition 2.5 et (2.16)], donc $SO(Q) \approx \mathbb{Z}_2 \times SO_+(Q)$. Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, $e^2 = 1$. Q. E. D.

PROPOSITION 2.7. — Si $n = 1$, $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow O(Q)$ est la projection de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sur \mathbb{Z}_2 . Si $n = 2$, $\lambda : \text{spin } Q \rightarrow SO(Q)$ est le revêtement d'ordre deux $t : T \rightarrow T$ ou l'application $z \times 1 : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^+$ avec z l'épimorphisme de groupes cycliques $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, selon que Q est définie ou

⁽⁴⁾ Notons par m le nombre des carrés positifs de Q .

non. Si $n \leq 2$, $\delta : \Delta(Q) \rightarrow O(Q)$ est la deuxième projection $T \times O(Q) \rightarrow O(Q)$.

La démonstration est immédiate, par des calculs directs. On peut expliciter sans difficulté l'homomorphisme $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow O(Q)$ pour $n = 2$.

3. LES SC-STRUCTURES COMME EXTENSIONS DE FIBRÉS PRINCIPAUX

Soient X un espace topologique (ou une variété différentiable réelle d'une certaine classe et de dimension finie), G un groupe topologique (resp. un groupe de Lie réel) et $\mathcal{P}(X, G)$ l'ensemble des fibrés principaux topologiques (resp. différentiables) de base X et de groupe structural G . Si X' est un espace topologique quelconque (ou une variété différentiable), $X \rightarrow X'$ désignera une application continue (resp. différentiable). Si G' est un groupe topologique quelconque (ou un groupe de Lie), $G \rightarrow G'$ désignera un homomorphisme de groupes topologiques (resp. de groupes de Lie).

Dans l'ensemble $\mathcal{P}(X, G)$ on introduit la relation d'équivalence \approx donnée par l'isomorphisme de fibrés principaux. Autrement dit, deux fibrés de $\mathcal{P}(X, G)$ sont équivalents si et seulement s'ils admettent un système commun de fonctions de transition.

Soit une action $G \times F \rightarrow F$, notée par $(u, v) \rightarrow uv$. Si l'on a un fibré $P \in \mathcal{P}(X, G)$, désignons par PF son fibré associé de fibre type F , par PF_x , $x \in X$, la fibre au-dessus de x , par $(y, v) \rightarrow yv$ l'application canonique $P \times F \rightarrow PF$ et par $\pi : P \rightarrow X$, $\pi' : PF \rightarrow X$ les applications de projection. Si cette action coïncide avec le produit de G , on obtient $PG \approx P$.

Chaque famille de sections locales $\sigma_a : U_a \rightarrow \pi^{-1}(U_a)$, où $\{U_a\}$ est un recouvrement ouvert de X , définit les fonctions de transition suivantes de P

$$(3.1) \quad s_{ab} : U_a \cap U_b \rightarrow G, \quad \sigma_b(x) = \sigma_a(x)s_{ab}(x),$$

ainsi que les fonctions de trivialisations suivantes de PF

$$(3.2) \quad s_a : U_a \times F \rightarrow \pi'^{-1}(U_a), \quad s_a(x, v) = \sigma_a(x)v.$$

On a donc les bijections entre les fibres

$$(3.3) \quad s_{a,x} : F \rightarrow \pi'^{-1}(x), \quad s_{a,x}(v) = s_a(x, v), \quad x \in U_a,$$

avec

$$(3.4) \quad s_{b,x}^{-1} \circ s_{a,x}(v) = s_{ba}(x)v, \quad v \in F, \quad x \in U_a \cap U_b.$$

Chaque homomorphisme $g : G \rightarrow G'$ induit l'action $G \times G' \rightarrow G'$ donnée par $(u, v) \rightarrow g(u)v$. Alors PG' est muni d'une structure naturelle de fibré principal $gP \in \mathcal{P}(X, G')$ et l'application $y \rightarrow y1$, $1 \in G'$, est un homomorphisme $g_* : P \rightarrow gP$ qui correspond à l'homomorphisme g et

qui se projette sur l'application identique de X . On a pour gP les sections locales et les fonctions de transition suivantes :

$$(3.5) \quad \sigma'_a = g_* \circ \sigma_a, \quad s'_{ab} = g \circ s_{ab}.$$

Le fibré P est une *extension* de $P' \in \mathcal{P}(X, G')$ associée à g si $gP \approx P'$. En identifiant gP à P' , l'homomorphisme canonique $P \rightarrow P'$ sera désigné aussi par g_* .

Il existe, pour chaque fibré vectoriel réel ζ de base X et de fibre type E ($\dim E = n < \infty$), un fibré $P' \in \mathcal{P}(X, GL(E))$, déterminé à un isomorphisme près, tel que ζ s'identifie à $P'E$. De plus, chaque forme quadratique q , non dégénérée et de signature $(m, n-m)$, sur ζ est caractérisée par une réduction $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$ de P' , où (E, Q) est un espace quadratique réel de la même signature $(m, n-m)$. Si l'on désigne par $q_x, x \in X$, la restriction de q à la fibre PE_x , les bijections (3.3) constituent, pour $F = E$, des isométries relatives à (Q, q_x) .

Dans la suite, chaque couple de la forme (ζ, q) sera représenté par un fibré $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$. Le fibré de Clifford $C(\zeta, q)$ sera donné par le fibré algébrique $PC(Q)$ correspondant à l'action

$$(3.6) \quad O(Q) \times C(Q) \rightarrow C(Q), \quad (u, v) \rightarrow u^e(v),$$

où $u^e \in \text{Aut } C(Q)$ est l'extension de $u \in O(Q)$ définie dans la section 2. Le fibré de Clifford $C(\zeta^c, q^c)$, avec (ζ^c, q^c) le complexifié de (ζ, q) , sera donné par $PC(Q^c)$.

Soit un fibré vectoriel réel ou complexe $\eta = P''F, P'' \in \mathcal{P}(X, GL(F))$. Le fibré $\text{End } \eta$ sera représenté par le fibré algébrique $P''\text{End } F$ correspondant à l'action

$$(3.7) \quad GL(F) \times \text{End } F \rightarrow \text{End } F, \quad (u, v) \rightarrow uvu^{-1}.$$

Nous allons introduire les SC-structures [7], en utilisant le langage des fibrés associés.

DÉFINITION. — Une SC-structure d'un fibré $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$ est un épimorphisme de fibrés algébriques $(^5) h : PC(Q^c) \rightarrow S \text{ End } F$, où F est un espace vectoriel complexe de dimension $2^{[n/2]}$ et $S \in \mathcal{P}(X, GL(F))$. Si X est un espace pseudoriemannien et si P est le fibré $O(X)$ des repères ortho-normés de X , alors h est dite une SC-structure tangente à X .

PROPOSITION 3.1. — Soit une SC-structure $h : PC(Q^c) \rightarrow S \text{ End } F$ de $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$. Si n est pair, h est un isomorphisme. Si n est impair, l'existence de h équivaut à l'existence de l'isomorphisme

$$(3.8) \quad k : PC(Q^c) \rightarrow S(\text{End } F \oplus \text{End } F), \quad k_x = h_x \oplus (h_x \circ \alpha_x), \quad x \in X,$$

où α_x est l'involution principale de la fibre $PC(Q^c)_x$.

(⁵) Supposons qu'un tel homomorphisme se projette toujours sur l'application identique de l'espace de base.

Démonstration. — Rappelons que l'algèbre de Clifford $C(Q^c)$ admet une représentation linéaire complexe irréductible ρ dans un espace F , $\dim F = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Si n est pair, ρ est unique à une équivalence près et elle réalise un isomorphisme entre $C(Q^c)$ et $\text{End } F$. Si n est impair, on a deux représentations irréductibles non équivalentes ρ , $\rho \circ \alpha$ et $\rho \oplus (\rho \circ \alpha)$ réalise un isomorphisme entre $C(Q^c)$ et $\text{End } F \oplus \text{End } F$.

La proposition 3.1 est immédiate, en appliquant ces considérations à chaque fibre $PC(Q^c)_x$. Q. E. D.

DÉFINITION. — Une *structure spinorielle* d'un fibré $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$ est une extension Σ de P associée à l'homomorphisme $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow O(Q)$. Si X est un espace pseudoriemannien et si $P = O(X)$, alors Σ est dite une *structure spinorielle tangente* à X .

Remarque. — Soit \mathcal{S} l'ensemble des structures spinorielles de P . Si $\mathcal{S} \neq \emptyset$, alors \mathcal{S}/\approx est en bijection avec le groupe de cohomologie de Čech $H^1(X, \mathbf{Z}_2)$, car $\text{pin } Q \in \mathcal{P}(O(Q), \mathbf{Z}_2)$.

Remarque. — L'existence d'une structure spinorielle Σ de P équivaut à l'existence d'une extension Σ^c du complexifié $P^c \in \mathcal{P}(X, O(Q^c))$ de P , associée à l'homomorphisme $\lambda : \text{pin } Q^c \rightarrow O(Q^c)$. En effet, s'il existe Σ , posons $\Sigma^c = i\Sigma$ avec $i : \text{pin } Q \rightarrow \text{pin } Q^c$. S'il existe Σ^c , posons $\Sigma = \lambda_*^{-1}(P)$, $\lambda_* : \Sigma^c \rightarrow P^c$.

Remarque. — Une structure spinorielle de $P \in \mathcal{P}(X, O_+(Q))$ est donnée par une extension Σ_+ de P associée à $\lambda : \text{pin}_+ Q \rightarrow O_+(Q)$. On a une propriété analogue pour les groupes $SO(Q)$ et $SO_+(Q)$.

Remarque. — D'après la proposition 2.7, il existe toujours une structure spinorielle dans le cas $n = 1$. Une structure spinorielle de $P \in \mathcal{P}(X, SO(Q))$ s'exprime, dans le cas $n = 2$, par une extension associée à $t : T \rightarrow T$ ou $z : \mathbf{Z}_4 \rightarrow \mathbf{Z}_2$.

Pour exprimer les SC-structures à l'aide des extensions de fibrés principaux, nous allons réduire d'abord l'étude du cas où la dimension est impaire au cas d'une dimension paire par la

PROPOSITION 3.2. — Soit l'espace quadratique $(\tilde{E}, \tilde{Q}) \supset (E, Q)$ ⁽⁶⁾ où $\dim \tilde{E} = n + 1$ et n est impair. Le fibré $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$ a une SC-structure si et seulement si iP , $i : O(Q) \rightarrow O(\tilde{Q})$, a une SC-structure.

Démonstration. — Supposons qu'il existe une SC-structure

$$h : PC(Q^c) \rightarrow S \text{ End } F,$$

⁽⁶⁾ Cette inclusion a la signification naturelle suivante : $E \subset \tilde{E}$, Q étant la restriction de \tilde{Q} à E .

$S \in \mathcal{P}(X, \text{GL}(F))$, de P , donc un isomorphisme (3.8). Soit $e_0 \in \tilde{E}^c$ orthogonal à E^c et normé relatif à \tilde{Q}^c . Le vecteur e_0 étant invariant par rapport à $\text{O}(Q)$, on peut choisir une famille d'isomorphismes de la forme (3.3), qui étend e_0 à une section de $PC(\tilde{Q}^c)$. D'une manière analogue, la matrice

$$(3.9) \quad e'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{End } \tilde{F}, \quad \tilde{F} = F \oplus F,$$

définit une section de $S \text{ End } \tilde{F}$. Alors les homomorphismes

$$(3.10) \quad \tilde{h}_x : PC(\tilde{Q}^c)_x \rightarrow S \text{ End } \tilde{F}_x, \quad x \in X, \quad y \rightarrow k_x(y) (y \in PE_x^c), \quad e_0 \rightarrow e'_0,$$

constituent une SC-structure de iP .

Supposons maintenant qu'on a une SC-structure $\tilde{h} : PC(\tilde{Q}^c) \rightarrow \tilde{S} \text{ End } \tilde{F}$, $\tilde{S} \in \mathcal{P}(X, \text{GL}(\tilde{F}))$, de iP . Chaque isomorphisme \tilde{h}_x , $x \in X$, induit un isomorphisme

$$(3.11) \quad k_x : PC(Q^c)_x \rightarrow \text{End } F'_x \oplus \text{End } F''_x, \quad \dim F'_x = \dim F''_x = \frac{1}{2} \dim \tilde{F}.$$

D'autre part, les F'_x constituent un fibré vectoriel $S'F'$ avec $S' \in \mathcal{P}(X, \text{GL}(F'))$ et $\text{End}(S'F') = S' \text{ End } F'$. Alors les homomorphismes $h_x = k_x \circ p_x$, où p_x est la projection $\text{End } F'_x \oplus \text{End } F''_x \rightarrow \text{End } F'_x$, définissent une SC-structure de P . Q. E. D.

Remarque. — Une variante de la proposition 3.2 est donnée dans [7].

THÉORÈME 3.3. — *Le fibré $P \in \mathcal{P}(X, \text{O}(Q))$ a une SC-structure $h : PC(Q^c) \rightarrow S \text{ End } F$, $S \in \mathcal{P}(X, \text{GL}(F))$, si et seulement s'il existe une extension Σ de P associée à l'homomorphisme $\delta : \Delta(Q) \rightarrow \text{O}(Q)$.*

Démonstration. — Nous allons établir d'abord les deux propriétés suivantes :

(i) si n est pair, l'existence de h équivaut à l'existence d'une extension Σ' de iP , $i : \text{O}(Q) \rightarrow \text{O}(Q^c)$, associée à l'homomorphisme $\gamma' : \Gamma(Q^c) \rightarrow \text{O}(Q^c)$ (voir la proposition 2.2);

(ii) si n est pair, l'existence de Σ' équivaut à l'existence de Σ .

Pour démontrer (i), supposons d'abord qu'il existe Σ' et désignons par $\gamma'_* : \Sigma' \rightarrow iP$ l'homomorphisme d'extension. La représentation $\rho : C(Q^c) \rightarrow \text{End } F$ étant un isomorphisme pour n pair, nous allons identifier $\Gamma(Q^c)$ à un sous-groupe de $\text{GL}(F)$. Alors l'application

$$(3.12) \quad yv \rightarrow \gamma'_*(y)\rho^{-1}(v), \quad y \in \Sigma', \quad v \in \text{End } F,$$

définit un isomorphisme $h' : \Sigma' \text{ End } F \rightarrow PC(Q^c)$. En effet, si $y'v' = yv$, $y' \in \Sigma'$, $v' \in \text{End } F$, alors

$$(3.13) \quad y' = yu, \quad v' = u^{-1}vu, \quad u \in \Gamma(Q^c),$$

car l'action de $\Gamma(Q^c)$ sur $\text{End } F$ est de la forme (3.7). On déduit de (2.1) et de la proposition 2.2 :

$$(3.14) \quad \gamma'_*(y')\rho^{-1}(v') = \gamma'_*(y)\gamma'(u)(\omega'(u^{-1})\rho^{-1}(v)) = \gamma'_*(y)\rho^{-1}(v),$$

car l'action de $O(Q^c)$ sur $C(Q^c)$ est de la forme (3.6). Ainsi, on peut prendre $h^{-1} = h'$ avec $S = i\Sigma'$, $i : \Gamma(Q^c) \rightarrow \text{GL}(F)$.

En supposant qu'il existe h , nous allons identifier les fibrés algébriques $PC(Q^c)$, $S \text{ End } F$ par h et leurs fibres type $C(Q^c)$, $\text{End } F$ par ρ . Associons aux sections locales $\sigma'_a : U_a \rightarrow P$, $\sigma''_a : U_a \rightarrow S$, où $\{U_a\}$ est un recouvrement ouvert de X , les fonctions de la forme (3.2) suivantes :

$$(3.15) \quad s'_a(x, v) = \sigma'_a(x)v, \quad s''_a(x, v) = \sigma''_a(x)v, \quad x \in U_a, \quad v \in \text{End } F,$$

qui définissent les applications

$$(3.16) \quad t_a : U_a \rightarrow \text{Aut End } F, \quad s'_{a,x}(v) = s''_{a,x}(t_a(x)v).$$

D'autre part, le groupe $\text{SL}(F)$ admet une structure naturelle

$$(3.17) \quad \text{SL}(F) \in \mathcal{P}(\text{Aut End } F, \mathbf{Z}_N), \quad N = \dim F,$$

donc on peut construire, par un raffinement de $\{U_a\}$, les applications

$$(3.18) \quad t'_a : U_a \rightarrow \text{SL}(F), \quad t'_a(x)v = t'_a(x)vt'_a(x)^{-1}, \quad x \in U_a, \quad v \in \text{End } F.$$

Il résulte de (3.15), (3.16) et (3.18) que les fonctions de trivialisations de $S \text{ End } F$, données par les sections locales

$$(3.19) \quad \sigma_a = \sigma''_a t'_a : U_a \rightarrow S,$$

coïncident avec les s'_a . Alors, les fonctions de transition s_{ab} , s'_{ab} des fibrés S , P , considérées par rapport aux sections σ_a resp. σ'_a , satisfont, d'après (3.4), (3.6) et (3.7), aux conditions

$$(3.20) \quad s'_{ab}(x)^e v = s_{ab}(x) v s_{ba}(x), \quad x \in U_a \cap U_b, \quad v \in \text{End } F.$$

Les relations (2.1) et (3.20) nous montrent que E^c est invariant par rapport à $\omega'(s_{ab}(x))$, donc on a d'après la proposition 2.2 :

$$(3.21) \quad s_{ab} : U_a \cap U_b \rightarrow \Gamma(Q^c), \quad s'_{ab} = \gamma' \circ s_{ab}.$$

Le fibré S admet, en vertu de (3.21), une réduction Σ' de groupe structural $\Gamma(Q^c)$, qui est une extension de iP associée à γ' .

Pour démontrer (ii), remarquons d'abord que l'existence de Σ' équivaut, en vertu des propositions 2.2 et 2.3, à l'existence d'une extension Σ'' de P associée à $\gamma : \Gamma^c(Q) \rightarrow O(Q)$. Les deux extensions Σ et Σ'' sont équivalentes. En effet, s'il existe Σ posons $\Sigma'' = i\Sigma$ avec $i : \Delta(Q) \rightarrow \Gamma^c(Q)$. S'il existe Σ'' posons $\Sigma = p\Sigma''$ avec p la projection $\Gamma^c(Q) \rightarrow \Delta(Q)$, car on a :

$$(3.22) \quad \delta_* : \Sigma \rightarrow \delta\Sigma, \quad \delta\Sigma \approx \delta \circ p\Sigma'' \approx \gamma\Sigma'' \approx P.$$

Le théorème 3.3 est, pour n pair, une conséquence immédiate de (i) et

de (ii). Le cas où n est impair se réduit au cas de la dimension paire, en vertu de la proposition 3.2 et de la propriété évidente suivante : l'homomorphisme $\delta : \Delta(Q) \rightarrow O(Q)$ est induit par $\delta : \Delta(\tilde{Q}) \rightarrow O(\tilde{Q})$. Q. E. D.

Remarque. — Dans la suite, une SC-structure de $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$ sera une extension de P associée à $\delta : \Delta(Q) \rightarrow O(Q)$. Si $P \in \mathcal{P}(X, O_+(Q))$, une telle structure sera une extension de P associée à $\delta : \Delta_+(Q) \rightarrow O_+(Q)$.

Remarque. — Soit \mathcal{S}' l'ensemble des SC-structures de $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$. Si $\mathcal{S}' \neq \emptyset$, alors \mathcal{S}'/\approx est en bijection avec le groupe de cohomologie $H^1(X, T)$ du faisceau correspondant des germes de fonctions (continues ou différentiables).

Remarque. — Si P a une structure spinorielle, P admet aussi, en vertu de la proposition 2.4, une SC-structure.

Remarque. — D'après la proposition 2.7, il existe toujours une SC-structure dans le cas $n \leq 2$.

4. L'INDÉPENDANCE PAR RAPPORT AU GROUPE STRUCTURAL

En reprenant les notations de la section 2, rappelons d'abord les notations classiques suivantes, qui correspondent au cas où Q est définie :

$$(4.1) \quad O(n) = O(Q), \quad SO(n) = SO(Q), \quad \text{Spin}(n) = \text{spin } Q.$$

Le groupe fondamental du sous-groupe connexe maximal $GL_+(E)$ de $GL(E)$ est \mathbf{Z}_2 ; donc l'homomorphisme de revêtement universel $\mu : \text{spin } E \rightarrow GL_+(E)$ est d'ordre deux. Pour avoir la construction topologique de μ , désignons par $[x_t]$ la classe d'homotopie d'un arc quelconque x_t , $t \in [0, 1]$, joignant dans $GL_+(E)$ les points 1 et x . Alors $\text{spin } E$ est constitué par toutes ces classes d'homotopie, x parcourant $GL_+(E)$ et $\mu([x_t]) = x$ avec la multiplication

$$(4.2) \quad [x_t][y_t] = [x_t y_t], \quad x_t, y_t \in GL_+(E), \quad t \in [0, 1], \quad x_0 = y_0 = 1.$$

En choisissant une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E , orthonormée par rapport à une certaine forme quadratique définie, désignons par $T(n)$ le groupe des transformations linéaires triangulaires relatives à $\{e_i\}$, dont les coefficients diagonaux sont positifs. Remarquons que le processus d'orthonormalisation de Gram — Schmidt conduit à la

PROPOSITION 4.1. — *Toute transformation $x \in GL(E)$ admet la décomposition unique*

$$(4.3) \quad x = x'x'', \quad x' \in O(n), \quad x'' \in T(n),$$

les deux projections

$$(4.4) \quad p' : GL(E) \rightarrow O(n), \quad p'' : GL(E) \rightarrow T(n), \quad p'(x) = x', \quad p''(x) = x''$$

étant des applications analytiques ⁽⁷⁾.

Une conséquence immédiate de cette propriété est la construction bien connue de μ en partant de $\lambda : Spin(n) \rightarrow SO(n)$. En effet, si l'on identifie la variété différentiable $GL_+(E)$ à $SO(n) \times T(n)$, son application de revêtement universel est

$$(4.5) \quad \mu : Spin(n) \times T(n) \rightarrow SO(n) \times T(n), \quad \mu(y, x'') = (\lambda(y), x''),$$

car $T(n)$ est difféomorphe à \mathbf{R}^k , $k = n(n+1)/2$. En utilisant la multiplication canonique dans $GL_+(E)$, $Spin(n) \times T(n)$ sera muni de la multiplication (4.2), qui ne coïncide pas avec celle de produit direct. Ainsi, l'application (4.5) devient un homomorphisme $spin E \rightarrow GL_+(E)$.

En revenant au cas général d'un espace quadratique (E, Q) où $\dim E = n$ et Q n'est pas nécessairement définie, désignons par $\{x_t\}$ la classe d'homotopie dans $SO_+(Q)$ d'un arc quelconque x_t de $SO_+(Q)$. On a, pour $n > 2$, l'homomorphisme naturel

$$(4.6) \quad v : spin_+ Q \rightarrow spin E, \quad v(\{x_t\}) = [x_t].$$

PROPOSITION 4.2. — *Le diagramme*

$$(4.7) \quad \begin{array}{ccc} spin_+ Q & \xrightarrow{v} & spin E \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \mu \\ SO_+(Q) & \xrightarrow{i} & GL_+(E) \end{array} \quad (n > 2)$$

est commutatif avec v injectif. Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, les deux éléments $e, -e$ de $\mu^{-1}(-1)$ sont centraux dans $spin E$ et $e^2 = 1$.

Démonstration. — La commutativité de (4.7) est immédiate. Nous allons montrer que v est injectif.

Choisissons une forme quadratique définie Q' sur E telle que les restrictions de Q et de Q' à un certain plan Π bidimensionnel de E soient égales et les deux espaces orthogonaux à Π , correspondants aux formes Q et Q' , coïncident.

Soient $r_t \in SO_+(Q) \cap SO(n)$ la rotation d'angle $2\pi t$ dans le plan Π et $v_0, v_t \in \Pi$ deux vecteurs normés qui définissent un angle égal à $2\pi t$. En utilisant la construction de λ indiquée dans la section 2, on voit que $r_t = \lambda(v_{t/2}v_0)$ et donc l'arc fermé r_t est la projection par λ d'un arc de $spin_+ Q$ dont les extrémités sont 1 et -1 . Ainsi, r_t n'est pas homotope à un point dans $SO_+(Q)$ ou dans $SO(n)$.

⁽⁷⁾ Elles ne sont pas des homomorphismes.

En supposant $\text{Ker } \nu = \mathbf{Z}_2$, donc $[r_i] = 1$, désignons par h l'application qui réalise dans $\text{GL}_+(E)$ l'homotopie entre r_i et 1. Alors r_i serait homotope dans $\text{SO}(n)$ à 1 par $p' \circ h$, avec p' donnée par (4.4), ce qui représente une contradiction. Alors $\text{Ker } \nu = 1$.

D'après (2.21) et (2.22), si $n \equiv 0 \pmod{4}$, e est central dans $\text{SO}(n)$ et $e^2 = 1$. Désignons par e_i un arc dont la classe d'homotopie dans $\text{SO}(n)$ coïncide avec e .

Soit un élément quelconque $[x_i]$ de $\text{spin } E$, où x_i est un arc joignant les points 1 et x . Alors les arcs $e_i p'(x_i)$ et $p'(x_i) e_i$ sont homotopes. D'autre part, $e_i p''(x_i)$ et $p''(x_i) e_i$ sont homotopes à e_i , car $p''(x_i)$ est homotope à 1. Donc e est central dans $\text{spin } E$. Q. E. D.

Remarque. — La proposition 4.2 a été donnée en partie dans [13].

Remarque. — Dans la suite, le groupe $\text{spin}_+ Q$ sera identifié à son image par ν , donc $\lambda : \text{spin}_+ Q \rightarrow \text{SO}_+(Q)$ sera considéré comme restriction de $\mu : \text{spin } E \rightarrow \text{GL}_+(E)$.

PROPOSITION 4.3. — Soient l'espace quadratique $(E', Q') \supset (E, Q)$ et l'inclusion $i : \text{GL}(E) \rightarrow \text{GL}(E')$ donnée par la décomposition $E' = E \oplus E''$ avec E'' orthogonal sur E par rapport à Q' . Alors $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow \text{O}(Q)$ et $\mu : \text{spin } E \rightarrow \text{GL}_+(E)$ sont les restrictions des homomorphismes $\lambda : \text{pin } Q' \rightarrow \text{O}(Q')$ resp. $\mu : \text{spin } E' \rightarrow \text{GL}_+(E')$.

La démonstration est immédiate.

THÉORÈME 4.4. — Étant donné un espace vectoriel réel E de dimension finie $n > 2$, il existe un homomorphisme de groupes $\mu : \text{pin } E \rightarrow \text{GL}(E)$ tel que :

(i) μ réalise le revêtement universel de $\text{GL}_+(E)$ par $\text{spin } E$;

(ii) $\text{pin } Q \subset \text{pin } E$ et $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow \text{O}(Q)$ soit la restriction de μ à $\text{pin } Q$, pour toute forme quadratique non dégénérée Q sur E .

Démonstration. — Nous allons établir la propriété suivante : $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow \text{SO}(Q)$ est la restriction de $\mu : \text{spin } E \rightarrow \text{GL}_+(E)$.

En effet, soit un espace quadratique $(E', Q') \supset (E, Q)$, où la dimension n' de E' est donnée par :

$$(4.8) \quad \begin{cases} n' = n + 4 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, & n' = n + 3 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ n' = n + 2 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}, & n' = n + 1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

et la signature de Q' est $(m, n' - m)$ avec m impair. En choisissant $e \in \mu^{-1}(-1)$, $-1 \in \text{GL}_+(E')$, on peut identifier, d'après les propositions 2.6 et 4.2, le groupe $\text{spin } Q'$ à un sous-groupe de $\text{spin } E'$ par

$$(4.9) \quad (-1, x) \rightarrow ex, \quad (-1, x) \in \mathbf{Z}_2 \times \text{spin}_+ Q'$$

et $\lambda : \text{spin } Q' \rightarrow \text{SO}(Q')$ devient ainsi la restriction de

$$\mu : \text{pin } E' \rightarrow \text{GL}_+(E').$$

Alors, la propriété ci-dessus est une conséquence de la proposition 4.3.

Nous allons construire l'homomorphisme $\mu : \text{pin } E \rightarrow \text{GL}(E)$ comme un prolongement de $\mu : \text{pin } E \rightarrow \text{GL}_+(E)$. Soit un espace quadratique $(E'', Q'') \supset (E, Q)$, où la dimension n'' de E'' est donnée par :

$$(4.10) \quad \begin{cases} n'' = n + 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, & n'' = n & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ n'' = n + 3 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}, & n'' = n + 2 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

L'homomorphisme $\mu : \text{pin } E'' \rightarrow \text{GL}(E'')$ donné par

$$(4.11) \quad \text{pin } E'' = \mathbf{Z}_2 \times \text{spin } E'', \quad \mu(x, y) = x\mu(y)$$

constitue, d'après la proposition 2.6, un prolongement de

$$\lambda : \text{pin } Q'' \rightarrow \text{O}(Q'').$$

Alors on peut prendre $\text{pin } E = \mu^{-1}(E)$ et $\mu : \text{pin } E \rightarrow \text{GL}(E)$ la restriction de (4.11). Q. E. D.

COROLLAIRE 4.5. — Soit le fibré $\tilde{P} \in \mathcal{P}(X, \text{GL}(E))$ qui admet les réductions $P \in \mathcal{P}(X, \text{O}(Q))$ et $P' \in \mathcal{P}(X, \text{O}(Q'))$, où Q et Q' sont deux formes quadratiques non dégénérées sur l'espace vectoriel réel E de dimension finie n . Alors P a une structure spinorielle (ou une SC-structure) si et seulement si P' a une structure spinorielle (resp. une SC-structure).

Démonstration. — D'après le théorème 4.4, l'existence d'une structure spinorielle de P équivaut, pour $n > 2$, à l'existence d'une extension de $\tilde{P} \approx iP$, $i : \text{O}(Q) \rightarrow \text{GL}(E)$, associée à $\mu : \text{pin } E \rightarrow \text{GL}(E)$. Le cas $n = 2$ se réduit au cas $n > 2$, à l'aide de la proposition 4.3.

Soit l'homomorphisme

$$(4.12) \quad \delta' : (T \times \text{pin } E)/\mathbf{Z}_2 \rightarrow \text{GL}(E), \quad [c, x] \rightarrow \mu(x),$$

où \mathbf{Z}_2 est engendré par $(-1, -1)$ et $[c, x]$ est la classe mod. \mathbf{Z}_2 de (c, x) . L'existence d'une SC-structure de \tilde{P} équivaut à l'existence d'une extension de \tilde{P} associée à δ' , car cet homomorphisme est, d'après la proposition 2.4, un prolongement de $\delta : \Delta(Q) \rightarrow \text{O}(Q)$. Q. E. D.

5. PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ÉLÉMENTAIRES DES SC-STRUCTURES

Dans cette section nous nous plaçons toujours dans le cas différentiable. Désignons par G_L l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie quelconque G et par $C(P)$ l'ensemble des connexions d'un fibré quelconque $P \in \mathcal{P}(X, G)$. Étant donnée une extension P' de P associée à l'homomorphisme

$g : G' \rightarrow G$, l'homomorphisme canonique $g_* : P' \rightarrow P$ induit une application naturelle $g^* : C(P') \rightarrow C(P)$.

Soient (E, Q) un espace quadratique réel avec $\dim E = n$, (E^c, Q^c) son complexifié et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de E par rapport à Q . On a donc :

$$(5.1) \quad e_i e_j + e_j e_i = 2\varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Comme $\lambda : \text{pin } Q \rightarrow O(Q)$ est un isomorphisme local, $d\lambda$ réalise un isomorphisme entre les algèbres de Lie $\text{pin } Q_L$ et $O(Q)_L$. Rappelons la relation bien connue

$$(5.2) \quad d\lambda^{-1}(A) = \frac{1}{4} A_j^i e_i e^j, \quad A = (A_j^i) \in O(Q)_L, \quad e^i = \varepsilon_i e_i.$$

Étant donnée une structure spinorielle Σ de $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$, chaque point de X a un voisinage ouvert U muni des sections locales

$$(5.3) \quad s : U \rightarrow \Sigma, \quad t : U \rightarrow P, \quad t = \lambda_* \circ s.$$

Une connexion de $C(\Sigma)$ sera dite *connexion spinorielle*; l'application $\lambda^* : C(\Sigma) \rightarrow C(P)$ est bijective. Si l'on a les connexions $\nabla \in C(\Sigma)$ et $\lambda^* \nabla \in C(P)$, dont les 1-formes locales relatives aux sections (5.3) sont respectivement σ et $\tau = d\lambda \circ \sigma$, on déduit de (5.2) :

$$(5.4) \quad \sigma = \frac{1}{4} \tau_j^i e_i e^j, \quad \tau = (\tau_j^i).$$

Un cas particulier important est celui où Σ est une structure spinorielle tangente à l'espace pseudoriemannien X et $\lambda^* \nabla$ est la connexion riemannienne de X .

Introduisons maintenant l'invariant

$$(5.5) \quad \varepsilon(Q) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n,$$

où les ε_i sont donnés par (5.1). L'algèbre $C(Q^c)$ sera identifiée, pour n pair, à $\text{End } F'$ et, pour n impair, à $\text{End } F' \oplus \text{End } F'$, où $\dim F' = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Considérons aussi l'espace des spineurs associé à $C(Q)$

$$(5.6) \quad F = F' \quad (n \text{ pair}), \quad F = F' \oplus F' \quad (n \text{ impair}).$$

D'autre part, $C(Q)^+$ est aussi une algèbre de Clifford correspondante à un espace quadratique de dimension $n - 1$ et alors $F = F^+ \oplus F^-$, $\dim F^+ = \dim F^-$ avec F^+ et F^- invariants par rapport à $C(Q)^+$; si n est pair, cette décomposition de F est unique. D'après [4], F^+ et F^- sont dits les *espaces des semi-spineurs* associés à $C(Q)$.

PROPOSITION 5.1. — Si n est pair, chaque opérateur linéaire de E est autoadjoint par rapport à une forme hermitienne non dégénérée H , unique à un facteur réel non nul près, sur F . H est définie ou neutre selon que Q est définie positive ou non. F^+ et F^- sont orthogonaux ou totalement isotropes

par rapport à H selon que $\varepsilon(Q) = \pm 1$; les restrictions de H à F^\pm sont, pour $\varepsilon(Q) = 1$, en même temps définies ou neutres. Si $n > 2$, $\det v = 1$ quel que soit $v \in E$, $Q(v) = \pm 1$.

Démonstration. — Pour $n = 0$, donc $C(Q) = \mathbf{R}$, la proposition 5.1 est banale. En supposant qu'elle soit vraie pour $n = 2r$, nous allons l'établir pour $n = 2r + 2$.

Introduisons d'abord les matrices de Pauli

$$(5.7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Désignons par $x \rightarrow x^+$ l'adjonction relative à une certaine forme hermitienne non dégénérée H' sur l'espace vectoriel complexe F' , $\dim F' = 2r$. D'après l'hypothèse d'induction, on peut choisir H' et les opérateurs $e'_1, \dots, e'_{2r} \in \text{End } F'$ tels que

$$(5.8) \quad \begin{cases} e'_h e'_k + e'_k e'_h = 2\varepsilon_h \delta_{hk}, & \varepsilon_h = \pm 1, \\ e'_h{}^+ = \varepsilon e'_h, & \varepsilon = \pm 1, \quad h, k = 1, \dots, 2r. \end{cases}$$

On a aussi :

$$(5.9) \quad \begin{cases} e'_{2r+1} e'_h + e'_h e'_{2r+1} = 0, & e'_{2r+1}{}^2 = \varepsilon_{2r+1}, & e'_{2r+1}{}^+ = \varepsilon e'_{2r+1}, \\ e'_{2r+1} = (-1)^{r/2} \varepsilon^{1/2} e'_1 \dots e'_{2r}, & \varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2r} \varepsilon_{2r+1}. \end{cases}$$

En partant de (5.8) et de (5.9), introduisons les opérateurs

$$e_1, \dots, e_n \in \text{End } F, \quad F = F' \oplus F', \quad n = 2r + 2,$$

la forme hermitienne H sur F et les espaces des semi-spineurs F^\pm suivants :

$$(5.10) \quad e_l = A \otimes e'_l, \quad l = 1, \dots, n-1, \quad \varepsilon = \varepsilon_n \varepsilon(Q);$$

$$(5.11) \quad F^\pm = \{ (x, \pm x) \in F : x \in F' \};$$

$$(5.12) \quad \begin{aligned} e_n &= \sqrt{-1} C \otimes 1, & H &= 1 \otimes H' [\varepsilon(Q) = 1, \quad \varepsilon_n = 1], \\ e_n &= C \otimes 1, & H &= B \otimes H' [\varepsilon(Q) = 1, \quad \varepsilon_n = -1], \\ e_n &= C \otimes 1, & H &= A \otimes H' [\varepsilon(Q) = -1, \quad \varepsilon_n = -1]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi (5.1) avec $n = 2r + 2$, les e_i étant autoadjoints par rapport à H . On voit facilement que, si $n > 2$, $\det e_i = 1$. Toute autre vecteur normé v de E appartient à une base orthonormée et alors, par un automorphisme intérieur de $\text{End } F$, on déduit $\det v = 1$. Q. E. D.

Remarque. — La proposition 5.1 a été donnée en partie dans [12].

COROLLAIRE 5.2. — Si n est impair, soit un espace quadratique $(\tilde{E}, \tilde{Q}) \supset (E, Q)$ avec $\dim \tilde{E} = n + 1$. On peut choisir les espaces des semi-spineurs F^\pm de (E, Q) tels qu'ils coïncident avec ceux de (\tilde{E}, \tilde{Q}) . Alors on associe à (E, Q) la forme hermitienne H correspondante, d'après la proposition 5.1, à (\tilde{E}, \tilde{Q}) .

Remarque. — Le choix des F^\pm, H n'est pas unique. Il existe deux possibilités selon que $\varepsilon(\tilde{Q}) = \pm 1$.

COROLLAIRE 5.3. — *L'application (2.14) coïncide (pour n pair, ainsi que pour n impair) avec l'adjonction par rapport à H . Si $x \in \Delta(Q), xx^+ = \pm 1$; si $n > 2$ et si $x \in \text{pin } Q, \det x = 1$. $\Delta_+(Q)$ et $\text{pin}_+ Q$ sont des sous-groupes du groupe unitaire $U(H)$; si $n > 2, \text{pin}_+ Q \subset \text{SU}(H)$.*

COROLLAIRE 5.4. — *Les deux représentations irréductibles canoniques ρ^\pm du groupe $\text{spin } Q$ dans F^\pm , qui sont équivalentes ou non selon que n est impair ou pair, vérifient la condition $\rho^\pm(\text{spin}_+ Q) \subset U(H^\pm)$ pour $\varepsilon(\tilde{Q}) = 1$ resp. $\varepsilon(Q) = 1$, où H^\pm sont les restrictions de H à F^\pm . Le groupe $\delta^{-1}(\text{SO}_+(Q))$ a la même propriété.*

Étant donné une SC-structure Σ de $P \in \mathcal{P}(X, O(Q))$, considérons le fibré $\det \Sigma \in \mathcal{P}(X, T)$ construit à l'aide de la représentation $\det : \Delta(Q) \rightarrow T, x \rightarrow \det x$. Une connexion de $C(\Sigma)$ sera dite SC-connexion. Chaque point de X a un voisinage ouvert U muni des sections locales

$$(5.13) \quad s : U \rightarrow \Sigma, \quad t = \delta_* \circ s : U \rightarrow P, \quad u = \det_* \circ s : U \rightarrow \det \Sigma,$$

où $\delta_* : \Sigma \rightarrow P$ et $\det_* : \Sigma \rightarrow \det \Sigma$.

PROPOSITION 5.5. — *Il existe une bijection entre l'ensemble $C(\Sigma)$ des SC-connexions de Σ et $C(P) \times C(\det \Sigma), \nabla \rightarrow (\delta^* \nabla, \det^* \nabla)$. Si l'on considère les 1-formes locales σ, τ et ω des connexions $\nabla, \delta^* \nabla$ resp. $\det^* \nabla$ relatives aux sections (5.13), cette bijection est donnée par :*

$$(5.14) \quad \sigma = \frac{1}{4} \tau_j^i e_i e^j + \frac{1}{n} \omega.$$

Démonstration. — On peut supposer, en vertu de la proposition 2.7, que $n > 2$. En partant de la décomposition unique

$$(5.15) \quad \sigma = \sigma_1 + \frac{1}{n} \omega, \quad \text{tr } \sigma = \omega, \quad \text{tr } \sigma_1 = 0,$$

il résulte de la proposition 2.4 et du corollaire 5.3 que les 1-formes ω et σ_1 sont à valeurs dans $T_L = \sqrt{-1} \mathbf{R}$ resp. $\text{pin } Q_L$. D'autre part,

$$\tau = d\delta \circ \sigma = d\lambda \circ \sigma_1$$

et donc (5.15) se réduit à (5.14), en vertu de (5.2). On obtient ainsi l'application injective $\nabla \rightarrow (\delta^* \nabla, \det^* \nabla)$. Il nous reste à montrer que c'est une surjection.

Soient les 1-formes τ' et ω' dans l'ouvert U' de X , analogues à τ resp. ω . On a donc :

$$(5.16) \quad \tau' = \delta(\theta^{-1})\tau\delta(\theta) + \delta(\theta^{-1})d(\delta(\theta)), \quad \omega' = \omega + \det \theta^{-1}d(\det \theta),$$

où $\theta : U \cap U' \rightarrow \Delta(Q)$. En utilisant la décomposition locale $\theta = c\theta_1$, où c et θ_1 sont à valeurs dans T resp. $\text{pin } Q$, (5.16) s'écrit :

$$(5.17) \quad \tau' = \lambda(\theta_1^{-1})\tau\lambda(\theta_1) + \lambda(\theta_1^{-1})d(\lambda(\theta_1)), \quad \omega' = \omega + nc^{-1}dc.$$

On déduit de la première relation (5.17), par analogie avec les formules locales décrivant la bijection λ^* ou par des calculs directs :

$$(5.18) \quad d\lambda^{-1} \circ \tau' = \theta_1^{-1}(d\lambda^{-1} \circ \tau)\theta_1 \\ + \theta_1^{-1}d\theta_1 = \theta^{-1}(d\lambda^{-1} \circ \tau)\theta + \theta^{-1}d\theta - c^{-1}dc.$$

La deuxième relation (5.17) et la relation (5.18) nous montrent que les 1-formes

$$(5.19) \quad \sigma = d\lambda^{-1} \circ \tau + \frac{1}{n}\omega, \quad \sigma' = d\lambda^{-1} \circ \tau' + \frac{1}{n}\omega'$$

vérifient la loi de transformation

$$(5.20) \quad \sigma' = \theta^{-1}\sigma\theta + \theta^{-1}d\theta. \quad \text{Q. E. D.}$$

Soient une SC-structure Σ de $P \in \mathcal{P}(X, \mathcal{O}(Q))$ et une SC-connexion $\nabla \in \mathbf{C}(\Sigma)$. En désignant par $\mathcal{S}(\xi)$ l'espace des sections d'un fibré vectoriel quelconque ξ , les éléments de $\mathcal{S}(\Sigma F)$ et de $\mathcal{S}(\Sigma F_*)$ (avec F l'espace des spineurs et F_* son dual) sont dits des *champs spinoriels*, contravariants resp. covariants. Par produits tensoriels on introduit des champs spinoriels de différents types. La dérivée covariante par rapport à ∇ d'un tel champ est dite *dérivée spinorielle*.

Introduisons maintenant l'opérateur de Dirac pour les SC-structures, dans le cas où X est un espace pseudoriemannien et $P = \mathcal{O}(X)$. En supposant d'abord que n est pair, associons à la base orthonormée $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E par rapport à Q les opérateurs antiautoadjoints par rapport à H suivants :

$$(5.21) \quad f^i = (-1)^{n/4} e^1 e^2 \dots e^n e^i, \quad i = 1, \dots, n$$

et définissons les opérateurs de Dirac D_k , k réel,

$$(5.22) \quad \begin{cases} D_k : \mathcal{S}(\Sigma F) \rightarrow \mathcal{S}(\Sigma F), & D_k \varphi = f^i \nabla_i \varphi - k\varphi, \\ D_k : \mathcal{S}(\Sigma F_*) \rightarrow \mathcal{S}(\Sigma F_*), & D_k \psi = \nabla_i \psi \cdot f^i - k\psi. \end{cases}$$

Si n est impair, on remplace, d'après le corollaire 5.2, le fibré Σ par $i\Sigma$, $i : \text{pin } Q \rightarrow \text{pin } \tilde{Q}$.

L'opérateur spinoriel de Laplace est

$$(5.23) \quad \Delta : \mathcal{S}(\Sigma F) \rightarrow \mathcal{S}(\Sigma F), \quad \Delta \varphi = \nabla^i \nabla_i \varphi = (D_k D_{-k} + k^2)\varphi.$$

La solution générale de l'équation spinorielle de Klein-Gordon

$$(\Delta - k^2)\varphi = 0 \text{ est, pour } k \neq 0, \varphi = \varphi' + \varphi'' \text{ avec } D_k \varphi' = 0, D_{-k} \varphi'' = 0.$$

Si P est orientable, on peut définir, d'après le corollaire 5.4, les fibrés

vectoriels des semi-spineurs ΣF^\pm avec $\Sigma F = \Sigma F^+ \oplus \Sigma F^-$. Dans ce cas l'opérateur de Dirac est de la forme $\mathcal{S}(\Sigma F^\pm) \rightarrow \mathcal{S}(\Sigma F^\mp)$.

Si P admet une réduction de groupe structural $O_+(Q)$, le fibré des spineurs ΣF admet, d'après le corollaire 5.3, une métrique hermitienne canonique h . D'après la proposition 5.1, h est, pour n pair, définie ou neutre selon que Q est définie positive ou non. Si n est impair, il existe deux métriques h distinctes. On a évidemment la condition de Ricci

$$(5.24) \quad \nabla_v h(\varphi, \psi) = h(\nabla_v \varphi, \psi) + h(\varphi, \nabla_v \psi),$$

quels que soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\Sigma F)$ et le champ vectoriel v dans X .

La métrique h définit une application naturelle, appelée l'adjonction de Dirac, $\Sigma F \rightarrow \Sigma F_*$ notée par $x \rightarrow x^+$. Cette application vérifie la condition de commutativité $D_k \varphi^+ = (D_{-k} \varphi)^+$. Si $D_k \varphi = 0$, la divergence du champ vectoriel $\sqrt{-1} \varphi^+ f_i \varphi$ est nulle.

Si P est réductible à $SO_+(Q)$, on peut se présenter, d'après la proposition 5.1 et le corollaire 5.4, les cas suivants :

1° ΣF^\pm sont orthogonaux par rapport à h et les deux métriques induites h^\pm sont en même temps définies ou neutres ;

2° ΣF^\pm sont totalement isotropes par rapport à h .

Si n est pair, on a le cas 1° ou 2° selon que $\varepsilon(Q) = \pm 1$; si n est impair, on peut réaliser simultanément ces deux cas, h n'étant pas unique. L'adjonction de Dirac est de la forme $\Sigma F^\pm \rightarrow \Sigma F_*^\pm$ ou $\Sigma F^\pm \rightarrow \Sigma F_*^\mp$ selon que les fibrés des semi-spineurs vérifient 1° resp. 2° ; dans le cas 1° cette adjonction est donnée par les métriques h^\pm . Le changement de Q par $-Q$ conduit à un changement correspondant de h ; ainsi, si Q est définie, on obtient deux métriques hermitiennes sur ΣF , l'une définie et l'autre neutre.

Un cas particulier important est celui où Σ est une SC-structure tangente à l'espace pseudoriemannien X et $\delta^* \nabla$ est la connexion riemannienne de X . Si X est, par exemple, un espace-temps (de signature $+++ -$) l'existence de la métrique hermitienne h correspond à l'orientation temporelle de X , ce qui donne un rôle profond au groupe de Lorentz orthochrone.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ATIYAH et R. BOTT, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications. *Ann. Math.*, t. **88**, 1968, p. 450-490.
- [2] M. ATIYAH, R. BOTT et A. SHAPIRO, Clifford moduls. *Topology*, t. **3**, suppl. 1, 1964, p. 3-38.
- [3] K. BICHTLER, Global existence of spin structures for gravitational fields. *J. Math. Phys.*, t. **9**, 1968, p. 813-815.
- [4] C. CHEVALLEY, *The algebraic theory of spinors*. Columbia Univ. Press, New York, 1954.
- [5] A. CRUMEYROLLE, Structures spinorielles. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. A, t. **11**, 1969, p. 19-55.

- [6] A. HAEFLIGER, Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **243**, 1956, p. 558-560.
- [7] G. KARRER, Darstellung von Cliffordbündeln. *Ann. Acad. Sci. Fennicæ*, Serie A, t. **521**, 1973, p. 1-34.
- [8] A. LICHNEROWICZ, Les spineurs en relativité générale. *Conf. Sem. Mat. Univ. Bari*, t. **79**, 1962, p. 1-15.
- [9] J. MILNOR, Spin structures of manifolds. *L'enseignement Math.*, t. **9**, 1963, p. 198-203.
- [10] J. MILNOR, *Remarks concerning spin manifolds*. Differential and combinatorial topology in honor of M. Morse, Princeton Univ. Press, 1965, p. 55-62.
- [11] I. POPOVICI, Remarques sur l'existence des structures spinorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série A, t. **279**, 1974, p. 277-280.
- [12] I. POPOVICI, Un théorème de prolongement spinoriel. *Ann. Polonici Math.*, t. **29**, 1975, p. 379-390.
- [13] I. POPOVICI, Considérations sur les structures spinorielles. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. **23**, 1974, p. 113-134.
- [14] I. POPOVICI, Sur les SC-structures. *Rev. Roum. Math. pures et appl.*, t. **21**, 1976, p. 363-366.
- [15] K. YANO et S. ISHIHARA, Fibred spaces with invariant Riemannian metric. *Kodai Math. Sem. Rep.*, t. **19**, 1967, p. 317-360.

(Manuscrit reçu le 29 octobre 1975)