ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANDRÉ BLANC-LAPIERRE
ALBERT TORTRAT

Fonctionnelles causales markoviennes d'un processus à accroissements indépendants. Application à la modélisation de systèmes déterministes non linéaires et non stationnaires

Annales de l'I. H. P., section A, tome 24, nº 4 (1976), p. 327-345
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__24_4_327_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXIV, n° 4, 1976, p. 327-345. *Physique théorique.*

Fonctionnelles causales markoviennes d'un processus à accroissements indépendants. Application à la modélisation de systèmes déterministes non linéaires et non stationnaires

par

André BLANC-LAPIERRE et Albert TORTRAT

SOMMAIRE. — Soient : N(t) un processus à accroissements indépendants de type très général — non nécessairement gaussien — et $X(t) = \mathcal{T}\{N(t)\}$ une fonctionnelle certaine causale de N(t) exprimée par un développement de Volterra :

$$X(t) = \mathcal{T}\{N(t)\} = \int_{-\infty}^{t} R_1(t\,;\theta_1)dN(\theta_1) + \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} R_2(t\,;\theta_1,\theta_2)dN(\theta_1)dN(\theta_2) + \ldots$$

On recherche les conditions à imposer à $\mathcal{T}$ pour que, pour le processus N(t) donné, X(t) soit markovien. Sous réserve d'hypothèses peu restrictives pour les applications, on montre que, pour que X(t) soit markovien : [i] *lorsque la fonctionnelle* $\mathcal{T}$ *est linéaire, il faut et il suffit* qu'elle se ramène, par changement certain convenable de t, à un filtre linéaire causal à réponse exponentielle combiné à des multiplications par des fonctions certaines de t [tout au moins, ceci est-il vrai à condition d'exclure une complication de ce schéma analysée en détail dans le texte], [ii] *dans le cas général —* $\mathcal{T}$ *non linéaire —, il faut* que X soit, presque sûrement, égal à une fonction certaine, pouvant dépendre du temps, d'une fonctionnelle linéaire, causale et markovienne de N(t), donc conforme à [i].

Ces résultats fournissent un modèle utile pour la représentation des systèmes S ayant la propriété suivante : à la fonction d'entrée N(t), ils

associent une fonction de sortie, ou réponse, markovienne. Des applications sont données relativement à certaines équations différentielles stochastiques et relativement à la caractérisation des fonctions de corrélation de fonctions aléatoires stationnaires markoviennes.

I. INTRODUCTION

De nombreux problèmes concrets [physique, mécanique, automatique, traitement du signal...] introduisent des fonctions aléatoires (f. a.) $X(t)$ résultant de l'excitation de *systèmes macroscopiques déterministes* S par des *fluctuations microscopiques* δ.

Dans ce qui suit, δ interviendra par une f. a. $N(t, \omega)$ $(-\infty < t < +\infty)$ réelle, centrée $[E\{N(t, \omega)\} \equiv 0$; E : espérance mathématique], définie sur l'ensemble Ω des épreuves ω. Le système S, non aléatoire, associe de façon déterministe à chaque $N(t, \omega)$, une f. a. $X(t, \omega)$ supposée *réelle*. S est donc défini par une fonctionnelle $\mathcal{C}$ *non aléatoire* que nous supposerons *causale*, c'est-à-dire telle que la valeur de X à un instant t quelconque ne dépende que du comportement de N pour $\theta < t$:

$$X(t, \omega) = \mathcal{C}\{t; N(\theta, \omega); [\theta < t]\} \tag{1-1}$$

Nous admettrons que $\mathcal{C}$ peut être explicitée au moyen d'un développement de Volterra [1] :

$$X(t) = \sum_{K=1}^{\infty} X_K(t) \tag{1-2}$$

avec :

$$X_K(t) = \int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{t} R_K(t; \theta_1, \ldots, \theta_K) dN(\theta_1) \ldots dN(\theta_K) \tag{1-3}$$

On supposera que les limites intervenant en (1-2) et (1-3) existent en moyenne quadratique (m. q.) et les R_K « symétrisés » par rapport à $[\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K]$ (toujours possible). Cette représentation de S présente une grande généralité. Elle recouvre, *en particulier*, les systèmes constitués par une succession, dans un ordre quelconque, d'opérations linéaires du type filtrage et d'opérations non linéaires *instantanées* [tout au moins sous des conditions très générales de régularité portant sur les caractéristiques de détection]. Sous des conditions très générales, elle recouvre aussi les systèmes dans lesquels la correspondance entrée-sortie s'exprime par une équation différentielle — naturellement du premier ordre, puisqu'on veut une sortie markovienne. On notera également l'aspect physique de la représentation utilisée qui sépare bien les effets du premier ordre, du second ordre, etc. des accroissements passés $dN(\theta)$ $[\theta < t]$ dans l'élaboration de $X(t)$.

S *est invariant au cours du temps* si tous les R_K le sont. Un cas très simple qui jouera un grand rôle dans la suite, est celui du système S'_1, linéaire, invariant dans le temps et à réponse percutionnelle exponentielle.

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} R_1(t-\theta)dN(\theta) \qquad \text{avec} \qquad R_1(\tau) = \exp[-(\tau/a)] \qquad (a > 0) \quad (\tau > 0) \quad (1\text{-}4)$$

Si, pour $S = S'_1$, N est à accroissements stationnaires $[E\{[dN(\theta)]^2\} = \rho_0 d\theta]$, alors, il est bien connu que l'on a :

$$C_X(\tau) = E\{X(t)X(t-\tau)\} = [(\rho_0 a)/2] \exp\{-|\tau/a|\} \qquad (1\text{-}5)$$

La question centrale que nous nous proposons de traiter est la suivante : *quelles conditions faut-il imposer à* S, *c'est-à-dire à* $\mathscr{C}$, *pour que* X(*t*) *soit markovien ?* Cette question est importante car le caractère markovien des signaux, qui est à la base de la *notion d'état*, joue un grand rôle en *théorie des systèmes.* Précisons la question posée : il ne s'agit pas d'imposer à S des conditions assurant le caractère markovien à X, quelle que soit la f. a. à accroissements indépendants N(*t*), mais de lui imposer des conditions propres à assurer ce caractère pour une f. a. N(*t*) fixée. Plus exactement — ceci sera important pour les systèmes non linéaires — nous viserons à assurer ce caractère pour une f. a. N(*t*) et pour tous ses « multiples certains » λN(*t*) [λ nombre certain $\neq 0$ quelconque] (Il revient au même de dire que nous visons à assurer ce caractère indépendamment de l'unité choisie pour mesurer N(*t*)).

Les f. a. N(*t*) seront largement quelconques [nous préciserons, ci-dessous, les hypothèses correspondantes] ; en particulier, nous ne supposerons pas N(*t*) gaussien. De même, S sera très général : nous ne le supposerons ni invariant dans le temps, ni linéaire. Nous traiterons cependant d'abord le cas des systèmes linéaires [§ II] à propos desquels nous préciserons des résultats antérieurs et auquel, d'une certaine façon, on peut, comme nous le verrons, ramener le cas non linéaire [§ III]. Le paragraphe IV sera consacré à diverses applications.

Ce travail répond à des préoccupations physiques et les hypothèses faites paraissent « raisonnables » pour les applications. On n'a pas cherché à les réduire à leur minimum et plusieurs questions de mathématiques pures que l'on rencontre dans cette direction paraissent encore ouvertes.

Avant de clore ce paragraphe d'introduction, précisons les notations essentielles utilisées et explicitons les hypothèses de départ sur lesquelles repose ce travail.

NOTATIONS. — Il sera utile de distinguer, dans X(*t'*), les contributions des *d*N(θ) correspondant respectivement à $\theta \leqslant t < t'$ et à $t < \theta' \leqslant t'$. Pour cela, nous poserons :

$$X_K(t') = \sum_{(k_\alpha, k_\beta)} C_{k_\alpha + k_\beta}^{k_\alpha} X_{k_\alpha, k_\beta}(t, t') \qquad (1\text{-}6)$$

avec

$$X_{k_\alpha,k_\beta}(t,t') = \underset{(\theta_1)}{\int_{-\infty}^{t}} \dots \underset{(\theta_{k_\alpha})}{\int_{-\infty}^{t}} \underset{(\theta'_1)}{\int_{t}^{t'}} \dots \underset{(\theta'_{k_\beta})}{\int_{t}^{t'}} R_K[t';\theta_1,\dots,\theta_{k_\alpha};\theta'_1,\dots,\theta'_{k_\beta}]dN(\theta_1) \dots dN(\theta_{k_\alpha})dN(\theta'_1)\dots dN(\theta'_{k_\beta}) \quad (1\text{-}7)$$

où k_α et k_β $[k_\alpha + k_\beta = K]$ sont des entiers $\geqslant 0$, non nuls simultanément. De plus, on désignera par $\underline{X(t, t')}$ la valeur de $X(t')$, conditionnellement lorsque tous les $dN(\theta')$ $[t < \theta' \leqslant t']$ sont nuls.

D'autre part, nous poserons $\omega = \omega_t^- \omega_t^+$ $[\omega_t^- \in \Omega_t^-;\omega_t^+ \in \Omega_t^+;\Omega = \Omega_t^-\Omega_t^+]$ où ω_t^- et ω_t^+ concernent respectivement les $dN(\theta)$ passés $[\theta \leqslant t]$ ou futurs par rapport à t. Les épreuves ω_t^- et ω_t^+ sont indépendantes.

HYPOTHÈSES. — *En plus des hypothèses* H_1 *relatives aux convergences impliquées par* (1-1) *et* (1-2), nous faisons les suivantes :

Hypothèse H_2 : *à l'hypothèse* H_1 *formulée ci-dessus, nous ajoutons une hypothèse d'* « *homothétie* », *soit* H_2, *portant sur* $N(\theta, \omega)$, *que nous allons expliciter ci-dessous.*

a) Nous admettons d'abord qu'*à toute trajectoire* $N(\theta, \omega)$ *définie par ses accroissements, on peut associer une autre trajectoire* $\{\lambda\omega\}$, *appartenant au processus, homothétique de la première* [*rapport* λ], *c'est-à-dire caractérisée par le fait que l'on a* $dN(\theta, \{\lambda\omega\}) \equiv \lambda dN(\theta, \omega)$ [*hypothèse* H_2^1].

b) Soit maintenant $\Omega[t, t']$ l'ensemble des portions $\omega_{tt'}$ des trajectoires ω de $N[\theta, \omega]$, envisagées uniquement du point de vue des $dN[\theta, \omega]$ $[\theta \in [t, t']]$. Le fait que les $dN(\theta, \omega)$ soient indépendants permet d'isoler ainsi la portion $[t, t']$ de l'axe des temps. Soit, de plus, un nombre réel $\lambda \neq 0$. Désignons par $\Delta_1\Omega[t, t']$ un sous-ensemble de $\Omega[t, t']$ de probabilité > 0 et par $\Delta_2\Omega\{\Delta_1\Omega[t, t'], \lambda\}$ l'ensemble des trajectoires $\omega_{tt'}$ qui se déduisent de celles de $\Delta_1\Omega[t, t']$ par le fait que les $dN(\theta, \omega_{tt'})$ $[t < \theta < t']$ sont tous multipliés par λ. On peut, si l'on veut, dire que les trajectoires de $\Delta_2\Omega\{\Delta_1\Omega[t, t'], \lambda\}$ sont, sur $[t, t']$ où elles sont définies, homothétiques de celles de $\Delta_1\Omega[t, t']$ dans le rapport λ.

L'hypothèse H_2^2 *consistera à affirmer que, pour* t *et* t' *donnés* $[t < t']$ *quelconques, il existe des* $\Delta_1\Omega[t, t']$ *de probabilité positive tels que,* $\forall\lambda \neq 0$, *la probabilité de* $\Delta_2\Omega\{\Delta_1\Omega[t, t'], \lambda\}$ *soit strictement positive.*

H_2 *est constituée par l'ensemble des deux hypothèses* H_2^1 *et* H_2^2.

Cette hypothèse, qui porte sur N, paraît, à première vue, fortement restrictive : elle exclut, par exemple, le cas très courant où $N(t)$ est constitué par des sauts poissonniens, *tous d'amplitude* $+ 1$: il n'y a, en effet, dans ce cas, aucune épreuve où les sauts vaillent $\lambda \neq 1$. En fait, il n'y a pas là de restriction sérieuse. On peut, en effet, toujours considérer un tel modèle comme limite de cas où les sauts ont des amplitudes réparties sur $-\infty$, $+\infty$ avec une accumulation de probabilité de plus en plus forte près de la valeur 1, tendant, à la limite, vers l'existence d'une masse de probabilité + 1 sur cette valeur 1. Il est possible d'ailleurs que, par l'étude minutieuse de tels passages à la limite, cette hypothèse puisse être levée (1).

Hypothèse H_3 : dire que $X(t)$ est markovien, c'est affirmer que, pour $X(t_0)$ fixé, il y a indépendance entre les événements relatifs à X respectivement futurs $[t > t_0]$ ou passés $[t < t_0]$. L'hypothèse H_3 a pour but de nous permettre de remplacer l'énoncé ci-dessus par le suivant : dire que $X(t)$ est markovien, c'est affirmer que, pour $X(t_0)$ fixé, il y a indépendance entre les événements relatifs à $X(t)$ futurs et les événements passés relatifs à $N(t)$. Une condition suffisante, pour qu'il en soit ainsi, est qu'il y ait, $\forall t$, identité, à une complétion près, entre les deux sous σ-algèbres correspondant aux événements qui, pour $\theta < t$, sont respectivement relatifs à $X(\theta)$ et à $N(\theta)$ [condition H'_3]. H'_3 est, en particulier, vérifiée si la correspondance $N \to X$ peut se mettre sous la forme :

$$\Delta X(t) = A\{X(t), t\}\Delta t + B\{X(t), t\}\Delta N(t) \tag{1-8}$$

Dans ce cas, pour $X(t)$ fixé, la connaissance de $X(\theta)$ sur $[t, t']$ $[t' > t]$ est, $\forall t$ et t', équivalente à celle de $N(\theta) - N(t)$ sur ce même intervalle. Il est d'ailleurs alors évident que $X(t)$ est markovien.

On peut assurer H_3 de façon moins stricte que par H'_3. Il suffit, par exemple, d'admettre que, pour tout $\underline{\Delta t}_1 = [t_1, t_1 + \Delta t_1]$ $(\Delta t_1 > 0)$, la loi de $N(\theta) - N(t_1)$ $[\theta \in \underline{\Delta t}_1]$ dépend « suffisamment » de celle de $X(\theta)$ sur ce même intervalle.

II. SYSTÈMES LINÉAIRES (2)

2-1. Résultats préliminaires

LEMME I. — *Si $X(t)$ est markovien, il existe une fonction certaine $\Phi(t, t')$ telle que, p. s., on ait :*

$$X(t, t') = \Phi(t, t')X(t) \qquad \textit{pour } t' > t \tag{2-1}$$

De plus, cette fonction Φ satisfait à

$$\Phi[t, t''] = \Phi[t, t']\Phi[t', t''] \qquad \textit{pour } t < t' < t'' \tag{2-2}$$

Démonstration. — Compte tenu de l'hypothèse H_2 qui permet, en quelque sorte, d'effectuer des « homothéties » sur les $dN(\theta)$ d'un certain intervalle tout en ne tombant pas dans des $\Delta\Omega$ de probabilité nulle, le caractère markovien de $X(t)$ implique que $\underline{X(t, t')}$ soit p. s. une fonction certaine

(1) L'énoncé de H_2, donné dans [4], est trop strict. On n'a pas besoin de postuler H_2^2 pour *tout* $\Delta_1\Omega[t, t']$, mais seulement pour *certains* $\Delta_1\Omega[t. t']$. D'ailleurs, on sait que, pour $N(t)$ de Wiener-Lévy, il existe pour chaque $\lambda \neq 0,1$, un $\Delta_t\Omega[t, t']$ de probabilité 1 dont l'homothétique dans le rapport λ est de probabilité nulle (mais c'est un événement lié à une infinité de valeurs du temps, dans $[t, t']$).

(2) Dans le cas linéaire, on précise, ici, des résultats donnés en [2].

de $X(t)$. Le fait que $X(t)$ et $\underline{X(t, t')}$ soient, l'un et l'autre, des formes linéaires et homogènes des mêmes $\overline{dN(\theta)}$ $[\theta < t]$ entraîne alors immédiatement (2-1).

La relation (2-2) s'établit comme suit :

$$\underline{X(t, t'')} = X(t)\Phi(t, t'') = \underline{X(t, t')}\Phi(t', t'') \quad \text{p. s.}$$

$$\underline{X(t, t')} = X(t)\Phi(t, t') \quad \text{p. s.}$$

D'où

$$\underline{X(t, t'')} = X(t)\Phi(t, t'') = X(t)\Phi(t, t')\Phi(t', t'') \quad \text{p. s.}$$

D'où le résultat, avec, évidemment, $\Phi(t, t) \equiv 1$.

LEMME II. — *La covariance* $\Gamma_X(t_1, t_2)$ *satisfait à :*

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = E\{\,|X(t_1)|^2\,\}\,\Phi(t_1, t_2) \qquad [t_1 \leqslant t_2] \tag{2-3}$$

Conséquence directe de (2-1) si l'on note que $X(t_2) - \underline{X(t_1, t_2)}$ est centré et indépendant de $X(t_1)$.

LEMME III. — *On a :*

$$\Phi(t_1, t_2) = [R_1(t_2, t_1)/R_1(t_1, t_1)] \qquad [t_1 < t_2] \tag{2-4}$$

(2-4) s'obtient en considérant une réalisation de $X(t_1)$ dans laquelle tous les $dN(\theta)$ sont nuls sauf pour $[t_1 - \varepsilon, t_1]$ (ε très petit).

LEMME IV. — $X(t)$ *satisfait à l'équation différentielle*

$$\Delta X(t) \cong A(t)X(t)\Delta t + R_1(t, t)\Delta N(t) \tag{2-5}$$

avec

$$A(t) = \left.\frac{\partial\Phi[t, t']}{\partial t'}\right|_{t'=t} = \frac{\partial\Phi[s, t]}{\partial t\Phi[s, t]} \qquad \forall s < t \tag{2-6}$$

conséquences directes de (2-1) *de* (2-2) *et de la définition de* R_1.

2-2. Réduction de la fonction Φ à la forme exponentielle par changement d'horloge certain

Pour poursuivre le raisonnement, nous introduisons la fonction normée

$$\underset{\sim}{X}(t) = \{\, X(t)/\sigma_X(t) \,\} \qquad \text{avec} \qquad \sigma_X^2(t) = E\{\,|X(t)|^2\,\} \tag{2-7}$$

Naturellement, si $X(t)$ est markovien, il en est de même de $\underset{\sim}{X}(t)$ et réciproquement.

On a :

$$\underline{\Phi}(t_1, t_2) = \Gamma_{\underline{X}}(t_1, t_2)$$

$$= \frac{\Gamma_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} = \frac{\Phi(t_1, t_2)\sigma_X(t_1)}{\sigma_X(t_2)} = \frac{R_1(t_2, t_1)}{R_1(t_1, t_1)} \cdot \frac{\sigma_X(t_1)}{\sigma_X(t_2)} \tag{2-8}$$

et

avec

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\Phi}(t_1, t_3) = \underline{\Phi}(t_1, t_2)\underline{\Phi}(t_2, t_3) & \text{pour } t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \\ \underline{\Phi}(t, t) \equiv 1 \quad \text{et} \quad |\underline{\Phi}(t_1, t_2)| \leqslant 1 & \forall (t_1, t_2) \end{array}\right\} \tag{2-9}$$

Il découle de (2-2) appliqué à $\underline{\Phi}$ et de (2-9) que la fonction $-\mathrm{Log}\,|\underline{\Phi}(t_1, t_2)|$ définit sur l'axe des t, une mesure additive positive $\underline{\varphi}$, caractérisée par le fait que la contribution à $\underline{\varphi}$ d'un intervalle $[t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$ vaut :

$$\underline{\varphi}(t_1, t_2) = -\mathrm{Log}\,|\underline{\Phi}(t_1, t_2)| \tag{2-10}$$

Sur $[-\infty < t < +\infty]$, il peut exister des intervalles dont la contribution à $\underline{\varphi}$ est nulle. Soit $\mathcal{I}_j$ l'un de ces intervalles. $\forall t_1$ et t_2 intérieurs à $\mathcal{I}_j$, on a $|\underline{\Phi}(t_1, t_2)| \equiv 1$ ce qui, compte tenu de $\underline{\Phi}(t, t) = 1$, implique, sous réserve d'hypothèses de continuité : $\underline{\Phi}(t_1, t_2) \equiv 1$. Dans ce qui suit, nous appellerons $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles $\mathcal{I}_j$ et $\not{\mathcal{I}}$ la partie de l'axe des t complémentaire par rapport à $\mathcal{I}$.

Des relations (2-8), on déduit, pour $t_1 < t_2$:

$$\mathrm{R}_1(t_2, t_1) = \frac{\mathrm{R}_1(t_1, t_1)}{\sigma_{\mathrm{X}}(t_1)}\sigma_{\mathrm{X}}(t_2)\underline{\Phi}(t_1, t_2) \tag{2-11}$$

où

— $\dfrac{\mathrm{R}(t_1, t_1)}{\sigma_{\mathrm{X}}(t_1)} = r_1(t_1) =$ fonction du point « initial » t_1 ([3])

— $\sigma_{\mathrm{X}}(t_2) = r_2(t_2) =$ fonction du point « final » t_2 ([3]).

On rappelle que la réponse impulsionnelle $\mathrm{R}_1[t_2, t_1]$ décrit l'effet, en $t_2 > t_1$, d'une impulsion unité intervenant en t_1.

— $\underline{\Phi}(t_1, t_2)$ est tel que, si l'on décompose $[t_1, t_2]$ en intervalles jointifs $[t_1, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \ldots, [\tau_{\mathrm{K}-1}, \tau_{\mathrm{K}}], [\tau_{\mathrm{K}}, t_2]$, sa valeur s'obtient en multipliant les $\underline{\Phi}$ relatifs à chacun de ces intervalles ; de plus, pour tout intervalle $[t_j, t_j']$ inclus dans un $\mathcal{I}_j$, on a $\underline{\Phi}[t_j, t_j'] = 1$.

Il découle de ce qui précède que, pour l'étude de $\underline{\Phi}$, donc de R_1, on peut, tout au moins au début, se borner à $\not{\mathcal{I}}$, c'est-à-dire supprimer provisoirement $\mathcal{I}$ de l'axe des temps. On introduit alors, dans $\not{\mathcal{I}}$, un temps t' variant

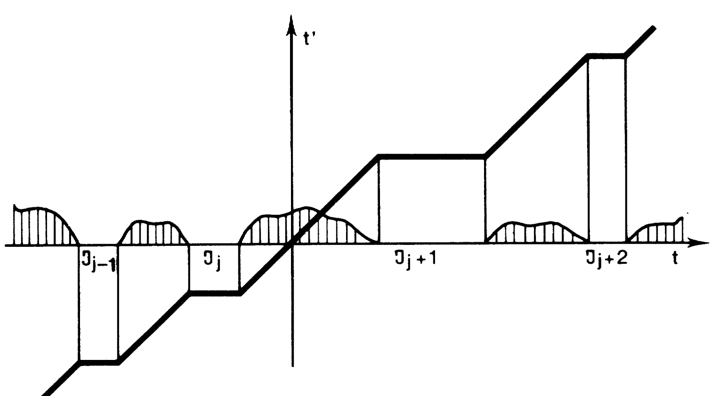

FIG. 2-1.

([3]) Pour éviter certaines complications, d'ailleurs mineures, nous supposerons r_1 et r_2 continues.

de façon continue, fonction croissante de t et tel que, pour $t \in \mathscr{J}$, on ait $dt' = dt$ [voir fig. 2-1], et on remplace $X(t)$ par $X'(t')$ qui s'en déduit en supprimant les accroissements $\Delta X(t)$ correspondant à des $\Delta t \subset \mathscr{J}$. Sur la figure 2-1, les hachures visualisent la répartition de la mesure positive $\underline{\varphi}$ sur $\mathscr{J}$.

On voit aisément qu'en tout point t' [correspondant à un point $t \in \mathscr{J}$], on a :

$$\underline{A}(t') = \left.\frac{\partial \underline{\Phi}[t', t' + \varepsilon]}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} < 0 \tag{2-12}$$

[dérivée prise du côté des $\varepsilon > 0$].

La f. a. $X'(t')$ est markovienne et obéit à une équation différentielle du type (2-5) $[-\infty < t' < +\infty]$ avec un coefficient $\underline{A}(t')$ strictement négatif.

Faisons alors le changement d'horloge certain, monotone, défini par

$$d\theta' = -\underline{A}(t')dt' \tag{2-13}$$

θ' est une fonction $\nearrow$ de t'. (2-6), appliqué à $\underline{\Phi}$ donne alors immédiatement

$$\underline{\Phi}(\theta'_1, \theta'_2) = \exp\left[-(\theta'_2 - \theta'_1)\right] \qquad \forall \theta'_1 \leqslant \theta'_2 \tag{2-14}$$

Il reste à repasser de $\underline{\Phi}(\theta'_1, \theta'_2)$, d'abord à $\underline{\Phi}(t'_1, t'_2)$, puis à $\underline{\Phi}(t_1, t_2)$.

$\underline{\Phi}(t'_1, t'_2)$ se déduit de $\exp\{-(\theta'_2 - \theta'_1)\}$ par le changement d'horloge $\theta' \to t'$ qui est défini sans ambiguïté puisque t' est une fonction croissante de θ'. Il faut, ensuite, passer de $\underline{\Phi}(t'_1, t'_2)$ à $\underline{\Phi}(t_1, t_2)$ ce qui implique la réintroduction de $\mathscr{J}$ sur l'axe $-\infty < t < +\infty$. Cela se fait aisément en se rappelant que, si l'intervalle d'un seul tenant $[t_1, t_2] \in \mathscr{J}$, on a

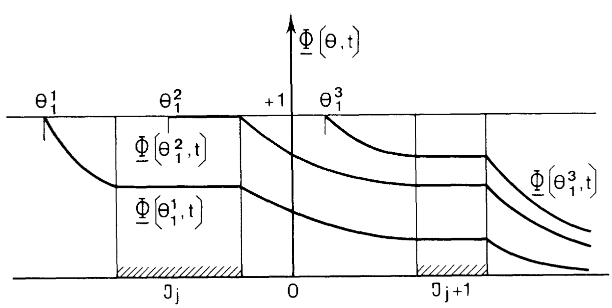

FIG. 2-2.

$\underline{\Phi}(t_1, t_2) = 1(t_1 < t_2)$. La figure 2-2 visualise le résultat de la réintroduction des intervalles de $\mathscr{J}$.

$\underline{\Phi}$ étant connu, on repasse à $R_1(t_2, t_1)$ en utilisant (2-11) c'est-à-dire en multipliant $\underline{\Phi}$ par deux fonctions certaines arbitraires $r_1(t_1)$ et $r_2(t_2)$:

$$R_1(t_2, t_1) = r_1(t_1)\underline{\Phi}(t_1, t_2)r_2(t_2) \qquad [t_1 < t_2] \tag{2-15}$$

La multiplication par $r_1(t_1)$ revient à remplacer les $d\mathrm{N}(\theta)$ par $r_1(\theta)d\mathrm{N}(\theta)$ ce qui, évidemment, ne détruit ni leur indépendance ni leur caractère centré. La multiplication par $r_2(t_2)$ revient à substituer $r_2(t)\mathrm{X}(t)$ à $\mathrm{X}(t)$ ce qui ne change rien au caractère markovien de X. Le changement de temps certain et monotone ne perturbe pas, non plus, ce caractère.

Nous avons établi ce que devait nécessairement être la structure de S, *supposé linéaire, pour que* X(t) *soit markovien. Réciproquement, il est évident* que, si S a une telle structure, X(t) *sera bien markovien* (4). *Il s'agit donc d'une condition sur* S *nécessaire et suffisante.*

Naturellement, dans le passage $[t' \leftrightarrows \theta']$, la densité $\rho[t'] = \rho[t]$ pour $t \in \mathscr{I}$ qui intervient dans l'expression de la variance

$$\mathrm{E}\{\Delta \mathrm{N}^2(t')\} = \rho[t']\Delta t'$$

doit être remplacée par $\rho(\theta') = \rho(t')\dfrac{dt'}{d\theta'}$.

Le processus X(t) *sera stationnaire si sont remplies les conditions suivantes:*

a) $\underline{\mathrm{A}}(t')$ et $\rho(t)$ sont des constantes.

b) $r_1(t)$ et $r_2(t)$ sont des constantes.

c) $\mathscr{I}$ n'existe pas.

Alors, la fonction de corrélation de X(t) *sera de type exponentiel. Pour les processus considérés, c'est le seul type de fonction de corrélation compatible avec le caractère markovien.* Ceci généralise le résultat, bien connu, établi par J. L. Doob dans le cas des processus gaussiens markoviens [cf. [*3*], p. 233].

2-3. Le résultat fondamental pour S linéaire

A. *Sous réserve que soit évitée la complication due à l'existence possible d'un domaine $\mathscr{I}$ de mesure non nulle en t, nous avons donc établi le théorème suivant :*

THÉORÈME I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle linéaire* X(t) *soit markovienne est que, par un changement certain d'horloge convenable, on puisse mettre* $\mathrm{R}_1[t, \theta]$ *sous la forme :*

$$\mathrm{R}_1[t, \theta] = \exp[-(t-\theta)]r_1[\theta]r_2(t) \qquad t > \theta$$

où $r_1(\theta)$ *et* $r_2(t)$ *sont deux fonctions certaines arbitraires.*

---

(4) *Remarques.* — 1° On voit aisément pourquoi la réintroduction de $\mathscr{I}$, conforme à ce qui précède, ne perturbe pas le caractère markovien de X'(t'). Ceci est facile si on porte son attention sur la forme assignée à $\mathrm{R}_1(t_2, t_1)$ par (2-15). C'est, peut-être, encore plus évident si on note que X(t) obéit à l'équation différentielle (2-5) avec $\mathrm{A}(t) = 0$ pour $t \in \mathscr{I}$ et, en prenant le temps θ', avec $\mathrm{A}(\theta') = -1$ dans $\mathscr{I}$.

2° L'étude qui avait été donnée en [*2*], et qui était essentiellement orientée vers le cas stationnaire, ne mentionnait pas la possible existence du domaine $\mathscr{I}$, obtenue ici [*4*] dans le cadre d'une analyse générale du problème.

On peut alors schématiser le système S par la succession de trois opérations : une opération linéaire, en général dépendant du temps, soit M_1, consistant dans la multiplication des $dN(\theta)$ par $r_1(\theta)$, un filtrage linéaire $\mathscr{F}$ à réponse exponentielle, et une opération M_2, linéaire et en général dépendant du temps, consistant dans la multiplication de la sortie de $\mathscr{F}$ par $r_2(t)$ [cf. fig. 2-3].

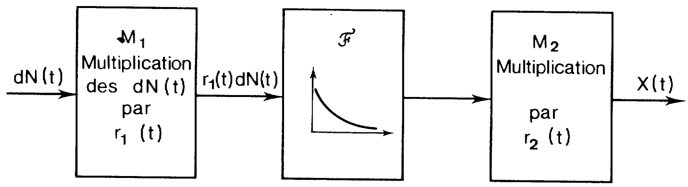

FIG. 2-3.

B. *On a vu, par ailleurs, comment il fallait modifier l'énoncé précédent pour tenir compte de l'existence possible d'un domaine $\mathscr{I}$.*

III. SYSTÈMES S QUELCONQUES [LINÉAIRES OU NON]

Soit K_0 l'indice le plus bas figurant dans (1-2). Si $K_0 > 1$, il n'y a pas, dans ce développement de composante linéaire X_1. Cela n'empêche pas de construire, conformément aux résultats obtenus dans le cas linéaire, des fonctionnelles causales, linéaires et homogènes des $dN(\theta)$ et, éventuellement, markoviennes.

3-1. LEMME I. — *Si $X(t)$ est markovien*

1° *$X_{K_0}(t)$ est markovien.*

2° *Il existe une fonction certaine $\Phi_{K_0}(t, t')$ telle que l'on ait p. s. :*

$$\underline{X_{K_0}[t, t']} = X_{K_0}[t]\Phi_{K_0}[t, t'] \tag{3-1}$$

Démonstration :

1° Comme indiqué dans l'introduction, nous partons d'une f. a. à accroissements indépendants bien définie $N(t)$ et nous voulons assurer le caractère markovien pour $N(t)$ et pour tous ses « multiples certains » $N_\lambda(t) = \lambda N(t)$ [λ nombre certain $\neq 0$] [5]. Introduisons :

$X_\lambda(t)$ construit suivant (1-1) et (1-2) à partir de $N_\lambda(t)$

[5] On notera bien qu'il s'agit ici du passage d'*une fonction aléatoire* $N(t)$ *à une autre fonction aléatoire* $\lambda N(t)$ alors que, dans la formulation de l'hypothèse H_2 [cf. p. 330], le facteur λ fait passer, *pour une seule fonction aléatoire* $N(t)$ *d'une épreuve* ω *à une autre épreuve* $\{\lambda\omega\}$ *dont les* $dN(\theta)$ *sont* λ *fois plus grands.*

et

$$X'_\lambda(t) = [1/\lambda]^{K_0} X_\lambda(t) \tag{3-2}$$

Par hypothèse, $X'_\lambda(t)$ est markovien $\forall \lambda$. Si $\lambda \to 0$, $X'_\lambda(t)$ tend vers $X_{K_0}(t)$ en m. q. Or, sous des conditions très larges, le caractère markovien est conservé dans le passage à la limite en m. q. qui entraîne la convergence des lois ([6]). D'où la conclusion, pour le 1°.

([6]) Ce point réclame quelques commentaires. Soit une suite d'instants

$$t_{-K} < t_{-[K-1]} < \ldots < t_{-1} < t < t_{+1} < \ldots < t_{K-1} < t_K$$

que nous noterons, de façon condensée : $t_p < t < t_f$ [p : passé ; f : futur par rapport à t]. Soit $\Phi'_\lambda[u_p, u, u_f]$ la fonction caractéristique relative aux valeurs de $X'_\lambda(t)$ pour les instants considérés : passés ($t_p \to u_p$), présent ($t \to u$) et futurs ($t_f \to u_f$). La fonction caractéristique $\Phi'_\lambda[u_p, u_f ; x]$ relative aux valeurs passées et futures conditionnées par le fait que la valeur présente $X'_\lambda(t)$ possède la valeur fixée x est donnée par la relation (α) ci-dessous [*5*] :

$$\Phi'_\lambda[u_p, u_f ; x] = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'_\lambda[u_p, u, u_f] e^{-iux} du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'_\lambda[0, u, 0] e^{-iux} du} \tag{α}$$

X'_λ étant markovien, il y a, pour $X'_\lambda(t) = x$ fixé, indépendance entre le passé et le futur. $\Phi'_\lambda[u_p, u_f ; x]$ se factorise donc sous la forme $\Phi'_\lambda[u_p ; x]\Phi'_\lambda[u_f ; x]$ et on a :

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'_\lambda[u_p, u, u_f] e^{-iux} du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'_\lambda[0, u, 0] e^{-iux} du} = \Phi'_\lambda[u_p ; x]\Phi'_\lambda[u_f ; x] \tag{β}$$

Faisons tendre $\lambda \to 0$ et *admettons que, pour le premier membre, nous puissions intervertir le passage à la limite $\lambda \to 0$ avec les signes d'intégration.* Nous savons par ailleurs que, pour $\lambda \to 0$, on a, uniformément dans tout domaine borné des u :

$$\lim_{\lambda \to 0} \Phi'_\lambda[u_p, u, u_f] = \Phi_{K_0}[u_p, u, u_f] \tag{γ}$$

où Φ_{K_0} correspond à $X_{K_0}(t)$.

Sous réserve que soit valide l'hypothèse sur la possibilité d'interversion évoquée ci-dessus, on pourra donc écrire :

$$\Phi_{K_0}[u_p, u_f ; x] = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{K_0}[u_p, u, u_f] e^{-iux} du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{K_0}[0, u, 0] e^{-iux} du} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\lambda \to 0} \Phi'_\lambda[u_p, u, u_f] e^{-iux} du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\lambda \to 0} \Phi'_\lambda[0, u, 0] e^{-iux} du}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'_\lambda[u_p, u, u_f] e^{-iux} du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'_\lambda[0, u, 0] e^{-iux} du} = \lim_{\lambda \to \infty} \Phi'_\lambda[u_p ; x]\Phi'_\lambda[u_f ; x] \tag{δ}$$

ce qui implique la factorisation de $\Phi_{K_0}[u_p, u_f ; x]$ donc le caractère markovien de $X_{K_0}(t)$. La validité du raisonnement repose donc sur la possibilité d'effectuer l'inversion signalée. Nous l'admettrons. Éventuellement, on l'assurerait par des conditions assez larges sur les noyaux R et sur la convergence de (1-2).

2° La relation (3-1) s'obtient en raisonnant sur la fonctionnelle $X_{K_0}(t)$ homogène et de degré K_0 par rapport aux $dN(\theta)$ et dont on vient de montrer qu'elle est markovienne, comme cela a été fait au paragraphe II dans le cas linéaire [cf. p. 331 et suivantes : introduction de la fonction Φ].

3-2. LEMME II. — *Si* $X(t)$ *est markovien, il existe une fonctionnelle causale, linéaire et markovienne des* $dN(\theta)$, *soit* $X_1(t, \omega)$, *et une fonction certaine* $\Lambda_{K_0}(t)$ *telles que l'on ait, p. s. :*

$$X_{K_0}(t) = \Lambda_{K_0}(t)[X_1(t, \omega)]^{K_0} \tag{3-3}$$

Démonstration. — Appliqué à $X_{K_0}(t)$, le développement (1-6) donne :

$$X_{K_0}(t') = X_{K_0,0}[t, t]\Phi_{K_0}[t, t'] + \dots + K_0 X_{1,K_0-1}[t, t'] + X_{0,K_0}[t, t'] \tag{3-4}$$

$X_{K_0,0}[t, t]\Phi_{K_0}[t, t'] = \underline{X_{K_0}(t, t')}$ ne dépend que du passé $[\theta \leqslant t]$.

$X_{0,K_0}[t, t']$ ne dépend que du futur $[\theta' > t]$. $X_{K_0-j,j}[t, t']$ est une fonctionnelle homogène de degré $K_0 - j$ par rapport aux $dN(\theta)$ passés et de degré j par rapport aux $dN(\theta')$ $[t < \theta' \leqslant t']$. Ceci est vrai, avec $j = K_0 - 1$, pour l'avant-dernier terme $X_{1,K_0-1}(t, t')$. Ce terme là a, de plus, la particularité d'être celui qui, parmi ceux qui sont liés au passé, possède le degré le plus élevé par rapport aux $dN(\theta')$ $[t < \theta' \leqslant t']$. Son expression, selon (1-7), peut se mettre sous la forme

$$X_{1,K_0-1}(t, t') = \int_{\substack{-\infty \\ (\theta_1)}}^{t} \zeta[\{dN(\theta')\}, K_0 - 1, t, t', \theta_1]dN(\theta_1) \tag{3-5}$$

où $\zeta[\{dN(\theta')\}, K_0 - 1, t, t', \theta_1]$ est une fonctionnelle des $dN(\theta')$ $[t < \theta' \leqslant t']$ homogène et de degré $K_0 - 1$ par rapport à ces $dN(\theta')$, et dépendant de θ_1. D'après le lemme I, $X_{K_0}(t)$ est markovien si $X(t)$ l'est, lui-même. Ceci implique, pour $X_{K_0}(t)$ fixé, l'indépendance vis-à-vis du passé $dN(\theta)$ $[\theta \leqslant t]$ [cf. hypothèse H_3, p. 331] d'un événement *quelconque* concernant le futur de X_{K_0} par rapport à t.

Utilisons alors l'hypothèse H_2 appliquée à l'intervalle (t, t'). Elle nous permet de réaliser, pour tous les $dN(\theta')$ $[t < \theta' \leqslant t']$ relatifs à au moins un ensemble $\Delta_1\Omega[t, t']$ de trajectoires $\omega_{tt'}$ de probabilité > 0, une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ sans tomber, *de ce fait*, dans des domaines $\Delta_2\Omega\{\Delta_1\Omega[t, t'], \lambda\}$ de probabilité nulle. On conçoit alors que, pour des $|\lambda|$ assez grands, et pour tous les $dN(\theta)$ $[\theta < t]$ fixés, donc pour $X_{K_0}(t)$ fixé, la seule façon de rendre $X_{K_0}(t')$ indépendant de tout autre renseignement passé consiste à faire en sorte que $X_{1,K_0-1}[t, t']$ ne dépende des $dN(\theta)$ passés qu'à travers $X_{K_0}(t)$.

$X_{K_0}(t)$ est une fonctionnelle homogène, de degré K_0, des $dN(\theta)$ passés, indépendante des $dN(\theta')$ futurs. Pour que les $dN(\theta)$ passés n'interviennent dans (3-5), linéaire par rapport à eux, qu'à travers $X_{K_0}(t)$, et *ceci quels que* *soient les* $dN(\theta')$ *futurs*, il faut que $\zeta[\{dN(\theta')\}, K_0 - 1, t, t', \theta_1]$ se factorise suivant :

$$\zeta'[\{dN(\theta')\}, K_0 - 1, t, t']\zeta''(\theta_1, t, t') \tag{3-6}$$

et que la fonctionnelle linéaire

$$X_1''(t, t', \omega) = \int_{-\infty}^{t} \zeta''(\theta_1 ; t, t')dN(\theta_1) \tag{3-7}$$

soit telle que l'influence du passé qui se transmet à travers elle ne dépende que de $X_{K_0}(t, \omega)$. *Ceci demande à être analysé de façon différente selon la parité de* K_0.

a) *Si* K_0 *est impair.* — Pour des raisons d'homogénéité par rapport aux $dN(\theta)$, la condition énoncée ci-dessus sur l'influence du passé implique qu'en posant, $X_1(t, \omega) = X_1''(t, t, \omega)$, on ait, p. s. :

$$X_1(t) = \Lambda_{K_0}(t)^{[-1/K_0]}[X_{K_0}(t)]^{[1/K_0]} \leftrightarrows X_{K_0}(t) = \Lambda_{K_0}(t)[X_1(t)]^{K_0} \tag{3-8}$$

Le caractère bijectif de (3-8) assure que $X_1(t)$ est markovien puisque $X_{K_0}(t)$ l'est.

b) *Si* K_0 *est pair.* — $[X_{K_0}(t)]^{[1/K_0]}$ a deux déterminations ce qui rend caduc le raisonnement ci-dessus : il est cependant possible de respecter le caractère markovien de $X_{K_0}(t)$ avec K_0 pair, *mais cela ne peut être fait que pour des* $N(t)$ *ayant des propriétés particulières* [invariantes pour le changement $dN(\theta) \to -dN(\theta)$]. Alors (3-8) n'est plus valable que sous sa forme de droite et perd son caractère bijectif. Quoi qu'il en soit, (3-3) est établi. On établit, par ailleurs, même pour K_0 pair, le caractère markovien de X_1 en montrant que si X_1 n'était pas markovien, il en serait de même de X_{K_0} d'où contradiction ([7]).

Remarque. — C'est à cause des particularités introduites par le cas où K_0 *est pair*, dans lequel, *la correspondance* $X_1 \to X_{K_0}$ *n'ayant pas d'inverse, le caractère markovien de* X_{K_0} *ne peut être assuré, à partir de celui de* X_1, *que pour des fonctions* $N(t)$ *particulières*, que le théorème II que nous allons établir *dans le cas non-linéaire*, donne seulement une condition *nécessaire*, alors que le théorème I *du cas linéaire* $[K_0 = 1]$ donnait une condition *nécessaire et suffisante.*

3-3. LEMME III. — *Si* $X(t)$ *est markovien, il existe, pour* K [*quelconque*] $\geqslant K_0$, *une fonction certaine du temps* $\Lambda_K(t)$ *telle que,* $X_1(t)$ *étant la fonctionnelle linéaire causale introduite par le lemme II, on ait p. s. :*

$$X_K(t) = \Lambda_K(t)\,[X_1(t)]^K \tag{3-9}$$

3-3-1. *Considérations préliminaires.* — [*i*] On établit d'abord que la

([7]) Ce résultat, qui n'est pas évident, découle du fait que la fonctionnelle linéaire causale X_1, ne peut être non markovienne, $|X_1|$ étant markovien.

paire de f. a. $\{ X_1, X \}$ constitue une *f. a. vectorielle markovienne à deux dimensions* ce que nous notons $\{ X_1, X \} \in M_2$. [*ii*] Il en est de même de $\{ X_1(t), X(t) - X_{K_0}(t) \}$ ou de $\{ X_1(t), X(t) - F[X_1(t), t, \nu] \}$ où F $[X_1(t), t, \nu]$ est un polynôme certain de $X_1(t)$, de degré ν, dont les coefficients peuvent dépendre de t.

Démonstration du lemme. — Pour $K = K_0$, c'est fait (lemme II). Si le lemme III n'était pas vrai, il existerait un entier $p > 0$ tel que (3-9) serait vérifié pour $K_0, K_0 + 1, \ldots, K_0 + (p - 1)$ et pas pour $K_0 + p$. Nous allons montrer que c'est impossible.

Montrons d'abord que $\{ X_1, X_{K_0+p} \} \in M_2$. Nous réintroduisons $N_\lambda(t) = \lambda N(t)$ et les $X_\lambda(t)$ correspondants. Pour $K \in [K_0, \ldots, K_0 + p - 1]$, (3-9) est vérifié. La somme des $X_K(t)$ correspondant à ces indices est donc un polynôme $P[t, X_1(t) ; K_0 + p - 1]$ de degré $K_0 + p - 1$ et, d'après (3-3-1), on a :

$$\{ X_{1,\lambda}(t), X_\lambda(t) - P[t, X_{1,\lambda}(t), K_0 + p - 1] \} \in M_2 \tag{3-10}$$

soit, évidemment,

$$\{ \lambda^{-1}X_{1,\lambda}(t), \lambda^{-[K_0+p]} \{ X_\lambda(t) - P[t, X_{1,\lambda}(t), K_0 + p - 1] \} \} \in M_2 \tag{3-11}$$

Si $\lambda \to 0$, le premier membre tend vers $\{ X_1, X_{K_0+p} \}$ en m. q. et le caractère M_2 est conservé (voir renvoi p. 337).

Conséquence sur l'évolution de $\{ X_1, X_{K_0+p} \}$. — Étudions cette évolution de t à t'. X_1 étant markovien, son évolution ne dépend du passé par rapport à t qu'à travers $X_1(t)$. Par contre, $X_{K_0+p}(t')$, qui, considéré isolément, n'a aucune raison d'être une f. a. scalaire markovienne, dépend, *a priori*, de ce passé à travers :

$$X_1(t) \qquad et \qquad X_{K_0+p}(t)$$

Comme nous l'avons fait pour $X_{K_0+p}(t')$ (cf. équation (3-4), p. 338), utilisons pour $X_{K_0+p}(t')$ le développement :

$$X_{K_0+p}(t') = X_{K_0+p,0}[t, t'] + \ldots + (K_0 + p)X_{1,K_0+p-1}[t, t'] + X_{0,K_0+p}[t, t'] \tag{3-12}$$

La différence qui apparaît est la suivante : $X_{K_0}(t)$ était markovien et cela impliquait, pour $X_{K_0}(t)$ fixé, l'indépendance vis-à-vis du passé $dN(\theta)$ $[\theta \leqslant t]$ d'un événement *quelconque* concernant le futur de X_{K_0} par rapport à t. Ici, nous devons dire : un événement *quelconque* concernant le futur de X_{K_0+p} par rapport à t est indépendant de ces mêmes $dN(\theta)$ passés, *pour* $X_{K_0+p}(t)$ *et* $X_1(t)$ *fixés*. Continuant alors le raisonnement du lemme II, on portera son attention sur le terme $X_{1,K_0+p-1}[t, t']$ pour lequel on établira que les $dN(\theta)$ $[\theta \leqslant t]$ n'influencent son futur $t' > t$ qu'à travers les deux seules valeurs $X_{K_0+p}(t)$ et $X_1(t)$.

En opérant alors de façon analogue à ce qui a été fait pour le lemme II, on aboutit à la conclusion suivante : l'étude du terme $X_{K_0+p}(t')$ met en évidence une fonctionnelle causale $X_{1,p}(t)$, linéaire et homogène des

$d\mathrm{N}(\theta)$ $[\theta < t]$, qui, à cause du caractère markovien de $\{ X_1, X_{K_0+p} \}$ doit être fonction certaine de $X_{K_0+p}(t)$ *et* de $X_1(t)$, toutes deux homogènes par rapport à ces mêmes $d\mathrm{N}(\theta)$, la première de degré $K_0 + p$ et la seconde de degré 1. Pour X markovien, ceci n'est possible qu'avec

$$X_{K_0+p}(t) = \Lambda_{K_0+p}(t)[X_1(t)]^{K_0+p} \tag{3-13}$$

D'où (3-9). (3-13) est, en effet, la seule possibilité compatible avec la structure des fonctionnelles considérées et le caractère markovien de X. Par exemple, $X_{K_0+p}(t) = \Lambda_{K_0+p}(t)[X_1(t)]^{K_0+p-1}X_{1,p}(t)$ $X_{1,p} \neq X_1]$ exclut le caractère markovien [X dépendant alors de X_1 *et* de $X_{1,p}$ différents].

Remarque. — Evidemment, pour $K_0 = 1$, X_1, introduit aux lemmes II et III, est le premier terme du développement (1-2).

3-4. THÉORÈME II. — *Pour que* X(*t*), *causal, non linéaire, soit markovien, il faut qu'il existe une fonction certaine* $F\{ X_1 ; t \}$ *telle que l'on ait p. s. :*

$$X(t) = F\{ X_1(t, \omega) ; t \} \tag{3-14}$$

où $X_1(t, \omega)$ *est une fonctionnelle causale linéaire markovienne des* $d\mathrm{N}(\theta)$.

Démonstration évidente à partir des lemmes II et III. Si F possède, à chaque instant t, une inverse bien définie F^{-1} de telle sorte que l'on ait aussi p. s. :

$$X_1(t, \omega) = F^{-1}\{ X(t, \omega) ; t \} \tag{3-15}$$

alors la condition constituée par (3-14) et (3-15) est évidemment suffisante pour assurer le caractère markovien de X(t) à partir de celui de $X_1(t)$. *Cependant, il faut noter que la fonction* F *qui intervient dans la condition nécessaire* (3-14) *peut, pour des fonctions* N(t) *particulières, ne pas avoir d'inverse bien définie sans que cela mette en cause le caractère markovien de* X(t). Par exemple, supposons que les $d\mathrm{N}(\theta)$ aient des lois symétriques par rapport à $d\mathrm{N}(\theta) = 0$. Alors, la f. a. $X_1(t)$ est invariante pour $[X_1 \to -X_1]$ et, dans ce cas, on voit aisément que $X(t) = X_1^2(t)$ est markovien, bien que la correspondance $X \to X_1$ comporte deux déterminations. *Naturellement, pour* N(t) *quelconque,* $F[X_1] = X_1^2$ *ne convient pas. D'où le caractère seulement nécessaire et nullement suffisant de la condition donnée par le théorème III.*

La fonctionnelle causale, linéaire et markovienne $X_1(t)$ *peut être absolument quelconque et, notamment, faire intervenir un domaine* $\mathcal{I}$ *de l'axe des t* [cf. § 2-2, p. 333] *de mesure non nulle en t. Si l'on n'a pas à tenir compte de l'existence d'un tel domaine, alors on pourra se ramener, par un changement certain du temps, à un cas où, dans les relations* (1-2) *et* (1-3) *donnant le développement de* X(t), *on prendra,* pour $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_K \leqslant t$:

$$\begin{aligned} R_K[t ; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K] & \\ = \exp \{ -K[t - \theta_K] - [K-1][\theta_K - \theta_{K-1}] - \ldots - [\theta_2 - \theta_1] \} & \\ \times r_1(\theta_1)r_1(\theta_2) \ldots r_1(\theta_K)r_2^K(t)f_K(t) & \end{aligned} \tag{3-16}$$

Les fonctions $r_1(t)$ et $r_2^K(t) f_K(t)$ sont arbitraires. $r_1(t)$ et $r_2(t)$ sont les fonctions qui s'introduisent dans la construction de X_1 ; $f_K(t)$ est liée à la possibilité de la présence explicite du temps dans (3-13).

S *est alors constitué par une multiplication* $M_1 \{ dN(\theta) \to r_1(\theta)dN(\theta) \}$ *suivie d'un filtre linéaire à réponse exponentielle et, enfin, d'un système* $\mathscr{D}$ [*détecteur*] *effectuant la transformation* (3-14) *instantanée non linéaire* et fonction du temps, voir schéma 3-1 qui fournit une *modélisation du système* S.

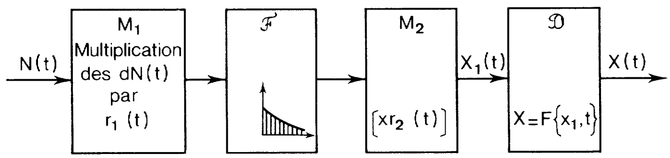

FIG. 3-1.

Remarques. — 1° Nous avons bien précisé que nous cherchions à assurer le caractère markovien de X(*t*) non pas pour toutes les f. a. N(*t*) mais pour une seule d'entre elles soit $N_1(t)$ [et ses « multiples » $\lambda N_1(t)$ (λ nombre certain)]. En fait, sous réserve des hypothèses générales faites, les résultats obtenus sont indépendants des propriétés particulières de la f. a. N considérée.

2° La multiplication par $r_2(t)$ à la sortie de $\mathscr{F}$ qui intervient dans le schéma (3-1) peut sans difficulté être incluse dans $\mathscr{D}$.

IV. EXEMPLES D'APPLICATIONS

4-1. Fonctions de corrélation C admettant une f. a. markovienne [naturellement stationnaire]

Soit C(τ) une fonction de corrélation [f. c.] et Y(*t*) une f. a. admettant C comme f. c. [$Y \in Y_C$]. Il existe des C pour lesquelles aucun $Y \in Y_C$ n'est markovien [*2*] [*6*]. *Quelles conditions faut-il donc imposer à* C *pour que, parmi les* Y_C, *au moins une soit markovienne* [*on écrira alors* $C \in M$]? Si on se limitait aux Y gaussiens centrés, la seule f. c. $\in$ M serait l'exponentielle.

Ce qui précède montre que, *sous les hypothèses faites*, les f. a. causales markoviennes X construites à partir de f. a. à accroissements indépendants N sont des fonctions certaines d'une fonctionnelle causale, linéaire et markovienne X_1 issue de la même fonction N [cf. (3-14)]. Nous sommes dans le cas stationnaire puisque nous parlons de f. c. : $X_1(t)$ aura donc une f. c. exponentielle et t ne figurera pas explicitement dans F. Supposons $F\{X_1\}$ développable en série entière :

$$X(t) = a_1 X_1(t) + a_2 X_1^2(t) + \dots \qquad (4\text{-}1)$$

Alors les résultats de la théorie de la détection des fonctionnelles linéaires de f. a. à accroissements indépendants montrent que la f. c. de $X(t)$ est une série d'exponentielles $\exp\{-k\,|\tau/a|\}$ [k entier $\geqslant 0$]. *Ceci met en lumière le rôle de premier plan joué par les f. c. superposition de puissances entières d'une f. c. exponentielle, dans l'ensemble* M.

4-2. Lien avec les équations différentielles stochastiques

Dans beaucoup de cas, le lien entre $N(t)$ et $X(t)$, c'est-à-dire S, pourra être décrit sous forme différentielle :

$$X(t+\Delta t) - X(t) = G\{X(t)\,;\, t, \Delta t\,;\, \Delta N(t)\} \qquad (4\text{-}2)$$

[$\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$; G : fonction certaine caractérisant S].

soit, sous réserve de possibilité de dérivations et de conditions de convergence :

$$\Delta X(t) = A\{X(t), t\}\,\Delta t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\{X(t), t\}\,\Delta N^k(t) \quad (^8) \qquad (4\text{-}3)$$

La f. a. $X(t)$ *ainsi engendrée est nécessairement markovienne.*

Supposons que nous nous intéressions à l'intégrale de (4-3) définie, pour $t > 0$, par la valeur initiale $X(0) = x_0$. Il est facile de voir, en mettant en œuvre une méthode d'intégration de proche en proche de l'équation différentielle, c'est-à-dire en passant de $X(0)$ à $X(\Delta t)$, de $X(\Delta t)$ à $X(2\Delta t)$, etc., que, pour $t > 0$, $X(t)$ se mettra sous la forme (1-2), (1-3) à condition de prendre les deux précautions suivantes :

1° Dans (1-2), il faudra ajouter un terme $X_0(t)$ indépendant des $dN(\theta)$, donc certain, mais dépendant de la valeur $x_0 \Rightarrow X_0(t, x_0)$.

2° Les R_K intervenant dans les $X_K(t)$ dépendront, eux aussi, de x_0.

Tout au moins, la possibilité de mettre $X(t)$ sous cette forme paraît-elle exister, sous des conditions très générales pour A, et des B_K [cf. (4-3)] développables en séries entières par rapport à $X(t)$. Ainsi donc

(8) *Si* $N(t)$ *est de Wiener-Lévy*, le Σ ne comporte que les termes $k = 1$ et $k = 2$, ce dernier se ramenant, finalement, comme cela est bien connu, à un terme en Δt. *Si* $N(t)$ *est constitué par des sauts poissonniens, tous d'amplitude* $+1$ — et sous réserve que soit levée la difficulté signalée, dans ce cas, à propos de l'hypothèse H_2 [cf. p. 330] — alors, tous les $\Delta N^k(t)$ sont égaux à $\Delta N(t)$ et (4-3) s'écrirait :

$$\Delta X(t) = A\{X(t), t\}\,\Delta t + \left[\sum_{k=1}^{\infty} B_k\{X(t), t\}\right]\Delta N(t) \qquad (4\text{-}3\ bis)$$

$X(t, x_0) - X_0(t, x_0)$ se présente comme une f. a. markovienne qui peut être mise sous la forme (1-2), (1-3). *Le théorème III lui est donc applicable et permet de dire qu'il existe une fonctionnelle linéaire et homogène, causale et markovienne des* $dN(\theta)$ $[0 < \theta \leqslant t]$, *soit* $X_1(t, x_0)$, *et une fonction certaine* $F'\{X_1 ; t\}$ *telles que l'on ait :*

$$X(t, x_0) - X_0(t, x_0) = F'\{X_1(t, x_0) ; t\} \tag{4-4}$$

4-3. Une question ouverte. Toute f. a. de Markov peut-elle être considérée comme résultant du schéma de la figure 3-1 ?

(C'est-à-dire comme une fonction certaine d'une fonctionnelle linéaire causale et markovienne d'un processus aléatoire à accroissements indépendants.)

En d'autres termes, si $X(t)$ est une f. a. markovienne donnée, peut-on déterminer, pour elle, et de façon unique ou non, une f. a. $N(t)$, les fonctions certaines r_1 et r_2 et le changement certain d'horloge intervenant dans la construction de X_1 et, enfin, la fonction certaine $F\{X_1, t\}$ qui permet de passer de X_1 à X ?

La question est importante et nous paraît poser un *problème d'identification* ouvert. Nous ferons simplement la remarque suivante. Supposons que les $dN(\theta)$ soient tous des sauts poissonniens [densité uniforme] d'amplitude $+1$ et faisons, à ce sujet, abstraction de la difficulté posée par l'hypothèse H_3. La f. a. *stationnaire* $X(t)$ représentant le basculeur poissonnien lié aux $N(\theta)$ n'est pas représentable par le modèle défini par les équations (1-1) (1-2) et (1-3). En effet, en plus des $dN(\theta)$, elle dépend d'une variable aléatoire indépendante fixant, par exemple, le signe de $X(0)$. Pourtant ce basculeur poissonnien est markovien. Par contre, son évolution à partir d'une situation initiale fixée, n'implique pas la présence de cette variable aléatoire supplémentaire et peut, peut-être, rentrer dans le cadre étudié.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] KADA ALLAB, *Application de l'analyse fonctionnelle à l'identification des systèmes non linéaires à entrées-sorties déterministes ou aléatoires.* Thèse de Doctorat de 3e cycle. Mathématiques Appliquées, Paris VI, 1970, voir également diverses publications de G. BORGET et P. FAURE et, notamment : Algorithmes de factorisation approchée utilisant les fonctions orthogonales. *Revue R. A. I. R. O.*, no juillet 1973, J-2, p. 25 à 44.

[*2*] A. BLANC-LAPIERRE, Modèles statistiques et Traitement du Signal. Mémoire et caractère markovien. *Comptes Rendus du Colloque National sur le Traitement du Signal*, Nice, 1er au 5 juin 1971, p. 128.

[*3*] J. L. DOOB, *Stochastic Processes*, 7e édition, 1967, John Wiley and Sons.

[*4*] A. BLANC-LAPIERRE et A. TORTRAT, Fonctionnelles linéaires ou non linéaires de pro-

cessus aléatoires à accroissements indépendants et caractère markovien. *C. R. Acad Sci. Paris*, Série A, t. **180**, 1975, p. 953-956.

[5] A. BLANC-LAPIERRE, *Mécanique Statistique.* Masson Éd., Paris, 1966, p. 354 et suivantes.

[6] A. BLANC-LAPIERRE, Quelques résultats et problèmes de la théorie des fonctions aléatoires liés à des questions introduites par la physique, le traitement du signal et l'automatique. Communication présentée au « Symposium Jerzy Neyman », Varsovie, 5 au 11 avril 1974.

(Manuscrit reçu le 27 octobre 1975)