ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. DECARREAU
A. ROBERT

Produit tensoriel et complexité en mécanique quantique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 23, n° 3 (1975), p. 251-258
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__23_3_251_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXIII, n° 3, 1975, p. 251-258. *Physique théorique.*

Produit tensoriel et complexité en mécanique quantique

par

A. DECARREAU and A. ROBERT
Paris XI[e], Paris VI[e]

RÉSUMÉ. — We have established conditions in which an application of projective spaces of Hilbert spaces come from an unitary operator; an interpretation is then suggested at the physical level of the connexion between our theorems and the representation in quantum mechanics of the space of states of a complex system by a tensor product of the spaces of states of component systems.

1. INTRODUCTION

Wigner [*5*] et, à sa suite, Bargmann [*1*] et Hunziker [*2*] ont établi des conditions pour qu'une application de l'espace projectif d'un espace de Hilbert complexe $\mathscr{H}$ dans lui-même provienne d'un opérateur unitaire U de $\mathrm{L}(\mathscr{H})$. Dans le même ordre d'idées, on établit ici le théorème 1. Les produits scalaires sont supposés anti-linéaires à gauche et notés $(.|.)$. Si $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont des espaces de Hilbert complexes, on désigne par $\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2$ une version du produit tensoriel hilbertien, par $\hat{\mathscr{H}}_1$ (resp. $\hat{\mathscr{H}}_2$) l'ensemble des droites (sous-espaces complexes de dimension 1) de $\mathscr{H}_1$ (resp. $\mathscr{H}_2$); si α_i est un élément de $\hat{\mathscr{H}}_i$ engendré par $\varphi_i \in \mathscr{H}_i$ $(i = 1, 2)$, on note $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ la droite de $\widehat{\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2}$ engendrée par $\varphi_1 \otimes \varphi_2$; enfin la droite α engendrée par $\varphi \in \mathscr{H}$ est aussi notée $\hat{\varphi}$ et le projecteur d'image α est noté P_α.

THÉORÈME 1. — *Étant donnés des espaces de Hilbert complexes* $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}$, *on considère une application* $\square$ *bilinéaire de* $\mathrm{L}(\mathscr{H}_1) \times \mathrm{L}(\mathscr{H}_2)$ *dans* $\mathrm{L}(\mathscr{H})$, *telle que* $1_{\mathscr{H}_1} \square 1_{\mathscr{H}_2} = 1_{\mathscr{H}}$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tous* P_i *projecteurs de* $\mathrm{L}(\mathscr{H}_i)$ *et tous* $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$,

$$\mathrm{Tr}[(\mathrm{P}_1 \square \mathrm{P}_2)(\mathrm{P}_{\alpha_1} \square \mathrm{P}_{\alpha_2})] = \mathrm{Tr}(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{\alpha_1})\mathrm{Tr}(\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{\alpha_2}) \; ; \tag{1}$$

(ii) *pour tous* $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ *et* $\beta_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$,

$$(\mathrm{P}_{\alpha_1} \square \mathrm{P}_{\alpha_2})(\mathrm{P}_{\beta_1} \square \mathrm{P}_{\beta_2}) = \mathrm{P}_{\alpha_1}\mathrm{P}_{\beta_1} \square \mathrm{P}_{\alpha_2}\mathrm{P}_{\beta_2} \tag{2}$$

(iii) *l'ensemble des opérateurs de la forme* $\mathrm{P}_1 \square \mathrm{P}_2$, *où* P_i *est un projecteur de* $\mathrm{L}(\mathscr{H}_i)$ $(i = 1, 2)$, *est faiblement total dans* $\mathrm{L}(\mathscr{H})$.

Alors il existe une unique application linéaire isométrique U *de* $\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2$ *dans* $\mathscr{H}$ *telle que, pour* $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$,

$$\mathrm{P}_{\alpha_1} \square \mathrm{P}_{\alpha_2} = \mathrm{P}_{\mathrm{U}(\alpha_1 \otimes \alpha_2)} \tag{3}$$

De plus U *est unitaire si et seulement si on a la propriété suivante :*

(iv) *la réunion des images des opérateurs* $\mathrm{P}_{\alpha_1} \square \mathrm{P}_{\alpha_2}$ *est un ensemble total dans* $\mathscr{H}$.

Remarque 0. — Si $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2$ et $\square = \otimes$, alors (*i*) (*ii*) (*iii*) et (*iv*) sont satisfaites.

Remarque 1. — Les propriétés (*i*) et (*ii*) montrent que l'opérateur $\mathrm{P}_{\alpha_1} \square \mathrm{P}_{\alpha_2}$ est un projecteur de $\mathscr{H}$ de trace 1 : d'où l'existence d'une application ∇ de $\hat{\mathscr{H}}_1 \times \hat{\mathscr{H}}_2$ dans $\hat{\mathscr{H}}$ qui, à (α_1, α_2), associe $\alpha_1 \nabla \alpha_2$ image du projecteur de rang 1 $\mathrm{P}_{\alpha_1} \square \mathrm{P}_{\alpha_2}$.

Au paragraphe 2 on donne une démonstration du théorème 1 ; au paragraphe 3 on énonce et on démontre une variante de ce théorème, le théorème 1' ; on aborde dans la conclusion les questions que pose l'interprétation de ces résultats en termes de systèmes de von Neuman.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

2.1. Voici d'abord deux lemmes utiles à la démonstration :

LEMME 1. — *Étant donné un espace de Hilbert complexe* $\mathscr{H}$, *tout opérateur de rang 1 de* $\mathrm{L}(\mathscr{H})$ *s'écrit comme combinaison linéaire d'au plus quatre projecteurs de rang 1 de* $\mathrm{L}(\mathscr{H})$.

Pour établir ce lemme, on remarque que tout opérateur de rang 1 de $\mathrm{L}(\mathscr{H})$ s'écrit $(\varphi \mid .)\psi$ où φ et ψ sont des éléments de $\mathscr{H}$ et que tout projecteur de rang 1 d'image α s'écrit $\frac{1}{\|\varphi\|^2}(\varphi \mid .)\varphi$ pour tout φ non nul appartenant à α ; on peut alors vérifier la formule suivante :

$$(\varphi \mid .)\psi = \frac{1}{4}[\|\varphi + \psi\|^2 \mathrm{P}_{\widehat{\varphi+\psi}} - \|\psi - \varphi\|^2 \mathrm{P}_{\widehat{\psi-\varphi}} + i\|\psi + i\varphi\|^2 \mathrm{P}_{\widehat{\psi+i\varphi}} - i\|\psi - i\varphi\|^2 \mathrm{P}_{\widehat{\psi-i\varphi}}].$$

LEMME 2. — *Soient* $\mathscr{H}$ *un espace de Hilbert complexe et* $\mathrm{B} \in \mathrm{L}(\mathscr{H})$. *Si* $\mathrm{BB}^* = \mathrm{P}_\alpha$ *et* $\mathrm{B}^*\mathrm{B} = \mathrm{P}_\beta$, *avec* $\alpha \in \hat{\mathscr{H}}$ *et* $\beta \in \hat{\mathscr{H}}$, *alors* B *et* B* *sont de rang 1 et on a* $\mathrm{B}(\beta) = \alpha$.

On démontre en effet que B envoie β sur α en considérant un élément x de β et en écrivant les égalités : $BB^*B(x) = P_\alpha B(x) = BP_\beta(x) = B(x)$. Si de plus $x \in \beta^\perp$ on a : $(B(x) \mid B(x)) = (B^*B(x) \mid x) = (P_\beta(x) \mid x) = 0$; donc $B(x) = 0$ et on a ainsi prouvé que B est d'image α et par suite de rang 1.

2.2. On indique ensuite quelques notations et deux résultats auxiliaires utilisés dans la démonstration. On désigne par $\mathscr{E}_0$ l'ensemble des projecteurs de $L(\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2)$ de la forme $P_{\alpha_1} \otimes P_{\alpha_2} = P_{\alpha_1 \otimes \alpha_2}$ où $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$, et par $V\mathscr{E}_0$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{E}_0$; on note $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ une version du produit tensoriel algébrique et on désigne par $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des projecteurs de $L(\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2)$ de la forme $P_{\hat{\Phi}}$ où $\hat{\Phi}$ désigne la droite engendrée par $\Phi \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$; on désigne enfin par $\mathscr{E}$ l'ensemble des projecteurs de $L(\mathscr{H})$ de la forme P_α où $\alpha \in \hat{\mathscr{H}}$ et par $V\mathscr{E}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{E}$.

On déduit facilement du lemme 1 le premier résultat auxiliaire suivant : $V\mathscr{E}_0$ est une algèbre qui contient $\mathscr{E}_1$. En premier lieu on montre qu'un produit $P_{\alpha_1 \otimes \alpha_2} P_{\beta_1 \otimes \beta_2}$ $(\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i, \beta_i \in \hat{\mathscr{H}}_i, i = 1, 2)$ appartient à $V\mathscr{E}_0$; un tel produit s'écrit en effet $P_{\alpha_1}P_{\beta_1} \otimes P_{\alpha_2}P_{\beta_2}$ et chaque opérateur $P_{\alpha_i}P_{\beta_i}$ $(i = 1, 2)$ étant de rang au plus 1 est justiciable du lemme 1 ; il en résulte que $V\mathscr{E}_0$ est une algèbre. D'autre part un élément Φ de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ s'écrit

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_{1j} \otimes \varphi_{2j} \qquad (\varphi_{ij} \in \mathscr{H}_i,\ i = 1, 2,\ j = 1, \dots n),$$

ce qui donne

$$P_{\hat{\Phi}} = \frac{1}{\|\Phi\|^2} \sum_{k,l} \bar{\lambda}_k \lambda_l [(\varphi_{1k} \mid .)\varphi_{1l}] \otimes [(\varphi_{2k} \mid .)\varphi_{2l}] \ ;$$

par application du lemme 1, on obtient l'inclusion cherchée $\mathscr{E}_1 \subset V\mathscr{E}_0$.

Voici enfin le deuxième résultat auxiliaire : l'ensemble $\mathscr{E}_0$ est faiblement total dans $L(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$. En effet $V\mathscr{E}_0$ est dense en norme dans l'ensemble des opérateurs de rang fini de $L(\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2)$ et cet ensemble est faiblement dense dans $L(\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2)$ (on rappelle que la topologie faible est la topologie de la dualité avec les opérateurs de rang fini définie par la trace).

2.3. On commence la démonstration du théorème en établissant l'existence d'une unique application linéaire injective l de $V\mathscr{E}_0$ dans $V\mathscr{E}$ telle que, pour tous $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$,

$$l(P_{\alpha_1 \otimes} P_{\alpha_2}) = P_{\alpha_1} \square P_{\alpha_2} \tag{4}$$

De plus l'application l vérifie, pour tous A et $A' \in V\mathscr{E}_0$ et tous P_i projecteurs de $L(\mathscr{H}_i)$ $(i = 1, 2)$:

$$\mathrm{Tr}[l(A)P_1 \square P_2] = \mathrm{Tr}[AP_1 \otimes P_2] \tag{5}$$

$$l(AA') = l(A)l(A') \tag{6}$$

$$l(\mathscr{E}_1) \subset \mathscr{E}, \tag{7}$$

les formules (6) et (7) ayant un sens d'après le premier résultat auxiliaire du § 2.2.

L'existence, l'injectivité et l'unicité d'une application linéaire définie par (4) sont entraînées par l'équivalence (8) suivante, pour tous $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et tous $\alpha_{ji} \in \hat{\mathscr{H}}_j$ ($j = 1, 2$ $i = 1, 2 \dots n$),

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\alpha_{1i}} \otimes P_{\alpha_{2i}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\alpha_{1i}} \square P_{\alpha_{2i}} = 0 .$$

Pour montrer (8), on établit, par un calcul simple utilisant (1), que pour tous P_i projecteurs de $L(\mathscr{H}_i)$ ($i = 1, 2$) on a les égalités (9) suivantes :

$$(9) \quad \operatorname{Tr}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\alpha_{1i}} \otimes P_{\alpha_{2i}}\right) P_1 \otimes P_2\right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\operatorname{Tr}(P_{\alpha_{1i}} P_1) \operatorname{Tr}(P_{\alpha_{2i}} P_2)]$$
$$= \operatorname{Tr}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\alpha_{1i}} \square P_{\alpha_{2i}}\right) P_1 \square P_2\right] ;$$

or les ensembles de projecteurs de la forme $P_1 \otimes P_2$ et $P_1 \square P_2$ sont faiblement totaux respectivement dans $L(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ d'après le 2^e résultat auxiliaire et dans $L(\mathscr{H})$ d'après (*iii*), ce qui termine la démonstration de (8).

La formule (5) résulte directement de (9). D'autre part, pour démontrer (6), il suffit de considérer des éléments $A = P_{\alpha_1 \otimes \alpha_2}$ et $A' = P_{\alpha'_1 \otimes \alpha'_2}$ de $\mathscr{E}_0$ où $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ et $\alpha'_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ ($i = 1, 2$) ; on remarque pour cela en utilisant (4) et la bilinéarité de $\square$, que, pour tous A_i combinaisons linéaires de projecteurs de rang 1 de $L(\mathscr{H}_i)$ ($i = 1, 2$), $l(A_1 \otimes A_2) = A_1 \square A_2$; par conséquent la formule (2) et le lemme 1 permettent d'écrire :

$$l(P_{\alpha_1 \otimes \alpha_2}) l(P_{\alpha'_1 \otimes \alpha'_2}) = (P_{\alpha_1} \square P_{\alpha_2})(P_{\alpha'_1} \square P_{\alpha'_2}) = P_{\alpha_1} P_{\alpha'_1} \square P_{\alpha_2} P_{\alpha'_2}$$
$$= l(P_{\alpha_1} P_{\alpha'_1} \otimes P_{\alpha_2} P_{\alpha'_2}) = l(P_{\alpha_1 \otimes \alpha_2} P_{\alpha'_1 \otimes \alpha'_2})$$

On montre l'inclusion (7) de la manière suivante : étant donné un élément $P_{\hat{\Phi}}$ de $\mathscr{E}_1$, l'opérateur $l(P_{\hat{\Phi}})$ vérifiant d'une part $l(P_{\hat{\Phi}}) = l(P_{\hat{\Phi}}^*) = l(P_{\hat{\Phi}})^*$ et d'autre part, d'après (6) et le premier résultat auxiliaire du § 2.2, $l(P_{\hat{\Phi}}) = l(P_{\hat{\Phi}} P_{\hat{\Phi}}) = l(P_{\hat{\Phi}}) l(P_{\hat{\Phi}})$ est un projecteur ; en outre l conserve la trace (cf. (5)) donc $l(P_{\hat{\Phi}})$ est un projecteur de trace 1 c'est-à-dire un élément de $\mathscr{E}$.

2.4. On construit alors l'application U comme suit : étant donné un élément Φ^0 de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ de norme 1, on a d'après (7) $l(P_{\hat{\Phi}_0}) = P_{\alpha_0}$; on fixe alors un élément ω_0 de norme 1 dans α_0. Soit $\Phi \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ de norme 1 : on a $l(P_{\hat{\Phi}}) = P_\alpha$; on montre qu'il existe un unique élément ω de α, de norme 1, tel que $l[(\Phi^0 \mid .)\Phi] = (\omega_0 \mid .)\omega$; pour cela on note $A = (\Phi^0 \mid .)\Phi$ et on vérifie les relations $AA^* = P_{\hat{\Phi}}$ et $A^*A = P_{\hat{\Phi}^0}$; on en déduit d'après (6) les relations $l(A)l(A)^* = P_\alpha$ et $l(A)^* l(A) = P_{\alpha_0}$; il en résulte d'après le lemme 2 que $l(\mathrm{A})$ est un opérateur de rang 1 tel que $l(\mathrm{A})\alpha_0 = \alpha$; par conséquent, si ω' est un élément quelconque de norme 1 de α, on a $l(\mathrm{A}) = \lambda(\omega_0 \,|\, .)\omega'$ avec λ complexe de module 1 ; l'élément ω cherché est égal à $\lambda\omega'$ et est unique : on pose $\omega = \mathrm{U}_1(\Phi)$. On construit ainsi une application U_1 de l'ensemble des éléments de norme 1 de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ dans $\mathscr{H}$ et on remarque que, si $\Phi' = \lambda\Phi$ avec $|\lambda| = 1$, on a $\mathrm{U}_1(\Phi') = \lambda \mathrm{U}_1(\Phi)$. On en déduit une application encore notée U_1 de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ dans $\mathscr{H}$ en posant $\mathrm{U}_1(0) = 0$ et, pour tout Φ non nul de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, $\mathrm{U}_1(\Phi) = \|\Phi\| \mathrm{U}_1\left(\dfrac{\Phi}{\|\Phi\|}\right)$. Il est facile de vérifier que cette application possède la propriété suivante : pour tout Φ de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, $l[(\Phi^0 \,|\, .)\Phi] = (\mathrm{U}_1(\Phi^0) \,|\, .)\mathrm{U}_1(\Phi)$; il en résulte, grâce à (6) et à la formule de décomposition $(\Phi^1 \,|\, .)\Phi^2 = [(\Phi^0 \,|\, .)\Phi^2][(\Phi^1 \,|\, .)\Phi^0]$, que pour tous Φ^1 et Φ^2 de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$,

$$l[(\Phi^1 \,|\, .)\Phi^2] = (\mathrm{U}(\Phi^1) \,|\, .)\mathrm{U}(\Phi^2)\,. \tag{10}$$

On montre ensuite que U_1 est une isométrie linéaire ; on connaît déjà par construction l'égalité $\|\mathrm{U}_1(\Phi)\| = \|\Phi\|$ pour tout Φ de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$; par ailleurs, pour γ complexe de nodule 1 et pour Φ^1, Φ^2 dans $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, on calcule :

$$\begin{aligned} l(\|\Phi^1 + \gamma\Phi^2\|^2 \mathrm{P}_{\widehat{\Phi^1 + \gamma\Phi^2}}) &= l[\|\Phi^1\|^2 \mathrm{P}_{\hat{\Phi}_1} + \|\Phi^2\|^2 \mathrm{P}_{\hat{\Phi}_2} + \bar{\gamma}(\Phi^2 \,|\, .)\Phi^1 + \gamma(\Phi^1 \,|\, .)\Phi^2] \\ &= \|\mathrm{U}_1(\Phi^1) + \gamma \mathrm{U}_1(\Phi^2)\|^2 \mathrm{P}_{\widehat{\mathrm{U}_1(\Phi^1) + \gamma \mathrm{U}_1(\Phi^2)}}\,; \end{aligned}$$

on a donc l'égalité $\|\Phi^1 + \gamma\Phi^2\|^2 = \|\mathrm{U}_1(\Phi^1) + \gamma \mathrm{U}_1(\Phi^2)\|^2$ puisque l conserve la trace; ceci s'écrit aussi $\mathrm{Re}\,(\Phi^1 \,|\, \gamma\Phi^2) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{U}_1(\Phi^1)) \,|\, (\mathrm{U}_1(\Phi^2))$; en considérant successivement $\gamma = 1$ puis $\gamma = i$, on trouve

$$(\Phi^1 \,|\, \Phi^2) = (\mathrm{U}_1(\Phi^1) \,|\, \mathrm{U}_1(\Phi^2))$$

pour tous Φ^1 et Φ^2 de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, ce qui prouve que U_1 est une isométrie linéaire. On construit alors l'application U du théorème par prolongement linéaire de U_1 à $\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2$.

L'application U vérifie (3) de manière évidente. Enfin on va montrer que U est unique : on considère une autre isométrie linéaire V de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ dans $\mathscr{H}$ telle que $\mathrm{U}(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = \mathrm{V}(\alpha_1 \otimes \alpha_2)$ pour tous $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = \bar{1}, 2)$; l'égalité précédente s'écrit aussi $\mathrm{UP}_{\alpha_1 \otimes \alpha_2}\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{VP}_{\alpha_1 \otimes \alpha_2}\mathrm{V}^{-1}$; par linéarité et d'après le premier résultat auxiliaire du § 2.2, on a, pour tout $\Phi \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ $\mathrm{UP}_{\hat{\Phi}}\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{VP}_{\hat{\Phi}}\mathrm{V}^{-1}$, c'est-à-dire $\mathrm{P}_{\widehat{\mathrm{U}(\Phi)}} = \mathrm{P}_{\widehat{\mathrm{V}(\Phi)}}$, d'où $\mathrm{U}(\Phi) = \lambda_\Phi \mathrm{V}(\Phi)$ avec λ_Φ complexe de module 1 ; il suffit désormais de montrer que tous les λ_Φ pour $\Phi \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ sont égaux : on considère d'abord des éléments Φ et Φ' indépendants et on écrit

$$\mathrm{U}(\Phi + \Phi') = \lambda_{\Phi+\Phi'}\mathrm{V}(\Phi + \Phi') = \lambda_\Phi \mathrm{V}(\Phi) + \lambda_{\Phi'}\mathrm{V}(\Phi')\,,$$

ce qui montre que $\lambda_\Phi = \lambda_{\Phi+\Phi'} = \lambda_{\Phi'}$; dans le cas où Φ et Φ' sont deux éléments liés on passe par l'intermédiaire d'un élément Φ'' indépendant de Φ et Φ' ; l'unicité est ainsi démontrée. De plus, si la propriété (*iv*) est vérifiée, U est surjective et par conséquent unitaire.

3

On peut modifier les hypothèses du théorème 1 et établir le théorème 1′ suivant (on garde les notations précédentes).

THÉORÈME 1′. — *Étant donnés des espaces de Hilbert complexes* $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}$ *et des sous-ensembles* $\mathscr{P}_i$ *de* $L(\mathscr{H}_i)$ *contenant* $1_{\mathscr{H}_i}$ *et les opérateurs de la forme* $P_{\alpha_i}P_{\beta_i}$ $(\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i, \beta_i \in \hat{\mathscr{H}}_i)$ $(i = 1, 2)$, *on considère une application* $\bigcirc$ *de* $\mathscr{P}_1 \times \mathscr{P}_2$ *dans* $L(\mathscr{H})$, *telle que* $1_{\mathscr{H}_1} \bigcirc 1_{\mathscr{H}_2} = 1_{\mathscr{H}}$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tous* $P_i \in \mathscr{P}_i$ *et tous* $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$,

$$(1') \qquad \operatorname{Tr}[(P_1 \bigcirc P_2)(P_{\alpha_1} \bigcirc P_{\alpha_2})] = \operatorname{Tr}(P_1P_{\alpha_1})\operatorname{Tr}(P_2P_{\alpha_2})\,;$$

(ii) *pour tous* $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ *et* $\beta_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$

$$(2') \qquad (P_{\alpha_1} \bigcirc P_{\alpha_2})(P_{\beta_1} \bigcirc P_{\beta_2}) = P_{\alpha_1}P_{\beta_1} \bigcirc P_{\alpha_2}P_{\beta_2}\,;$$

(iii) *l'ensemble des opérateurs de la forme* $P_1 \bigcirc P_2$ $(P_i \in \mathscr{P}_i, i = 1, 2)$ *est faiblement total dans* $L(\mathscr{H})$ *;*

(iv) *l'ensemble des opérateurs* $P_{\alpha_1} \bigcirc P_{\alpha_2}$ *est total dans l'espace des opérateurs de rang fini muni de la topologie de la dualité avec* $L(\mathscr{H})$. *Alors il existe une unique application unitaire de* $\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2$ *dans* $\mathscr{H}$ *telle que, pour tous* $P_i \in \mathscr{P}_i$ *et* $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$

$$(3') \qquad P_{\alpha_1} \bigcirc P_{\alpha_2} = P_{U(\alpha_1 \otimes \alpha_2)}\,.$$

Remarque 1′. — Les propriétés (*i*) et (*ii*) montrent l'existence d'une application ∇ de $\hat{\mathscr{H}}_1 \times \hat{\mathscr{H}}_2$ dans $\hat{\mathscr{H}}$.

Démonstration du théorème 1′. — D'après le deuxième résultat auxiliaire, l'ensemble des opérateurs de la forme $P_1 \otimes P_2$ où $P_i \in \mathscr{P}_i$ $(i = 1, 2)$ est faiblement total dans $L(\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2)$. La démonstration se fait alors de manière strictement analogue en remplaçant « P_i projecteur de $L(\mathscr{H}_i)$ » par « $P_i \in \mathscr{P}_i$ » $(i = 1, 2)$, mise à part la démonstration de l'analogue de la formule (7) (notée (7′)) que l'on va prouver. Il suffit de considérer des éléments $A = P_{\alpha_1 \otimes \alpha_2}$ et $A' = P_{\alpha'_1 \otimes \alpha'_2}$ de $\mathscr{E}_0$; on calcule pour tous $\gamma_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}[l(P_{\alpha_1 \otimes \alpha_2})l(P_{\alpha'_1 \otimes \alpha'_2})(P_{\gamma_1} \bigcirc P_{\gamma_2})] &= \operatorname{Tr}[(P_{\alpha_1} \bigcirc P_{\alpha_2})(P_{\alpha'_1} \bigcirc P_{\alpha'_2})(P_{\gamma_1} \bigcirc P_{\gamma_2})] \\ &= \operatorname{Tr}[(P_{\alpha_1}P_{\alpha'_1} \bigcirc P_{\alpha_2}P_{\alpha'_2})(P_{\gamma_1} \bigcirc P_{\gamma_2})] \\ &= \operatorname{Tr}[(P_{\alpha_1}P_{\alpha'_1} \otimes P_{\alpha_2}P_{\alpha'_2})(P_{\gamma_1} \otimes P_{\gamma_2})] \\ &= \operatorname{Tr}[l(P_{\alpha_1}P_{\alpha'_1} \otimes P_{\alpha_2}P_{\alpha'_2})(P_{\gamma_1} \bigcirc P_{\gamma_2})]\,; \end{aligned}$$

On utilise alors (*iv*) pour en déduire la formule (7′).

Il reste à prouver la surjectivité de U : il suffit de remarquer pour cela que la propriété (*iv*) entraîne que la réunion des images des projecteurs $P_{\alpha_1} \bigcirc P_{\alpha_2}$ $(\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i\ i = 1, 2)$ est totale dans $\mathscr{H}$.

Le théorème 1′ est ainsi établi.

4. INTERPRÉTATION PHYSIQUE ET CONCLUSION

Chaque système physique est représenté ici, dans la problématique quantique, par un *système de Von Neuman*, c'est-à-dire un couple $(\mathscr{F}, \theta)$, où $\mathscr{F}$ est un espace de Hilbert complexe séparable et θ un ensemble de mesures spectrales à valeurs dans $L(\mathscr{F})$: les états du système (en conception de Heisenberg) sont représentés par les éléments de $\hat{\mathscr{F}}$ et les observables par les mesures spectrales appartenant à θ (avec l'interprétation statistique usuelle). Le système de Von Neuman est dit *exhaustif* si l'ensemble des projecteurs spectraux des mesures spectrales appartenant à θ est faiblement total dans $L(\mathscr{F})$ (voir 2.2) : cette propriété est interprétée comme signifiant que le système en question admet suffisamment d'observables pour que chaque état soit déterminé par une suite infinie de mesures indépendantes le concernant et portant sur la totalité des observables $R \in \theta$ (*).

Cela étant, le but des théorèmes 1 et 1′ établis ci-dessus est d'apporter une justification théorique à la démarche courante de la problématique quantique selon laquelle le produit tensoriel d'espaces de Hilbert est utilisé pour construire l'espace des états des systèmes physiques complexes (i. e. analysables en plusieurs sous-systèmes) : plus précisément, en reprenant les notations des théorèmes, si l'analyse d'un système physique complexe représenté par un système de Von Neuman exhaustif $(\mathscr{H}, \theta)$ révèle deux sous-systèmes représentés par les systèmes de Von Neuman exhaustifs $(\mathscr{H}_i, \theta_i)$ $(i = 1, 2)$, alors les états du système complexe sont représentés par des éléments de $\widehat{\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2}$ où $\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2$ est une version du produit tensoriel de $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$. Dans ces conditions, l'application $\square$ du théorème 1 (resp. l'application $\bigcirc$ du théorème 1′) associe aux observables R_1 et R_2 de θ_1 et θ_2 l'observable R de θ qui correspond à la mesure conjointe de R_1 sur le système 1 et de R_2 sur le système 2, ce qui, avec l'interprétation statistique habituelle, est exprimé par la propriété (*i*) jointe à la remarque 1, des théorèmes 1 et 1′ ; la propriété (*iii*) des théorèmes 1 et 1′ traduit l'exhaustivité du système $(\mathscr{H}, \theta)$.

Toutefois la justification obtenue ici n'est que partielle, car en particulier on ne sait pas donner d'interprétation physique acceptable à la condition (*ii*) du théorème 1 (resp. 1′). La conjecture suivante où disparaît cette condition serait plus satisfaisante :

CONJECTURE. — Étant donnés des espaces de Hilbert complexes $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}$ et des sous-ensembles $\mathscr{A}_i$ de projecteurs de $L(\mathscr{H}_i)$ contenant $1_{\mathscr{H}_i}$ et faiblement totaux $(i = 1, 2)$, on considère une application ∇ de $\hat{\mathscr{H}}_1 \times \hat{\mathscr{H}}_2$

(*) Nous empruntons cette notion ainsi que la problématique des systèmes de Von Neuman à Ph. Courrège (exposés non publiés au séminaire de la théorie du potentiel 1972-1973 et communications personnelles).

dans $\hat{\mathscr{H}}$ et une application $\square$ de $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ dans $L(\mathscr{H})$, telle que $1_{\mathscr{H}_1} \square 1_{\mathscr{H}_2} = 1_{\mathscr{H}}$, qui vérifient les propriétés suivantes :

(*i*) Pour tous $P_i \in \mathscr{A}_i$ et tous $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$

$$\mathrm{Tr}\,(P_1 \square P_2 P_{\alpha_1 \nabla \alpha_2}) = \mathrm{Tr}\,(P_1 P_{\alpha_1}) \mathrm{Tr}\,(P_2 P_{\alpha_2})\ ;$$

(*iii*) l'ensemble des opérateurs de la forme $P_1 \square P_2$ $(P_i \in \mathscr{A}_i,\ i = 1, 2)$ est faiblement total dans $L(\mathscr{H})$;

(*iv*) l'ensemble des projecteurs d'image $\alpha_1 \nabla \alpha_2$ est total dans l'ensemble des opérateurs de rang fini muni de la topologie de la dualité avec $L(\mathscr{H})$. Alors il existe une unique application unitaire de $\mathscr{H}_1 \underline{\otimes} \mathscr{H}_2$ dans $\mathscr{H}$ telle que, pour tous $\alpha_i \in \hat{\mathscr{H}}_i$ $(i = 1, 2)$ on ait $\alpha_1 \nabla \alpha_2 = U(\alpha_1 \otimes \alpha_2)$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] V. BARGMANN, *J. Math. Phys.*, t. **5**, 1964, p. 862-868.
[*2*] W. HUNZIKER, *Helv. Phys. Acta*, Vol. **45**, 1972, p. 233-236.
[*3*] J. M. JAUCH, B. MISRA, A. G. GIBSON, *Helv. Phys. Acta*, Vol. **41**, 1968, p. 513-527.
[*4*] J. E. ROBERTS and G. RŒSPSTORFF, *Comm. Math. Phys.*, t. **11**, 1969, p. 321-338.
[*5*] E. P. WIGNER, *Group theory*, Academic Press Inc. N. Y., 1959.

(Manuscrit reçu le 5 mai 1975).