Annales de l'I. H. P., section A

P. De Mottoni

A. Tesei

Sur l'équation de Klein-Gordon non linéaire pour distributions tempérées

Annales de l'I. H. P., section A, tome 23, nº 2 (1975), p. 137-145

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__23_2_137_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXIII, n° 2, 1975, p. 137-145. *Physique théorique.*

Sur l'équation de Klein-Gordon non linéaire pour distributions tempérées

par

P. de MOTTONI (1) **et A. TESEI** (1) (2)

1. INTRODUCTION

Une théorie de champ est caractérisée, en général, par la donnée d'une interaction qui, dans l'approche « constructive » [*1*] est une perturbation de l'Hamiltonien libre. Dans les théories de ce type, telle perturbation est assignée au début de manière formelle : la définition rigoureuse de l'Hamiltonien perturbé en tant qu'opérateur essentiellement auto-adjoint est l'un des buts de la théorie, qu'on atteint par le procédé suivant : on introduit d'abord des « cutoffs » pour l'Hamiltonien perturbé, on démontre ensuite qu'on peut considérer une famille de champs approchés, dont l'évolution temporelle est exprimée par les Hamiltoniens approchés ; on va enfin obtenir un champ sans cutoffs moyennant un convenable passage à la limite.

D'autre part, on peut essayer de considérer les champs en tant que solutions d'une équation du mouvement (ce qui dans la théorie des champs classiques est parfaitement possible) ; en ce cas, le rôle de l'interaction est joué par une perturbation non linéaire de l'équation (linéaire) pour le champ libre. Il est évident que dans cette approche aussi on rencontre d'abord un problème de définition, les fonctions non linéaires des distributions n'étant pas, en général, bien définies. On va quand même introduire la notion de solution distribution d'une équation non linéaire de la manière suivante [*2*] : premièrement, on considère, au lieu de l'équation non linéaire (formelle) pour des distributions, une famille d'équations bien définies pour

(1) Collaboratore G. N. A. F. A., C. N. R., Roma.
(2) Istituto Matematico, Facoltà di Ingegneria. Università di Napoli.
Adresse Postale : Piero de Mottoni, Via G. Stampa 125/C. I-00137 Roma (Italie).

des fonctions, paramétrées par un cutoff et renormalisées par des contre-termes dépendant du cutoff ; deuxièmement, on prouve que chaque équation de cette famille possède une solution (unique) ; enfin on élimine le cutoff par un passage à la limite : si les solutions des problèmes approchés convergent, leur limite va être appelée une « solution » du problème.

Cette approche a été utilisée dans l'étude des équations des modèles de Thirring et de Federbush (avec masse) [*2*] ; dans ce travail on va démontrer l'existence de solutions distributions pour le problème de Cauchy relatif à l'équation de Klein-Gordon non linéaire

$$\begin{cases} \square u + m^2 u + u^3 = 0 \\ u(0) = u_0 \,; \qquad u_t(0) = u_1 \,. \end{cases}$$

On va se borner ici à l'étude de solutions distributions à valeurs scalaires. Malgré cette restriction, qui n'intervenait pas dans les cas considérés dans [*2*], on va pouvoir obtenir des résultats interprétables en termes de renormalisation de la constante de couplage, ce qui représente une étape assez significative dans l'étude des champs moyennant les équations différentielles.

On remarque enfin que les résultats de ce travail s'étendent sans peine au cas d'interactions plus générales, à savoir du type $F(u^2)u$.

2. ÉQUATIONS APPROCHÉES

Suivant les idées générales qu'on vient d'exposer, on considère d'abord la famille de problèmes approchés, indexée par l'entier n :

$$(1)_n \begin{cases} \square u_n + m^2 u_n + n^{-b} u_n^3 = 0 \\ u_n(0) = u_{n0} \,; \qquad (\partial u_n/\partial t)(0) = u_{n1} \,, \end{cases}$$

b étant un nombre réel positif.

On va maintenant rappeler un résultat de Jörgens [*3*]. Soit $\mathscr{E}$ l'espace $H^1(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ des couples de fonctions réelles f, g : $f \in H^1(\mathbb{R}^3), g \in L^2(\mathbb{R}^3)$, muni du produit scalaire

$$\frac{1}{2}\left\{ \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f, \frac{\partial}{\partial x_i} f' \right) + m^2(f, f') + (g, g') \right\},$$

où (,) désigne le produit scalaire habituel dans L^2.

Soit $G(t)$ le groupe (anti-unitaire, fortement continu) engendré par l'opérateur auto-adjoint dans $\mathscr{E}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix}$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$.

Alors, pour tout couple $V_{n0} = \begin{pmatrix} u_{n0} \\ u_{n1} \end{pmatrix}$ il existe une seule fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathscr{E} : t \to V_n(t)$, satisfaisant à l'équation intégrale associée à $(1)_n$, c'est-à-dire

$$(2)_n \, V_n(t) = G(t)V_{n0} + \int_0^t G(t-s)\phi_n(V_n(s))ds\,,$$

où

$$\phi_n : V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -n^{-b}u^3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dans le sens qu'on vient de préciser, l'existence et l'unicité de la solution de $(1)_n$ (pour tout n fixé) sont établies ([3]).

En outre, pour tout $V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$ on peut définir la forme

$$E_n(V) = \frac{1}{2}\left(\int \left(\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u \right)^2 + m^2 u(x)^2 + v(x)^2 + \frac{1}{2} n^{-b} u(x)^4 \right) dx \right)$$

qui résulte être continue par rapport à la topologie de $\mathscr{E}$ [3], de façon qu'on peut l'étendre à tout l'espace. On peut alors démontrer que la solution $V_n(t)$ de (2_n) satisfait à la « loi de conservation »

$$E_n(V_n(t)) = E_n(V_{n0}) \qquad (t \geqslant 0)\,.$$

3. PASSAGE À LA LIMITE

Pour effectuer le passage à la limite ($n \to \infty$), il faut permettre quelques définitions. Soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ l'espace de Schwartz [4] ; on va considérer l'espace $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$, somme directe topologique, muni de la topologie produit ; le produit cartésien $\mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$ de $\mathscr{S}'$ (en tant qu'ensemble) par lui-même constitue avec $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$ un couple dual par rapport au crochet $\langle\langle\,,\rangle\rangle$ défini par

$$\left\langle\left\langle \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle = \langle T_1, f_1 \rangle + \langle T_2, f_2 \rangle$$

ou $\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$, $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$ respectivement, et $\langle\,,\rangle$ désigne le crochet entre $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ [5]. On peut alors considérer sur $\mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$ les topologies de la convergence bornée et de la convergence simple, définies respectivement par les familles de semi-normes

$$\mathscr{S}' \times \mathscr{S}' \ni \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \to p_B\left(\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}\right) = \sup_{\binom{f_1}{f_2} \in B} \left| \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \right|,$$

([3]) Notons qu'un théorème analogue dans le cas non commutatif (c'est-à-dire pour des fonctions à valeurs opérationnelles) n'est pas connu.

B étant un ensemble borné de $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$, et

$$\mathscr{S}' \times \mathscr{S}' \ni \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \to q_{f_1,f_2}\left(\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}\right) = \left| \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \right|,$$

ou $f_1, f_2 \in \mathscr{S}$. La topologie de la convergence simple va être appelée dans la suite « topologie faible-$*$ ».

On peut alors poser la définition suivante : une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$, $t \to W(t)$, est une « solution » du problème $(1)_n$ pour $n \to \infty$ avec donnée de Cauchy $W_0 \in \mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$, s'il existe ($\forall t \geqslant 0$) une sous-suite $\{ V_{n_k}(t) \} \subset \{ V_n(t) \} \subset \mathscr{E}$, $V_n(t)$ étant la solution de $(1)_n$, telle que

$$\begin{aligned} V_{n0} &\to W_0 && \text{dans } \mathscr{S}' \times \mathscr{S}' \text{ (faible-}*) \\ V_{n_k}(t) &\to W(t) && \text{dans } \mathscr{S}' \times \mathscr{S}' \text{ (faible-}* \,;\ \forall t \geqslant 0) . \end{aligned}$$

Désignons maintenant par L l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$: c'est un opérateur continu et l'on peut démontrer (voir l'Appendice) qu'il engendre un semi-groupe localement équicontinu sur $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$ [6], qu'on va noter $H(t)$. Soit $H^\wedge(t)$ le semi-groupe adjoint de $H(t)$ défini canoniquement [6] ; c'est un semi-groupe localement équicontinu sur $\mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$ muni de la topologie faible-$*$, et l'on peut se convaincre sans peine que la restriction de $H^\wedge(t)$ à l'espace de fonctions $\mathscr{E}$ coïncide avec $G(t)$. Ainsi, pour tout

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{S} \oplus \mathscr{S} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathscr{E},$$

on a

$$\langle\langle G(t)V, F \rangle\rangle = \langle\langle U, H(t)F \rangle\rangle .$$

Soit maintenant $V_n(t) = \begin{pmatrix} u_n(t) \\ v_n(t) \end{pmatrix}$ la solution de $(2)_n$; on a alors, pour $F \in \mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$:

$$\langle\langle V_n(t), F \rangle\rangle = \langle\langle V_{n0}, H(t)F \rangle\rangle + \int_0^t \langle\langle \phi_n(V_n(s)), H(t-s)F \rangle\rangle \, ds ,$$

d'où

$$| \langle\langle V_n(t), F \rangle\rangle | \leqslant | \langle\langle V_{n0}, H(t)F \rangle\rangle | + n^{-b} \int_0^t | \langle u_n(s)^3, [H(t-s)F]_2 \rangle | \, ds ,$$

où $[F]_2 = f_2$. Or, le crochet $\langle u_n(s)^3, g \rangle$ ($g \in \mathscr{S}$) peut s'estimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} | \langle u_n(s)^3, g \rangle | &\leqslant \left(\int u_n(s, x)^4 dx \right)^{1/2} \left(\int u_n(s, x)^2 g(x)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leqslant (4n^b E_n(V_n(s)))^{1/2} \left(\frac{2}{m^2} E_n(V_n(s)) \right)^{1/2} \sup_x | g(x) | . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\langle\langle V_n(t), F\rangle\rangle| \leqslant |\langle\langle V_{n0}, H(t)F\rangle\rangle| + \text{const.} \sup_x |[H(t-s)F]_2(x)|\, n^{-b/2}E_n(V_{n0})t\,.$$

Maintenant, étant donné que, si $G \in \mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$, l'application

$$G \to \sup_x |[G]_1(x)| + \sup_x |[G]_2(x)|$$

est une semi-norme continue, et que le groupe $H(t)$ est localement équicontinu dans $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$, on s'aperçoit que si V_{n0} tend (dans la topologie faible-$*$ de $\mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$) vers un élément $W_0 \in \mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$, et que la suite $\{n^{-b/2}E_n(V_{n0})\}$ est bornée, la quantité $|\langle\langle V_n(t), F\rangle\rangle|$ demeure bornée dès que F appartient à un ensemble borné de $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$ pour tout t dans un intervalle borné de $\mathbb{R}^+$. En d'autres termes, $V_n(t)$, sous la condition ci-dessus, demeure dans un ensemble borné de $\mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$ et, d'après la compacité des parties bornées de $\mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$ dans la topologie faible-$*$, il s'ensuit qu'elle possède une sous-suite convergeante dans $\mathscr{S}' \times \mathscr{S}'$ (au sens de la topologie faible-$*$).

Ainsi on vient d'établir l'existence d'une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans l'espace des distributions, qui, d'après la définition qu'on a posée avant, est une solution de $(1)_n$, sous la condition que la suite $\{n^{-b/2}E_n(V_{n0})\}$ soit bornée. Ceci exprime une condition de renormalisation liant entre eux le cutoff — à savoir le comportement de V_{n0} — et le « contre-terme » multiplicatif n^{-b}.

Il resterait à démontrer que les solutions qu'on a obtenues ne sont pas des solutions du problème libre correspondant. Cette question, qui en général exige une analyse assez compliquée, a trouvé une réponse satisfaisante dans le cas d'une équation simplifiée [7], où les mêmes méthodes que ci-dessus permettent d'établir l'existence de solutions qui, moyennant un calcul explicite, s'avèrent non triviales. Ce résultat va être résumé dans le paragraphe suivant.

4. NON-TRIVIALITÉ DE LA SOLUTION POUR UN MODÈLE SIMPLIFIÉ

Suivant Dell'Antonio [8] on va considérer le problème

$$\begin{cases} \partial_t u_n = \partial_x u_n - n^{-b}u_n^k \\ u_n(0) = u_{n0}\,. \end{cases}$$

On note par $X = C_0(\mathbb{R}\,; H(V))$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, nulles à l'infini, à valeurs dans l'espace $H(V)$ des opérateurs linéaires continus auto-adjoints sur l'espace de Hilbert V, muni de la norme $u \to |u| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|u(x)\|$, ($\|\,.\,\|$ étant la norme dans $H(V)$) ; on note par $X^+ = C_0(\mathbb{R}\,; H^+(V))$ le cône (fermé, convexe) dans X des fonctions à valeurs dans $H^+(V)$, le cône positif de $H(V)$. On montre aisément [7] que, pour tout u_{n0} dans X^+ (n fixé) il existe une seule fonction de $\mathbb{R}^+$ dans X^+, $t \to u_n(t)$, satisfaisant

$$(u_n(t))(x) = u_{n0}(x + t) - n^{-b} \int_0^t (u_n^k(s))(x + t - s)ds$$

A l'aide des mêmes méthodes que dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, on prouve que, si la suite $\{ n^{-b} | u_{n0} |^{k-1} \}$ est bornée, il existe une sous-suite $u_{n_k}(t)$ de solutions qui converge dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R} ; H^+(V))$, l'espace des distributions tempérées à valeurs dans $H^+(V)$, muni de la topologie faible-$*$/faible opérationnelle [2] [7].

On se pose enfin la question, si les points limites qu'on vient de trouver coïncident avec la solution du problème libre associé

$$\partial_t U = \partial_x U \; ; \qquad U(0) = U_0 \, ,$$

U_0 étant la limite des u_{n0}. En d'autres termes, on se demande si la condition de renormalisation $\sup n^{-b} | u_{n0} |^{k-1} < + \infty$, qui garantit l'existence de la solution, est trop stricte. Or, dans le cas en espèce, la solution du problème pour n fixé peut être calculée explicitement : il se trouve que

$$u_n(t, x) = u_{n0}(x + t) . J(n^{-b}(k - 1)^{-1}t, \; u_0^{k-1}(x + t))^{1/k-1}$$

où $J(z, A) = (zA + 1)^{-1}$. Si les données de Cauchy sont choisies de la forme $u_{n0} = \delta_{c,n} \otimes B$, où $B \in H^+(V)$, $\delta_{c,n} = (2\pi)^{-1/2} n^c \exp(- n^{2c}x^2/2)$, (avec $c \in \mathbb{N}$), alors $u_{n0} \to B \otimes \delta$ (δ étant la mesure de Dirac de support 0) dans la topologie faible-$*$/uniforme de $\mathscr{S}'(\mathbb{R} ; H^+(V))$ [2] [7]. On montre aisément que $\| u_{n0} \| = \| B \| n^c$ et que, pour tout $f \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R})$, l'on a

$$\langle u_n(t), f \rangle = n^c B \int \exp(- x^2/2) \\ [(k - 1)^{-1} n^{-b+(k-1)c} e^{-(k-1)x^2/2} B^{k-1} + 1]^{-1/(k-1)} f(xn^{-c} - t)dx$$

Un calcul élémentaire montre alors que

i) si $(k - 1)c < b$, u_n converge vers la solution libre ;
ii) si $(k - 1)c = b$, u_n converge vers une limite non triviale ;
iii) si $(k - 1)c > b$, u_n converge vers zéro,

la limite non triviale étant

$$\langle u_n(t), f \rangle = Bf(- t) \int dx \, e^{-x^2/2} J(t(k - 1)^{-1} e^{-(k-1)x^2/2}, \; B^{k-1})^{1/k-1}$$

Les cas *i*), *ii*) correspondent à la condition d'existence

$$\sup n^{-b} | u_{n0} |^{k-1} < + \infty$$

On trouve ainsi un résultat non trivial compatible avec la condition de renormalisation ; en fait, celui-ci correspond à la croissance des normes $| u_{n0} |$ la plus rapide que l'on puisse admettre sans violer la condition en question.

Des conditions générales assurant la non-trivialité de la solution vont être données dans un travail en cours de publication [9].

APPENDICE

On va démontrer que $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix}$ engendre un semi-groupe localement équicontinu dans $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$. Pour cela, il suffit de prouver que L engendre un semi-groupe fortement continu dans $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$ [6]. On considère alors $\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$ comme la limite inductive de la famille d'espaces de Hilbert $\{ Y_{\alpha,\beta} \} = \{ X'_{\alpha,\beta} \oplus X_{\alpha,\beta} \}$, où $\alpha \in R^+$ et β est un multi-index ($\beta \in R^{+3}$). Ici $X'_{\alpha,\beta}$ est le complètement de $\mathscr{S}(R^3)$ par rapport au produit scalaire

$$[u, u']_{\alpha,\beta} = ((1 + |x|^2)^\alpha \nabla D^\beta u, \nabla D^\beta u') = \sum_{i=1}^{3} \left((1 + |x|^2)^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta u, \frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta u' \right),$$

$(,)$ étant le produit scalaire habituel dans L^2, D^β un opérateur de dérivation d'ordre β ; d'autre part, $X_{\alpha,\beta}$ est le complètement de $\mathscr{S}(R^3)$ par rapport au produit scalaire

$$(v, v')_{\alpha,\beta} = ((1 + |x|^2)^\alpha D^\beta v, D^\beta v').$$

L'espace $Y_{\alpha,\beta}$ est muni du produit scalaire suivant:

$$\left\langle\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle_{\alpha,\beta} = [u, u']_{\alpha,\beta} + (v, v')_{\alpha,\beta}.$$

Considérons maintenant, sur chaque $Y_{\alpha,\beta}$, l'opérateur $L_{\alpha,\beta}$ défini en tant que fermeture de l'opérateur symétrique $\mathscr{L}$:

$$\begin{cases} D(\mathscr{L}) = \mathscr{S} \oplus \mathscr{S} \\ \mathscr{L}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - m^2 u \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ainsi, il suffit de démontrer que $L_{\alpha,\beta}$ engendre un semi-groupe fortement continu sur $Y_{\alpha,\beta}$ ($\forall \alpha, \beta$) ; or, puisque $L_{\alpha,\beta}$ est la somme de l'opérateur continu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -m^2 & 0 \end{pmatrix}$ et de l'opérateur $L^0_{\alpha,\beta}$ défini par fermeture à partir de $\mathscr{L}^0$:

$$\begin{cases} D(\mathscr{L}^0) = \mathscr{S} \oplus \mathscr{S} \\ \mathscr{L}^0\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}, \end{cases}$$

on va se borner à prouver que $L^0_{\alpha,\beta}$ engendre un semi-groupe fortement continu pour tout α, β. Dans ce but, on va démontrer que :

(*i*) $L^0_{\alpha,\beta}$ est quasi-dissipatif, à savoir qu'il existe $\lambda > 0$ ($\lambda = \lambda(\alpha)$) tel que, $\forall U \in D(L^0_{\alpha,\beta})$:

$$((L^0_{\alpha,\beta} U, U))_{\alpha,\beta} \leqslant \mu((U, U))_{\alpha,\beta} \qquad (\forall \mu > \lambda) ;$$

(*ii*) l'équation

$$(\mu - L^0_{\alpha,\beta})W = V \qquad (\forall \mu > 0)$$

possède une seule solution $W \in D(L^0_{\alpha,\beta})$ pour tout $V \in Y_{\alpha,\beta}$.

Pour prouver (*i*), d'après la définition de $L^0_{\alpha,\beta}$, il suffit de démontrer que, pour tout $U \in \mathscr{S} \oplus \mathscr{S}$,

$$((\mathscr{L}^0 U, U))_{\alpha,\beta} \leqslant \mu((U, U))_{\alpha,\beta}.$$

Soit en effet $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$; on a alors :

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)\right)_{\alpha,\beta} = [v, u]_{\alpha,\beta} + (\Delta u, v)_{\alpha,\beta}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \int (1 + |x|^2)^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{D}^\beta v \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{D}^\beta u\right) dx + \int (1 + |x|^2)^\alpha (\Delta \mathrm{D}^\beta u, \mathrm{D}^\beta v) dx$$

$$= - \sum_{i=1}^{3} \int \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(1 + |x|^2)^\alpha\right] (\mathrm{D}^\beta v)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{D}^\beta u\right) dx$$

$$\leqslant 2\alpha \int (1 + |x|^2)^\alpha \left| \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{D}^\beta u \right| \, |\mathrm{D}^\beta v| \, dx$$

$$\leqslant 2\alpha \left(\int (1 + |x|^2)^\alpha |\mathrm{D}^\beta v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int (1 + |x|^2)^\alpha \left| \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{D}^\beta u \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$= 2\alpha [u, u]_{\alpha,\beta}^{1/2} (v, v)_{\alpha,\beta}^{1/2} \leqslant \alpha \left(\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)\right)_{\alpha,\beta}.$$

Ainsi la propriété est vérifiée avec $\lambda = \alpha$.

Pour démontrer (*ii*), introduisons l'opérateur J_λ $(\lambda > 0)$ sur $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$, défini par

$$\mathrm{J}_\lambda \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{F}_\lambda(\lambda f + g) \\ \lambda \mathrm{F}_\lambda(\lambda f + g) - f \end{pmatrix}$$

où

$$(\mathrm{F}_\lambda u)(x) = \mathcal{F}_\lambda * u = \int \frac{e^{-\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} u(y) dy .$$

On s'aperçoit aisément que $\mathrm{J}_\lambda(\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}) \subset \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$ et que pour tout $\mathrm{U} \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$

$$(\lambda - \mathcal{L}^0)\mathrm{J}_\lambda \mathrm{U} = \mathrm{U}$$

On peut démontrer (voir ci-dessous) que J_λ est borné dans la norme des opérateurs de $\mathrm{Y}_{\alpha,\beta}$ dans $\mathrm{Y}_{\alpha,\beta}$, de manière que l'on peut étendre J_λ à un opérateur $\tilde{\mathrm{J}}_\lambda$ borné sur $\mathrm{Y}_{\alpha,\beta}$. Soit maintenant $\mathrm{V} \in \mathrm{Y}_{\alpha,\beta}$, $\{ \mathrm{U}_n \} \subset \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$, $\mathrm{U}_n \to \mathrm{V}$ dans $\mathrm{Y}_{\alpha,\beta}$. On a bien $\tilde{\mathrm{J}}_\lambda \mathrm{U}_n \to \tilde{\mathrm{J}}_\lambda \mathrm{V}$, $(\lambda - \mathrm{L}^0_{\alpha,\beta})\tilde{\mathrm{J}}_\lambda \mathrm{U}_n = \mathrm{U}_n$; ainsi, $\mathrm{L}^0_{\alpha,\beta}$ étant fermé, il s'ensuit que pour tout $\mathrm{V} \in \mathrm{Y}_{\alpha,\beta}$ il existe un seul $\mathrm{W} = \tilde{\mathrm{J}}_\lambda \mathrm{V}$ tel que $\mathrm{W} \in \mathrm{D}(\mathrm{L}^0_{\alpha,\beta})$ et $(\lambda - \mathrm{L}^0_{\alpha,\beta})\mathrm{W} = \mathrm{V}$. C. Q. F. D.

Pour achever la démonstration il faut prouver que J_λ est borné de $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$ dans $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$ dans la norme des opérateurs sur $\mathrm{Y}_{\alpha,\beta}$: on va prouver ici que F_λ est borné de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ dans la norme des opérateurs sur $\mathrm{X}_{\alpha,\beta}$, le reste de la démonstration étant évident.

Soit $f \in \mathcal{S}$; on veut démontrer que

$$\| (1 + |y|^2)^\alpha \mathrm{D}_y^\beta \mathcal{F}_\lambda * f \leqslant \| c_\lambda \| (1 + |y|^2)^\alpha \mathrm{D}_y^\beta f \|$$

ou $\| \, . \, \|$ désigne la norme dans L^2. On a

$$\| (1 + |y|^2)^\alpha \mathrm{D}_y^\beta \mathcal{F}_\lambda * f \| = \left\| \int (1 + |y|^2)^\alpha \mathrm{F}_\lambda(x - y) \mathrm{D}_x^\beta f(x) dx \right\|$$

$$\leqslant 2^{\alpha/2} \left\| \int (1 + |y - x|^2)^\alpha \mathrm{F}_\lambda(x - y)(1 + |x|^2)^\alpha \mathrm{D}_x^\beta f(x) dx \right\| = \| \hat{\mathcal{F}}_\lambda * ((1 + |x|^2)^\alpha \mathrm{D}_x^\beta f) \|$$

où

$$\hat{\mathcal{F}}_\lambda(z) = 2^{\alpha/2}(1 + |z|^2)^\alpha \mathcal{F}_\lambda(z) = 2^{\alpha/2}(1 + |z|^2)^\alpha \frac{e^{-\lambda|z|}}{|z|} ;$$

mais $\hat{\mathcal{F}}_\lambda(z) \in \mathrm{L}^p(\mathrm{R}^3)$ $(\forall p)$, ce qui prouve l'estimation voulue. C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] *Constructive Quantum Field Theory*, Proceedings of the 1973 International School of Mathematical Physics (Erice), edited by A. S. Wightman and G. Velo (*Lecture Notes in Physics*, Vol. **25**) ; Berlin, Springer, 1973.

[*2*] P. de MOTTONI et A. TESEI, *On the Renormalization of Field Equations for the Thirring and Federbush models*, Proceedings of the 1974, International School of Mathematical Physics, Camerino (to be published).

[*3*] K. JÖRGENS, Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen. *Math. Zeitschr.*, t. **77**, 1961, p. 295-308.

[*4*] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Paris, Hermann, 1966.

[*5*] G. KÖTHE, *Topologische Lineare Räume I*, Berlin, Springer, 1960.

[*6*] T. KOMURA, Semigroups of Operators in Locally Convex Spaces. *J. Funct. Anal.*, t. **2**, 1968, p. 258-296.

[*7*] P. de MOTTONI et A. TESEI, An Explicit Model for the Renormalization of Field Equations. *Journal of Mathematical Physics*, t. **16**, 1975, 1148-1149.

[*8*] G. F. DELL'ANTONIO, *A Model Field Theory*, in Proceedings of the 1973 Schladming Winter School.

[*9*] P. de MOTTONI et A. TESEI, *On Distribution Solutions for non linear differential Equations: Nontriviality Conditions*, Preprint, 1975.

(Manuscrit révisé, reçu le 10 mars 1975)