ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANTONIO GRECO

Discontinuités des rayons et stricte exceptionnalité en magnétohydrodynamique relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, nº 3 (1975), p. 217-227
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_3_217_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XII, n° 3, 1975, p. 217-227.

Section A :
Physique théorique.

Discontinuités des rayons et stricte exceptionnalité en magnétohydrodynamique relativiste (*)

par

Antonio GRECO
Istituto di Matematica, Università di Messina

RÉSUMÉ. — On remarque qu'il n'est pas possible de définir la perturbation de la direction des rayons de façon covariante si l'onde n'est pas exceptionnelle; il est, en effet, possible de lui donner n'importe quelle valeur. Ainsi pour les ondes soniques tant en hydrodynamique relativiste (HDR) qu'en magnétohydrodynamique relativiste (MHDR). On étudie ensuite les discontinuités et les chocs en MHDR dans le cas complètement exceptionnel du fluide incompressible en déterminant des conditions de stricte exceptionnalité.

ABSTRACT. — It is pointed out that it is not possible to give a definite covariant form for the disturbance of the rays if the waves are not exceptional; so for the sonic waves both in relativistic hydrodynamics (HDR) and in relativistic magnetohydrodynamics (MHDR). After this, the first order discontinuities and the shocks are examined in the completely exceptional case of an incompressible fluid and the conditions of strict exceptionality are given.

1. INTRODUCTION

Dans l'étude de la HDR et de la MHDR il a été montré par Lichnerowicz [*1*] que les discontinuités infinitésimales (discontinuités des dérivées

(*) Travail exécuté sous contrat de recherche avec le C. N. R. « Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica ».

premières ou du premier ordre) du champ, à la traversée des fronts d'onde, se propagent le long des rayons qui engendrent les surfaces caractéristiques respectives. Ensuite dans [*1*] on donne de même une évaluation de la discontinuité de la direction des rayons associés aux ondes soniques, qui, en général, ne sont pas exceptionnelles tant en HDR qu'en MHDR. Dans ce travail, aux numéros 2 et 3 on remarque, en reprenant une note récente de Boillat [*2*], que la perturbation de la direction des rayons n'a pas une détermination covariante univoque à moins que l'onde ne soit exceptionnelle. Plus précisément, au numéro 2 on montre que dans le cas de la HDR, en utilisant l'équation de l'onde sonique, on peut choisir une expression du rayon associé dont la perturbation n'est pas nulle, tandis que au numéro 3, pour les ondes magnétosoniques on donnera une expression de la direction du rayon de façon que sa perturbation soit nulle. Ces résultats ne concordent pas avec les déterminations obtenues dans [*1*], où on trouve une perturbation nulle dans le premier cas et différente de zéro dans le deuxième. Ce manque d'unicité, sans doute ennuyeux, qui est essentiellement lié à la dépendance du rayon du quadri-gradient superficiel, est éliminé dans le cas des ondes exceptionnelles, telles que les ondes matérielles de la HDR et les ondes matérielles et d'Alfvén de la MHDR. De même pour les ondes soniques, des conditions d'exceptionnalité ont été données tant en HDR [*2*], [*3*] qu'en MHDR [*4*].

Dans le numéro 4 on reprend la MHDR dans le cas complètement exceptionnel [*4*] et on étudie les discontinuités infinitésimales en relevant certaines différences notables qui se présentent par rapport au cas général. Dans le numéro 5 enfin on cherche les conditions de stricte exceptionnalité, c'est-à-dire les conditions pour lesquelles chaque choc est nécessairement caractéristique. On démontre que cela se passe pour le fluide incompressible, pourvu qu'une certaine fonction de l'entropie, en général arbitraire, se réduise à une constante.

2. FLUIDE PARFAIT RELATIVISTE

Le système de la HDR, constitué par les équations de conservation de l'énergie-impulsion et l'équation de conservation du nombre spécifique de particules, peut s'écrire :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \nabla_\alpha(ru^\alpha) = 0, \tag{1}$$

complété par l'équation thermodynamique

$$c^2 df = \frac{1}{r}\, dp + T dS \tag{2}$$

qui permet de déduire des équations (1) l'équation dite de flot adiabatique

$$u^\alpha \partial_\alpha S = 0 \qquad (\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha). \tag{3}$$

Nous avons indiqué avec

$$T^{\alpha\beta} = c^2 rfu^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}$$

le tenseur énergie-impulsion, ∇_α est la dérivation covariante par rapport à la métrique $g_{\alpha\beta}$ supposée donnée, c la vitesse de la lumière, r la densité propre de matière (correspondant au nombre spécifique de particules), $f = 1 + i/c^2$ l'indice du fluide, i étant l'enthalpie spécifique, u^α la quadri-vitesse unitaire ($u^\alpha u_\alpha = 1$), p la pression. En outre dans l'équation (2) T indique la température propre du fluide et S son entropie spécifique. Comme il est bien connu il y a deux espèces de surfaces caractéristiques, supposées mutuellement exclusives, qui correspondent respectivement à

les ondes d'entropie ou de matière

$$U \equiv u^\alpha \phi_\alpha = 0 \qquad (\phi_\alpha \equiv \partial\phi/\partial x^\alpha),$$

les ondes soniques

$$(4) \qquad P \equiv (\bar{\gamma} - 1)U^2 + G = 0 \qquad \left(G \equiv g^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta \quad , \quad \bar{\gamma} = c^2 fr'_p\right)$$

$\phi(x^\alpha)$ = constante, étant l'équation de la surface d'onde Σ.

Pour les premières, si δ indique l'opérateur de discontinuité infinitésimale, on a $\delta p = \phi_\alpha \delta u^\alpha = u_\alpha \delta u^\alpha = 0$, δS et deux composantes de δu^α pouvant être arbitraires. Elles sont multiples d'ordre 3 et, comme le système (1) est conservatif, elles sont exceptionnelles [5].

Les ondes soniques, au contraire, ne sont pas en général exceptionnelles et les discontinuités associées sont données par :

$$\delta S = 0 \quad , \quad c^2 rf U\delta u^\alpha = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\phi_\beta \delta p,$$

δp étant arbitraire. Le rayon correspondant R^β, défini par $R^\beta = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial P}{\partial \phi_\beta}$, peut s'écrire, en utilisant $P = 0$, sous la forme

$$R^\beta = (\bar{\gamma} - 1)Uv^\beta$$

où

$$(5) \qquad v^\beta = u^\beta - \frac{U}{G}\phi^\beta$$

est la composante de u^β tangente à la surface d'onde Σ.

En tenant compte de l'équation (4) on peut montrer [1] que $\delta(fv^\beta) = 0$, d'où on tire

$$\delta R^\beta = U\left\{\bar{\gamma}'_p - \frac{\bar{\gamma} + 1}{c^2 rf}(\bar{\gamma} - 1)\right\}\delta p v^\beta.$$

On en conclut que la direction du rayon n'est pas perturbée par l'opérateur δ, c'est-à-dire

δR^β proportionnel à R^β.

En effectuant la perturbation on a supposé $\delta\phi_\alpha = 0$, ce qui vient du fait que $\phi(x^\alpha)$, étant solution de $P = 0$, est supposée de classe C^2, et que les potentiels $g_{\alpha\beta}$ sont continus au premier ordre [6].

Maintenant, dans les mêmes hypothèses, nous pouvons écrire

$$R'^\beta = (\bar{\gamma} - 1)Uu^\beta + \phi^\beta$$

qui se réduit à R^β sur Σ comme il est facile de le voir en tenant compte des équations (4) et (5). En évaluant $\delta R'^\beta$ on trouve

$$\delta R'^\beta = \left\{ U\left(\bar{\gamma}'_p - \frac{\bar{\gamma}^2 - 1}{c^2 rf}\right) v^\beta + \left(\frac{2\bar{\gamma}}{c^2 rf} - \frac{\bar{\gamma}'_p}{\bar{\gamma} - 1}\right)\phi^\beta \right\} \delta p$$

qui n'est pas colinéaire à R'^β, ce qui montre que la direction du rayon n'est pas conservée. Cette ambiguïté disparaît si on se place dans les conditions thermodynamiques qui assurent l'exceptionnalité des ondes soniques. On sait que cela se passe dans le cas extrême du fluide incompressible [3] :

$$c^2 rf - 2p = \theta(S). \tag{6}$$

Dans ce cas les ondes soniques coïncident avec les ondes gravitationnelles : $G = 0$, et les rayons associés, géodésiques des surfaces isotropes, gardent leur direction après la perturbation. Pour analyser ce phénomène rappelons le critère général d'exceptionnalité, qui en forme covariante [2] s'écrit :

$$\delta\Psi = \phi_\alpha \phi_\beta \ldots \phi_\rho \delta G^{\alpha\beta\ldots\rho} \equiv 0 \tag{a}$$

si

$$\Psi = G^{\alpha\beta\ldots\rho}\phi_\alpha\phi_\beta \ldots \phi_\rho = 0 \tag{b}$$

est l'équation de la surface d'onde Σ.

Si R^β est un vecteur qui a la direction du rayon, en écrivant

$$R'^\beta = R^\beta + \psi q^\beta,$$

on a, quel que soit le vecteur q^β, $R'^\beta = R^\beta$ sur Σ en vertu de (*b*), et, si l'onde est exceptionnelle, de même sur Σ

$$\delta R'^\beta = \delta R^\beta + \psi \delta q^\beta + q^\beta \delta\psi = \delta R^\beta$$

en vertu de (*b*) et de (*a*). Si, au contraire, (*a*) n'est pas une conséquence de (*b*), c'est-à-dire si l'onde n'est pas exceptionnelle, on a encore sur Σ, $R'^\beta = R^\beta$, mais il vient

$$\delta R'^\beta = \delta R^\beta + q^\beta \delta\psi, \tag{c}$$

avec $\delta\psi \neq 0$ bien déterminé, et, en choisissant convenablement q^β on peut donner à $\delta R'^\beta$ la valeur qu'on veut. On peut ainsi énoncer la propriété suivante caractéristique des ondes exceptionnelles : sont exceptionnelles les ondes pour lesquelles la discontinuité infinitésimale des rayons associés a une détermination covariante univoque.

En concluant cette section, nous observons que si le système des équations du champ est conservatif, toutes les ondes multiples sont exceptionnelles [5] de façon que, s'il y a des ondes qui ne le sont pas, elles sont nécessairement simples. Dans ce cas toutes les discontinuités sont connues en fonction d'une d'entre elles. En l'indiquant avec δu (pour les ondes soniques nous avons pris δp) on peut écrire la relation (c) sous la forme

$$\delta R'^{\beta} = F^{\beta}\delta u + Fq^{\beta}\delta u \qquad (\delta\psi = F\delta u)$$

où F^{β} et $F \neq 0$ sont des fonctions tensorielles du champ et du quadri-gradient superficiel déterminées. En choisissant $q^{\beta} = -F^{\beta}/F$ on trouve $\delta R'^{\beta} = 0$.

En utilisant cette observation, dans le numéro 3, nous déterminerons un vecteur ayant sur les surfaces d'onde magnétosoniques la direction du rayon et dont la perturbation est nulle.

3. MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

Il s'agit ici d'étudier l'évolution d'un fluide parfait chargé de conductivité infinie. Les équations du champ peuvent s'écrire

$$(7) \qquad \nabla_{\alpha}T^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \nabla_{\alpha}(ru^{\alpha}) = 0 \quad , \quad \nabla_{\alpha}(u^{\alpha}b^{\beta} - u^{\beta}b^{\alpha}) = 0$$

avec $T^{\alpha\beta} = (c^2rf + b^2)u^{\alpha}u^{\beta} - qg^{\alpha\beta} - b^{\alpha}b^{\beta}$ et où $b^2 = -b^{\alpha}b_{\alpha}$, $b^{\alpha} = \sqrt{\mu}F^{*\alpha\beta}u_{\beta}$, $F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}E^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$ étant le dual du tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$, μ la perméabilité magnétique du fluide supposée constante et où on a posé $q = p + \frac{1}{2}b^2$. Les autres symboles gardent la même signification du numéro 2 ainsi que les deux premières équations (7), la troisième constituant les équations de Maxwell dans les conditions considérées. On suppose encore valable l'équation thermodynamique (2), qui, dans ce cas aussi, permet de déduire à partir des équations (7) l'équation (3). Directement des équations (7), en effectuant la substitution ∂_{α}, $\nabla_{\alpha} \to \phi_{\alpha}\delta$ et en se rappelant que $\delta\phi_{\alpha} = 0$, on tire

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \delta W^{\alpha} = 0 & W^{\alpha} = (c^2rf + b^2)Uu^{\alpha} - q\phi^{\alpha} - Bb^{\alpha} \\ \delta(rU) = 0 & \\ \delta M^{\alpha} = 0 & M^{\alpha} = Bu^{\alpha} - Ub^{\alpha} \qquad (B \equiv b^{\alpha}\phi_{\alpha}), \end{array} \right.$$

et on a dans ce cas trois espèces de surfaces caractéristiques

$U = 0 \quad \to \quad$ ondes matérielles

$A \equiv (c^2rf + b^2)U^2 - B^2 = 0 \quad \to \quad$ ondes d'Alfvén

$P \equiv c^2rf(\bar{\gamma} - 1)U^4 + (c^2rf + \bar{\gamma}b^2)U^2G - B^2G = 0 \to$ ondes magnétosoniques,

qu'on suppose mutuellement exclusives.

Il est bien connu qu'on peut avoir une discontinuité infinitésimale de l'entropie à la traversée des ondes matérielles et que à la traversée des ondes d'Alfvén une telle discontinuité peut se présenter pour les composantes tangentielles de la vitesse et du champ magnétique, tandis que leurs composantes normales et la pression peuvent être discontinues au premier ordre à la traversée des ondes magnétosoniques. On a déjà montré [*4*] que les ondes matérielles et les ondes d'Alfvén sont toujours exceptionnelles, tandis que les ondes magnétosoniques deviennent telles seulement si on a $\bar{\gamma} = 1$. Dans ce cas de l'équation (2) on tire l'équation (6) et les ondes magnétosoniques, qui coïncident avec les ondes gravitationnelles, se propagent avec la vitesse limite c : on appelle incompressibles les fluides qui obéissent à la loi extrême (6).

En général, quand $P = 0$, on peut avoir $\delta p \neq 0$ et on peut donner toutes les autres discontinuités en fonction de δp. Les rayons associés, définis par $R^\beta = \frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial \phi_\beta}$ admettent l'expression

$$R^\beta = \eta v^\beta + \zeta t^\beta$$

avec

$$\eta = c^2 rf(\bar{\gamma} - 1)U^3 + \frac{1}{2}(c^2 rf + \bar{\gamma} b^2)UG \quad , \quad \zeta = -\frac{1}{2}BG$$

et où v^β est donnée par (5) et

$$t^\beta = b^\beta - \frac{B}{G}\phi^\beta$$

est la composante tangentielle à la surface d'onde Σ du champ magnétique b^β. En utilisant $P = 0$, et par conséquent $U \neq 0$ et $A \neq 0$, dans [*1*] on montre que le vecteur

$$Q^\beta = -c^2 r^2 U^2 X^\beta + 2\tau\frac{B}{U}QM^\beta$$

est colinéaire à R^β. Ici $X^\beta = \frac{1}{U}(Av^\beta + BM^\beta)$ est la composante tangentielle à la surface d'onde Σ de W^β, $\tau = f/r$ est le volume dynamique et on a posé

$$Q = \frac{1}{\tau^2}\left(c^2 rfU^2 + \frac{1}{2}b^2 G\right).$$

Évidemment X^β et M^β ne sont pas colinéaires, et comme rU, X^β, M^β ains que fB (comme on peut le vérifier facilement) sont invariants par δ, il résulte

$$\delta Q^\beta = 2\tau\frac{B}{U}\delta QM^\beta.$$

En utilisant encore $P = 0$, on peut exprimer δQ en termes de $\delta p \neq 0$ comme il suit [*1*] :

$$\delta Q = -\frac{1}{\tau^2}\frac{G}{c^2 rf}\{c^2 rf - (\bar{\gamma} - 1)b^2\}\,\delta p.$$

Ainsi

$$\delta Q^{\beta} = \nu M^{\beta} \delta p \quad , \quad \nu = -\frac{1}{\tau}\frac{B}{U}\frac{2G}{c^2 rf}\{ c^2 rf - (\bar{\gamma} - 1) b^2 \}$$

n'est pas proportionnel à Q^{β} et on en déduit que la direction du rayon n'est pas conservée. Suivant l'observation à la fin du numéro 2, nous écrivons

$$Q'^{\beta} = Q^{\beta} + P q^{\beta}.$$

Quel que soit q^{β}, sur Σ, $Q'^{\beta} = Q^{\beta}$ et ainsi colinéaire à R^{β}, tandis que, comme [*4*]

$$\delta P = \mu \delta p \quad , \quad \mu = \left(c^2 rf \bar{\gamma}'_p - 3\bar{\gamma}^2 + 4\bar{\gamma} - 1\right) U^4 + \left(b^2 \bar{\gamma}'_p - \bar{\gamma} + 1\right) U^2 G - 2\frac{\bar{\gamma} - 1}{c^2 rf} B^2 G,$$

si on choisit $q^{\beta} = -\frac{\nu}{\mu} M^{\beta}$, il en résulte $\delta Q'^{\beta} = 0$, en contradiction avec le résultat précédent. On sort de cette ambiguïté, comme on le verra dans la prochaine section, si on se place dans les conditions de complète exceptionnalité pour le système (7).

4. DISCONTINUITÉS POUR LE FLUIDE INCOMPRESSIBLE

Nous considérons désormais valable l'équation (6) et par conséquent $\bar{\gamma} = 1$.

Dans ces conditions les surfaces d'onde sont données par

$$U = 0 \quad , \quad A = 0 \quad , \quad G = 0$$

qu'on suppose mutuellement exclusives, et le système est complètement exceptionnel. Observons d'abord que $A = 0$ entraîne $P = 0$. Ainsi les ondes d'Alfvén deviennent doubles et à leur traversée, à la différence du cas général, on peut avoir une discontinuité infinitésimale non seulement des composantes tangentielles à la surface du champ magnétique et de la quadri-vitesse, mais encore de leurs composantes normales et de la pression. Toutes les discontinuités dépendront dans ce cas de deux paramètres et, si on exclut le cas particulier où ϕ^{α} est une combinaison linéaire de b^{α} et de u^{α} (ce qui dans le repère propre se traduit par $\vec{b} \parallel \vec{n}$) on peut les exprimer de la façon suivante :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(G - U^2 + \frac{B^2}{b^2}\right)\delta u^{\alpha} = \frac{1}{b^2}\left\{ U(\phi^{\alpha} - U u^{\alpha}) - \frac{B}{U}\frac{G}{c^2 rf} b^{\alpha} \right\} \delta p + K E^{\alpha\lambda\mu\nu} u_{\lambda} b_{\mu} \phi_{\nu} \\ &U \delta b^{\alpha} = B \delta u^{\alpha} + (U b^{\alpha} - B u^{\alpha}) \frac{\delta p}{c^2 rf} \quad , \quad \delta S = 0 \end{aligned} \right.$$

où δp et K sont les paramètres susdits. Les formules (9) s'obtiennent directement à partir des équations (8) en y faisant $\bar{\gamma} = 1$ et en utilisant $A = 0$ et par conséquent $U \neq 0$ et $G \neq 0$. En outre le coefficient de δu^α dans la (9_1) est toujours différent de zéro (négatif) pouvant s'annuler seulement dans le cas particulier que nous avons exclu.

Pour ce qui concerne la direction des rayons associés, elle est invariante par l'opérateur δ comme dans le cas général. Pour le montrer, décomposons A dans ses deux facteurs

$$(10) \quad A = A_I \cdot A_{II} \quad , \quad A_I = \sqrt{c^2rf + b^2}U + B \quad , \quad A_{II} = \sqrt{c^2rf + b^2}U - B.$$

Supposons que $A = 0$ découle de $A_I = 0$. Alors les rayons associés sont donnés par $R_I^\alpha = \partial A_I / \partial \phi_\alpha = \sqrt{c^2rf + b^2}u^\alpha + b^\alpha$. Pour en évaluer la perturbation observons avant tout qu'en contractant les équations (9) par b_α et en en faisant combination on obtient $\delta q = 0$, tandis que, de l'équation (6), comme $\delta S = 0$, on tire $\delta(c^2rf - 2p) = 0$. Ces deux dernières nous donnent $\delta(c^2rf + b^2) = 0$ et la perturbation de R_I^α peut s'écrire :

$$\delta R_I^\alpha = \sqrt{c^2rf - b^2}\delta u^\alpha + \delta b^\alpha.$$

En multipliant cette relation par le facteur $\left(G - U^2 + \frac{B^2}{b^2}\right)U \neq 0$ et en utilisant l'équation (9) on a, compte tenu de $A_I = 0$,

$$\delta R_I^\alpha = \left(b^\alpha - \frac{B}{U}u^\alpha\right)\frac{\delta p}{c^2rf},$$

qui, utilisant encore $A_I = 0$, nous donne, comme on voulait,

$$\delta R_I^\alpha = R_I^\alpha \frac{\delta p}{c^2rf}.$$

De façon pareille on peut montrer l'invariance par l'opérateur δ du rayon associé au facteur A_{II} donné par $R_{II}^\alpha = \sqrt{c^2rf + b^2}u^\alpha - b^\alpha$.

Considérons maintenant les ondes magnétosoniques $G = 0$. A leur traversée toutes les discontinuités sont connues en termes d'une d'entre elles comme dans le cas général, mais naturellement les liaisons fonctionnelles sont changées. Si, par exemple, nous prenons comme paramètre δp, en tenant compte de $A \neq 0$ et $U \neq 0$, nous trouvons :

$$\delta S = 0 \quad , \quad \delta U = -\frac{U}{c^2rf}\delta p \quad , \quad \delta B = -\frac{B}{c^2rf}\delta p \quad , \quad \frac{1}{2}\delta b^2 = \left(b^2 - \frac{B^2}{U^2}\right)\delta p.$$

Les rayons associés, donnés par les géodésiques des surfaces isotropes, sont évidemment invariants par l'opérateur δ.

Les ondes matérielles, enfin, données par $U = 0$, $\delta S \neq 0$, ne présentent pas de différences substantielles par rapport au cas général.

5. EXCEPTIONNALITÉ STRICTE POUR LE FLUIDE INCOMPRESSIBLE

On sait [5] que, le système étant complètement exceptionnel, un choc initial peut se résoudre par une succession de chocs caractéristiques.

On se demande s'il y a d'autres possibilités, c'est-à-dire si les relations de Rankine-Hugoniot admettent d'autres solutions. Dans le cas contraire toutes les surfaces de choc sont caractéristiques comme pour les champs linéaires et le système est dit *strictement exceptionnel* [7].

Pour le système (7) les relations de Rankine-Hugoniot nous donnent l'invariance par le choc des deux vecteurs W^α et M^α et de l'invariant rU :

$$(11) \qquad [W^\alpha] = 0 \quad , \quad [M^\alpha] = 0 \quad , \quad [rU] = 0.$$

Ici $[g]$ indique la discontinuité d'une quantité g quelconque à la traversée de la surface de choc Σ, différence entre les valeurs que g prend dans l'état postérieur au choc g_1, et l'état antérieur au choc g_0 : $[g] = g_1 - g_0$. En outre nous désignerons par un tilde la valeur moyenne : $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g_1 + g_0)$.

Nous montrerons que le système (7) est strictement exceptionnel si le fluide est incompressible pourvu que dans l'équation (6) $\theta(S) = 2p^*$ $=$ constante > 0 (que l'on peut aussi choisir nulle [8]) :

$$(6') \qquad c^2 rf = 2(p + p^*).$$

On sait que cette condition est nécessaire comme on le voit dans le cas de la HDR [5]. On voit tout de suite que les équations (11) sont satisfaites avec $\tilde{U} = 0$ et l'on a dans ce cas les chocs de contact, qui ne présentent pas des différences substantielles par rapport au cas général.

Écartée désormais cette possibilité (ce qui emplique $U \neq 0$), si on contracte l'équation (11_2) par ϕ_α on obtient :

$$(12) \qquad [B^2 - b^2U^2] = 0,$$

qui, en introduisant A et compte tenu de l'équation (11_3), peut s'écrire de façon équivalente sous la forme

$$(12') \qquad [A] - c^2r^2U^2[\tau] = 0.$$

En contractant l'équation (11_1) par ϕ_α, compte tenu de l'équation (12), on a

$$(13) \qquad c^2r^2U^2[\tau] - [q]G = 0.$$

Le produit $W^\alpha M_\alpha$, en vertu des relations précédentes, nous donne

$$(14) \qquad [fB] = 0,$$

et enfin, le produit $W^\alpha W_\alpha$, compte tenu de (6') et de

$$r^2U^2\left[\frac{b^2}{r^2}\right] - f^2B^2\left[\frac{1}{f^2}\right] = 0, \tag{15}$$

qui suit des équations (12), (11_3) et (14), nous donne :

$$\left(p^* r^2 U^2 + \frac{1}{2} f^2 B^2\right)[\tau] + \frac{\tilde{q}}{c^2}[q]G = 0. \tag{16}$$

Par comparaison avec l'équation (13) on tire :

$$\left\{(p^* + \tilde{q})r^2U^2 + \frac{1}{2}f^2B^2\right\}[\tau] = 0 \Rightarrow [\tau] = 0.$$

Il découle de l'équation (13) ou $G = 0$, ou bien $[q] = 0$.

Le premier cas nous donne les chocs isotropes, tandis que le deuxième, en vertu de l'équation (12'), nous donne $[A] = 0$, c'est-à-dire

$$2(q + p^*)\tilde{U}[U] - \tilde{B}[B] = 0. \tag{17}$$

D'autre part, d'après l'équation (11_3),

$$\tilde{r}[U] + \tilde{U}[r] = 0. \tag{18}$$

De plus, de $[fB] = \tau[rB] = 0$ on tire :

$$\tilde{r}[B] + \tilde{B}[r] = 0. \tag{19}$$

Nous avons ainsi un système linéaire homogène pour les trois inconnues $[r]$, $[U]$ et $[B]$, dont le déterminant est donné par le produit $\tilde{A}_I . \tilde{A}_{II}$. Si $\tilde{A}_I . \tilde{A}_{II} \neq 0$ on a alors $[r] = [U] = [B] = 0$, tandis que des équations (11_1) et (11_2) on tire $[u^\beta] = [b^\beta] = 0$ et le choc est nul. La seule possibilité est donc $\tilde{A}_I . \tilde{A}_{II} = 0$, et, comme $[A] = 0$, on trouve bien les chocs d'Alfvén.

En résumant on peut construire le schéma suivant :

$U = 0 \rightarrow$ chocs de contact

$\left.\begin{matrix} U \neq 0 \\ \theta = \text{const.} \end{matrix}\right\} \rightarrow [\tau] = 0 \rightarrow [A] = 0$
- $\nearrow G = 0 \rightarrow$ chocs isotropes
- $\searrow [q] = 0$
  - $\nearrow A = 0 \rightarrow$ chocs d'Alfvén
  - $\searrow A \neq 0 \rightarrow$ le choc est nul.

Remarquons en outre que, les surfaces de choc étant toutes caractéristiques, chaque quantité qui est continue au premier ordre est conservée par le choc et *vice versa* [*4*].

Pour conclure nous observons que la stricte exceptionnalité est plus restrictive que la complète exceptionnalité. Par exemple, tant dans le cas de la HDR que de la MHDR on atteint la deuxième propriété si le fluide est incompressible : $c^2rf - 2p = \theta(S)$, la première si, de plus, $\theta(S)$ se réduit à une constante.

RÉFÉRENCES

[1] A. LICHNEROWICZ, *Relativistic Fluid Dynamics*, C. I. M. E., Bressanone 7/16 giugno 1970, p. 87. Ed. Cremonese, Roma, 1971.

[2] G. BOILLAT, *J. Math. Phys.*, t. **14**, n° 7, July 1973, p. 973.

[3] Y. CHOQUET BRUHAT, *Journ. Math. Pures et Appl.*, t. **48**, 1969, p. 117.

[4] A. GRECO, *Acc. Naz. dei Lincei*, S. VIII, vol. LII, fasc. 4, aprile 1972.

[5] G. BOILLAT, *Comptes Rendus*, t. **274**, série A, 1972, p. 1018; t. **275**, série A, 1972, p. 1255.

[6] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

[7] G. BOILLAT, *Comptes Rendus*, t. **278**, série A, 1974, p. 909; *A relativistic fluid for which shock fronts and wave surfaces are the same* (à paraître).

[8] A. H. TAUB, *Commun. math. Phys.*, t. **29**, 1973, p. 79.

(Manuscrit reçu le 12 novembre 1974)