ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

CHRISTIANE MARTIN

Sur certaines représentations locales de l'algèbre de Lie $so(4,1)$ et de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré

Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, nº 4 (1974), p. 373-402

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_4_373_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XX, n° 4, 1974, p. 373-402.

Section A :
Physique théorique.

Sur certaines représentations locales de l'algèbre de Lie so(4,1) et de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré

par

Christiane MARTIN
Laboratoire de Physique-Mathématique,
Faculté des Sciences Mirande, Université de Dijon, 21000 Dijon (France)

SOMMAIRE. — On étudie et construit d'abord des représentations de l'algèbre de Lie so(4,1) dans un espace vectoriel complexe algébrique, puis des représentations locales dans des espaces de Hilbert qui donnent une réalisation hilbertienne de certaines des précédentes. Par contraction de ces dernières on obtient des représentations locales de l'algèbre de Lie de Poincaré.

ABSTRACT. — We study and construct some representations of the Lie algebra so(4,1) first in an algebraic complex vector space and then in dense subsets of Hilbert spaces. Some in the first class can be realized in the second class. Now contracting, we obtain local representations of the Poincaré Lie algebra.

INTRODUCTION

Si on admet que l'univers doit être homogène et uniforme dans le temps comme dans l'espace, les seules réalisations possibles en sont l'espace-temps plat de Minkowski (dont le groupe de symétrie est le groupe de Poincaré) et les espaces riemanniens à 4 dimensions, à courbure constante : ce sont les deux espaces de De Sitter, l'un à courbure positive, dont le groupe de mouvement est SO(4,1), l'autre à courbure négative, dont le groupe de mouvement est SO(3,2). Ainsi dans le cadre de la relativité générale, le groupe de De Sitter jouerait un rôle analogue à celui du groupe de Poincaré en relativité restreinte. D'autre part, si nous faisons tendre la courbure d'un espace de De Sitter vers 0 (ce qui donne à la limite l'espace-temps de Minkowski), l'algèbre de Lie du groupe de De Sitter correspondant se contracte au sens d'Inonü-Wigner [*11*] [*12*] en l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. Le fait d'obtenir l'algèbre de Lie de Poincaré comme une « limite » d'algèbres de Lie d'un groupe de De Sitter et la non commutativité des « impulsions » dans les algèbres de Lie de SO(4,1) et SO(3,2) ont suggéré à certains auteurs [*19*] [*20*] de définir une mécanique plus fine dite « subquantique ». On aurait donc une quantification des impulsions qui donnerait de très bons résultats pour les problèmes de très haute énergie.

Nous mentionnons aussi l'interprétation du groupe SO(4,1) comme groupe dynamique dans [*18*], sans oublier que SO(4,1) est le groupe dynamique de l'atome d'hydrogène non relativiste; certaines représentations unitaires irréductibles de SO(4,1) réduites sur SO(4) sont importantes car elles donnent tous les états d'énergie de l'atome d'hydrogène non relativiste : ce sont les représentations échelles (ladder), les $v_{0,\sigma}$ de Dixmier [*1*].

Tout ceci montre donc l'importance dans un premier temps des représentations unitaires de SO(4,1) et dans un second temps, des représentations locales de son algèbre de Lie. En effet depuis le théorème négatif de Jost [*21*] pour l'obtention d'un spectre de masse, l'intérêt en physique des représentations d'algèbre de Lie n'a fait que croître. En particulier les représentations locales de l'algèbre de Lie sl(2) ont été étudiées dans [*6*] [*7*] et sont maintenant utilisées dans les trajectoires de Regge [*16*]. Cet article se divise en trois parties :

Dans une première partie, nous construisons et classons toutes les représentations de l'algèbre de Lie de SO(4,1) dans un espace vectoriel complexe algébrique satisfaisant 2 hypothèses h_1 et h_2. Nous donnons les principaux résultats concernant ces représentations (en particulier leur réduction sur une sous-algèbre k de type compact, maximale) sans les démonstrations qui ont été faites dans [*5c*]. Le choix des deux hypothèses h_1 et h_2 a été fait d'une part, parce qu'elles sont vérifiées par les représentations de l'algèbre de Lie de SO(4,1) obtenues à partir des unitaires [*1*] [*2*] et d'autre part par analogie aux hypothèses faites par Miller [*7*] dans la recherche de représentations de l'algèbre de Lie sl(2).

Dans une deuxième partie nous construisons toute une série de représentations locales de l'algèbre de Lie de SO(4,1) dans un Hilbert. Le choix de l'Hilbert ainsi que la construction de cette série de représentations locales ont été faits en vue de les contracter pour obtenir des représentations locales de l'algèbre de Lie de Poincaré (d'où l'intérêt d'avoir des représentations locales de l'algèbre de Lie de SO(4,1) décomposées par rapport à une sous-algèbre isomorphe à l'algèbre de Lie de Lorentz).

Un autre intérêt de cette nouvelle série de représentations locales est qu'elles (ou certaines sous-représentations) réalisent dans un Hilbert sur un domaine dense commun et stable les représentations de l'algèbre de Lie de SO(4,1) appartenant à plusieurs sous-classes de la classification obtenue dans la partie I (voir § 2 de la partie II). Elles nous permettent aussi d'en déduire que certaines représentations de la classification de la partie I sont intégrables en des représentations hilbertiennes du recouvrement universel de SO(4,1). Enfin elles donnent de nombreux exemples de modules d'Harish-Chandra indécomposables et Schur irréductibles.

La troisième partie est consacrée aux contractions des représentations locales de l'algèbre de Lie de SO(4,1) obtenues dans la partie II. Outre les représentations de l'algèbre de Lie de Poincaré provenant de certaines unitaires du groupe (celles de masse positive non nulle et de spin discret) nous obtenons d'autres représentations locales de l'algèbre de Lie de Poincaré (en particulier des représentations de masse complexe).

PRÉLIMINAIRES. NOTATIONS

1. Notations.
Rappels sur le groupe de De Sitter SO(4,1) et son algèbre de Lie.

Soit $SO_0(4,1)$ la composante connexe de l'identité du groupe SO(4,1), groupe des transformations linéaires de $\mathbb{R}^5$ conservant la forme quadratique $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$. Soit G le groupe de recouvrement universel de $SO_0(4,1)$ (recouvrement à 2 feuillets) réalisé de la façon suivante [2] [4] :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \; a, b, c, d \in Q \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{r} \bar{a}b = \bar{c}d, \, |a|^2 - |c|^2 = 1 \\ |d|^2 - |b|^2 = 1 \end{array} \right\}$$

où Q est le corps des quaternions, $\bar{x}$ le quaternion conjugué de x et $|x|^2 = (x \cdot \bar{x})$.

Nous désignerons par so(4,1) l'algèbre de Lie complexifiée de G. Nous noterons $\{ L, X_\alpha, X_{-\alpha}, L', X_{-\beta}, X_\beta, X_\gamma, X_{-\gamma}, X_\delta, X_{-\delta} \}$ une base de Weyl de so(4,1) dont la table de multiplication est donnée dans [1]. $\{ L, X_\alpha, X_{-\alpha} \}$ (resp. $\{ L', X_{-\beta}, X_\beta \}$) est une base de Weyl d'une sous-algèbre r_1 (resp. r_2) de so(4,1) isomorphe à l'algèbre de Lie complexe sl(2) et la réunion des deux est une base de Weyl de la sous-algèbre de so(4,1) isomorphe à l'algèbre de Lie complexe so(4).

Dans l'algèbre enveloppante de so(4,1) nous poserons:

$$C_1 = L^2 + 1/2(X_\alpha X_{-\alpha} + X_{-\alpha}X_\alpha), \qquad C_2 = L'^2 + 1/2(X_{-\beta}X_\beta + X_\beta X_{-\beta}),$$
$$\Omega = 1/2(C_1 + C_2 - X_\gamma X_{-\gamma} - X_\delta X_{-\delta} - X_{-\gamma}X_\gamma - X_{-\delta}X_\delta).$$

Soit Ω' le 2^e^ Casimir so(4,1) [1].

Ω et Ω' engendrent le centre de l'algèbre enveloppante de so(4,1). Dans les parties II et III nous prendrons comme base de so(4,1) :

$$\{ M_k, N_k, P_k, P_0, (k = 1, 2, 3) \}$$

dont les relations de commutation sont données dans (14).

$$\{ M_k, N_l, k, l = 1, 2, 3 \}$$

engendre une sous-algèbre b qui est l'algèbre de Lie complexifiée du sous-groupe de $SO_0(4,1)$ isomorphe au groupe de Lorentz, agissant dans $\mathbb{R}^5$ en conservant la composante x_1. Alors

$$\Omega = P_0^2 - \vec{P}^2 - (\vec{M}^2 - \vec{N}^2), \quad \Omega' = (\vec{M}\cdot\vec{P})^2 - (P_0\vec{M} - \vec{P} \wedge \vec{N})^2 - (\vec{M}\cdot\vec{N})^2.$$

2. Définitions.

α) Irréductibilité algébrique. — Une représentation ρ d'une algèbre de Lie g dans un espace vectoriel algèbrique complexe V est dite algébriquement irréductible si les seuls sous-espaces invariants de V sont V et $\{ 0 \}$.

β) Irréductibilité Schur. — Une représentation ρ d'une algèbre de Lie g dans un espace vectoriel topologique complet E définie sur un domaine $\mathscr{D}$ dense, commun et stable sous la représentation, est dite Schur-irréductible sur $\mathscr{D}$ si tout opérateur continu A de E laissant stable $\mathscr{D}$ et commutant à la représentation ρ sur $\mathscr{D}$ est scalaire.

γ) Équivalence algébrique. — Soient ρ_1 et ρ_2 2 représentations d'une même algèbre de Lie g dans 2 espaces vectoriels complexes V_1 et V_2. ρ_1 et ρ_2 sont dites algébriquement équivalentes s'il existe un isomorphisme A de V_1 sur V_2 tel que : $\forall X \in g$, $\rho_2(X)A = A\rho_1(X)$ sur V_1.

3. Représentations de Miller des algèbres de Lie complexes su(2) et so(4).

a) Représentations de Miller de l'algèbre de Lie complexe su(2). — On appelle représentations de Miller de su(2) relativement à une base de Weyl donnée $\{ J_3, J_+, J_- \}$ dans un espace vectoriel V complexe toute représentation algébriquement irréductible telle que J_3 possède une valeur propre [6] [7]. Les représentations de Miller de su(2) que nous noterons $\mathscr{M}_i^u(u \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, 3, 4)$ sont [7] :

$$\mathscr{M}_1^u = D(u, m_0),\ u \pm m_0 \notin \mathbb{Z},\ 0 \leqslant \operatorname{Re} m_0 < 1\,;$$
$$\mathscr{M}_2^u = \uparrow_u \quad \text{et} \quad \mathscr{M}_3^u = \downarrow_u,\ u \notin \tfrac{1}{2}\mathbb{N}\,; \qquad \mathscr{M}_4^u = D(u),\ u \in \tfrac{1}{2}\mathbb{N}\,.$$

En réalité, au lieu de $\mathscr{M}_1^u$ nous devrions écrire $\mathscr{M}_1^{u,m_0}$ mais pour avoir une notation globale pour les 4 cas, nous sous-entendons volontairement le 2[e] paramètre m_0 de $D(u, m_0)$ sans l'ignorer.

b) REPRÉSENTATIONS DE MILLER DE L'ALGÈBRE DE LIE COMPLEXE so(4). — L'algèbre de Lie so(4) est la somme directe de 2 idéaux r_1 et r_2 isomorphes chacun à l'algèbre de Lie su(2). Soit $\{ J_3, J_+, J_-, J'_3, J'_+, J'_- \}$ une base de Weyl donnée de so(4) où $\{ J_3, J_+, J_- \}$ (resp. (J'_3, J'_+, J'_-)) est une base de Weyl de r_1 (resp. r_2).

DÉFINITION. — Nous appellerons représentation de Miller de so(4) relativement à la base de Weyl $\{ J_3, J_+, J_-, J'_3, J'_+, J'_- \}$ toute représentation ρ de so(4) algébriquement irréductible telle que J_3 et J'_3 aient un vecteur propre commun.

Soit ρ_1 (resp. ρ_2) une représentation de Miller de r_1 (resp. r_2) dans un espace vectoriel complexe V_1 (resp. V_2). Définissons une représentation $\rho_{1,0}$ (resp. $\rho_{0,2}$) de so(4) dans V_1 (resp. V_2) par

$$\begin{cases} \rho_{1,0}(X) = \rho_1(X) & \forall X \in r_1 \\ \rho_{1,0}(X) = 0 & \forall X \in r_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_{0,2}(X) = 0 \, \forall X \in r_1 \\ \rho_{0,2}(X) = \rho_2(X) \, X \in r_2 \end{cases}$$

Soit $\rho = \rho_{1,0} \otimes \rho_{0,2}$ la représentation de so(4) dans $V_1 \otimes V_2$ (produit tensoriel de représentations d'algèbre de Lie). Si ρ_1 est du type $\mathscr{M}_i^l$ et ρ_2 du type $\mathscr{M}_j^{l'}$, nous dirons que ρ est du type $\mathscr{M}_i^l \otimes \mathscr{M}_j^{l'}$. On montre aisément les résultats suivants :

— Toute représentation de Miller de l'algèbre de Lie so(4) dans un espace vectoriel complexe V est algébriquement équivalente à une représentation du type $\mathscr{M}_i^l \otimes \mathscr{M}_j^{l'}$ $l, l' \in \mathbb{C}$ $i, j = 1, 2, 3, 4$.

— Deux représentations $\mathscr{M}_i^l \otimes \mathscr{M}_j^{l'}$ et $\mathscr{M}_{i'}^u \otimes \mathscr{M}_{j'}^{u'}$ de so(4) relativement à la base de Weyl donnée $\{ J_3, J_+, J_-, J'_3, J'_+, J' \}$ sont algébriquement équivalentes si et seulement si les représentations $\mathscr{M}_i^l$ et $\mathscr{M}_{i'}^u$ de r_1 le sont ainsi que les représentations $\mathscr{M}_j^{l'}$ et $\mathscr{M}_{j'}^{u'}$ de r_2.

4. Produit tensoriel de 2 représentations de Miller de l'algèbre de Lie complexe su(2) : réduction.

Rappelons les résultats suivants [7]:

$$D(j) \otimes D(j') = \sum_{l=|j-j'|}^{j+j'} D(l)$$

$$\left.\begin{aligned} \uparrow_l \otimes \uparrow_{l'} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \uparrow_{l+l'-n} \\ \downarrow_l \otimes \downarrow_{l'} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \downarrow_{l+l'-n} \end{aligned}\right. \qquad \text{si } l + l' \notin \tfrac{1}{2}\mathbb{N}, \; l \text{ et } l' \notin \tfrac{1}{2}\mathbb{N}$$

$$\left.\begin{array}{l} D(l) \otimes \uparrow_{l'} = \sum_{n=0}^{2l} \uparrow_{l+l'-n} \\ D(l) \otimes \downarrow_{l'} = \sum_{n=0}^{2l} \downarrow_{l+l'-n} \end{array}\right\} \quad \text{si } l + l' \notin \tfrac{1}{2}\mathbb{N} \quad 2l \in \mathbb{N} \text{ et } 2l' \notin \mathbb{N}$$

Remarque. — Si $l + l' \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, dans les 4 derniers cas, les produits tensoriels ne sont pas complètement réductibles [*5c*].

Quant au produit tensoriel $D(l, m) \otimes \mathcal{M}_i^{l'}$, ($l \pm m \notin \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant \operatorname{Re} m < 1$) on ne sait rien sur sa réduction ($i = 1, 2, 3, 4$).

I. CONSTRUCTION ET CLASSIFICATION DE TOUTES LES REPRÉSENTATIONS DE L'ALGÈBRE DE LIE so(4,1) SATISFAISANT 2 HYPOTHÈSES

Dans cette partie $\{ L, L', X_\alpha, X_{-\alpha}, X_{-\beta}, X_\beta, X_\gamma, X_{-\gamma}, X_\delta, X_{-\delta} \}$ est une base de Weyl fixée de so(4,1).

Nous nous proposons alors de construire et de classifier toutes les représentations ρ de so(4,1) dans un espace vectoriel algébrique $H \neq \{ 0 \}$ sur $\mathbb{C}$, satisfaisant aux 2 hypothèses suivantes :

h_1 : ρ est algébriquement irréductible (donc H a une base algébrique au plus dénombrable et les 2 casimirs Ω et Ω' sont scalaires [*10*]);

h_2 : il existe une base de H sur laquelle L, L', C_1, C_2 sont diagonalisés, chaque sous-espace propre commun étant de dimension 1.

REMARQUE I.1. — Ces hypothèses sont en particulier vérifiées par les représentations de l'algèbre de Lie so(4,1) obtenues à partir des unitaires de G [*1*].

L'hypothèse h_2 nous assure l'existence d'une base $\{ f_{v,v'}^{q,q'} \}$ où v, v', q, q' varient respectivement dans des sous-ensembles dénombrables de $\mathbb{C}$ et sont tels que :

$$L f_{v,v'}^{q,q'} = -2iv f_{v,v'}^{q,q'} \qquad L' f_{v,v'}^{q,q'} = -2iv' f_{v,v'}^{q,q'}$$
$$C_1 f_{v,v'}^{q,q'} = q f_{v,v'}^{q,q'} \qquad C_2 f_{v,v'}^{q,q'} = q' f_{v,v'}^{q,q'}$$

(Les éléments de l'algèbre de Lie et leurs représentants seront notés par la même lettre).

Définissons dans $\mathbb{C}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par:

$$l_1 \mathcal{R} l_2 \Leftrightarrow l_1(l_1 + 1) = l_2(l_2 + 1)$$

Désignons par $\dot{l}$ la classe d'équivalence de $l (l \in \mathbb{C})$.

DÉFINITION I.1. — On dira que l est admissible si

$$l = -1/2 + \rho e^{i\theta}, \ \rho > 0 \ 0 \leqslant \theta < \pi \ [7].$$

Or $\forall q \in \mathbb{C}$, $\exists l \in \mathbb{C}$ tel que $-4l(l+1) = q \Rightarrow q \leftrightarrow \lambda = \dot{l} \in \mathbb{C}/_{\mathscr{R}}$.

Le spectre ponctuel de C_1 (resp. C_2) peut donc être mis en bijection avec un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{C}/_{\mathscr{R}}$.

Désormais, nous noterons la base de H : $\{ f_{v,v'}^{\lambda,\lambda'} \}$ où (λ, λ') varie dans un sous-ensemble dénombrable Q de $\mathbb{C}/_{\mathscr{R}} \times \mathbb{C}/_{\mathscr{R}}$. Q est non vide car H est différent de $\{0\}$.

Soit ρ une représentation de so(4,1) dans H, espace vectoriel algébrique complexe et satisfaisant les hypothèses h_1 et h_2.

1. Réduction de ρ sur la sous-algèbre k.

Soit ρ_k la restriction de ρ à k.

(λ, λ') étant fixé dans Q, nous désignons par $H_{\lambda,\lambda'}$ le sous-espace de H engendré par $\{ f_{v,v'}^{\lambda,\lambda'} \}$. Alors

$$H = \sum_{(\lambda,\lambda')\in Q} H_{\lambda,\lambda'} \qquad \text{(somme algébrique)}$$

PROPRIÉTÉ I.1.1. — $\forall(\lambda, \lambda') \in Q$, $H_{\lambda,\lambda'}$ *est stable par* ρ_k.

Ceci provient des relations de commutation des générateurs de k et des hypothèses h_1 et h_2.

Nous avons les résultats suivants que nous montrons dans [*5c*] :

PROPRIÉTÉS I.1.2. — *a*) Soit $(\lambda_0, \lambda'_0) \in Q$. Alors H_{λ_0,λ'_0} contient l'espace portant d'une représentation de Miller de k, relativement à la base de Weyl $\{ L, X_\alpha, X_{-\alpha}, L', X_{-\beta}, X_\beta \}$. Si le type de cette représentation de Miller de k est $\mathscr{M}_i^{l_0} \otimes \mathscr{M}_j^{l'_0}$ alors $l_0 \in \lambda_0$ et $l'_0 \in \lambda'_0$. l_0 (resp. l'_0 est donc parfaitement déterminé dans λ_0 (resp. λ'_0) sauf si $i = 1$ (resp. $j = 1$). Si $i = 1$ (resp. $j = 1$) et si $l_0 \in \mathbb{Z}/2$ (resp. $l'_0 \in \mathbb{Z}/2$), nous choisirons l_0 (resp. l'_0) non admissible.

b) Soient $(\lambda_0, \lambda'_0) \in Q$ et $f_{v_0,v'_0}^{\lambda_0,\lambda'_0}$ un vecteur de base de H_{λ_0,λ'_0}. Soient $l_0 \in \lambda_0$ et $l'_0 \in \lambda'_0$ fixés comme dans *a*). Alors à tout quadruplet $(\lambda, v, \lambda', v')$ caractérisant un vecteur de base, on peut associer biunivoquement le quadruplet $\left(l_0 + \frac{1}{2}n, v_0 + \frac{1}{2}m, l'_0 + \frac{1}{2}p, v'_0 + \frac{1}{2}m'\right)$ avec :

$$l_0 + \tfrac{1}{2}n \in \lambda, \ l'_0 + \tfrac{1}{2}p \in \lambda' ; \qquad v_0 + \tfrac{1}{2}m = v ; \qquad v'_0 + \tfrac{1}{2}m' = v'$$
$$n, p, m, m', \tfrac{1}{2}(n+p), \ \tfrac{1}{2}(n+m), \ \tfrac{1}{2}(p+m') \in \mathbb{Z}$$

et éventuellement :

si $l_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ (resp. $l'_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$), $\quad l_0 + \frac{1}{2}n$ (resp. $l'_0 + \frac{1}{2}p) \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$

si $l_0 \in -\frac{1}{2}\mathbb{N}^*$ (resp. $l'_0 \in -\frac{1}{2}\mathbb{N}^*$), $\quad l_0 + \frac{1}{2}n$ (resp. $l'_0 + \frac{1}{2}p) \in -\frac{1}{2}\mathbb{N}^*$

La base de H sera désormais notée

$$\{ f^{l_0+n/2,\, l'_0+p/2}_{v_0+m/2,\, v'_0+m'/2} \}, \ (l_0 + \tfrac{1}{2}n, \ v_0 + \tfrac{1}{2}m, \ l'_0 + \tfrac{1}{2}p, \ v'_0 + \tfrac{1}{2}m')$$

étant comme dans *b*).

Nous noterons $H_{l_0+n/2,l'_0+p/2}$ le sous-espace engendré par

$$\{ f^{l_0+n/2,\, l'_0+p/2}_{v_0+m/2,\, v'_0+m'/2} \} \qquad \text{pour } (l_0 + \tfrac{1}{2}n, \ l'_0 + \tfrac{1}{2}p) \text{ fixé.}$$

THÉORÈME I.1.1. — *Soit* ρ *une représentation de* so(4,1) *satisfaisant* h_1 *et* h_2. *Alors sa restriction à* k, ρ_k *est complètement réductible en une somme directe de représentations de Miller de* k *relativement à la base de Weyl*

$$\{ L, X_\alpha, X_{-\alpha}, L', X_{-\beta}, X_\beta \},$$

n'apparaissant qu'une fois et toutes d'un même type (i, j) *soit*

$$H = \sum_{(n/2,\, p/2)\in\Gamma} H_{l_0+n/2,\, l'_0+p/2} \qquad \Gamma \subset \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

où $\forall (\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}p) \in \Gamma$, ρ_k *induit dans* $H_{l_0+n/2,l'_0+p/2}$, *une représentation de Miller de* k *du type* $\mathscr{M}_i^{l_0+n/2} \otimes \mathscr{M}_j^{l'_0+p/2}$.

Nous ne donnons pas la démonstration qui est faite complètement dans [5].

En conséquence de ce théorème, quitte à multiplier les vecteurs de base par des scalaires, nous avons une base de H notée encore

$$\{ f^{l_0+n/2,\, l'_0+p/2}_{v_0+m/2,\, v'_0+m/2} \qquad (\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}p) \in \Gamma \}$$

telle que :

$$(\text{I.1.1}) \qquad \left\{ \begin{aligned} L f^{l,l'}_{v,v'} &= -2iv f^{l,l'}_{v,v'} \\ L' f^{l,l'}_{v,v'} &= -2iv' f^{l,l'}_{v,v'} \\ X_\alpha f^{l,l'}_{v,v'} &= 2\sqrt{(l+v+1)(l-v)}\, f^{l,l'}_{v+1,v'} \\ X_{-\beta} f^{l,l'}_{v,v'} &= 2\sqrt{(l'+v'+1)(l'-v')}\, f^{l,l'}_{v,v'+1} \\ X_{-\alpha} f^{l,l'}_{v,v'} &= -2\sqrt{(l+v)(l-v+1)}\, f^{l,l'}_{v-1,v'} \\ X_\beta f^{l,l'}_{v,v'} &= -2\sqrt{(l'+v')(l'-v'+1)}\, f^{l,l'}_{v,v'-1} \end{aligned} \right.$$

si $(l, v, l', v') = (l_0 + \tfrac{1}{2}n, \ v_0 + \tfrac{1}{2}m, \ l'_0 + \tfrac{1}{2}p, \ v'_0 + \tfrac{1}{2}m')$.

Nous avons affaire à des racines complexes et il faut préciser leur définition. On définira

$$\sqrt{(l+v+1)(l-v)} = \sqrt{l+v+1}\,\sqrt{l-v}$$
$$\sqrt{(l'+v'+1)(l'-v')} = \sqrt{l'+v'+1}\,\sqrt{l'-v'}$$

où $\sqrt{l+v+1}$, $\sqrt{l-v}$, $\sqrt{l'+v'+1}$, $\sqrt{l'-v'}$ seront les déterminations principales des racines.

2. Traduction des relations de commutation autres que celles de k et expression de l'action des représentants des générateurs de so(4,1) sur une base de H.

Grâce à la définition précédente des racines complexes, tous les calculs faits par Thomas [3] avec des réels se refont ici avec des complexes et nous donnent :

(I.2.1)

$$
\left\{
\begin{aligned}
X_\gamma f^{l,l'}_{v,v'} &= \sqrt{(l+v+1)(l'+v'+1)}\,A_{ll'} f^{l+1/2,\,l'+1/2}_{v+1/2,\,v'+1/2} \\
&\quad + \sqrt{(l-v)(l'+v'+1)}\,B_{ll'} f^{l-1/2,\,l'+1/2}_{v+1/2,\,v'+1/2} \\
&\quad + \sqrt{(l+v+1)(l'-v')}\,C_{ll'} f^{l+1/2,\,l'-1/2}_{v+1/2,\,v'+1/2} + \sqrt{(l-v)(l'-v')}\,D_{ll'} f^{l-1/2,\,l'-1/2}_{v+1/2,\,v'+1/2} \\
X_{-\gamma} f^{l,l'}_{v,v'} &= -\sqrt{(l-v+1)(l'-v'+1)}\,A_{l,l'} f^{l+1/2,\,l'+1/2}_{v-1/2,\,v'-1/2} \\
&\quad + \sqrt{(l+v)(l'-v'+1)}\,B_{l,l'} f^{l-1/2,\,l'+1/2}_{v-1/2,\,v'-1/2} \\
&\quad + \sqrt{(l-v+1)(l'+v')}\,C_{ll'} f^{l+1/2,\,l'-1/2}_{v-1/2,\,v'-1/2} - \sqrt{(l+v)(l'+v')}\,D_{ll'} f^{l-1/2,\,l'-1/2}_{v-1/2,\,v'-1/2} \\
X_\delta f^{l,l'}_{vv'} &= -\sqrt{(l+v+1)(l'-v'+1)}\,A_{l,l'} f^{l+1/2,\,l'+1/2}_{v+1/2,\,v'-1/2} \\
&\quad - \sqrt{(l-v)(l'-v'+1)}\,B_{l,l'} f^{l-1/2,\,l'+1/2}_{v+1/2,\,v'-1/2} \\
&\quad + \sqrt{(l+v+1)(l'+v')}\,C_{ll'} f^{l+1/2,\,l-1/2}_{v+1/2,\,v'-1/2} + \sqrt{(l-v)(l'+v')}\,D_{ll'} f^{l-1/2,\,l'-1/2}_{v+1/2,\,v'-1/2} \\
X_{-\delta} f^{l,l'}_{vv'} &= -\sqrt{(l-v+1)(l'+v'+1)}\,A_{ll'} f^{l+1/2,\,l'+1/2}_{v-1/2,\,v'+1/2} \\
&\quad + \sqrt{(l+v)(l'+v'+1)}\,B_{ll'} f^{l-1/2,\,l'+1/2}_{v-1/2,\,v'+1/2} \\
&\quad - \sqrt{(l-v+1)(l'-v')}\,C_{ll'} f^{l+1/2,\,l'-1/2}_{v-1/2,\,v'+1/2} + \sqrt{(l+v)(l'-v')}\,D_{ll'} f^{l-1/2,\,l'-1/2}_{v-1/2,\,v'+1/2}
\end{aligned}
\right.
$$

On posera

$$A_{l,l'} = 0 \quad (\text{resp. } B_{l,l'},\ C_{l,l'},\ D_{l,l'})$$

si

$$(l+1/2,\ l'+1/2) \notin \Gamma_0 \quad (\text{resp. } (l-1/2,\ l'+1/2)\ (l+1/2,\ l'-1/2),\ (l-1/2,\ l'-1/2))$$

Restent alors à traduire les 6 dernières relations de commutation du groupe (11) de la table de multiplication [*1*]. Toutes les autres sont vérifiées avec les formules (I.1.1) et I.2.1). Ces 6 dernières relations sont équivalentes à 6 équations (qui sont les 6 équations (19) à (24) de Dixmier [*1*] où on remplace (k, k') par (l, l')).

Ces équations nous permettent dans [*5c*] de déterminer toutes les formes possibles de Γ, compte tenu de l'hypothèse d'irréductibilité algébrique.

Une méthode analogue à celle de Thomas [*3*] nous conduit dans [*5c*] à :

$$
\begin{aligned}
&D_{l_0+(n+1)/2,\,l'_0+p/2+1/2}\,A_{l_0+n/2,\,l'_0+p/2} \\
&\quad (l_0+l'_0+\tfrac{1}{2}(n+p)-r+1)(l_0+l'_0+\tfrac{1}{2}(n+p)+r+2) \\
&= \frac{(l_0+l'_0+\tfrac{1}{2}(n+p)-q+2)(l_0+l'_0+\tfrac{1}{2}(n+p)+q+1)}{(2l_0+n+1)(2l_0+n+2)(2l'_0+p+1)(2l'_0+p+2)} \qquad (\alpha'')
\end{aligned}
$$

si $(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}p)$ ou $(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(p+1)) \in \Gamma$; $l_0 + \frac{1}{2}n$, $l'_0 + \frac{1}{2}p \neq 0, -1/2, -1$

$$B_{l_0+n/2,\, l'_0+p/2}C_{l_0+n/2-1/2,\, l'_0+p/2+1/2} = \frac{(l_0-l'_0+\frac{1}{2}(n-p)-r-1)(l_0-l'_0+\frac{1}{2}(n-p)+r)(l_0-l'_0+\frac{1}{2}(n-p)-q)(l_0-l'_0+\frac{1}{2}(n-p)+q-1)}{(2l_0+n)(2l_0+n+1)(2l'_0+p+1)(2l'_0+p+2)} \qquad (\beta'')$$

si $(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}p)$ ou $(\frac{1}{2}(n-1,) \frac{1}{2}(p+1)) \in \Gamma$; $l_0 + \frac{1}{2}n$ et $l'_0 + \frac{1}{2}p \neq 0, -1/2, -1$.

Les formules (I.1.1), (I.2.1) (α'') et (β'') déterminent complètement l'action des représentants de la base de so(4,1) sur les vecteurs de base de H.

3. Classification des représentations de so(4,1) satisfaisant les hypothèses h_1 et h_2.

En considérant successivement les différentes formes possibles de Γ et en traduisant les conditions correspondantes sur $A_{ll'}$, $B_{ll'}$, $C_{ll'}$, $D_{ll'}$ (ce qui donne des conditions sur r et q) on montre dans [*5c*] le :

THÉORÈME I.3.1. — *Toute représentation ρ de* so(4,1) *satisfaisant h_1 et h_2 est équivalente à une représentation de la liste suivante (où (i,j) caractérise le type de la représentation de Miller de k apparaissant dans ρ_k)*

$$(\Gamma_0 = \{ (l_0 + \tfrac{1}{2}n, l'_0 + \tfrac{1}{2}p) \,;\, (\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}p) \in \Gamma \})$$

A. $\forall (l, l') \in \Gamma_0$, l et $l' \neq -1/2$.

<u>1° $\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2}n, l'_0 + \frac{1}{2}p) / \frac{1}{2}(n+p)$ et $\frac{1}{2}(n-p) \in \mathbb{Z} \}$</u>

Représentations ${}^1R_{i,j}(l_0, l'_0, q, r)$:

avec l_0 et $l'_0 \in \mathbb{Z}/2$ $\quad$ i et $j \neq 4$

$$\left.\begin{array}{l} l_0 \pm l'_0 \pm r \\ l_0 \pm l'_0 \pm q \end{array}\right\} \notin \mathbb{Z} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant \mathrm{Re}\,(l_0 + l'_0) < 1 \\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\,(l_0 - l'_0) < 1 \end{array}$$

En changeant r en $-r-1$, q en $-q+1$, r en q, $-r-1$ en q ou r en $-q+1$, on obtient des représentations équivalentes.

<u>2° $\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2}n, l'_0 + \frac{1}{2}p) / \frac{1}{2}(n+p) \in -\mathbb{N}$ et $\frac{1}{2}(n-p) \in \mathbb{Z} \}$</u>

Représentations ${}^2R_{i,j}(l_0 - l'_0, q, r)$

$$\begin{array}{lll} \text{avec } l_0, l'_0 \notin \mathbb{Z}/2, & i \text{ et } j \neq 4, & \left.\begin{array}{l} 2r \\ r+q-1 \\ r-q \end{array}\right\} \notin \mathbb{N} \quad \left.\begin{array}{l} l_0 - l'_0 \pm r \\ l_0 - l'_0 \pm q \end{array}\right\} \notin \mathbb{Z} \\ l_0 + l'_0 = r - 1 & & \\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\,(l_0 - l'_0) < 1 & & \end{array}$$

En échangeant q en $-q+1$, on obtient des représentations équivalentes.

3° $\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p) / \frac{1}{2}(n-p) \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}(n+p) \in \mathbb{Z} \}$

Représentations ${}^3R_{i,j}(l_0 + l'_0, q, r)$:

$$\text{avec } \begin{array}{l} l_0 - l'_0 = q \\ l_0, l'_0 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}, i \text{ et } j \neq 4, \\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\,(l_0 + l'_0) < 1 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} q-r \\ q+r+1 \\ 2q \end{array}\right\} \notin -\mathbb{N} \quad \left.\begin{array}{l} l_0 + l'_0 \pm r \\ l_0 + l'_0 \pm q \end{array}\right\} \notin \mathbb{Z}$$

${}^3R_{(i,j)}(l_0 + l'_0, q, r)$ et ${}^3R_{(i,j)}(l_0 + l'_0, q, -r-1)$ sont équivalentes.

4° $\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p) / \frac{1}{2}(n+p) \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{1}{2}(n-p) \in -\mathbb{N} \}$

Représentations ${}^4R_{i,j}(l_0 + l'_0, q, r)$:

$$\text{avec } \begin{array}{l} l_0 \text{ et } l'_0 \notin \mathbb{Z}/2, \quad i \text{ et } j \neq 4, \\ l_0 - l'_0 = -q \\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\,(l_0 + l'_0) < 1 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} r-q \\ -q-r-1 \\ -2q \end{array}\right\} \notin \mathbb{N}, \quad \left.\begin{array}{l} l_0 + l'_0 \pm r \\ l_0 + l'_0 \pm q \end{array}\right\} \notin \mathbb{Z}$$

${}^4R_{i,j}(l_0 + l'_0, q, r)$ et ${}^4R_{i,j}(l_0 + l'_0, q, -r-1)$ sont équivalentes.

5° $\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p) / \frac{1}{2}(n+p) \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{1}{2}(n-p) \in \mathbb{Z} \}$

Représentation ${}^5R_{i,j}(l_0 - l'_0, q, r)$:

$$\text{avec } \begin{array}{l} l_0, l'_0 \notin \mathbb{Z}/2, \quad i \text{ et } j \neq 4 \\ l_0 + l'_0 = +r \\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\,(l_0 - l'_0) < 1 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 2r+2 \\ r+q+1 \\ r-q+2 \end{array}\right\} \notin -\mathbb{N} \quad \left.\begin{array}{l} l_0 - l'_0 \pm r \\ l_0 - l'_0 \pm q \end{array}\right\} \notin \mathbb{Z}$$

${}^5R_{i,j}(l_0 - l'_0, q, r)$ et ${}^5R_{i,j}(l_0 - l'_0, -q+1, r)$ sont équivalentes.

6° $\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p) / \frac{1}{2}(n+p) \in -\mathbb{N} \text{ et } \frac{1}{2}(n-p) \in \mathbb{N} \}$

Représentation : ${}^6R_{ij}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r+q-1)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r-q-1)$
où $r+q-1 \notin \mathbb{Z}, r-q-1 \notin \mathbb{N}$; $2r, -2q$ et $r-q \notin \mathbb{N}$ $\quad i \neq 4, j \neq 4$.

7° $\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p); \frac{1}{2}(n+p) \text{ et } \frac{1}{2}(n-p) \in -\mathbb{N} \}$

Représentation : ${}^7R_{i,j}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r-q-1), l'_0 = \frac{1}{2}(r+q-1), r-q, 2r$ et $-2q \notin \mathbb{N}$ et $q + r \notin \mathbb{Z}$; $\quad i$ et $j \neq 4$.

8° $\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p) / \frac{1}{2}(n+p) \text{ et } \frac{1}{2}(n-p) \in \mathbb{N} \}$

a) Représentation ${}^8R^a_{i,j}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r+q), l'_0 = \frac{1}{2}(r-q)$
avec $r+q+1$, $2r+2$ et $2q \notin -\mathbb{N}$; $r-q \notin \mathbb{Z}$; $j \neq 4$; $i=4$ si $r+q \in \mathbb{N}$

b) Représentation ${}^8R^b_{4,j}(q, r)$: $l_0 = 0 \quad l'_0 = r$
avec $r+q$ et $r-q+1 \notin \mathbb{Z}^*, 2r \notin \mathbb{Z}, j \neq 4$
${}^8R^b_{4,j}(q, r)$ et ${}^8R^b_{4,j}(-q+1, r)$ sont équivalentes.

9° $\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p), \frac{1}{2}(n+p) \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{1}{2}(n-p) \in -\mathbb{N} \}$

a) Représentation ${}^9R^a_{i,j}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r-q)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r+q)$
avec $r+q+1$, $2r+2$, $2q \notin -\mathbb{N}$, $r-q \notin \mathbb{Z}$, $i \neq 4$ et $j=4$ si $r+q \notin \mathbb{N}$.

b) Représentation ${}^{9}R^{b}_{i,4}(q,r)$: $l_0 = r \; l'_0 = 0$
avec $r-q+1,\ r+q \notin \mathbb{Z}^*$, $2r \notin \mathbb{Z}$ et $i \neq 4$.
${}^{9}R^{b}_{i,4}(q,r)$ et ${}^{9}R^{b}_{i,4}(-q+1,r)$ sont équivalentes.

10° $\underline{\Gamma_0 = \{ (l_0+\frac{1}{2}n, l'_0+\frac{1}{2}p) \text{ tel que } \frac{1}{2}(n-p) \in \mathbb{Z} ; r_0 \leqslant \frac{1}{2}(n+p) \leqslant 0 \}, r_0 \in -\mathbb{N}}$

a) Représentation ${}^{10}R^{a}_{i,j}(l_0-l'_0,q,r)$:

$$\text{avec } \begin{array}{ll} l_0, l'_0 \notin \mathbb{Z}/2 & \left.\begin{array}{l} 2r+1 \\ r+q \end{array}\right\} \notin \{ s \in \mathbb{N} \,/ 0 < s \leqslant r-q \} \\ l_0+l'_0 = r-1 & \\ 0 \leqslant \operatorname{Re}(l_0-l'_0) < 1 & \left.\begin{array}{l} l_0-l'_0 \pm r \\ l_0-l'_0 \pm q \end{array}\right\} \notin \mathbb{Z} \qquad i \text{ et } j \neq 4 \\ r_0 = q-r \in -\mathbb{N} & \end{array}$$

b) Représentation ${}^{10}R^{b}_{ij}(l_0-l'_0,q,r)$: $r_0 = -2r$, $2r \in \mathbb{N}$
où $l_0+l'_0 = r-1$, l_0 et $l'_0 \notin \mathbb{Z}/2$, $0 \leqslant \operatorname{Re}(l_0-l'_0) < 1$
$r-q+1, r+q \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 < s \leqslant 2r \}$, i et $j \neq 4$
$l_0 - l'_0 \pm r, l_0 - l'_0 \pm q \notin \mathbb{Z}$
${}^{10}R^{b}_{i,j}(l_0-l'_0,q,r)$ et ${}^{10}R^{b}_{i,j}(l_0-l'_0, q+1, r)$ sont équivalentes.

11° $\underline{\Gamma_0 = \{ (l_0+\frac{1}{2}n, l'_0+\frac{1}{2}p) \text{ tel que } \frac{1}{2}(n+p) \in \mathbb{Z}, q_0 \leqslant \frac{1}{2}(n-p) \leqslant 0, q_0 \in -\mathbb{N} \}}$

a) Représentation ${}^{11}R^{a}_{i,j}(l_0+l'_0,q,r)$: $q_0 = q-r$, $r-q \in \mathbb{N}$
avec $l_0, l'_0 \in \mathbb{Z}/2$, $l_0 - l'_0 = -q$, $0 \leqslant \operatorname{Re}(l_0+l'_0) < 1$
$-2q, -q-r-1 \notin \{ s \notin \mathbb{N}/0 \leqslant s < r-q \}$
$l_0 + l'_0 \pm r, l_0 + l'_0 \pm q \notin \mathbb{Z}$, i et $j \neq 4$.

b) Représentation ${}^{11}R^{b}_{i,j}(l_0+l'_0,q,r)$: $q_0 = 2q$ avec $2q \in -\mathbb{N}$
où $l_0 - l'_0 = -q, l_0$ et $l'_0 \notin \mathbb{Z}/2 \quad 0 \leqslant \operatorname{Re}(l_0+l'_0) < 1$

$$\left.\begin{array}{l} -q-r-1 \\ -q+r \end{array}\right\} \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 \leqslant s < -2q \} \quad \text{et } \left.\begin{array}{l} l_0+l'_0 \pm r \\ l_0+l'_0 \pm q \end{array}\right\} \notin \mathbb{Z}, i \text{ et } j \neq 4$$

En échangeant r en $' -r-1$, on obtient 2 représentations équivalentes.

12°
$\underline{\Gamma_0 = \{ (l_0+\frac{1}{2}n, l'_0+\frac{1}{2}p) \text{ avec } \frac{1}{2}(n+p) \in \mathbb{N} \text{ et } q_0 \leqslant \frac{1}{2}(n-p) \leqslant 0 \text{ où } q_0 \in -\mathbb{N} \}}$

a) Représentation ${}^{12}R^{a}_{4,j}(q,r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r-q)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r+q)$
avec $r+q \notin -\mathbb{N}^*$, $q_0 = q-r \in -\mathbb{N}, j = 4$ si $r+q \in \mathbb{N}$ sinon $j \neq 4$
$-2r-2, q-r-2$ et $-q-r-1 \notin \mathbb{N}$; $-2q \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 \leqslant s < r-q \}$

b) Représentation ${}^{12}R^{b}_{i,4}(q,r)$: $l_0 = -q$, $l'_0 = 0$, $q_0 = q-r \in -\mathbb{N}$
avec $-q-r+1, -q+r+2, -2q+2 \notin -\mathbb{N}$
avec $-2q$ et $-q-r-1 \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 \leqslant s < r-q$; $i = 4$ si $\frac{1}{2}(r+q) \in -\mathbb{N}$ sinon $i \neq 4$

c) Représentation ${}^{12}R^{c}_{i,j}(q,r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r-q)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r+q)$, $q_0 = 2q$
avec $2q \in -\mathbb{N}, -2r-2, r-q-1, q-r-2 \notin \mathbb{N}$; $-q+r \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 \leqslant s < -2q \}$;
$(i,j) = (4,4)$ si $r+q \in \mathbb{N}$

d) Représentations ${}^{12}R^{d}_{4,4}(q,r)$ où $l_0 = -q$, $l'_0 = 0$, $q_0 = 2q$
avec
$2q \in -\mathbb{N}, q+r-1$ et $q-r-2 \notin \mathbb{N}$; $-q-r-1$ et $-q+r \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 \leqslant s < -2q \}$

Dans ce dernier cas, si j'échange r en $-r-1$, j'obtiens 2 représentations équivalentes.

13° $\underline{\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p)/r_0 \leqslant \frac{1}{2}(n+p) \leqslant 0 \text{ et } \frac{1}{2}(n-p) \in -\mathbb{N} \ r_0 \in -\mathbb{N} \}}$

a) Représentation ${}^{13}\mathrm{R}^a_{i,4}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r+q-2)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r-q)$, $r_0 = q-r$ avec

$r-q \in \mathbb{N}, q-r-2, q+r-1$ et $2q-2 \notin \mathbb{N}, 2r+1 \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 < s \leqslant r-q \}$ et $i \neq 4$.

b) Représentation ${}^{13}\mathrm{R}^b_{i,j}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r-q-1)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r+q-1)$, $r_0 = -2r$ avec $2r \in \mathbb{N}$, $r+q \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 < s \leqslant 2r \}$, $i \neq 4$, $j=4$ si $q-r-1 \in \mathbb{N}$
$-q-r-1$, $r-q$ et $-2q \notin \mathbb{N}$.

14° $\underline{\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p) \text{ avec } \frac{1}{2}(n-p) \in \mathbb{N} \text{ et } r_0 \leqslant \frac{1}{2}(n+p) \leqslant 0, r_0 \in -\mathbb{N} \}}$

a) Représentation ${}^{14}\mathrm{R}^a_{4,j}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r-q)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r+q)-1$, $r_0 = q-r$ avec $r-q \in \mathbb{N}, r+q-1$ et $2q-1 \notin \mathbb{N}$, $2r+1 \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 < s \leqslant r-q \}$ et $j \neq 4$.

b) Représentation ${}^{14}\mathrm{R}^b_{i,j}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r+q-1)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r-q-1)$, $r_0 = -2r$ avec $2r \in \mathbb{N}$ avec $r-q$, $-q-r-1$, $-2q \notin \mathbb{N}$
$r+q \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 < s \leqslant 2r \}$, $j \neq 4$ et $i=4$ si $-r+q-1 \in \mathbb{N}$.

15°

$\underline{\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p) \text{ avec } \frac{1}{2}(n+p) \in -\mathbb{N} \text{ et } q_0 \leqslant \frac{1}{2}(n-p) \leqslant 0, q_0 \in -\mathbb{N} \}}$

Représentation ${}^{15}\mathrm{R}_{i,j}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r-q-1)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r+q-1)$, $q_0 = 2q$ avec $2q \in -\mathbb{N}$ avec $2r, r-q, r+q-1 \notin \mathbb{N}$
$-q-r-1 \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 \leqslant s < -2q \}$ i et $j \neq 4$.

16°

$\underline{\Gamma_0 = \{ (l_0 + \frac{1}{2} n, l'_0 + \frac{1}{2} p) \text{ avec } r_0 \leqslant \frac{1}{2}(n+p) \leqslant 0 \text{ et } q_0 \leqslant \frac{1}{2}(n-p) \leqslant 0, r_0 \text{ et } q_0 \in -\mathbb{N} \}}$

Représentation ${}^{16}\mathrm{R}_{4,4}(q, r)$: $l_0 = \frac{1}{2}(r-q-1)$, $l'_0 = \frac{1}{2}(r+q-1)$; $q_0 = 2q$ avec $2q \in -\mathbb{N}, r_0 = -r-q+1$ avec $r+q-1 \in \mathbb{N}$
avec $r-q+1$ et $2r+1 \notin \{ s \in \mathbb{N}/0 < s \leqslant r+q-1 \}$.

Pour chacune de ces représentations, quitte à multiplier les vecteurs de base initiaux par des scalaires non nuls $\omega(l, l')$, on peut donc trouver une base de H notée encore $\{ f^{l,l'}_{vv'} ; (l, l') \in \Gamma_0 \}$ telle que l'on ait les formules (I.1.1) et (I.2.1) avec

$$\mathrm{A}_{l,l'} = \mathrm{D}_{l+1/2, l'+1/2}$$
$$= \sqrt{\frac{l+l'-r+1)(l+l'+r+2)(l+l'-q+2)(l+l'+q+1)}{(2l+1)(2l+2)(2l'+1)(2l'+2)}} \quad \text{si } l \text{ et } l' \neq -1$$

$$\mathrm{B}_{l,l'} = -\mathrm{C}_{l-1/2, l'+1/2}$$
$$= \sqrt{-\frac{(l-l'-r-1)(l-l'+r)(l-l'-q)(l-l'+q-1)}{2l(2l+1)(2l'+1)(2l'+2)}} \quad \text{si } l \neq 0 \text{ et } l' \neq -1$$

Comme $\forall (l, l') \in \Gamma_0$ l et $l' \neq -1/2$, compte tenu de la propriété I.1.2 *b*)

$$\mathrm{A}_{-1,l'} = \mathrm{C}_{-1,l'} = \mathrm{D}_{0,l'} = \mathrm{B}_{0,l'} = \mathrm{A}_{l,-1} = \mathrm{B}_{l,-1} = \mathrm{D}_{l,0} = \mathrm{C}_{l,0} = 0$$

Les racines complexes sont définies de la façon suivante :

$$A_{l,l'} = \frac{\sqrt{(l+l'-r+1)}\,\sqrt{l+l'+r+2}\,\sqrt{l+l'-q+2}\,\sqrt{l+l'+q+1}}{\sqrt{2l+1}\qquad\sqrt{2l+2}\qquad\sqrt{2l'+1}\qquad\sqrt{2l'+2}}$$

où chacune des racines apparaissant est la détermination principale. Il en est de même pour $B_{ll'}$, $C_{ll'}$ et $D_{ll'}$.

Les valeurs des Casimirs pour ces représentations sont :

$$\Omega = -r(r+1) + 2 + q(-q+1) \qquad \Omega' = r(r+1)q(q-1).$$

B. $\exists\,(l,l')\in\Gamma_0$ avec l ou $l' = -1/2$: ce sont des cas pathologiques traités à part.

1° $\Gamma_0 = \{(-1/2-\frac{1}{2}n, -1/2-\frac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\} \qquad (i,j)\neq(4,4)$

2°

$$\Gamma_0=\{(-1/2-\tfrac{1}{2}n, l'_0-\tfrac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\} \cup \{(-1/2-\tfrac{1}{2}n, l'_0+\tfrac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\}, l'_0\notin\mathbb{Z}/2, \quad (i,j)\neq(4,4)$$

3°

$$\Gamma_0=\{(-1/2-\tfrac{1}{2}n, l'_0-\tfrac{1}{2}n), n\in(0,1,\dots,2l'_0)\} \cup \{(-1/2-\tfrac{1}{2}n, l'_0+\tfrac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\}, l'_0\in\tfrac{1}{2}\mathbb{N} \quad i\neq4, j=4$$

4°

$$\Gamma_0=\{(-1/2-\tfrac{1}{2}n, l'_0-\tfrac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\} \cup \{(-1/2-\tfrac{1}{2}n, l'_0+\tfrac{1}{2}n), n\in(0,1,\dots,-2l'_0-1)\} \cup \{(l'_0-\tfrac{1}{2}n, -1/2-\tfrac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\}, -2l'_0-1\in\mathbb{N}^*, \quad (i,j)\neq(4,4)$$

5° $\Gamma_0=\{(1/2-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\} \qquad (i,j)=(i,4) \quad i\neq4$

6°

$$\Gamma_0=\{(l_0-\tfrac{1}{2}n, -1/2-\tfrac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\} \cup \{(l_0+\tfrac{1}{2}n, -1/2-\tfrac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\}, l_0\notin\mathbb{Z}/2, \quad (i,j)\neq(4,4)$$

7°

$$\Gamma_0=\{(l_0-\tfrac{1}{2}n, -1/2-\tfrac{1}{2}n), n\in(0,1,2,\dots,2l_0)\} \cup \{(l_0+\tfrac{1}{2}n, -1/2-\tfrac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\}, l_0\in\tfrac{1}{2}\mathbb{N} \quad i=4 \text{ et } j\neq4$$

8° $\Gamma_0=\{(\frac{1}{2}n, -1/2-\frac{1}{2}n), n\in\mathbb{N}\} \quad (i,j)=(4,j) \quad j\neq4.$

A chaque Γ_0 correspond une représentation et une seule de so(4,1) satisfaisant les hypothèses h_1 et h_2 et on peut trouver une base de H telle que l'on ait les formules (I.1.1) et (I.2.1). Le calcul de $A_{ll'}$ $B_{ll'}$ $C_{ll'}$ et $D_{ll'}$ est fait dans [5c] ainsi que celui des 2 Casimirs. Nous montrons le théorème suivant dans [5c] :

THÉORÈME I.3.2. — *Deux représentations de la classification précédente sont équivalentes si et seulement si elles ont :*

1° *Les mêmes valeurs des Casimirs Ω et Ω' soit de $r(r+1)$ et $q(-q+1)$.*

2° *Le même couple* (i, j).

3° — *si* i *et* $j \neq 1$, *le même ensemble* Γ_0,

— *si* $i = 1$ *et* $j \neq 1$ *le même ensemble* Γ_0 *ou des* Γ_0 *symétriques dans* $\mathbb{C}^2$ *par rapport à la droite* $l = -1/2$ *et le même* ν_0 (ν_0 *étant le 2*^e^ *paramètre de* $\mathscr{M}_1^{l_0} = \mathrm{D}(l_0, \nu_0) \sim \mathrm{D}(-l_0 - 1, \nu_0)$);

— *si* $i \neq 1$ *et* $j = 1$, *le même ensemble* Γ_0 *ou des* Γ_0 *symétriques dans* $\mathbb{C}^2$ *par rapport à la droite* $l' = -1/2$ *et le même* ν'_0 (ν'_0, *2*^e^ *paramètre de*

$$\mathscr{M}_1^{l'_0} = \mathrm{D}(l'_0, \nu'_0) \sim \mathrm{D}(-l'_0 - 1, \nu'_0);$$

— *si* $i = j = 1$, *le même* Γ_0 *ou des* Γ_0 *symétriques dans* $\mathbb{C}^2$ *par rapport, soit à la droite* $l = -1/2$, *soit à la droite* $l' = -1/2$, *soit au point* $(-1/2, -1/2)$ *et les mêmes valeurs de* ν_0 *et* ν'_0.

II. CONSTRUCTION DANS DES ESPACES DE HILBERT DE REPRÉSENTATIONS LOCALES DE so(4,1) ET RÉALISATIONS HILBERTIENNES DE CERTAINES REPRÉSENTATIONS DE so(4,1) DU THÉORÈME I.3.1

1. Construction de représentations locales de so(4,1) dans des espaces de Hilbert.

Soit U le groupe des quaternions de module 1, isomorphe à SU(2). Soit ρ^n la représentation unitaire irréductible de U dans V^n, espace de dimension $2n + 1$. Appelons $d\mu(u)$ la mesure invariante normalisée sur U. Les représentations de la série principale de G, les $\mathrm{U}^{n,s}$, construites par Takahashi [2] dans l'espace $\mathscr{L}^2(\mathrm{U}, d\mu) \otimes \mathrm{V}^n$ sont définies par :

$$\mathrm{U}^{n,s}_{(g)}(f(u) \otimes v) = (w(g^{-1}, u))^{-s} f(g^{-1}.u) \otimes \rho^n(u_\mathrm{G}(g^{-1}, u)^{-1})v$$

où

$$w(g, u) = |cu + d|^2, \qquad u_\mathrm{G}(g, u) = cu + d/|cu + d|, \qquad g.u = (au + b)(cu + d)^{-1} \in \mathrm{U} \; ; \text{ si } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{G}.$$

Si $s = 3/2 + ip$ alors $\mathrm{U}^{n,s}$ est unitaire.

Nous allons réaliser les $\mathrm{U}^{n,s}$ dans un autre espace de Hilbert choisi en vue de la partie III.

A. Autres réalisations des représentations $\mathrm{U}^{n,s}$ de G.

Soit H_3 l'hyperboloïde à 2 nappes dans $\mathbb{R}^4$:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 1 \qquad \text{et } d\mu'(p) = d^3p/|p_0| = dp_1 dp_2 dp_3/|p_0|.$$

Chaque nappe de l'hyperboloïde peut être envoyée bijectivement sur chaque demi-sphère ouverte de U par :

$$p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \rightarrow \varphi(p) = u = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4$$

avec $\qquad u_1 = 1/p_0, u_i = p_{i-1}/p_0, i = 2, 3, 4.$

Alors $d\mu(u) = (1/\pi^2 \mid p_0 \mid^3) d\mu'(p)$.

Soit $\mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3)$ l'espace des fonctions complexes de carré sommable en module sur H_3 pour $d\mu'(p)$. Le cercle équatorial étant de mesure nulle sur U pour $d\mu(u)$, nous pouvons définir un isomorphisme unitaire V de $\mathscr{L}^2(\mathrm{U}) \otimes \mathrm{V}^n$ sur $\mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3) \otimes \mathrm{V}^n$ par :

$$\text{(II.1.1)} \quad f(u) \otimes v \rightarrow \mathrm{V}(f \otimes v)(p) = f(\varphi(p))/\pi \mid p_0 \mid^{3/2} \otimes v = \mathrm{F}(p) \otimes v$$

Définissons alors dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3) \otimes \mathrm{V}^n$ la représentation $\mathrm{W}^{n,s}$ de G unitairement équivalente à $\mathrm{U}^{n,s}$ par :

$$\text{(II.1.2)} \qquad \mathrm{W}^{n,s}(g)(\mathrm{F}(p) \otimes v) = \mathrm{VU}^{n,s}(g)\mathrm{V}^{-1}(\mathrm{F}(p) \otimes v)$$

REMARQUE II.1.1. — Soit $\mathscr{B}$ le sous-groupe de G isomorphe à SL(2, $\mathbb{C}$) agissant dans le repère (0, 2, 3, 4). Soient H_3^+ et H_3^- les 2 nappes de l'hyperboloïde ($p_0 > 0$ et $p_0 < 0$). Alors $\mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3) \otimes \mathrm{V}^n = \mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3^+) \otimes \mathrm{V}^n \oplus \mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3^+) \otimes \mathrm{V}^n$. $\mathrm{W}^{n,s}$ restreinte à $\mathscr{B}$ laisse stable $\mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3^\varepsilon) \otimes \mathrm{V}^n(\varepsilon = \pm)$ [*4*] [*13*].

Représentants des générateurs de l'algèbre de Lie

Soit $\{ \vec{\mathrm{M}}, \vec{\mathrm{N}}, \vec{\mathrm{P}}, \vec{\mathrm{P}}_0 \}$ la 2^e base de so(4,1) définie dans les préliminaires (1°). En différentiant les formules II.1.2 sur le domaine dense des vecteurs différentiables dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3) \otimes \mathrm{V}^n$ on obtient

$$\text{(II.1.3)} \quad \begin{aligned} \vec{\mathrm{M}} &= -i(\vec{p} \wedge \partial/\partial\vec{p}) + \vec{\mathrm{S}} \\ \vec{\mathrm{N}} &= -ip_0\partial/\partial\vec{p} - \vec{\mathrm{S}}/p_0 - (1/p_0)\vec{p} \wedge \vec{\mathrm{S}} + i(\mathrm{Re}\, s - 3/2)\vec{p}/p_0 \\ \vec{\mathrm{P}} &= (3i/2 - \rho)\vec{p} + i\partial/\partial\vec{p} + i\vec{p}(\vec{p}\,.\,\partial/\partial\vec{p}) + \vec{\mathrm{S}} \quad \text{si } s = \mathrm{Re}\, s + i\rho \\ \vec{\mathrm{P}}_0 &= (3i/2 - \rho)p_0 + 1/p_0(\vec{p}\,.\,\vec{\mathrm{S}}) + ip_0(\vec{p}\,.\,\partial/\partial\vec{p}) + i\,(\mathrm{Re}\, s - 3/2)1/p_0 \end{aligned}$$

où $\vec{\mathrm{P}} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$; $\partial/\partial\vec{p} = (\partial/\partial p_1, \partial/\partial p_2, \partial/\partial p_3)$; $\vec{\mathrm{S}} = (\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3)$.

Les S_i étant une base de l'algèbre de Lie su(2) telle que

$[\mathrm{S}_k \mathrm{S}_l] = i\varepsilon_{k,l,m}\mathrm{S}_m$ dans la représentation D(n) irréductible de dimension $2n + 1$.

B. AUTRES REPRÉSENTATIONS LOCALES DE L'ALGÈBRE DE LIE SO(4,1)

Soit V_i^l l'espace d'une représentation de Miller $\mathscr{M}_i^l$ de su(2) et soit $\{ f_\nu^l \}$ une base de V_i^l telle que

$$\mathrm{S}_3 f_\nu^l = \nu f_\nu^l, \quad \mathrm{S}^+ f_\nu^l = \sqrt{(l-\nu)(l+\nu+1)} f_{\nu+1}^l, \quad \mathrm{S}^- f_\nu^l = \sqrt{(l+\nu)(l-\nu+1)} f_{\nu-1}^l.$$

Définissons sur V_i^l le produit scalaire faisant de $\{f_\nu^l\}$ une base orthonormée et soit H_i^l l'Hilbert obtenu en complétant V_i^l par rapport à la topologie associée à ce produit scalaire. Soit $H_{i,0}^l$ le sous-espace de H_i^l formé par les combinaisons linéaires finies d'éléments de la base et soit :

$$H = \mathscr{L}^2(H_3) \hat{\otimes} H_i^l \qquad \text{(produit tensoriel complété).}$$

Alors les formules (II.1.3) où $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ agit dans H_i^l suivant la représentation de Miller $\mathscr{M}_i^l$, nous définissent dans H une représentation de l'algèbre so(4,1) notée $w_i^{l,s}$ sur un domaine dense commun et stable défini de la façon suivante :

Le sous-groupe compact maximal de G, K, est le produit direct de K_1 et K_2 [*2*], tous deux isomorphes à U. Une représentation unitaire irréductible de K est donc unitairement équivalente à une représentation $\rho^{n,p}$, n et $p \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ définie dans $V^n \otimes V^p$ par [*2*] :

$$\rho^{n,p}(k) = \rho^n(u_1) \otimes \rho^p(u_2) \qquad \text{si } k = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} u_1 \text{ et } u_2 \in U.$$

Soit $w_K^{n,s}$ (resp. $w_{i,k}^{l,s}$) la restriction au sous-groupe K (resp. à la sous-algèbre k) de la représentation $W^{n,s}$ de G (resp. $w_i^{l,s}$ de so(4,1)). D'après Takahashi [*2*] $W_K^{n,s}$ est équivalente dans $H = \mathscr{L}^2(H_3) \otimes V^n$ à $\pi \otimes \rho^{0,n}$ où π est une représentation unitaire de K dans $\mathscr{L}^2(H_3)$ équivalente à la régulière, donc

$$\pi = \bigoplus_{p \in (1/2)\mathbb{N}} \rho^{p,p} \qquad \text{et} \qquad \alpha^2(H_3) = \bigoplus_{p \in (1/2)\mathbb{N}} H_{p,p} \quad \text{(somme hilbertienne)}$$

$H_{p,p}$ étant un sous-espace de $\mathscr{L}^2(H_3)$ de dimension $(2p + 1)^2$, portant la représentation $\rho^{p,p}$ de K.

$$\text{Soit } H_0 = \left(\sum_{p \in (1/2)\mathbb{N}} H_{p,p} \right) \otimes V^n \quad \text{(somme algébrique).}$$

Alors H_0 est un domaine dense commun et stable pour les éléments de l'algèbre de Lie so(4,1) dans la représentation $w_4^{n,s}$ et contenu dans les vecteurs analytiques de $W^{n,s}$ (lemme 34-9 de [*8a*], [*8b*]). Quand on considère $w_i^{l,s}$ $i \neq 4$, comme l'action des générateurs n'est pas modifiée, il est évident que :

$$H_0 = \left(\sum_{p \in (1/2)\mathbb{N}} H_{p,p} \right) \otimes H_{i,0}^l \tag{II.1.4}$$

est un domaine dense commun et stable pour les éléments de so(4,1) dans la représentation $w_i^{l,s}$. Alors sur ce H_0, par la définition même de $w_i^{l,s}$ on a :

$$w_{i,k}^{l,s} \simeq \left(\sum_{p \in (1/2)\mathbb{N}} D(p) \otimes D(p) \right) \otimes (D(0) \otimes \mathcal{M}_i^l). \tag{II.1.5}$$

Or d'après le 4° des préliminaires, compte-tenu de (II.1.5), on en déduit sur H_0 :

$$w_{4,k}^{l,s} = \oplus \sum_{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma_4} D(\tfrac{1}{2} q) \otimes D(\tfrac{1}{2} q') \tag{II.1.6}$$

où

$\Gamma_4 = \{ (\frac{1}{2} q, \frac{1}{2} q') \in \mathbb{N}/2 \times \mathbb{N}/2 ; \frac{1}{2}(q+q') \geqslant l \geqslant \frac{1}{2}(|q-q'|), \frac{1}{2}(q+q') \equiv l \mod(1) \}$

et si $i=2$ ou 3, avec $l \notin \mathbb{Z}/2$ (pour que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}(l+p) \notin \mathbb{N}$)

$$w_{i,k}^{l,s} = \sum_{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma'_i} D(\tfrac{1}{2} q) \otimes \mathcal{M}_i^{l+(q'/2)} \tag{II.1.7}$$

où $\Gamma'_i = \{ (\frac{1}{2} q, \frac{1}{2} q') \in \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, \frac{1}{2}(q+q')$ et $\frac{1}{2}(q-q') \in \mathbb{N} \}$ et $\Gamma_i = (0, l) + \Gamma'_i$.

REMARQUE II.1.2. — $w_{i,k}^{l,s}$ définie sur H_0 pour $i=2$ ou 3 et $l \in -\frac{1}{2}\mathbb{N}^*$ n'est pas complètement réductible [5c], donc $w_i^{l,s}$ ne peut être en ce cas algébriquement équivalente à une représentation du théorème I.3.1. Quant au cas $i = 1$, nous ne savons rien de la complète réductibilité de $w_{1,k}^{l,s}$ ce qui nous empêche d'en poursuivre l'étude. Dans ce qui suit, nous nous limiterons à l'étude des représentations $w_4^{l,s}$ et $w_i^{l,s}$, $i = 2, 3$, avec $l \notin \mathbb{Z}/2$. Alors la représentation $w_i^{l,s}$ de so(4,1) dans H_0 vérifie l'hypothèse h_2 du chapitre I.

2. **Étude de différents types d'irréductibilité des $w_i^{l,s}$ sur H_0.**

Partant d'une base de $\mathcal{L}^2(H_3)$ obtenue à partir des images par V(II.1.1) des polynômes de Gegenbauer normalisés de $\mathcal{L}^2(U)$ et d'une base de H_i^l, compte-tenu de (II.1.6), (II.1.7) et de [7] (p. 176) nous construisons une base de H contenue dans H_0 notée $\{ | \frac{1}{2} q, v, l+\frac{1}{2} q', v' >, (\frac{1}{2} q, l+\frac{1}{2} q') \in \Gamma_i \}$ où v varie dans $\{ -\frac{1}{2} q, -\frac{1}{2} q+1, \ldots, \frac{1}{2} q \}$ et v' dans

$$\{ -l-\tfrac{1}{2} q', -l-\tfrac{1}{2} q'+1, \ldots, l+\tfrac{1}{2} q' \} \quad (\text{resp. } \{ -l-\tfrac{1}{2} q'+n, n \in \mathbb{N} \},$$
$$\{ l+\tfrac{1}{2} q'-n, n \in \mathbb{N} \}) \quad \text{si } i=4 \quad (\text{resp. } i=3, i=2, l \notin \mathbb{Z}/2).$$

L'action des générateurs de so(4,1)

$$\{ L, L', X_\alpha, X_{-\alpha}, X_{-\beta}, X_\beta, X_\gamma, X_{-\gamma}, X_\delta, X_{-\delta} \}$$

est donnée sur cette base par (I.1.1) et (I.2.1) où (l, v, l', v') est remplacé par $(\frac{1}{2} q, v, l+\frac{1}{2} q', v')$ et où :

$$
\text{(II.2.1)} \quad \left\{
\begin{array}{l}
A_{q/2,l+q'/2} = 1/2q \sqrt{\dfrac{q+1}{(2l+q'+1)(q+2)}}(q+q'+2l+2s) \\
\qquad\qquad \text{si } q \neq 0, A_{0,l} = \dfrac{l+s}{\sqrt{2(2l+1)}}. \\
\left\{ \begin{array}{l}
B_{q/2,l+q'/2} = \dfrac{(\frac{1}{2}(q-q')-l-s+1)(\frac{1}{2}(q-q'))(q-1)}{q\sqrt{q(q+1)(2l+q'+1)}} \\
\qquad\qquad \text{si } (\frac{1}{2} q, \frac{1}{2} q') \neq (1/2, -1/2) \quad q \neq 0. \\
B_{0,l} = 0 \qquad B_{1/2,l-1/2} = (2-l-s)/\sqrt{4l}.
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
C_{q/2,l+q'/2} = 4l+q'-q/2q \sqrt{\dfrac{q+1}{(2l+q')(q+2)}} \dfrac{q-q'-2l+2s-2}{2(2l+q'+1)} \\
\text{si } (\frac{1}{2} q, \frac{1}{2} q') \neq (0,0), (\frac{1}{2} q, \frac{1}{2} q') \neq (l, -l) \quad \text{si} \quad l \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \quad (i=4) \\
C_{0,l} = \sqrt{l(s-l-1)/2l+1}\,; \; C_{l,0} = 0 \quad \text{si} \quad l \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \quad (i=4).
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
D_{q/2,l+q'/2} = \dfrac{(q+q'+2l-2s+4)(q+q'+4l+2)(q+q')(q-1)}{8q(2l+q'+1)\sqrt{q(q+1)(2l+q')}} \\
\qquad \text{si } (q,q') \neq (1,1); q \neq 0 \quad \text{et} \quad q' \neq -2l \text{ si } l \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \quad (i=4) \\
D_{1/2,l+1/2} = \dfrac{(l-s+3)}{\sqrt{2(2l+1)}}; \quad D_{0,l} = 0; \quad D_{l,0} = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{si } l \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \quad i=4).
\end{array} \right.
\end{array}
\right.
$$

Rappelons aussi que si I est l'opérateur identité

$$w_i^{l,s}(\Omega) = (-l(l+1)+s(3-s))\mathrm{I}, \quad w_i^{l,s}(') = (-l(l+1)(s(3-s)-2))\mathrm{I}.$$

PROPOSITION II.2.1. — *Si $w_4^{l,s}$ est Schur irréductible sur* H_0 (*préliminaires* 2°) *alors* $W^{l,s}$ *est Schur irréductible.*

Démonstration. — Soit A un opérateur borné commutant à $W^{l,s}$ sur H. A commute en particulier à la restriction $W_K^{l,s}$ de $W^{l,s}$ au sous-groupe compact maximal K de G.

Il en résulte que $\forall (\frac{1}{2} q, \frac{1}{2} q') \in \Gamma_4$, $AH_{q/2,q'/2}$ est stable par $W_K^{l,s}$ qui y induit une représentation finie irréductible de dimension $(q+1)(q'+1)$. Comme chaque représentation irréductible de dimension finie apparaît au plus une fois dans $W_K^{l,s}$ on a :

$$AH_{q/2,q'/2} = H_{q/2,q'/2} \qquad \text{donc } AH_0 = H_0$$

De la relation $AW^{l,s}(g)\varphi = W^{l,s}(g)A\varphi$, $\forall g \in G$, $\forall \varphi \in H_0$, il résulte que, A étant borné :

$$Aw_4^{l,s}(X)\varphi = w_4^{l,s}(X)A\varphi, \forall X \in so(4,1), \forall \varphi \in H_0,$$

et comme $w_4^{l,s}$ est Schur irréductible sur H_0 :

$$A = \lambda I \text{ sur } H_0, \qquad \text{d'où } A = \lambda I \text{ sur } H.$$

A. IRRÉDUCTIBILITÉ DES $w_4^{l,s}$ (DONC $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$) ET DES $W^{l,s}$.

Cas α :

$$s+l \notin \{ z \in \mathbb{Z} ; \quad z \leqslant 1+2l \} ; \quad l-s \notin \{ z \in \mathbb{Z} ; \quad z \leqslant -1+2l \}$$

ou $s+l=1$ ou $s-l=2$.

Compte tenu de ces conditions sur s et l et des formules (I.2.1) avec (II.2.1), il est facile de montrer alors que $w_4^{l,s}$ *est algébriquement irréductible sur* H_0 (donc Schur irréductible [*10*]) (car alors

$$A_{q/2,q'/2}, B_{q/2,q'/2}, C_{q/2,q'/2}, D_{q/2,q'/2} \neq 0 \quad \forall (\tfrac{1}{2} q, \tfrac{1}{2} q') \in \Gamma_4$$

avec $\frac{1}{2}(q+q')$ et $\frac{1}{2}|q-q'| \neq l$). $w_4^{l,s}$ satisfait, dans ce cas, les hypothèses h_1 et h_2 du chapitre I, donc est algébriquement équivalente à une représentation du théorème I.3.1. Du théorème I.3.2 résulte que $w_4^{l,s}$ *est alors algébriquement équivalente sur* H_0 *à la représentation* ${}^{12}R^d_{4,4}(q, r)$ *du cas* 12 *d*) *du théorème* I.3.1 *avec* $q=-l$, $r=1-s$. De plus chaque représentation ${}^{12}R^d_{4,4}(q, r)$ peut être réalisée dans $\mathscr{L}^2(H_3) \hat{\otimes} H_4^{-q}$ par $w_4^{-q,1-r}$ définie sur H_0 où $l=-q$ et $s=1-r$ vérifient (modulo les conditions sur r et q du cas 12*d* du théorème I.3.1) les conditions ci-dessus.

Comme ${}^{12}R^d_{4,4}(q, r)$ et ${}^{12}R^d_{4,4}(q, -r-1)$ sont équivalentes, il en est de même de $w_4^{l,s}$ et $w_4^{l,3-s}$.

Or $w_4^{l,s}$ est obtenue en différentiant $W^{l,s}$ sur H_0 : *Par conséquent toutes les représentations* ${}^{12}R^d_{4,4}(q, r)$ *de la classe* 12 *d*) *du théorème* I.3.1 *sont intégrables aux représentations* $W^{l,s}$ *de* G *avec* $l=-q$ *et* $s=1-r$ *dans l'Hilbert* $H = \mathscr{L}^2(H_3) \hat{\otimes} H_4^l$.

D'après les théorèmes d'Harish-Chandra ([9], p. 329, 318), $W^{l,s}$ *est topologiquement complètement réductible* [9] *dans ce cas.*

Les $W^{l,s}$ sont unitaires si $\mathrm{Re}\, s = 3/2$. Dans ce cas, elles sont unitairement équivalentes aux représentations de Dixmier [*1*] du type $v_{l,\sigma}$ avec

$$\sigma = s(3-s)-2 \text{ où } \sigma \geqslant 1/4 \quad \text{si} \quad l \in \mathbb{N} \text{ et } \sigma > 1/4 \quad \text{si} \quad l \equiv 1/2, \ (\text{mod } 1).$$

Les $W^{l,s}$ avec $l \in \mathbb{N}^*$ et $1 < s < 2$ (resp. : $l=0$, $0 < s < 3$) ne sont plus unitaires mais sont Naïmark équivalentes (théorème de Godement, [9] p. 326) aux unitaires de Dixmier [*1*] du type $v_{l,\sigma}$ avec $l \in \mathbb{N}^*$ et où $\sigma = s(3-s)-2$ avec $0 < \sigma < 1/4$ (resp. $l=0$, $-2 < \sigma < 1/4$).

Ainsi toutes les unitaires de la classe $v_{l,\sigma}$ *de Dixmier sont réalisées, à une Naïmark équivalence près, dans* H *par les représentations* $W^{l,s}$ *de* G *dans ce cas* α) *(Naïmark équivalence qui devient une équivalence unitaire si* $W^{l,s}$ *est unitaire).*

Enfin $W^{l,s}$ et $W^{l,3-s}$ sont Naïmark équivalentes (th. de Godement [9], p. 326).

Cas β : $s + l \in -\mathbb{N}$.

Compte tenu de $s + l \in -\mathbb{N}$ et des formules (II.2.1), le sous-espace

$$H_1 = \sum_{\substack{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma_4 \\ q + q'/2 \leqslant -s}} H_{q/2,\, q'/2}$$

est stable sous la représentation car $A_{q/2,q'/2}$ est nul pour $(\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}q')$ dans Γ_4 avec $\frac{1}{2}(q + q') = -s$.

Comme $B_{q/2,q'/2}, C_{q/2,q'/2}, D_{q/2,q'/2} \neq 0$ $\forall(\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}q') \in \Gamma_4$ tel que $\frac{1}{2}(q+q' \neq 0$ et $\frac{1}{2}|q - q'| \neq l$, il est facile de montrer que $w_4^{l,s}$ *est dans ce cas Schur irréductible sur* H_0 (*préliminaires* 2) β) *mais non algébriquement irréductible.*

La restriction de $w_4^{l,s}$ à H_1 est algébriquement irréductible et pour les mêmes raisons que dans le cas α) elle est algébriquement équivalente à la représentation ${}^{16}R_{4,4}(q, r)$ du cas 16 du théorème I.3.1 où $q = -l$ et $r = 1 - s$ et réciproquement chaque ${}^{16}R_{4,4}(q, r)$ peut être réalisée par la restriction à H_1 de $w_4^{l,s}$ où $l = -q$, $s = 1 - r$, vérifient (modulo les conditions sur r et q du cas 16 du théorème I.3.1) $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et $l + s \in -\mathbb{N}$.

$W^{l,s}$, représentation de G dans H n'est pas topologiquement irréductible, le sous-espace fermé H_1 ($\neq \{0\}$ et de H) étant stable à $W^{l,s}$, *mais Schur irréductible d'après la proposition* II.2.1. *La restriction de* $W^{l,s}$ *à* H_1 *sera topologiquement complètement irréductible* d'après les théorèmes d'Harish-Chandra [*9*], p. 329, 318).

Cas γ : $l \equiv s \pmod 1$ $\quad -l + 1 < s \leqslant l + 1$.

Par des méthodes analogues à celles des cas α) et β), en utilisant les théorèmes I.3.1, I.3.2, nous montrons les résultats suivants :

— Si $s = 3/2$ ($2l$ est entier impair), on pose :

$$H_1 = \sum_{\substack{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma_4 \\ -l \leqslant (q'-q)/2 \leqslant -1/2}} H_{q/2,\, q'/2}$$

et
$$H_2 = \sum_{\substack{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma_4 \\ 1/2 \leqslant (q'-q)/2 \leqslant l}} H_{q/2,\, q'/2}\,; \; H_1 \text{ et } H_2 \neq \{0\}.$$

Alors $H_0 = H_1 \oplus H_2$.

$w_4^{l,s}$ laisse stable H_1 (resp. H_2) et y induit une représentation algébriquement irréductible de so(4,1) algébriquement équivalente à la représentation ${}^{12}R_{4,4}^b(q, r)$ avec $q = -l$ $r = -1/2$ du théorème I.3.1 donc à la représentation $\pi_{l,1/2}^-$ de Dixmier [*1*] (resp. ${}^{12}R_{4,4}^a(q, r)$ avec $q = 1/2$, $r = l$, donc à la représentation $\pi_{l,1/2}^+$ de Dixmier).

De plus
$$w_4^{l,s} = \pi_{l,1/2}^- \oplus \pi_{l,1/2}^+$$

résultat déjà obtenu par Takahashi [*2*].

$W^{l,3/2}$ *(qui est unitaire) est donc complètement réductible en la somme des 2 unitaires irréductibles de* G *associées respectivement aux représentations* $\pi^-_{l,1/2}$, $\pi^+_{l,1/2}$ *de* so(4,1) [*1*], *agissant respectivement dans* $\bar{H}_1$ *et* $\bar{H}_2$.

— Si $s - 2 > -s + 1$ $(s > 3/2)$, on pose :

$$H_1 = \oplus \sum_{\substack{(q/2,q'/2)\in\Gamma_4 \\ -l \leqslant (q'-q)/2 \leqslant -s+1}} H_{q/2,q'/2} \quad \text{et} \quad H_2 = \oplus \sum_{\substack{(q/2,q'/2)\in\Gamma_4 \\ s-1 \leqslant (q'-q)/2 \leqslant 1}} H_{q/2,q'/2}\,;$$

mais $H_1 \oplus H_2 \neq H_0$ car $s > 3/2$.

H_1 et H_2 sont stables par $w_4^{l,s}$ *qui n'est donc pas algébriquement irréductible mais Schur irréductible.*

De plus la restriction de $w_4^{l,s}$ à H_1 (resp. H_2) est algébriquement irréductible et algébriquement équivalente à ${}^{12}R^b_{4,4}(q,r)$ avec $q = -l$, $r = 1 - s$, du théorème I.3.1, donc à $\pi^-_{l,s-1}$ de Dixmier [*1*] (resp. ${}^{12}R^a_{4,4}(q,r)$ avec $r = l, q = s - 1$, donc à $\pi^+_{l,s-1}$ de Dixmier).

La proposition II.2.1 entraîne *l'irréductibilité Schur pour* $W^{l,s}$ (non unitaire) *qui n'est pas topologiquement irréductible* : $W^{l,s}$ laisse stable $\bar{H}_1$ (resp. $\bar{H}_2$) où elle induit une représentation topologiquement complètement irréductible (théorème d'Haris-Chandra ([*9*], p. 329-318)), Naïmark équivalente (th. Godement, [*9*], p. 326) à l'unitaire irréductible associée à $\pi^-_{l,s-1}$ (resp. $\pi^+_{l,s-1}$) de Dixmier [*1*].

Ainsi toutes les représentations unitaires de G *de la série discrète*

$$\pi^{\pm}_{l,s-1} (s \equiv l \bmod 1, s \geqslant 3/2)$$

sont Naïmark équivalentes à des sous-représentations de $W^{l,s}$ *de ce cas* γ) *pour* $s \geqslant 3/2$.

— Si $s < 3/2$, on pose :

$$H_1 = \sum_{\substack{(q/2,q'/2)\in\Gamma_4 \\ s-1 \leqslant (q'-q)/2 \leqslant -s+1}} H_{q/2,q'/2}\,.\, H_1 \neq H_0 \ \text{car} \ l + s \neq 1$$

H_1 est stable par $w_4^{l,s}$ *qui est donc Schur irréductible.*

$w_4^{l,s}$ induit dans H_1 une représentation algébriquement irréductible, algébriquement équivalente à la représentation ${}^{12}R^c_{4,4}(q,r)$ du cas 12 *c*) du théorème I.3.1 avec $q = s - 1$ et $r = l$. Réciproquement, toute représentation ${}^{12}R^c_{4,4}(q,r)$ peut être réalisée comme la restriction de $w_4^{l,s}$, où $l = r$ et $s = q + 1$ vérifient, modulo les conditions sur r et q du cas 12 *c*) du théorème I.3.1, $s \equiv l \pmod 1$, $-l + 1 < s \leqslant l + 1$, *et* $s < 3/2$, au sous-espace H_1 correspondant.

La représentation $W^{l,s}$ *(non unitaire) de* G *est simplement Schur irréductible* (Proposition II.2.1) : elle laisse stable $\bar{H}_1$ où elle induit une représentation topologiquement complètement irréductible (Th. d'Harish-Chandra [*9*], p. 329-318). Il en résulte que *toutes les représentations* ${}^{12}R^c_{4,4}(q,r)$

sont intégrables à des représentations hilbertiennes topologiquement complètement irréductibles, en l'occurence la composante de $W^{l,s}$ dans $\bar{H}_1$ avec $l=r$, $s=q+1$. En particulier si $s=1$ ($\Rightarrow l \in \mathbb{N}^*$), la restriction de $W^{l,1}$ à $\bar{H}_1$ est Naïmark équivalente (Th. de Godement [9], p. 326) à l'unitaire irréductible de Dixmier de G associée à $\pi_{l,0}$ [1].

Cas δ : $s > l + 2$, $s + l \in \mathbb{Z}$.

Alors le sous-espace

$$H_1 = \sum_{\substack{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma_4 \\ (q+q')/2 \geqslant s-2}} H_{q/2,\, q'/2} \qquad (H_1 \neq 0 \text{ et } H \text{ car } s - 2 > l)$$

est stable par $w_4^{l,s}$.

$w_4^{l,s}$ est encore non algébriquement irréductible mais Schur irréductible.

De plus, sa restriction à H_1 est algébriquement irréductible et réalise aussi dans H_1 la représentation ${}^{12}R^c_{4,4}(q,r)$ du théorème I.3.1 quand

$$q = -l,\ r = s - 2$$

et on les obtient toutes aussi de cette façon-là. $W^{l,s}$ est donc Schur irréductible : elle laisse stable $\bar{H}_1$ où elle induit une représentation topologiquement irréductible ([9], p. 329, 318). Remarquons que dans ce cas la restriction à $\bar{H}_1$ de $W^{l,s}$ est Naïmark équivalente à la restriction de $W^{s-2,-l+1}$ au $\bar{H}_1$ du 3^e point du cas γ).

De tout ceci résulte les théorèmes suivants :

THÉORÈME II.2.1. — A) *$s \neq 3/2$ ou $s = 3/2$ mais $l \in \mathbb{N}$: les représentations $w_4^{l,s}$ sont toutes des modules d'Harish-Chandra indécomposables Schur irréductibles. Si $l + s \notin \{ z \in \mathbb{Z}, z \leqslant 1 + 2l \}$ et $l - s \notin \{ z \in \mathbb{Z}, z \leqslant -1 + 2l \}$ où si $s + l = 1$ ou $s - l = 2$, $w_4^{l,s}$ est algébriquement irréductible, $w_4^{l,s}$ et $w_4^{l,3-s}$ sont algébriquement équivalentes.*

Les $W^{l,s}$ de G sont toutes Schur irréductibles et de plus si

$$(l+s) \notin \{ z \in \mathbb{Z},\ z \leqslant 1+2l \} \qquad \text{et} \qquad l-s \notin \{ z \in \mathbb{Z}, z \leqslant -1+2l \}$$

ou si $s+l=1$ ou $s-l=2$, elle est topologiquement complètement irréductible, et $W^{l,s}$ et $W^{l,3-s}$ sont Naïmark équivalentes.

B) $s = 3/2$ $l \equiv 1/2 \bmod(1)$ *alors* $w_4^{l,3/2} = \pi^-_{l,1/2} \oplus \pi^+_{l,1/2}$ $W^{l,3/2}$ *est la somme directe des 2 unitaires irréductibles de* G *de Dixmier correspondant respectivement* à $\pi^-_{l,1/2}$ *et* $\pi^+_{l,1/2}$ [1].

THÉORÈME II.2.2. — *Toutes les représentations de la classification du théorème* I.3.1 *se décomposant sur la sous-algèbre k en une somme directe de représentations de dimension finie (cas 16 et cas 12 avec $(i, j) = (4,4)$ du théorème* I.3.1) *sont intégrables à des représentations hilbertiennes de* G *topologiquement complètement irréductibles et peuvent être réalisées soit dans l'Hilbert* $H = \mathscr{L}^2(H_3) \hat{\otimes} H_4^l$ *par les $w_4^{l,s}$ définies sur le domaine dense* H_0, *soit par une sous-représentation de* $w_4^{l,s}$ *définie sur un sous-espace stable* H_1 *de* H_0 *(on retrouve en outre toutes celles de Dixmier).*

COROLLAIRE II.2.1. — *Toutes les représentations complètement irréductibles dans un Banach du groupe* G *sont hilbertisables (elles sont Naïmark équivalentes à une représentation complètement irréductible de* G *dans un Hilbert).*

Ceci résulte de [*22*] et des théorèmes d'Harish-Chandra ([*9*], p. 329-318) ainsi que du théorème II.2.2.

B. IRRÉDUCTIBILITÉ DES $w_i^{l,s}$ AVEC $2l \notin \mathbb{Z}$, $i = 2, 3$.

On montre d'une façon analogue à celle de A) le :

THÉORÈME II.2.3. — *Les représentations* $w_i^{l,s}$ *où* $i = 2$ *ou* 3 *et* $2l \notin \mathbb{Z}$ *définies sur le sous-espace dense* H_0 *de* H *sont:*

1) *algébriquement irréductibles si* $l + s - 1$ *et* $l - s + 2 \notin \mathbb{Z}^*$. *Dans ce cas elles réalisent dans l'espace de Hilbert* H *sur* H_0 *toutes les représentations* ${}^8R^b_{(4,i)}(q, r)$ *du cas* 8 *b) du théorème* I.3.1 *où* $q = s - 1$, $r = l$. $w_i^{l,s}$ *et* $w_i^{l,3-s}$ *sont algébriquement équivalentes.*

2) *Schur irréductibles dans tous les autres cas. Alors la composante de* $w_i^{l,s}$ *dans le sous-espace stable* H_1 *de* H_0 *réalise dans l'Hilbert* $\bar{H}_1$

a) *Toutes les représentations* ${}^8R^a_{4,i}(q, r)$ *du cas* 8 *a) du théorème* I.3.1 *quand:*

soit $l + s \in \mathbb{N} - \{0,1\}$:

alors $$H_1 = \sum_{\substack{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma_i' \\ (q-q')/2 \geqslant l+s-1}} H_{q/2,\, l+q'/2}\,;\; r = l,\; q = s - 1$$

soit $l - s + 2 \in - \mathbb{N}^*$:

alors $$H_1 \sum_{\substack{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma_i' \\ (q+q')/2 \geqslant -l+s-2}} H_{q/2,\, l+q'/2}\,;\; r = s - 2,\; q = -l$$

b) *Toutes les représentations* ${}^{12}R^a_{4,i}(q, r)$ *du cas* 12 *a) du théorème* I.3.1 *quand* $l - s + 1 \in \mathbb{N}$:

alors $$H_1 = \sum_{\substack{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma_i' \\ 0 \leqslant (q-q')/2 \leqslant l-s+1}} H_{q/2,\, l+q'/2}\,;\; r = l,\; q = s - 1$$

c) *une partie des représentations* ${}^{14}R^a_{4,i}(q, r)$ *du cas* 14 *a) du théorème* I.3.1 *quand* $l + s \in - \mathbb{N}$:

alors $$H_1 = \sum_{\substack{(q/2,\, q'/2) \in \Gamma_i' \\ 0 \leqslant (q+q')/2 \leqslant -l-s}} H_{q,2,\, l+q'/2}\,;\; q = l + 1,\; r = 1 - s$$

REMARQUE II.2.1. — Soit θ l'automorphisme d'ordre 2 de so(4,1) défini dans ([1], p. 28). θ échange le rôle des 2 idéaux r_1 et r_2 de k. Soit alors

$$w_i^{l,s,\theta}(\mathrm{X}) = w_i^{l,s}(\theta(x)).$$

$w_i^{l,s,\theta}$ est alors une représentation de so(4,1) dans H, toujours définie sur le même domaine dense commun et stable H_0, et de plus :

a) $w_4^{l,s,\theta}$ est algébriquement équivalente sur H_0 à $w_4^{l,s}$.

b) Si $i = 2$ ou 3 et $2l \notin \mathbb{Z}$, $w_i^{l,s,\theta}$ n'est en aucun cas équivalente à $w_i^{l,s}$ et on a pour $w_i^{l,s,\theta}$ l'analogue du théorème II.2.3 :

$w_i^{l,s,\theta}$ ou des sous-représentations permettent de réaliser sur un domaine dense dans un espace de Hilbert toutes les représentations des cas 9 *a*), 9 *b*), 12 *b*) et une partie de celles du cas 13 *a*) du théorème I.3.1 (quand on fait $(i, j) = (i, 4)$).

III. CONTRACTION DES REPRÉSENTATIONS $w_i^{l,s}$ de so(4,1) EN DES REPRÉSENTATIONS DE L'ALGÈBRE DE LIE DE POINCARÉ

L'algèbre de Lie de so(4,1) se contracte au sens d'Inonu-Wigner [11] [12] en l'algèbre de Lie de Poincaré. Les représentations de so(4,1) obtenues à partir des unitaires ont déjà été contractées dans [15] [14] [13].

1. Contraction dans $\mathrm{H} = \mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3) \hat{\otimes} \mathrm{H}_i^l$ des $w_i^{l,s}$ en des représentations de masse $\mu(\mu \in \mathbb{R}^{+*})$ de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré.

Soient **P** le groupe de recouvrement universel du groupe de Poincaré, $\mathscr{P}$ son algèbre de Lie et soit $\{ \vec{\mathrm{M}}', \vec{\mathrm{N}}', \vec{\mathrm{P}}' \}$ la base habituelle de $\mathscr{P}$ [17].

Soit une suite de représentations $w_i^{l,s}$ de so(4,1) agissant dans l'espace fixe $\mathrm{H} = \mathscr{L}^2(\mathrm{H}_3) \hat{\otimes} \mathrm{H}_i^l$ définie sur le domaine dense commun et stable $\mathscr{S} \otimes \mathrm{H}_{i,0}^l$ telles que :

i, l, a sont fixés (où $s = a + i\rho$)

$$\rho \to -\infty \quad \text{quand} \quad \lambda \to 0_+ \qquad \text{avec} \qquad -\lambda\rho = \mu \quad \mu \in \mathbb{R}^{+*}$$

où λ est le paramètre de la contraction.

Nous définissons une représentation de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{S} \otimes \mathrm{H}_{i,0}^l$ dans H, que nous noterons ${}_a\pi_i(\mu, l)$, par contraction de $w_i^{l,s}$:

$$(\mathrm{III}.1.1) \quad \begin{cases} \vec{\mathrm{M}}'(\mathrm{F} \otimes v) = \vec{\mathrm{M}}(\mathrm{F} \otimes v)\,; \qquad \vec{\mathrm{N}}'(\mathrm{F} \otimes v) = \vec{\mathrm{N}}(\mathrm{F} \otimes v). \\ \vec{\mathrm{P}}'(\mathrm{F} \otimes \vec{v}) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda \vec{\mathrm{P}}(\mathrm{F} \otimes v) = \mu \vec{\mathrm{P}}(\mathrm{F} \otimes v). \\ \mathrm{P}_0(\mathrm{F} \otimes \vec{v}) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda \mathrm{P}_0(\mathrm{F} \otimes v) = \mu p_0(\mathrm{F} \otimes v). \end{cases}$$

$(\vec{M}, \vec{N}, \vec{P})$ désignant toujours la base de so(4,1) utilisée dans II et :

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^2\Omega = P_0'^2 - \vec{P}'^2 = \mu^2,$$
$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^2\Omega' = (\vec{M}'.\vec{P}')^2 - (P_0'\vec{M} - \vec{P}' \wedge \vec{N})^2 = -l(l+1)\mu^2$$

Si H_3^ε est la nappe de l'hyperboloïde H_3, où le signe de p_0 est ε et $\mathscr{L}^2(H_3^\varepsilon)$ (resp. $\mathscr{S}^\varepsilon$) le sous-espace de $\mathscr{L}^2(H_3)$ (resp. $\mathscr{S}$) formé par les fonctions de $\mathscr{L}^2(H_3)$ (resp. $\mathscr{S}$) nulles sur $H_3^{-\varepsilon}$ (resp. sur $\mathscr{S}^{-\varepsilon}$) alors $\mathscr{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l$ est un sous-espace dense de $\mathscr{L}^2(H_3^\varepsilon) \hat{\otimes} H_i^l$, commun et stable sous la représentation ${}_a\pi_i(\mu, l)$ de $\mathscr{P}$. Soit ${}_a\pi_i^\varepsilon(\mu, l)$ la restriction de ${}_a\pi_i(\mu, l)$ à

$$\mathscr{L}^2(H_3^\varepsilon) \hat{\otimes} H_i^l = H^\varepsilon \qquad \text{définie sur} \qquad \mathscr{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l :$$

Alors ${}_a\pi_i^\varepsilon(\mu, l)$ *est une représentation de* $\mathscr{P}$ *de masse* $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$, *le signe de l'énergie étant* ε, *de spin* l, *les opérateurs de spin* S *agissant dans* H_i^l *suivant la représentation de Miller* $\mathscr{M}_i^l$ *de* sl(2) *et*

$${}_a\pi_i(\mu, l) = {}_a\pi_i^+(\mu, l) \oplus {}_a\pi_i^-(\mu, l)$$

PROPOSITION III.1.1. — *Les représentations* ${}_a\pi_i^\varepsilon(\mu, l)$ *de* $\mathscr{P}$ *dans* H^ε *sont Naïmark équivalentes à la représentation* ${}_{3/2}\pi_i^\varepsilon(\mu, l)$ *que nous noterons désormais* $\pi_i^\varepsilon(\mu, l)$.

Démonstration. — Soit A l'opérateur de H^ε dans lui-même défini sur son domaine $\mathscr{D}(A)$ par :

$$A(F \otimes v) = F/|p_0|^{a-3/2} \otimes v, \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{III.1.2}$$

Alors $\mathscr{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l \subset \mathscr{D}(A)$.

De plus A laisse stable $\mathscr{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l$ et y est biunivoque. Soit alors A^{-1} l'inverse de A dont le domaine de définition $\mathscr{D}(A^{-1})$ est l'image de A

$$(\mathscr{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l \subset \mathscr{D}(A^{-1})).$$

Un calcul simple donne :

$$A^{-1}{}_a\pi_i^\varepsilon(\mu, l)A = \pi_i^\varepsilon(\mu, l) \qquad \text{sur } \mathscr{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l.$$

Si $a > 3/2$: $\mathscr{D}(A) = H^\varepsilon$ et A est borné sur H^ε, donc fermé.
Si $a < 3/2$: $\mathscr{D}(A^{-1}) = H^\varepsilon$ et A^{-1} est borné sur H^ε, donc fermé.

2. Irréductibilité Schur des ${}_a\pi_i^\varepsilon(\mu, l)$ sur $\mathscr{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l$.

PROPOSITION III.2.1. — ${}_a\pi_i^\varepsilon(\mu, l)$ *est Schur irréductible sur* $\mathscr{S}_\varepsilon \otimes H_{i,0}^l$.

Démonstration. — Considérons le sous-espace $\mathscr{S}_0^\varepsilon$ de $\mathscr{S}^\varepsilon$ engendré par les fonctions de la forme $e^{-p_0^2}p_1^r p_2^s p_3^t p_0^q$, $r, s, t \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, et où le signe de p_0 est ε. $\mathscr{S}_0^\varepsilon$ est dense dans $\mathscr{S}^\varepsilon$. Soit T un opérateur borné de H laissant stable $\mathscr{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l$ et commutant à la représentation sur ce domaine. T commutant avec la multiplication par p_μ, donc avec la division par p_0, il est immédiat que :

$$T(p_1^r p_2^s p_3^t p_0^q e^{-p_0^2} \otimes v) = p_1^r p_2^s p_3^t p_0^q T(e^{-p_0^2} \otimes v), \qquad \forall v \in H_{i,0}^l.$$

A partir des expressions de $\vec{M}$ et de $\vec{N}$ on en déduit que :

$$S_i = 1/p_0^3 \left[\sum_{j=1}^{3} Q_j^i(\vec{p}) p_0 M_j + \sum_{j=1}^{3} Q'^i_j(\vec{p}) N_j \right] \quad \text{sur } \mathcal{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l$$

où $Q_j^i(\vec{p})$ et $Q'^i_j(\vec{p})$ sont des polynômes de 3 variables réelles p_1, p_2, p_3. Il en résulte que T commute avec les S_i sur $\mathcal{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l$ et comme les S_i agissent dans $H_{i,0}^l$ suivant une représentation de Miller on en déduit que :

$$T(e^{-p_0^2} \otimes v) = T'(e^{-p_0^2}) \otimes v, \qquad \forall v \in H_{i,0}^l.$$

A partir de N_i on en déduit que T' commute avec $\partial/\partial p_i$ sur $\mathcal{S}^\varepsilon$ d'où :

$$\partial/\partial p_i[T'(e^{-p_0^2})] = T'[-2p_i e^{-p_0^2}] = -2p_i T'[e^{-p_0^2}], \qquad i = 1, 2, 3,$$

d'où $T(p_1^r p_2^s p_3^t p_0^q e^{-p_0^2} \otimes v) = \lambda p_1^r p_2^s p_3^t p_0^q e^{-p_0^2} \otimes v$ sur H_3^ε.

$\mathcal{S}_0^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l$ étant dense dans $\mathcal{L}^2(H_3^\varepsilon) \hat{\otimes} H_i^l$ et T borné il en résulte que

$$T = \lambda I \quad \text{sur } \mathcal{L}^2(H_3^\varepsilon) \hat{\otimes} H_i^l.$$

REMARQUE III.2.1. — Cette proposition reste vraie sur tout domaine dense commun et stable à ${}_a\pi_i^\varepsilon(\mu, l)$ contenant $\mathcal{S}^\varepsilon \otimes H_{i,0}^l$.

3. **Intégrabilité des** ${}_a\pi_4^\varepsilon(\mu, l)$, $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$, $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, **au groupe P.**

$w_4^{l,s}$ est obtenue en différentiant la représentation $W^{l,s}$ de G sur le domaine dense des vecteurs différentiables.

Désignons par σ l'isomorphisme du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ dans G et soit $g = (X, b)$ un élément de **P** avec $X \in \mathbb{R}^4$ et $b \in SL(2, \mathbb{C})$.

Comme dans $W^{l,s}(\sigma(b))$ n'intervient que la partie réelle de s, a, qui est fixe au cours de la contraction, posons :

$$\text{(III.3.1)} \qquad D_a^{\mu,l}(g) F \otimes v = e^{i\mu(X.p)} W^{l,s}(\sigma(b))(F \otimes v)$$

(.) désignant le produit scalaire dans l'espace-temps.

On vérifie aisément que $D_a^{\mu,l}$ définit une représentation fortement continue de **P** dans $\mathcal{L}^2(H_3) \hat{\otimes} H_i^l$, unitaire si $a = 3/2$. Si nous calculons à partir de la formule (III.3.1) les représentants des générateurs de l'algèbre de Lie $\vec{M}'$, $\vec{N}'$, P'_μ nous obtenons les mêmes formules que (III.1.1), ce qui prouve que ${}_a\pi_4(\mu, l)$ ($l \in N/2$) *est intégrable à la représentation* $D_a^{\mu,l}$ *de* **P**, sur le domaine dense des vecteurs analytiques de $D_a(\mu, l)$.

D'après la remarque II.1.1, $D_a^{\mu,l}$ laisse stable $H^\varepsilon = \mathcal{L}^2(H_3^\varepsilon) \otimes H_i^l$. Soit $D_a^{\varepsilon,\mu,l}$ la représentation de **P** induite par $D_a^{\mu,l}$ dans H^ε.

Compte tenu de la remarque III.2.1, en se plaçant sur le domaine dense des vecteurs différentiables de $D_a^{\varepsilon\mu,l}$, on en déduit que sur ce domaine ${}_a\pi_4^{\varepsilon}(\mu, l)$ est Schur irréductible, donc qu'il en sera de même de $D_a^{\varepsilon\mu,l}$. Si $a = 3/2$, $D_{3/2}^{\varepsilon,\mu,l}$ est unitaire : c'est donc une unitaire irréductible de masse μ réelle positive, de spin discret, dont le signe de l'énergie est ε, d'où :

PROPOSITION III.3.1. — *Les représentations ${}_a\pi_4^{\varepsilon}(\mu, l)$ de $\mathscr{P}$ sont intégrables aux représentations Schur irréductibles $D_a^{\varepsilon,\mu,l}$ du groupe* **P** *dans* H^ε. *En particulier $D_{3/2}^{\varepsilon,\mu,l}$ est une représentation unitaire irréductible de* **P** *dans* H^ε *de masse réelle positive μ, de spin discret l, dont le signe de l'énergie est ε.*

PROPOSITION III.3.2. — *Les représentations $D_a^{\varepsilon,\mu,l}$ et $D_{3/2}^{\varepsilon,\mu,l}$ sont Naïmark équivalentes dans* $H^\varepsilon(\forall a \in \mathbb{R})$.

Démonstration. — Soit $a > 3/2$. D'après la proposition (III.1.1) nous avons dans ce cas

$$\text{(III.3.3)} \qquad {}_a\pi_4^{\varepsilon}(\mu, l)(X)A = A\pi_4^{\varepsilon}(\mu, l)(X) \quad \text{sur } \mathscr{S}^\varepsilon \otimes H_{l,0}^l, \quad \forall X \in \pi,$$

où A est alors un opérateur borné injectif sur H^ε.

Il est évident de montrer à partir des formules (III.1.2) et (III.1.1) que si φ est un vecteur appartenant au domaine commun des

$$\pi_4^{\varepsilon}(\mu, l)(X) \quad (\forall X \in \mathscr{P})$$

alors $A\varphi$ appartient au domaine commun des ${}_a\pi_4^{\varepsilon}(\mu, l)(X)$ $(X \in \mathscr{P})$. Alors l'égalité (III.3.3) reste vraie pour un tel vecteur.

D'après la proposition précédente ${}_a\pi_4^{\varepsilon}(\mu, l)$ a un domaine dense $\mathscr{A}_a$ de vecteurs analytiques. A étant borné, on en déduit, à partir de (III.3.3), que : $\mathscr{A}_{3/2} \subset \mathscr{A}_a$; donc sur $\mathscr{A}_{3/2}$ on a : $D_a^{\varepsilon,\mu,l}(g)A = AD_{3/2}^{\varepsilon,\mu,l}(g)$, égalité qui se prolonge sur H^ε tout entier puisque $AD_{3/2}^{\varepsilon,\mu,l}(g)$ et $D_a^{\varepsilon,\mu,l}(g)A$ ($\forall g \in$ **P**) sont bornés sur H^ε et que $\mathscr{A}_{3/2}$ est dense dans H^ε. A étant borné, il est immédiat que :

$$\text{(III.3.4)} \qquad D_a^{\varepsilon,\mu,l}(\nu)A = AD_{3/2}^{\varepsilon,\mu,l}(\nu)$$

sur H^ε, $\forall \nu$ mesure à support compact sur **P**, d'où la Naïmark équivalence [9].

Si $a < 3/2$ le même raisonnement en utilisant l'opérateur borné A^{-1} sur H^ε conduit au même résultat.

4. Contraction des $w_i^{l,s}$ de so(4,1) en des représentations de masse complexe de l'algèbre de Lie de Poincaré $\mathscr{P}$.

Soit $\mathscr{L}_a^2(H_3)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur H_3 pour la mesure $|p_0|^{2a-4}d^3\vec{p}$ et soit H_a l'espace $\mathscr{L}_a^2(H_3) \hat{\otimes} H_l^l$. Si A est toujours défini par

$$F \otimes v \in \mathscr{L}^2(H_3) \hat{\otimes} H_l^l \rightarrow A(F \otimes v) = F \otimes v/|p_0|^{a-3/2}$$

A est alors un isomorphisme unitaire de H dans H_a.

Définissons alors les représentations $w_i'^{l,s}$ de so(4,1) dans H_a, unitairement équivalentes aux $w_i^{l,s}$, soit :

$$w_i'^{l,s}(X) = Aw_i^{l,s}(X)A^{-1} \quad \forall X \in so(4,1);$$

on obtient comme représentants des générateurs de so(4,1) agissant dans H_a sur le domaine dense commun et stable AH_0 :

$$\text{(III.4.1)} \quad \begin{cases} \vec{M} = -\,i(p \wedge \partial/\partial\vec{p}) + \vec{S}, \qquad \vec{N} = -ip_0\partial/\partial\vec{p} - 1/p_0(\vec{S} + \vec{p} \wedge \vec{S}), \\ \vec{P} = +\,is\vec{p} + i\vec{p}\,(\vec{p}\,.\,\partial/\partial\vec{p}) + i\partial/\partial\vec{p} + \vec{S}, \\ P_0 = +\,isp_0 + ip_0\,(\vec{p}\cdot\partial/\partial\vec{p}) + (1/p_0)\vec{p}\cdot\vec{S}. \end{cases}$$

$\mathscr{S}$ est dense dans $\mathscr{L}_a^2(H_3)$. $\mathscr{S} \otimes H_{i,0}^l$ est alors un domaine dense commun et stable sous la représentation $w_i'^{l,s}$.

D'autre part : $H_a' \subset H_a$ si $a \leqslant a'$.

Contractons les représentations $w_i^{l,s}$ de so(4,1) de la façon suivante :

Posons $s = re^{i\theta}$, $\quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Soit une suite de représentations $w_i'^{l,s}$ agissant chacune dans $\mathscr{H}_a$ (a : partie réelle de s) tel que :

i et l soient fixés, $|s| = r$ tende en croissant vers $+\infty$ quand $\lambda \to 0_+$ avec $\lambda r = \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. Or $r < r'$ et $-\pi/2 < \theta < \pi/2 \Rightarrow a < a' \Rightarrow \mathscr{H}_{a'} \subset \mathscr{H}_a$.

On a donc une suite décroissante d'Hilbert contenant chacun $\mathscr{S} \otimes H_{i,0}^l$ comme sous-espace dense. Soit alors $\bigcap\limits_{a \in \mathbb{R}^{+*}} \mathscr{L}_a^2(H_3)$ muni de la topologie projective et soit $\mathscr{H}_\infty$ le complété pour cette topologie. Alors $\mathscr{H}_\infty$ contient $\mathscr{S}$ comme sous-espace dense.

Définissons alors une représentation de l'algèbre de Lie $\mathscr{P}$ dans l'espace vectoriel topologique complet $\mathscr{H}_\infty \mathbin{\hat{\otimes}}_\pi H_i^l$ par :

$$\text{(III.4.2)} \qquad \begin{cases} \vec{M}' = \vec{M};\, \vec{N}' = \vec{N} \quad \text{donné par (III.4.1)}, \\ P_\nu' = \lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda P_\nu = i\mu e^{i\theta} p_\nu = \mu e^{i(\theta + \pi/2)} p_\nu\,; \end{cases}$$

sur le domaine dense commun et stable $\mathscr{S} \otimes H_{i,0}^l$.

Dans cette contraction les 2 casimirs de so(4,1) donnent

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^2 \Omega = P'_\nu P'^\nu = -\,\mu^2 e^{2i\theta}, \qquad \lim_{\lambda \to 0} \lambda^2 \Omega' = \mu^2 e^{2i\theta} l(l+1).$$

On obtient donc une représentation de l'algèbre de Lie $\mathscr{P}$ de masse complexe $m = \mu e^{i(\theta + \pi/2)}$, de spin l, dans $\mathscr{H}_\infty \mathbin{\hat{\otimes}}_\pi H_i^l$, les opérateurs de spin $\vec{S}$ agissant suivant la représentation de Miller $\mathscr{M}_i^l$ de su(2) *dans* H_i^l.

Notons la $\sigma_i(m, l)$.

Soit $\mathscr{H}_\infty^\varepsilon$ le sous-espace de $\mathscr{H}_\infty$ formé par les fonctions de $\mathscr{H}_\infty$ qui s'annulent sur $H_3^{-\varepsilon}$. On a évidemment : $\mathscr{H}_\infty = \mathscr{H}_\infty^+ \oplus \mathscr{H}_\infty^-$.

Alors $\mathscr{H}_\infty^\varepsilon \mathbin{\hat{\otimes}}_\pi H_i^l$ est stable par $\sigma_i(m, l)$. Soit $\sigma_i^\varepsilon(m, l)$ la représentation de $\mathscr{P}$ induite par $\sigma_i(m, l)$ dans $\mathscr{H}_\infty^\varepsilon \mathbin{\hat{\otimes}}_\pi H_i^l$ définie sur le domaine dense commun et stable $\mathcal{S}^\varepsilon \otimes \mathrm{H}^l_{i,0}$. On montre de la même façon que la proposition III.2.1 la :

PROPOSITION III.4.1. — *Les représentations* $\sigma^\varepsilon_i(m, l)$ *de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha \hat{\otimes}_\pi \mathrm{H}^l_i$ *de masse complexe m, de spin l, les opérateurs de spin* $\vec{\mathrm{S}}$ *agissant dans* H^l_i *suivant la représentation de Miller* $\mathcal{M}^l_i$ *du* su(2), *et dont le signe de l'énergie est* ε, *définie sur le domaine dense commun et stable* $\mathcal{S}^\varepsilon \otimes \mathrm{H}^l_{i,0}$, *est Schur irréductible sur ce domaine.*

REMERCIEMENTS

Je remercie M. Flato et D. Sternheimer pour l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de ce travail, et aussi pour la lecture soigneuse du manuscrit.

RÉFÉRENCES

[1] J. DIXMIER, *Bull. Soc. Math. de France*, t. **89**, fasc. 1, 1961, p. 9.
[2] R. TAKAHASHI, *Bull. Soc. Math. de France*, t. **91**, Fasc. 3, 1963, p. 289.
[3] H. THOMAS, *Annals of Mathematics*, t. **42**, january 1941, p. 113-126.
[4] S. STROM, *Ark. Fys.*, t. **40** (1), 1969, p. 1.
[5] Ch. MARTIN, *a) C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **274**, Série A, 1972, p. 612 ; *b) C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **274**, Série A, 1972, p. 717 ; *c)* Thèse de 3ᵉ cycle, Faculté des Sciences, Dijon, 1973.
[6] D. ARNAL, G. PINCZON, On algebraically irreducible representations of the Lie algebra sl(2). *J. of Math. Phys.* (à paraître).
[7] W. MILLER, *Lie Theory and Special Functions*, Academic Press, New York, 1968.
[8] HARISH-CHANDRA, *a) Trans. Am. Math. Soc.*, t. **75**, 1953, p. 185-243 ; *b) Amer. J. Math.*, t. **80**, 1958, p. 241-310.
[9] G. WARNER, *Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups I.* Springer Verlag, New York, 1972.
[10] J. DIXMIER, *Anais. Acad. Brasil Ciencias*, t. **35**, 1963, p. 491.
[11] INONÜ, WIGNER, *Proc. N. A. S. U. S.*, t. **39**, 1953, p. 510 ; t. **40**, 1954, p. 119.
[12] E. SALETAN, *J. of Math. Phys.*, t. **2**, No 1, 1961, p. 1.
[13] J. MICKELSSON, J. NIEDERLE, *Commun. Math. Phys.*, t. **27**, 1972, p. 167-180.
[14] S. STRÖM, *Ark. Fys.*, t. **29**, 1965, p. 467.
[15] A. BÖHM, « Generalized Eingenvectors and groups Representations. The connection between representations of so(4,1) and the group Poincaré ». Lecture delivred at the Istambul Sommer Institute for Mathematical Physics (1970).
[16] M. FLATO, H. SNELLMAN, Regge lattice and Lie algebra Representations (à paraître *J. of Math. Phys.*).
[17] M. FLATO, J. C. GUILLOT, D. STERNHEIMER, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série A, t. **270**, 1970, p. 914.
[18] A. O. Barut, A. Böhm, *Physical Review*, t. **139**, Nr 4B, August 1965.
A. BÖHM, The synamical group of a simple particle Model. Presented at the theoretical physics Institute, Université du Colorado (Été 1966).
[19] A. BÖHM, M. FLATO, D. STERNHEIMER, J. P. VIGIER, *Nuovo Cimento*, Série X, Vol. **38**, août 1965, p. 1941.
[20] M. FLATO, *Symétrie de type lorentzien et intéractions fortes* (thèse), Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1967.
[21] R. JOST, *Helv. Phys. Acta*, t. **39**, 1966, p. 369.
[22] J. DIXMIER, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **250**, 1960, p. 3263-3265.

(Manuscrit reçu le 17 décembre 1973).