ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-MARIE SOURIAU

Modèle de particule à spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel

Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, nº 4 (1974), p. 315-364

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_4_315_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XX, n° 4, 1974, p. 315-364.

Section A :
Physique théorique.

Modèle de particule à spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel (*)

par

Jean-Marie SOURIAU (**)

Centre de Physique Théorique. C. N. R. S.,
31, chemin J.-Aiguier, 13274 Marseille Cedex 2 (France)

INTRODUCTION

Il existe un certain nombre de circonstances où l'on éprouve le besoin de posséder un *modèle classique* pour décrire le comportement d'une particule : ainsi les équations B. M. T. (Bargmann-Michel-Telegdi) sont-elles un instrument nécessaire pour interpréter la *mesure* du moment magnétique de l'électron, bien que la *théorie* de ce moment soit, comme chacun sait, essentiellement quantique.

Un tel modèle doit évidemment s'exprimer par un *système différentiel* reliant un certain nombre de variables ; mais une difficulté fondamentale apparaît immédiatement : même si nous possédons *a priori* « le » bon modèle, rien ne nous empêche de faire un changement de variables arbitraire : ce qui conduirait à un modèle méconnaissable, bien que rigoureusement équivalent. Il n'y a donc aucun espoir de trouver les bonnes équations si nous n'avons pas un procédé préalable pour *définir* et *identifier* les variables. Nous déduisons cette identification de la *relativité générale* ; cette théorie permet donc, non seulement de décrire le champ de gravitation, mais aussi de définir l'impulsion, le spin, etc. des particules, et de trouver des équations *universelles* qui les relient ; ainsi que les *lois de*

(*) Communication aux rencontres de Strasbourg entre Physiciens Théoriciens et Mathématiciens (9 novembre 1972).
(**) Professeur à l'Université de Provence. Marseille.

conservation associées aux symétries du champ (gravitationnel et électromagnétique).

En fait, nous *n'utilisons pas* les équations de champ (pour lesquelles des modifications à courte portée sont possibles sans rien perdre d'essentiel), mais uniquement la structure géométrique de la théorie. Une telle description peut sembler assez abstraite (tenseurs-distributions appartenant au cotangent d'une « variété » de dimension infinie, purement géométrique, appelée *hyper-espace*) ; elle est pourtant adaptée à quelques exigences de la physique, en particulier à la mécanique statistique ; ainsi, elle permet de décrire très simplement les propriétés essentielles des corps *ferro-magnétiques* (aimantation, effet gyromagnétique, magnétostriction).

En spécifiant le modèle universel de particule (on suppose que les moments dipolaires se réduisent à un moment cinétique et un moment magnétique dans le référentiel propre de l'impulsion), on obtient un modèle déterministe de « particule élémentaire » ; les équations sont très voisines des équations B. M. T. ; les termes correctifs font disparaître des inconvé-

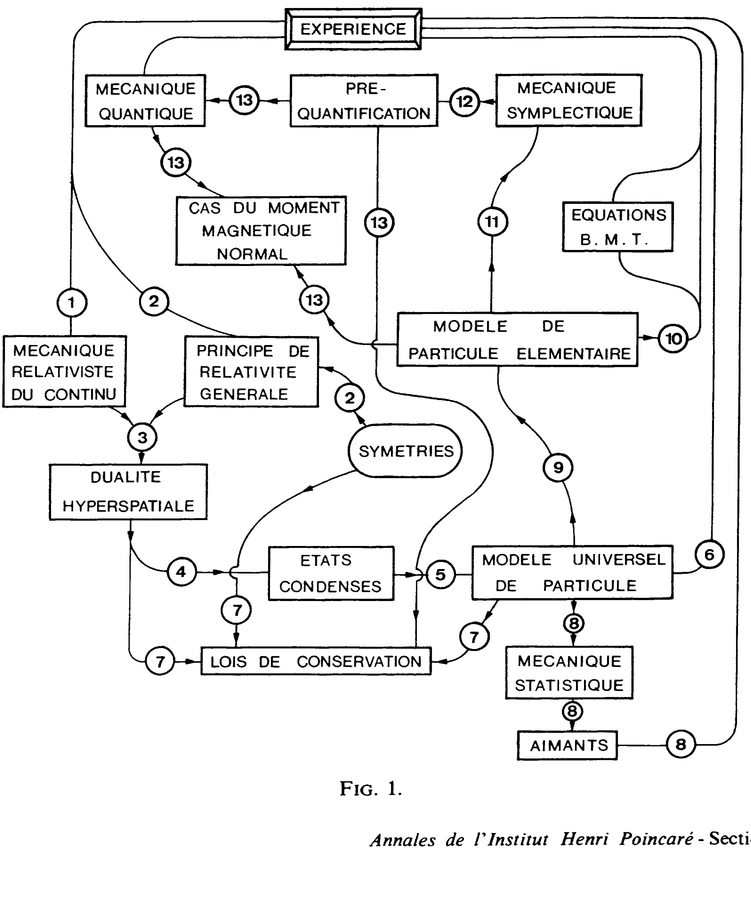

FIG. 1.

nients graves de ces dernières (dans le cas d'une particule soumise à un champ électrique constant, les équations B. M. T. ne prennent en compte que la partie orbitale du moment cinétique). Bien que ces corrections soient très petites, elles peuvent probablement être vérifiées expérimentalement.

Il se trouve par ailleurs que le modèle proposé possède un formalisme *symplectique* — donc approprié à la construction de relations de commutation ; pourtant, il ne possède pas de formalisme lagrangien associé (ceci pour des raisons topologiques). Nous effectuons la *préquantification* de ce modèle dans le cas du spin $\hbar/2$; il est significatif que cette construction de géométrie différentielle fasse apparaître des *spineurs* ; en effet, en l'absence de champ, on peut achever la quantification, ce qui conduit à l'équation de Dirac.

Beaucoup de problèmes restent ouverts : quantification en présence du champ (ou « déquantification » de l'équation de Dirac) ; description des particules de masse nulle, etc.

Les relations entre les diverses branches de la physique concernées jouent un rôle essentiel dans ce travail ; c'est pourquoi nous les avons fait figurer sur un diagramme conducteur qui tient lieu de table des matières (les numéros cerclés correspondent aux paragraphes du texte) (fig. 1).

1. MÉCANIQUE RELATIVISTE DU CONTINU

En élaborant la théorie de la relativité, Einstein [*1*] a montré que diverses grandeurs préalablement reconnues (densité, pression, flux d'énergie, etc.) pouvaient se regrouper en un seul objet géométrique, à savoir un tenseur symétrique du second ordre T, le *tenseur impulsion-énergie* ; et que les *principes de la mécanique* se formulaient alors par l'équation tensorielle

$$(1) \qquad \partial_\mu \mathrm{T}^{\mu\nu} = 0$$

En présence de gravitation, il convient de remplacer cette équation par

$$(2) \qquad \partial_\mu \mathrm{T}^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\rho}\mathrm{T}^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\mu}\mathrm{T}^{\rho\mu} = 0$$

où les $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sont les composantes de la connexion riemannienne (qui mesure le champ de gravitation dans le système de coordonnées choisi). Nous résumerons cette équation (2) par la notation

$$(3) \qquad \hat{\partial}_\mu \mathrm{T}^{\mu\nu} = 0$$

où le $\hat{}$ indique que les dérivations sont *covariantes* ; ou encore par

$$(4) \qquad \mathrm{div}\ \mathrm{T} = 0$$

div désignant l'opérateur différentiel de divergence riemannienne.

2. PRINCIPE DE RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Ce principe a été, depuis sa formulation par Einstein, l'objet de contestations nombreuses; par exemple, V. Fock [*2*] a carrément déclaré qu'un tel principe n'existait pas, et qu'il convenait d'enlever à la théorie d'Einstein la dénomination de « relativité générale », puisqu'il ne s'agissait en fait que d'une théorie relativiste de la gravitation.

On peut attribuer l'origine de ces malentendus au vague des énoncés initiaux de ce principe, qui faisaient appel à des notions subjectives : « référentiels », « invariance de forme des équations », etc.

La géométrie différentielle actuelle nous permet un énoncé beaucoup plus précis et radical, que nous allons esquisser.

Soit V_4 la variété espace-temps; en chaque point X de V_4 est défini le *tenseur métrique fondamental g*, dont les composantes $g_{\mu\nu}$ sont appelées *potentiels de gravitation* (c'est par dérivation que l'on peut en déduire les composantes $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ du *champ* de gravitation).

Dessinons l'ensemble E_∞ de *tous les champs de tenseurs symétriques* définis sur V_4 ; E_∞ est évidemment un espace vectoriel de dimension infinie (fig. 2).

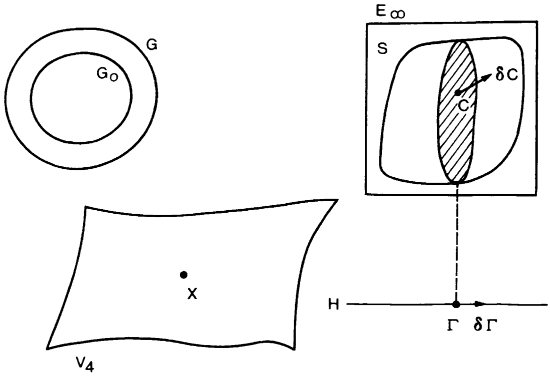

FIG. 2.

Le champ « véritable » $X \mapsto g$ est un point C de E_∞ ; il appartient à la famille des champs qui ont en tout point la signature $+ - - -$; famille que nous avons notée S sur la figure.

On sait que l'on appelle *difféomorphisme* de V_4 toute application bijective de V_4 sur V_4 qui est différentiable, ainsi que son inverse. Il résulte d'un théorème élémentaire d'analyse que l'ensemble G des difféomorphismes de V_4 est un groupe. Tout élément de G agit sur les champs de tenseurs de V_4 : c'est là une notion essentielle de la géométrie différentielle

— l'aspect actif, si l'on veut, les formules de transformation des composantes de tenseurs dans un changement de coordonnées.

Le principe de relativité générale signifie que *la nature se décrit au moyen d'un ensemble où agit le groupe* G *des difféomorphismes, et que cette action est inobservable.*

En d'autres termes, si nous avons une bonne « histoire » de l'univers, et si nous choisissons un élément a du groupe G, nous pourrons calculer l'action de a sur cette histoire — et rien ne permettra de la distinguer de l'histoire initiale (tous les observateurs, nous compris, ayant été transformés comme le reste sans se douter de rien).

La description (partielle) de la nature par le champ de tenseurs $g_{\mu\nu}$ est conforme à ce principe : nous connaissons l'action de G sur le champ (désigné par le point C de la figure); cette action lui fait parcourir une orbite de G (représentée en hachures); tous les points de cette orbite sont donc indiscernables; ils correspondent d'ailleurs à la *même géométrie riémannienne de* V_4.

Ceci suggère de prendre en considération l'espace quotient $H = S/G$ — si l'on veut l'*espace des géométries* de V_4. On souhaiterait évidemment munir H de quelque chose qui ressemble à une structure de variété (de dimension infinie); mais il apparaît immédiatement une difficulté : H comporte nécessairement des singularités, parce que les *stabilisateurs* des différents points de S sont différents. En effet, le stabilisateur d'un point C est *le groupe des isométries* de la variété riemannienne associée; or il y a des structures riemanniennes sans autre isométrie que l'identité; tandis que, dans le cas de la relativité restreinte, les isométries constituent un groupe de Lie de dimension 10 (le groupe de Poincaré, évidemment).

C'est pourquoi nous proposons un *affaiblissement du principe de relativité générale* : il consiste à remplacer le groupe G par l'ensemble G_0 *des difféomorphismes à support compact* (nous appelons support d'un difféomorphisme le complémentaire du plus grand ouvert où ce difféomorphisme coïncide avec l'identité). Bien entendu il convient de postuler V_4 non compacte.

Il est élémentaire de vérifier que G_0 est un groupe (de façon plus précise, un sous-groupe invariant de G); il est facile de formuler quelque hypothèse raisonnable sur la géométrie de V_4 grâce à laquelle G_0 ne contiendra pas d'isométrie (pas exemple si l'on suppose que deux points de V_4 déterminent une seule géodésique; mais cette hypothèse doit pouvoir être affaiblie).

C'est ce principe de relativité générale que nous adopterons dans la suite; H désignera désormais le quotient S/G_0; nous l'appellerons *hyperespace.*

Il existe quelques raisons de penser que le choix de G_0 n'est pas seulement un artifice destiné à obtenir une construction mathématique utile, mais qu'il a aussi quelque contenu physique.

Supposons par exemple que V_4 ait la topologie de $\mathbb{R}^4$, et qu'il existe un ouvert Ω de V_4 sans courbure — où nous pouvons donc appliquer la relativité restreinte.

La physique sera évidemment invariante — au sens de cette relativité restreinte — par les difféomorphismes de V_4 qui sont, dans cette région, des isométries — donc des transformations de Poincaré.

Mais nous sommes ici limités au choix des difféomorphismes qui appartiennent à G_0 : ainsi se pose la question de trouver les transformations de Poincaré d'un ouvert de Ω dans Ω qui sont globalement prolongeables par un difféomorphisme *à support compact.*

La réponse est facile : cette condition élimine *deux* des quatre composantes connexes du groupe de Poincaré, à savoir celles qui changent le sens du temps (T) ou la pariété spatiale (P); seules subsistent les transformations à jacobien $+1$ (donc la composante connexe et celle des transformations TP); ce résultat évoque évidemment des résultats expérimentaux (P-violation et T-violation) d'une part, le théorème CTP d'autre part (où la conjugaison C devrait apparaître comme un effet de *variance*, à analyser dans une description de la mécanique quantique en relativité générale).

3. DUALITÉ HYPERSPATIALE

Il n'est pas nécessaire, pour la suite, de rechercher une structure de variété de l'hyperespace : nous allons définir directement son *espace vectoriel tangent.*

Imaginons une *variation locale* $\delta g_{\mu\nu}$ du champ de tenseurs $g_{\mu\nu}$ (par hypothèse, le champ de tenseurs $X \mapsto \delta g_{\mu\nu}$ est *à support compact*); on peut évidemment l'interpréter comme une variation δC du point C; δC est un élément de l'espace vectoriel E_∞.

Comment définir la « projection » $\delta\Gamma$ de δC sur l'hyperespace?

Il semble naturel de postuler que $\delta C \mapsto \delta\Gamma$ est une application linéaire, et que son noyau (l'ensemble des vecteurs δC qui donnent une variation $\delta\Gamma$ nulle à la géométrie) est composé des vecteurs *tangents à l'orbite.*

Mais comment définir ces vecteurs tangents eux-mêmes? Si G_0 était un groupe de Lie, on sait qu'on les obtiendrait par l'action canonique des éléments de *l'algèbre de Lie de* G_0.

Ici, nous considérerons comme algèbre de Lie l'ensemble $\mathscr{G}_0$ des champs de vecteurs de V_4, différentiables, à support compact. (En effet, l'exponentiation d'un élément de $\mathscr{G}_0$ définit un sous-groupe à un paramètre de G_0).

L'action d'un élément $X \mapsto \delta X$ de $\mathscr{G}_0$ sur un champ de tenseurs est alors parfaitement connue : c'est la *dérivée de Lie* du champ de tenseurs, que nous désignerons par la notation δ_L. Dans le cas actuel d'un tenseur covariant symétrique, la formule de la dérivée de Lie s'écrit

$$(5) \qquad [\delta_L g]_{\mu\nu} = \hat{\partial}_\mu V_\nu + \hat{\partial}_\nu V_\mu \qquad [V_\mu \text{ nulles en dehors d'un compact}]$$

où nous désignons par V_μ les composantes covariantes du vecteur $V = \delta X$; rappelons que le signe $\hat{}$ indique une dérivation covariante.

Nous avons donc la définition cherchée d'une variation locale $\delta\Gamma$ de la géométrie : c'est une variation locale δC du champ des potentiels de gravitation *modulo* les variations qui sont des dérivées de Lie ; l'ensemble des $\delta\Gamma$ (que nous pouvons considérer comme *espace vectoriel tangent à l'hyperespace*, sans avoir à préjuger de l'existence d'une structure de variété) est donc un *espace vectoriel quotient*.

Par dualité, on définit immédiatement *l'espace vectoriel cotangent* à l'hypersurface en un point Γ : c'est l'ensemble des fonctionnelles linéaires μ sur les $\delta\Gamma$; pour calculer l'une d'elles, il est évidemment commode de la composer avec la projection $\delta C \mapsto \delta\Gamma$; ce qui s'écrira

$$\mu(\delta\Gamma) = M(\delta C) \tag{6}$$

M étant une fonctionnelle linéaire ; celle-ci est évidemment soumise à la condition

$$M(\delta C) = 0 \quad \text{si} \quad \delta\Gamma = 0 \tag{7}$$

ou encore

$$M(\delta C) = 0 \quad \text{si la variation } \delta C \text{ est de type (5)}; \tag{8}$$

réciproquement, toute fonctionnelle linéaire M vérifiant la condition (8) définira un élément μ de l'espace cotangent par la formule (6).

Or il se trouve que nous pouvons associer une telle fonctionnelle au champ de tenseur impulsion-énergie T ; en effet, si nous posons

$$M(\delta C) = \int_{V_4} \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \text{ vol} \tag{9}$$

(où vol désigne l'élément de volume riemannien $\sqrt{|\det(g)|}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$) la condition (8) *s'identifie avec le principe fondamental de la mécanique* (3)

$$\hat{\partial}_\mu T^{\mu\nu} = 0 .$$

En effet, compte tenu de la symétrie du tenseur T et de (5), la condition (8) s'écrit

$$\int T^{\mu\nu} \hat{\partial}_\mu V_\nu \text{ vol} = 0$$

ou encore, par un calcul simple

$$\int \hat{\partial}_\mu [T^{\mu\nu} V_\nu] \text{ vol} - \int [\hat{\partial}_\mu T^{\mu\nu}] V_\nu \text{ vol} = 0 ;$$

or le premier terme est nul (c'est l'intégrale de la divergence d'un vecteur à support compact) ; le lemme fondamental du calcul des variations donne donc

$$\hat{\partial}_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{en tout point X.}$$

C. Q. F. D.

Nous aurons donc le droit d'écrire :

$$\int \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \, \text{vol} = \mu(\delta\Gamma) \tag{10}$$

et d'interpréter *la répartition de matière* $X \mapsto T^{\mu\nu}$ comme un élément μ *du cotangent de l'hyperespace* au point Γ ; nous avons mis en dualité — à la manière d'Aristote — la « forme » et la « matière » de l'Univers.

Nous allons maintenant élargir cette dualité, en considérant, à côté des potentiels gravitationnels $g_{\mu\nu}$, les potentiels électromagnétique A_ρ.

On sait que l'expérience ne permet pas de distinguer deux potentiels qui diffèrent par une *transformation de jauge* (dite « de seconde espèce »)

$$A_\rho \to A_\rho + \partial_\rho \alpha \tag{11}$$

$X \mapsto \alpha$ étant un champ scalaire différentiable.

Il y a, entre les transformations de jauge et les difféomorphismes — inobservables les uns comme les autres — une analogie qui a été remarquée depuis longtemps : nous allons *structurer* cette analogie grâce à quelques résultats élémentaires de géométrie différentielle :

(12)

a) Les champs scalaires $X \mapsto \alpha$ forment un groupe additif G′ qui *agit* sur les potentiels par la formule

$$(g_{\mu\nu}, A_\rho) \to (g_{\mu\nu}, A_\rho + \partial_\rho \alpha)$$

b) En attribuant au potentiel électromagnétique A *la variance d'un covecteur*, on définit une *action* du groupe G″ des difféomorphismes à support compact sur les potentiels.

c) Le groupe G″ agit par morphismes sur le groupe G′, ce qui permet de définir le produit semi-direct des deux groupes.

d) Si $g'' \in G''$, $g' \in G'$ l'action (sur un champ de potentiels) de l'image de g'' par g' est égale au transmuté de la transformation de jauge g' par l'action du difféomorphisme g''.

Tout ceci se résume en une phrase : *le produit semi-direct* de G′ par G″ *agit sur les potentiels.*

Nous pouvons maintenant reprendre la figure (2), en remplaçant simplement G par le *produit semi-direct* que nous venons de construire, C par le champ de *tous les potentiels* $(g_{\mu\nu}, A_\rho)$, G_0 par le sous-groupe engendré par les difféomorphismes et transformations de jauge *à supports compacts.*

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}_0$ est alors composée des champs vecteur-scalaire $X \mapsto (V, u)$ *à support compact*, dont l'action sur les potentiels est donnée par la formule (évidente si l'on connaît bien son formulaire de dérivée de Lie) :

$$(13) \qquad \boxed{\delta(g_{\mu\nu}, A_\rho) = (\hat{\partial}_\mu V_\nu + \hat{\partial}_\nu V_\mu, V^\mu \hat{\partial}_\mu A_\rho + A_\mu \hat{\partial}_\rho V^\mu + \partial_\rho u)} \; ;$$

Les variations δC ainsi définies sont par définition *tangentes à l'orbite de* C ; elles forment le noyau de la projection $\delta C \mapsto \delta \Gamma$ sur l'espace vectoriel tangent au nouvel hyperspace H.

Un élément μ du dual de cet espace tangent se calcule, comme précédemment, par la formule

$$(14) \qquad \mu(\delta\Gamma) = M(\delta C)$$

M étant une fonctionnelle linéaire qui doit — comme en (8) — être nulle si δC est de type (13).

En supposant pour commencer la fonctionnelle M complètement continue, on pourra écrire

$$(15) \qquad M(\delta C) = \int_{V_4} \left[\frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + J^\rho \delta A_\rho \right] \text{vol}$$

en désignant par $T^{\mu\nu}$, J^ρ des variables qui caractérisent M (donc μ).

Si l'on prend l'expression (13) de $\delta\Gamma$, on trouve après quelques transformations immédiates

$$(16) \quad M(\delta C) = \int \hat{\partial}_\mu \{ [T^\mu_\nu + J^\mu A_\nu] V^\nu + J^\mu u \} \text{ vol}$$
$$- \int \{ \hat{\partial}_\mu T^\mu_\nu + J^\mu [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] + A_\nu \hat{\partial}_\mu J^\mu \} V^\nu \text{ vol} - \int \{ \hat{\partial}_\mu J^\mu \} u \text{ vol}$$

Le premier terme est l'intégrale de la divergence d'un vecteur à support compact ; il est donc nul. En appliquant le lemme fondamental du calcul des variations, on trouve les conditions que doivent vérifier les $T^{\mu\nu}$ et J^μ :

$$(17) \qquad a) \; \hat{\partial}_\mu J^\mu = 0, \qquad b) \; \hat{\partial}_\mu T^\mu_\nu + F_{\mu\nu} J^\nu = 0,$$

en posant, selon la coutume

$$(18) \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

(les $F_{\mu\nu}$ sont les composantes du champ électromagnétique) ; si l'on interprète les J^μ comme les composantes du quadrivecteur densité de courant-charge, on reconnaît en (17*a*) et *b*)) deux lois fondamentales de l'électrodynamique relativiste (la conservation de l'électricité et l'expression des forces électromagnétiques exercées par le champ sur les charges et les courants) ; celles-ci sont donc *incluses* dans l'écriture hyperspatiale

$$(19) \qquad \mu(\delta\Gamma) = \int_{V_4} \left\{ \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + J^\rho \delta A_\rho \right\} \text{vol}$$

Il faut remarquer que nous n'avons rencontré jusqu'ici que la *moitié* des lois de la gravitation et de l'électrodynamique : il nous manque les équations de Maxwell et d'Einstein qui expriment que les quantités $T^{\mu\nu}$ et J^{ρ} sont les *sources* des champs de gravitation et électromagnétique ; équations qui s'écrivent (avec une convention classique sur le choix des unités électromagnétiques)

$$(20) \qquad T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right] - \Theta_{\mu\nu}, \qquad J^{\rho} = \frac{1}{4\pi}\hat{\partial}_{\mu}F^{\mu\rho}$$

(G est la constante de Newton ; R le tenseur de Ricci ; Θ le tenseur de Maxwell-Poynting, dit aussi tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique).

Si l'on tire $T_{\mu\nu}$ et J^{ρ} de ces équations, et si l'on porte dans (15), on trouve après quelques transformations simples

$$(21) \qquad M(\delta C) = -\delta \int_{\mathscr{C}} \left\{ g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} + \frac{1}{G}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \right\} \frac{\mathrm{vol}}{16\pi}$$

$\mathscr{C}$ désignant une 4-chaîne contenant le support du champ $X \mapsto (\delta g_{\mu\nu}, \delta A_{\rho})$; cette équation est *équivalente au système* (20).

Choisissons un élément $X \mapsto (V, u)$ de l'algèbre de Lie de G_0, dont le support soit contenu dans $\mathscr{C}$; il engendre un sous-groupe à un paramètre de G_0, dont tous les éléments ont aussi leur support contenu dans $\mathscr{C}$. Lorsque le champ C parcourt l'orbite de ce sous-groupe, il est immédiat de constater que l'intégrale qui figure au second membre de (21) reste constante ; sa dérivée par rapport au paramètre normal du sous-groupe est donc nulle. Or cette dérivée se calcule immédiatement par la théorie de la dérivée de Lie : elle est égale à l'expression (15) de $M(\delta C)$ dans laquelle on a pris la valeur δC définie par (13) : par conséquent la fonctionnelle M vérifie la condition (14), qui prend aussi la forme (17) ; nous avons démontré que les équations d'Einstein-Maxwell entraînent *identiquement* les équations (17) de l'électrodynamique. On sait combien la vérification directe de ce théorème est laborieuse.

Notons que ce *théorème restera vrai si l'on modifie arbitrairement le lagrangien figurant au second membre de* (21), *sous la seule réserve de la* G_0-*invariance de l'action :* ceci nous ouvre une voie pour modifier les équations de champ sans changer la structure essentielle de l'électrodynamique relativiste ; on obtient une modification *à grande distance* en ajoutant au « lagrangien » une constante (cosmologique), une modification *à courte distance* en ajoutant par exemple le terme

$$\hbar \left\{ a[R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}]^2 + bR_{\mu\nu}R_{\lambda\sigma}g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} \right\}$$

a et b étant des constances sans dimensions.

— L'interprétation sur H de ces résultats est immédiate ; la formule (21) que l'on a maintenant le droit d'écrire

$$\mu(\delta\Gamma) = -\,\delta \int_{\mathscr{C}} \{ g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} + \frac{1}{G} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \} \frac{\mathrm{vol}}{16\pi} \tag{22}$$

définit une *1-forme de l'hyperespace* (ou, si l'on préfère, *une section de son cotangent*) ; cette 1-forme est d'ailleurs fermée, en un sens facile à préciser ; ces résultats restent vrais si l'on donne à l'intégrale d'action l'une des modifications à longue ou courte distance que nous venons d'indiquer.

4. ÉTATS CONDENSÉS

Revenons aux formules (15), (19) :

$$\mu(\delta\Gamma) = M(\delta C) = \int_{V_4} \left\{ \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + J^{\rho} \delta A_{\rho} \right\} \mathrm{vol} \tag{23}$$

qui définissent la répartition de matière et d'électricité dans l'Univers.

Nous pourrons généraliser cette définition au cas où la matière et l'électricité sont *condensés* dans certaines régions de l'Univers — c'est-à-dire où la fonctionnelle M n'est plus complètement continue ; M pourra alors être un *tenseur-mesure* ou un *tenseur-distribution.*

Par exemple, on peut étudier, par cette méthode, la *dynamique des fils* : par définition, un fil est une répartition de matière condensée sur une sous-variété de dimension 2 de l'Univers (cette variété est la réunion des lignes d'univers des molécules du fil ; elle est par conséquent hyperbolique normale) (voir Souriau [*3*] ; Berenguier [*4*]) ; bien d'autres cas peuvent être envisagés, dont certains présentent un intérêt technologique, après passage à la mécanique classique (tel que la théorie des coques ; voir Breuneval [*5*]).

On peut aussi, par cette méthode, compléter la théorie des particules que nous allons développer en étudiant les *collisions* de particules.

L'intérêt de cette théorie est de donner une expression nouvelle — et adaptée — aux lois de l'électrodynamique ; alors que les formules (17) cessent d'être applicables, on pourra toujours écrire la formulation

$$M(\delta C) = 0 \qquad \text{si } \delta C \text{ est de type (13)} \tag{24}$$

qui exprime l'identité $M(\delta C) = \mu(\delta\Gamma)$, et qui est équivalente à ces lois dans le cas complètement continu. On peut d'ailleurs convenir que la forme (24) est l'écriture, *au sens des distributions*, de ces lois (17).

Dans ce traitement, nous considérons évidemment la matière comme *passive* : on suppose le champ extérieur donné, et on néglige l'action de la matière et de l'électricité en tant que *sources* du champ. Pour traiter complètement le problème, il faudrait joindre l'équation (22) qui exprime, dans le présent formalisme, les équations d'Einstein-Maxwell. Mais il apparaît ici une grave difficulté — reconnue d'ailleurs dès les débuts de la théorie de la relativité : ces équations peuvent ne pas avoir de solution, même si les conditions nécessaires (24) sont réalisées : chacun sait que la solution de Schwarzschild n'est pas prolongeable jusqu'à une masse ponctuelle qui serait source du champ.

Il y a cependant quelques bonnes raisons de penser que les solutions condensées des équations (24) possèdent un intérêt physique même si les équations de champ n'ont pas de solution :

— On peut les considérer comme la description approximative, mais simplifiée, d'un phénomène réel : bien que les planètes ne soient pas ponctuelles, la description de leur mouvement à l'aide de géodésiques de la solution de Schwarzschild constitue, comme chacun sait, une excellente approximation.

— On peut aussi se placer au point de vue de la mécanique statistique : les mouvements des particules sont des solutions aléatoires des équations (24); les valeurs moyennes — faciles à définir grâce à la linéarité de la fonctionnelle M — définissent une répartition complètement continue (et toujours solution des équations (24)) qui constitue, elle, la source du champ : on peut ainsi traiter *le gaz relativiste* (voir ci-dessous § 8).

5. MODÈLE UNIVERSEL DE PARTICULE

Bien entendu, nous considérerons une particule comme une répartition de matière et d'électricité condensée sur une courbe Λ — la ligne d'univers de la particule.

Traitons d'abord l'approximation qui consiste à négliger tous les effets dipolaires : nous écrirons que la fonctionnelle M est une *mesure*, et qu'elle s'exprime par une formule :

$$\text{(25)} \qquad M(\delta C) = \int_\Lambda \left\{ \frac{1}{2} \Theta^{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \Psi^\rho \delta A_\rho \right\} ds$$

s étant un paramètre *quelconque* de la courbe, les $\Theta^{\mu\nu}$ et Ψ^ρ des nombres définis en chaque point de $\Lambda(\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu})$.

La condition (24) s'écrit :

$$\text{(26)} \qquad \int_\Lambda \{ \Theta^{\mu\nu}\hat{\partial}_\mu V_\nu + \Psi^\rho[V^\mu\hat{\partial}_\mu A_\rho + A_\mu\partial_\rho V^\mu + \hat{\partial}_\rho u] \} \, ds = 0$$

pour tout champ $X \mapsto (V, u)$ *à support compact dans* V_4. Pour traiter ce problème, il convient d'abord de choisir une fonction α *nulle* sur Λ, et de faire la substitution

$$\text{(27)} \qquad (V, u) \to (\alpha V, \alpha u)$$

qui fournit encore des fonctions à support compact. En portant ces valeurs dans (26), on trouve

$$(28) \qquad \int_\Lambda \partial_\rho \alpha \{ [\Theta^\rho_\mu + \Psi^\rho A_\mu] V^\mu + \Psi^\rho u] \} ds = 0$$

ce qui est évidemment vérifié (puisque α est nul sur Λ) si

$$(29) \qquad \begin{cases} \text{le vecteur de composantes} \\ \qquad [\Theta^\rho_\mu + \Psi^\rho A_\mu] V^\mu + \mu \Psi^\rho \\ \text{est tangent à la courbe.} \end{cases}$$

Réciproquement, la condition (28) — valable pour toute fonction α nulle sur Λ, entraîne (29) : on le montre facilement en précisant que Λ est une *sous-variété* de V_4.

En chaque point de Λ, les valeurs de V et u sont évidemment arbitraires ; si bien que la condition (29) peut encore s'écrire

$$(30) \qquad \begin{cases} \text{Il existe un scalaire } q, \text{ un vecteur P tels que} \\ \qquad \Psi^\rho = q \dfrac{dx^\rho}{ds}, \qquad \Theta^{\rho\mu} = \dfrac{dx^\rho}{ds} P^\mu \end{cases}$$

et la symétrie du tenseur Θ montre que

(31) le vecteur P est tangent à la courbe.

Abandonnons maintenant la substitution (27), et reportons les valeurs (30) dans l'intégrale (26) ; après quelques transformations on trouve

$$(32) \quad 0 = \int \frac{d}{ds} \{ [P_\mu + qA_\mu] V^\mu + qu \} ds - \int \left\{ \frac{\hat{d}}{ds} [P_\mu + qA_\mu] - q \hat{\partial}_\mu A_\rho \frac{dx^\rho}{ds} \right\} V^\mu ds - \int \frac{dq}{ds} u \, ds$$

Si nous choisissons V et u à support compact *sur* Λ, la première intégrale est nulle ; le lemme fondamental du calcul des variations donne les équations

$$(33) \qquad \frac{\hat{d}}{ds} [P_\mu + qA_\mu] - q \hat{\partial}_\mu A_\rho \frac{dx^\rho}{ds} = 0,$$

$$(34) \qquad \frac{dq}{ds} = 0$$

compte tenu de (34), (33) peut aussi s'écrire

$$(35) \qquad \frac{\hat{d} P_\mu}{ds} + q F_{\rho\mu} \frac{dx^\rho}{ds} = 0$$

Compte tenu de ces équations nécessaires, (32) se réduit alors à

$$\int_\Lambda \frac{d}{ds}\{ [\mathrm{P}_\mu + q\mathrm{A}_\mu]\mathrm{V}^\mu + qu \} ds$$

pour tout champ $\mathrm{X} \mapsto (\mathrm{V}, u)$ à support compact *sur* V_4 ; elle sera automatiquement vérifiée si la trace sur Λ de ce support est compacte, c'est-à-dire si

(36) Λ est une partie fermée de V_4

(bien entendu ceci ne signifie pas que Γ est une « courbe fermée », mais qu'elle n'a pas d'extrémité libre).

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

(37) *Soit* Λ *une courbe*, sous-variété fermée *de* V_4.
Soit M *une mesure de support* Λ, *de la forme*

$$\mathrm{M}(\delta\mathrm{C}) = \int_\Lambda \left\{ \frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \Psi^\rho \delta \mathrm{A}_\rho \right\} ds$$

alors les lois de l'électrodynamique $\mathrm{M}(\delta\mathrm{C}) = \mu(\delta\Gamma)$ *prennent la forme suivante :*

a) *Il existe, en chaque point de* Λ, *un vecteur* P, *un scalaire* q, *tels que :*

$$\mu(\delta\Gamma) = \int_\Lambda \left\{ \frac{1}{2}\mathrm{P}^\mu \delta g_{\mu\nu} + q\delta\mathrm{A}_\nu \right\} \frac{dx^\nu}{ds} ds$$

b) P *et* q *vérifient les équations :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{P}^\mu \dfrac{dx^\nu}{ds} - \mathrm{P}^\nu \dfrac{dx^\mu}{ds} = 0 & (\mathrm{P} \textit{ est tangent à } \Lambda) \\ \dfrac{dq}{ds} = 0 & (q \textit{ est constant}) \\ \dfrac{\hat{d}}{ds}\mathrm{P}_\mu + q\mathrm{F}_{\nu\mu}\dfrac{dx^\nu}{ds} = 0 & \end{array} \right.$$

Étudions maintenant le modèle avec moments bipolaires, que l'on obtiendra en supposant que M est une distribution d'ordre 1, de support Λ :

(38) $$\mathrm{M}(\delta\mathrm{C}) = \int_\Lambda \left\{ \frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Phi^{\rho\mu\nu}\hat{\partial}_\rho \delta g_{\mu\nu} + \Psi^\mu \delta\mathrm{A}_\mu + \Omega^{\mu\nu}\hat{\partial}_\mu \delta\mathrm{A}_\nu \right\} ds$$

Nous avons à écrire que $\mathrm{M}(\delta\mathrm{C})$ est nulle si $(\delta g, \delta\mathrm{A})$ prend la valeur (13).

Pour exploiter cette condition, il convient de choisir deux fonctions α et β nulles sur Λ, et de faire la substitution

(39) $$(\mathrm{V}, u) \to \alpha\beta(\mathrm{V}, u)$$

ce qui conduit aux équations

$$\partial_\mu \alpha \partial_\nu \beta [\Phi^{\mu\nu\rho} + \Phi^{\nu\mu\rho}] = 0 \tag{40}$$

$$\partial_\mu \alpha \partial_\nu \beta [\Omega^{\mu\nu} + \Omega^{\nu\mu}] = 0 \tag{41}$$

Compte tenu de la symétrie $\Phi^{\rho\mu\nu} = \Phi^{\rho\nu\mu}$, la relation (40) s'exprime par l'existence de deux tenseurs $A^{\nu\rho}$ (symétrique) et $S^{\mu\nu}$ (antisymétrique) tels que:

$$\Phi^{\mu\nu\rho} = \frac{dx^\mu}{ds} A^{\nu\rho} + \frac{1}{2}\left[S^{\mu\nu}\frac{dx^\rho}{ds} + S^{\mu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\right] \tag{42}$$

(on a utilisé le fait que Λ est une sous-variété et l'arbitraire de α et β) ; de même, on tire de (41) l'existence d'un vecteur B^ν et d'un tenseur antisymétrique $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ tels que

$$\Omega^{\mu\nu} = \frac{dx^\mu}{ds} B^\nu + \mathcal{M}^{\mu\nu} \tag{43}$$

en reportant dans (38) et en effectuant quelques intégrations par partie, on obtient une formule

$$M(\delta C) = \int_\Lambda ds \left\{ \frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} S^{\mu\nu}\frac{dx^\rho}{ds}\hat{\partial}_\mu \delta g_{\nu\rho} + \Psi^\mu \delta A_\mu + \mathcal{M}^{\mu\nu}\hat{\partial}_\mu \delta A_\nu \right\} \tag{44}$$

où les variables $\Theta^{\mu\nu}$ et Ψ^μ ont de nouvelles valeurs. Dans cette expression, les dérivées premières des variations δg. δA n'interviennent que par des combinaisons antisymétriques. Si on calcule ces combinaisons avec l'expression (13), on trouve les identités

$$\hat{\partial}_\mu \delta g_{\nu\rho} - \hat{\partial}_\nu \delta g_{\mu\rho} = \hat{\partial}_\rho \omega_{\mu\nu} - 2R^\sigma_{\mu\nu,\rho} V_\sigma \tag{45}$$

où l'on a posé

$$\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \tag{46}$$

et où $R^\sigma_{\mu\nu,\rho}$ désigne le tenseur de Riemann-Christoffel, et

$$\hat{\partial}_\mu \delta A_\nu - \hat{\partial}_\nu \delta A_\mu = V^\rho \hat{\partial}_\rho F_{\mu\nu} + F_{\rho\nu}\hat{\partial}_\mu V^\rho - F_{\rho\mu}\hat{\partial}_\nu V^\rho . \tag{47}$$

En portant dans (44) ces expressions (45) et (47), ainsi que les valeurs (13) on trouve, après une intégration par parties, la formule

$$0 = \int_\Lambda ds \left\{ \begin{aligned} &\Psi^\mu \partial_\mu u + \left[\Psi^\rho \hat{\partial}_\sigma A_\rho + \frac{1}{2}\mathcal{M}^{\mu\nu}\hat{\partial}_\sigma F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\mu\nu,\rho\sigma} S^{\mu\nu}\frac{dx^\rho}{ds}\right] V^\sigma \\ &+ \left[\Theta^{\mu\nu} + \Psi^\mu A^\nu + \mathcal{M}^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho - \frac{1}{2}\frac{\hat{d}}{ds} S^{\mu\nu}\right] \hat{\partial}_\mu V_\nu \end{aligned} \right. \tag{48}$$

qui doit être vérifiée identiquement.

La substitution $(V, u) \to \alpha(V, u)$ montre qu'il existe un vecteur Π^μ et un scalaire q tels que les coefficients de $\hat{\partial}_\mu V_\nu$ et de $\partial_\mu u$ dans (48) valent respectivement $\dfrac{dx^\mu}{ds}\Pi^\nu$ et $\dfrac{dx^\mu}{ds}q$; d'où, compte tenu des symétries de Θ, $\mathcal{M}$, S, les identités :

$$\Psi^\mu = q\frac{dx^\mu}{ds} \tag{49}$$

$$2\Theta^{\mu\nu} = \mathrm{P}^\mu\frac{dx^\nu}{ds} + \mathrm{P}^\nu\frac{dx^\mu}{ds} + \mathcal{M}^{\mu\rho}\mathrm{F}_\rho{}^\nu + \mathcal{M}^{\nu\rho}\mathrm{F}_\rho{}^\mu \tag{50}$$

$$\frac{\hat{d}}{ds}\mathrm{S}^{\mu\nu} = \mathrm{P}^\mu\frac{dx^\nu}{ds} - \mathrm{P}^\nu\frac{dx^\mu}{ds} - \mathcal{M}^{\mu\rho}\mathrm{F}_\rho{}^\nu + \mathcal{M}^{\nu\rho}\mathrm{F}_\rho{}^\mu \tag{51}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{P}^\mu = \Pi^\mu - q\mathrm{A}^\mu\ ; \tag{52}$$

d'autre part, en portant la définition de Π^μ et q dans (48), en faisant deux intégrations par parties, et en annulant les coefficients de V et u, on trouve les deux relations

$$\frac{dq}{ds} = 0 \tag{53}$$

$$\frac{\hat{d}\mathrm{P}_\sigma}{ds} = q\mathrm{F}_{\sigma\rho}\frac{dx^\rho}{ds} + \frac{1}{2}\mathcal{M}^{\mu\nu}\hat{\partial}_\sigma\mathrm{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\mu\nu,\rho\sigma}\mathrm{S}^{\mu\nu}\frac{dx^\rho}{ds} \tag{54}$$

Il suffit de reporter les valeurs (49) et (50) de Ψ et Θ dans (44) pour aboutir au théorème :

(55) *On considère une particule dont la ligne d'univers est une sous-variété fermée* Λ, *et dont la fonctionnelle* M *est de type* (38). *Alors :*

a) *En chaque point de* Λ, *il existe un nombre* q, *un vecteur* P^μ, *deux tenseurs antisymétriques* $\mathrm{S}^{\mu\nu}$ *et* $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ *tels que*

$$\mathrm{M}(\delta\mathrm{C}) = \int\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\mathrm{P}^\mu\frac{dx^\nu}{ds} + \mathcal{M}^{\mu\rho}\mathrm{F}_\rho{}^\nu\right]\delta g_{\mu\nu} + q\frac{dx^\mu}{ds}\delta\mathrm{A}_\mu\\ &\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{S}^{\mu\nu}\frac{dx^\rho}{ds}\hat{\partial}_\mu\delta g_{\nu\rho} + \mathcal{M}^{\mu\nu}\hat{\partial}_\mu\delta\mathrm{A}_\nu\end{aligned}\right\}ds$$

b) *Ces grandeurs vérifient les équations* (53, 54, 51) *:*

$$q = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\hat{d}\mathrm{P}_\sigma}{ds} &= q\mathrm{F}_{\sigma\rho}\frac{dx^\rho}{ds} + \frac{1}{2}\mathcal{M}^{\mu\nu}\hat{\partial}_\sigma\mathrm{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\mu\nu,\rho\sigma}\mathrm{S}^{\mu\nu}\frac{dx^\rho}{ds}\\ \frac{\hat{d}\mathrm{S}^{\mu\nu}}{ds} &= \mathrm{P}^\mu\frac{dx^\nu}{ds} - \mathrm{P}^\nu\frac{dx^\mu}{ds} - \mathcal{M}^{\mu\rho}\mathrm{F}_\rho{}^\nu + \mathcal{M}^{\nu\rho}\mathrm{F}_\rho{}^\mu\end{aligned}\right.$$

6. INTERPRÉTATION DU MODÈLE UNIVERSEL

Le modèle (55) que nous venons de construire par voie purement mathématique est candidat à la description de tous les systèmes « ponctuels » : un électron, une molécule ou une étoile — dans la mesure où l'on peut négliger les moments quadrupolaires.

Notons d'abord que la fonctionnelle M *définit* les grandeurs P, q, S, $\mathcal{M}$, par la formule (55*a*) ; la vérification est assez simple (par contre, les variables Θ, Φ, Ψ, Ω que nous avions écrites *a priori* en (38) sont redondantes : des intégrations par parties permettent, sans changer M, de dégonfler certains termes au profit d'autres). Par conséquent P, q, S, $\mathcal{M}$ sont des *grandeurs physiques* ; nous interpréterons bien entendu P comme *quadri-impulsion*, q comme *charge électrique*, S comme *tenseur de spin* et $\mathcal{M}$ comme *moment électro-magnétique* (par contraste, il est important de remarquer combien la définition de l'impulsion en relativité restreinte est délicate dès qu'il existe un champ électromagnétique ; on définit tantôt l'impulsion comme ici, tantôt comme le vecteur $\Pi = P + qA$ que nous avons rencontré plus haut (52), mais qui n'est pas invariant de jauge).

On notera — en examinant l'homogénéité en ds des formules (55) — que les grandeurs q, P^μ, $S^{\mu\nu}$ ne dépendent pas de la paramétrisation choisie sur la courbe ; par contre $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ en dépend visiblement : en fait $\mathcal{M}$ est une *densité linéaire de* Λ, *à valeur tensorielle dans* V_4. Bien entendu on lève l'ambiguïté de définition des valeurs de $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ en supposant que s est le temps propre de la particule (si Λ est de genre temps), et c'est à cette condition que l'on pourra l'identifier avec le « tenseur » moment électromagnétique.

Étudions d'abord le cas le plus simple où S et $\mathcal{M}$ sont nuls, et où le modèle (55) se réduit à (37).

La dernière équation (37*b*) admet évidemment comme intégrale première la quantité

$$P_\mu P^\mu ; \tag{56}$$

si celle-ci est positive, on la notera m^2 ; m sera la définition de la *masse* de la particule. On pourra poser

$$P = mU \tag{57}$$

et U sera la *vitesse unitaire* de la particule ; la courbe Λ sera nécessairement du *genre temps* ; la dernière équation (37*b*) s'écrira alors

$$m \frac{\hat{d}U}{ds} = qF_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \tag{58}$$

et on reconnaît bien l'équation du mouvement d'une particule de masse m, de charge q dans le champ gravitationnel et électromagnétique : si l'on néglige la gravitation, c'est l'équation utilisée pour traiter les particules dans un accélérateur ; si on néglige q ou F, on voit que la courbe Λ est une *géodésique* de l'espace-temps ; on retrouve le « principe des géodésiques » qui est à la base de la mécanique céleste relativiste.

Dans le cas $P_\mu P^\mu = 0$, $q = 0$, Λ est une *géodésique isotrope* : on trouve le modèle de « photon » utilisé pour interpréter la déviation des rayons lumineux par les masses pesantes.

Revenons au cas général (55). La première remarque à faire sur ces équations est *qu'elles ne constituent pas un système déterministe :* en gros, le nombre des équations est resté le même que précédemment, alors qu'on a ajouté 12 variables, les composantes de S et $\mathscr{M}$.

Il n'y a là rien de surprenant : ce n'est pas le même système déterministe qui peut décrire toutes les particules, quelle que soit leur structure interne ; il faudra ajouter aux équations universelles (55*b*) des *lois de comportement* dépendant, plus ou moins phénoménologiquement, de la nature physique des particules considérées.

Ce point de vue est d'ailleurs communément admis aujourd'hui, à la suite de travaux très nombreux ; on peut citer notamment Frenkel [*6*], Thomas [*7*], Mathisson [*8*], Weyssenhoff [*9*], Papapetrou [*10*], Bargmann-Michel-Telegdi [*11*], Halbwachs [*12*], Bacry [*13*], Dixon [*14*], Madore [*15*], Kunzle [*16*]. Dixon en particulier aboutit aux équations ci-dessus par une méthode techniquement différente, mais en partant de la même idée : condenser sur une ligne d'univers un corps étendu qui vérifie les équations (17) de l'électrodynamique des milieux continus.

7. LOIS DE CONSERVATION

Nous allons maintenant établir que les équations ci-dessus possèdent des *intégrales premières* associées aux symétries du champ extérieur.

Il n'est pas question ici d'une application du théorème de Noether : celui-ci suppose un formalisme lagrangien qui n'existe pas ici — et qui ne peut pas exister pour un système non déterministe, admettant beaucoup plus de variables que d'équations. Il s'agit de développer l'idée que les équations (17)

$$(59)\qquad \begin{cases} \hat{\partial}_\mu T^\mu_\nu + F_{\mu\nu} J^\mu = 0 \\ \hat{\partial}_\mu J^\mu = 0 \end{cases}$$

sont des « lois de conservation » ; ce qui n'est vrai que lorsque le champ présente des symétries.

Nous considérerons le groupe G des difféomorphismes et transformations de jauge *quelconques* (il contient comme sous-groupe invariant le groupe G_0 où les supports sont supposés compacts).

Supposons qu'un élément $X \mapsto (V, u)$ de l'algèbre de Lie de G ait une action nulle sur le champ par la formule (13):

(60)	$\hat{\partial}_\mu V_\nu + \hat{\partial}_\nu V_\mu = 0$	$V^\mu \hat{\partial}_\mu A_\rho + A_\mu \hat{\partial}_\rho V^\mu + \partial_\rho u = 0$

(la première équation montre que V est un *vecteur de Killing* de la métrique). Alors le sous-groupe à un paramètre de G engendré par (V, u) laisse *invariant* le champ ; on a mis en évidence une symétrie du problème.

Supposons par ailleurs que l'univers V_4 ait de bonnes propriétés topologiques et chronologiques : à savoir que l'on puisse y définir une « variable temporelle t », prenant toutes les valeurs réelles, et dont le gradient soit partout de genre temps ; ce qui permettra de définir globalement le « passé » et le « futur ».

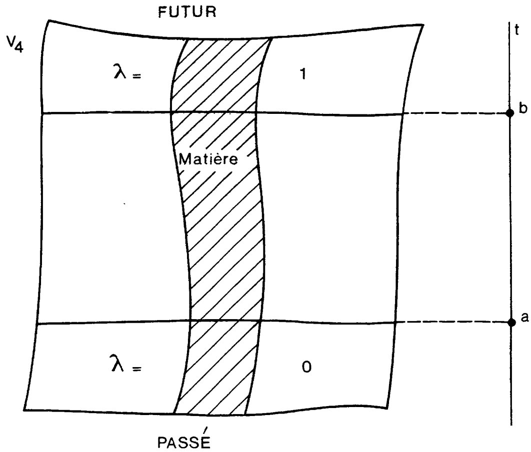

FIG. 3.

Supposons enfin — pour éviter des difficultés inessentielles — que la matière que nous étudions *soit bornée dans l'espace*, c'est-à-dire que l'intersection de son support avec un intervalle de « temps » quelconque ($t \in [a, b]$) soit compacte.

Choisissons alors une variable λ nulle dans le passé ($t < a$), égale à 1 dans le futur ($t > b$) et posons

$$(V_0, u_0) = \lambda(V, u) \tag{61}$$

(V, u) vérifiant (60).

Par les formules (13), l'élément $X \mapsto (V_0, u_0)$ de l'algèbre de Lie de G définit une variation $\delta_0 C$ du champ, qui est nulle dans le passé (parce que $(V_0, u_0) = 0$) et dans le futur (à cause des équations (60)). Grâce à l'hypothèse faite ci-dessus, cette variation $\delta_0 C$ coïncide, sur le support de la matière, avec une variation à support compact ; nous pouvons donc calculer la quantité

(62) $$p_0 = M(\delta_0 C)$$

Bien que cette variation $\delta_0 C$ soit de type (13), il n'y a aucune raison que p_0 soit nulle, parce que le champ $X \mapsto (V_0, u_0)$ n'est pas à support compact.

Recommençons maintenant l'opération en remplaçant λ par une autre fonction λ' ayant les mêmes propriétés : on calculera alors l'intégrale

$$p_1 = M(\delta_1 C).$$

La différence $p_0 - p_1$ peut évidemment s'écrire $M(\delta_{01} C)$, $\delta_{01} C$ étant la variation du champ engendrée par le champ

$$X \mapsto [\lambda_0 - \lambda_1](V, u)$$

qui est, lui, nul dans le passé et *dans le futur* ; il coïncide donc, sur le support de la matière, avec un champ $X \mapsto (V', u')$ *à support compact*, qui engendre une variation $\delta' C$ du champ telle que

$$p_0 - p_1 = M(\delta' C)$$

Le principe (14) de l'électrodynamique montre alors que cette quantité est nulle.

(63) *Ainsi, la quantité* (62) ne dépend pas du choix de λ ; *elle est fonction d'une part de la répartition de matière, d'autre part du générateur* (V, u) *invariant les champs* (*formule* (60)).

Nous pouvons en particulier prendre une fonction λ qui passe de 0 à 1 sur un intervalle $[t_0, t_1]$ aussi petit que l'on veut : la valeur de la fonctionnelle $M(\delta_0 C)$ ne change pas si on déplace ce petit intervalle ; nous aurons donc bien une *grandeur conservée* par le mouvement de la matière.

Par exemple, si on suppose que la matière est un milieu continu, que le champ de gravitation est nul (relativité restreinte) ainsi que le champ électromagnétique, on trouve dix grandeurs conservées associées aux dix générateurs du groupe de Poincaré ; par exemple l'énergie, grandeur associée aux translations temporelles vaut

(64) $$\int_{\mathbb{R}^3} T_{00}\, dx^1 dx^2 dx^3$$

L'intégrale étant prise sur l'espace à une date arbitraire ; on trouve bien l'interprétation usuelle de la quantité T_{00} (densité d'énergie ou de masse).

Effectuons ce calcul pour une particule. L'expression (62) à calculer

$$p_0 = M(\delta_0 C)$$

ne diffère de 0 que parce que le champ $\delta_0 C$ n'est pas à support compact ; dans le calcul ci-dessus (44 à 55), toutes les expressions posées nulles restent nulles, à l'exception de celles qui résultent d'une intégration par parties ; elles valent :

$$(65) \qquad \int_\Lambda \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2} S^{\mu\nu}\hat{\partial}_\mu[V_0]_\nu + qu_0 + \Pi^\mu[V_0]_\mu\right] ds$$

où $V_0 = \lambda V$, $u_0 = \lambda u$ (formule (61)).

Nous savons que l'on peut calculer cette intégrale sur un compact — ici un intervalle $[s_0, s_1]$ du paramètre tel que $\lambda = 0$ dans un voisinage de s_0, $\lambda = 1$ dans un voisinage de s_1 ; on trouve évidemment la valeur

$$\frac{1}{2} S^{\mu\nu}\hat{\partial}_\mu V_\nu + \Pi^\mu V_\mu + qu$$

prise pour $s = s_1$; bien entendu le résultat ne dépend pas de s_1 (63). Nous avons donc le théorème (Cf. (51)) :

(66) *Si* V *et* u *sont solutions des équations* (60), *la quantité*

$$p_0 = P_\mu V^\mu + \frac{1}{2} S^{\mu\nu}\hat{\partial}_\mu V_\nu + q[u + A_\mu V^\mu]$$

est une intégrale première des équations (55*b*).

Bien entendu, ce résultat peut se vérifier par un calcul direct, en dérivant l'expression (66) et en tenant compte des équations (55*b*) et (60), ainsi que des équations dérivées.

Le fait que les équations (55*b*) puissent entraîner des identités de conservation est évidemment une garantie de leur crédibilité.

Remarquons enfin que les équations (60) ont toujours une solution évidente : $V = 0$, $u = 1$, et que la grandeur conservée associée est *la charge électrique.*

8. REMARQUES SUR LA MÉCANIQUE STATISTIQUE ET SUR LES AIMANTS

Supposons que nous ayons à décrire un gaz composé de particules, dont nous négligeons les interactions (rappelons toutefois que les collisions sont passibles de la théorie générale des états condensés, comme nous l'avons indiqué au § 4).

La théorie cinétique consiste à considérer les paramètres caractéristiques des particules comme des *variables aléatoires*, qui s'interprètent macroscopiquement par leurs *valeurs moyennes.*

Pour un fluide composé de particules à spin, on s'attend donc à observer macroscopiquement des *densités* de charge électrique, d'impulsion, de spin, de moment électro-magnétique. De fait, la notion de « fluide à spin » a entraîné de très nombreux travaux ; il a été envisagé de considérer la densité de spin comme une grandeur fondamentale de la nature, et de modifier les équations de champ pour en faire une nouvelle source de la gravitation (voir par exemple Trautman [*17*]).

Cependant la densité de spin n'est pas un objet d'observation courante, et ceci peut donner à réfléchir.

Il est évident que l'on ne peut définir de valeurs moyennes que sur des objets appartenant à un espace vectoriel (ou affine); donc — si bourbakiste que puisse sembler cette affirmation — que l'on n'observera et ne mesurera de valeurs moyennes que sur des grandeurs appartenant à un ensemble possédant *physiquement* une structure affine. Il est clair que cette structure est nécessairement *unique* — sinon les valeurs moyennes ne seraient pas bien définies.

Or nous avons ici organisé les variables décrivant le mouvement d'une particule en un élément d'un *espace vectoriel*, à savoir le cotangent de l'hyperespace au point Γ ; nous avons donc une structure candidate à la bonne définition des valeurs moyennes.

Examinons-en quelques conséquences :

— En utilisant le fait qu'une valeur moyenne prise dans une partie d'un espace vectoriel appartient à l'enveloppe convexe de cette partie, on montre par exemple qu'un fluide *composé de particules de masse positive sans spin* a une densité ρ et une pression p positives, et que $p < \rho/3$; on a d'ailleurs $p = \rho/3$ si les particules sont de masse nulle (c'est le cas pour la pression de radiation dans un four isotherme).

— Si nous appliquons cette structure linéaire à un milieu composé de particules à spin, on obtiendra une fonctionnelle M *complètement continue* par hypothèse, donc du type (19) ; par conséquent *les seules grandeurs macroscopiquement observables sont le tenseur impulsion-énergie* T *et le vecteur courant* J ; la densité de spin, la densité de moment électro-magnétique *n'existent pas.*

Ceci, bien entendu, ne signifie pas que le spin ou le moment magnétique des particules ne se manifestent pas macroscopiquement — mais que ce n'est pas par l'intermédiaire d'une densité.

Ainsi on obtiendra une description schématique d'un *aimant* au moyen de particules au repos dans un laboratoire (en relativité restreinte bien entendu) ayant toutes le même tenseur de spin $S_{\mu\nu}$ et le même moment magnétique $\mathcal{M}_{\mu\nu}$; les équations (55*b*) sont vérifiées si l'on suppose aussi le champ magnétique constant et parallèle à l'aimantation.

En prenant alors la valeur moyenne de la fonctionnelle M donnée par (55*a*), on vérifie facilement que le terme $\mathcal{M}^{\mu\nu}\hat{\partial}_\mu \delta A_\nu$ donne l'apparence macroscopique d'une *nappe de courant électrique* répartie *à la surface de l'aimant*, perpendiculairement à l'aimantation (c'est l'équivalence magnétique d'un aimant et d'un solénoïde, connue depuis Ampère) ; le terme

$$\frac{1}{2} S^{\mu\nu} \frac{dx^\rho}{ds} \hat{\partial}_\mu \delta g_{\nu\rho}$$

s'interprète au moyen d'une *nappe de courant d'impulsion* également répartie à la surface de l'aimant ; elle confère *un moment cinétique* non nul à l'aimant (supposé par exemple cylindrique) au repos dans le laboratoire, et a pour conséquence sa mise en rotation spontanée en cas de démagnétisation : cet *effet gyromagnétique* a été vérifiée expérimentalement, et confirme, dans le cas des matériaux ferromagnétiques, que l'aimantation est due pour sa plus grande partie au moment magnétique propre des électrons (et non à leur mouvement orbital). Enfin le dernier terme de (55*a*) où intervient la polarisation des particules, $\frac{1}{2} \mathcal{M}^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu \delta g_{\mu\nu}$ s'interprète comme une *contrainte intérieure* à l'aimant, qui est équilibrée par la force de Laplace exercée par le champ sur le courant superficiel, et qui a été elle-aussi observée *(magnétostriction)* ; on voit que cette contrainte n'est due ni aux *interactions entre particules* (comme dans un réseau cristallin), ni *au caractère aléatoire de leurs vitesses* (comme dans un gaz raréfié). Bien entendu son observation ne peut être qu'indirecte, puisqu'elle se superpose aux contraintes du réseau constituant l'aimant.

En résumé, on constate que la description statistique d'un aimant utilisant le modèle proposé — aussi sommaire soit-elle — conduit déjà à une prévision correcte (au moins qualitativement) des principaux effets observés.

9. MODÈLE DE PARTICULE ÉLÉMENTAIRE

Une particule complexe — une molécule ou une planète — nécessite de très nombreux paramètres pour sa description. Par opposition, nous dirons qu'une particule est *élémentaire* si elle ne nécessite pas d'autres paramètres que ceux qui sont apparus dans le modèle universel (55), à savoir l'impulsion P_μ, le spin $S^{\mu\nu}$, la charge q, le moment électro-magnétique $\mathcal{M}^{\mu\nu}$.

Bien entendu, il faudra choisir des *lois de comportement* pour compléter le système non déterministe (55) ; et là le choix est malheureusement très difficile — à preuve le très grand nombre de lois qui ont été proposées $\Big($exemples : parallélisme de P et de $\frac{dx}{ds}$; condition $S_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$; condition $S^{\mu\nu} P_\nu = 0$; bien d'autres sont imaginables).

Essayons pour commencer l'hypothèse suivante :

$$S^{\mu\nu} P_\nu = 0 \qquad \mathcal{M}^{\mu\nu} = \lambda S^{\mu\nu} \tag{67a, b}$$

dont nous donnerons plus tard l'interprétation ; λ désigne une variable indéterminée pour l'instant.

Bien entendu, cette hypothèse n'est admissible que dans la mesure où elle est *compatible* avec les équations universelles (55), ce que nous allons examiner.

Par dérivation de (67*a*) on trouve la condition

$$\frac{\hat{d}S^{\mu\nu}}{ds}P_\nu + S^{\mu\nu}\frac{\hat{d}P_\nu}{ds} = 0 \tag{68}$$

d'où dérive (grâce à l'antisymétrie de S)

$$\frac{\hat{d}P_\mu}{ds}\frac{\hat{d}S^{\mu\nu}}{ds}P_\nu = 0 \tag{69}$$

En remplaçant $\frac{\hat{d}S^{\mu\nu}}{ds}$ par sa valeur tirée de (55*b*), et en tenant compte de (67), cette formule devient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}[P^2]P_\mu\frac{dx^\nu}{ds} - P^2\frac{\hat{d}P_\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} - \lambda\frac{\hat{d}P_\mu}{ds}S^{\mu\rho}F_{\rho\nu}P^\nu = 0 \tag{70}$$

en posant en abrégé

$$\boxed{P^2 = P_\mu P^\mu} \tag{71}$$

Par ailleurs, on tire de (55*b*) les formules

$$\frac{\hat{d}P_\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\lambda}{2}S^{\mu\nu}\frac{\hat{d}F_{\mu\nu}}{ds} \tag{72}$$

(grâce à l'antisymétrie de F et du tenseur de Riemann-Christoffel R),

$$P_\mu\frac{\hat{d}S^{\mu\rho}}{ds}F_{\rho\nu}P^\nu = P^2F_{\rho\nu}\frac{dx^\rho}{ds}P^\nu \tag{73}$$

et

$$F_{\mu\nu}\frac{\hat{d}}{ds}S^{\mu\nu} = 2F_{\mu\nu}P^\mu\frac{dx^\nu}{ds}\,; \tag{74}$$

en collationnant (70), (72), (68), (73) et (74) il vient l'identité (Duval [*18*])

$$\frac{dP^2}{ds}P_\mu\frac{dx^\mu}{ds} - \lambda P^2\frac{d}{ds}[S^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] = 0\,; \tag{75}$$

si nous posons

$$\boxed{\alpha = S^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} \tag{76}$$

on voit que cette condition (75) suggère de postuler une nouvelle condition

$$\boxed{P^2 = f(\alpha)} \tag{77}$$

f étant une fonction arbitraire que nous supposerons simplement positive ; et que l'on devra prendre alors

$$\boxed{\lambda = \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} P_\mu \frac{dx^\mu}{ds}} \tag{78}$$

En reportant dans l'équation (68), on obtient une équation linéaire en $\frac{dx}{ds}$ qui peut s'écrire

$$f(\alpha)\frac{dx^\mu}{ds} = A^\mu_\rho \frac{dx^\rho}{ds} \tag{79}$$

en posant

$$A^\mu_\rho = P^\mu P_\rho + S^{\mu\nu}\left\{ qF_{\nu\rho} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta,\nu\rho}S^{\alpha\beta} + \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\left[\frac{1}{2}S^{\alpha\beta}\hat{\partial}_\nu F_{\alpha\beta} - P^\alpha F_{\nu\alpha}\right]P_\rho \right\} \tag{80}$$

Remarquons maintenant que le tenseur $S^{\mu\nu}$, vérifiant $S^{\mu\nu}P_\nu = 0$, n'est pas régulier : son rang est donc $\leqslant 3$; comme l'on sait que les tenseurs antisymétriques d'ordre 2 ont un rang pair, celui de S est 2 ou 0 ; c'est-à-dire qu'il existe deux vecteurs I, J tels que

$$S^{\mu\nu} = I^\mu J^\nu - I^\nu J^\mu \tag{81}$$

Il suffit d'utiliser cette expression pour vérifier l'identité

$$S^{\alpha\beta}S^{\gamma\mu} + S^{\beta\gamma}S^{\alpha\mu} + S^{\gamma\alpha}S^{\beta\mu} = 0 \; ; \tag{82}$$

par contraction, on en déduit immédiatement la formule suivante

$$S^{\mu\nu}H_{\nu\rho}S^{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}[S^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}]S^{\mu\sigma} \tag{83}$$

valable *pour tout tenseur antisymétrique* H.

Or, compte tenu de $P_\rho S^{\rho\sigma} = 0$, on remarque sur (80) que

$$A^\mu_\rho S^{\rho\sigma} = S^{\mu\nu}H_{\nu\rho}S^{\rho\sigma} \tag{84}$$

où l'on a posé

$$H_{\nu\rho} = qF_{\nu\rho} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta,\nu\rho}S^{\alpha\beta} \; ; \tag{85}$$

comme H est visiblement antisymétrique, on peut utiliser (83), si bien que

$$A^\mu_\rho S^{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\left[qF_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta,\gamma\delta}S^{\alpha\beta}S^{\gamma\delta}\right]S^{\mu\sigma} \tag{86}$$

Par ailleurs, $f(\alpha)$ étant positive, l'équation (79) montre que $\frac{dx}{ds}$ appartient à l'ensemble de valeurs de la matrice A ; soit, après un coup d'œil sur (80), qu'il existe des nombres x, y_ν tels que

(87) $$\frac{dx^\mu}{ds} = \mathrm{P}^\mu x + \mathrm{S}^{\mu\nu} y_\nu$$

Il suffit de porter dans (79) et de tenir compte de (86) pour arriver au résultat suivant :

— Si le nombre

(88) $$\omega = f(\alpha) + \frac{q}{2}\alpha + \frac{1}{4}\mathrm{R}_{\lambda\mu,\nu\rho}\mathrm{S}^{\lambda\mu}\mathrm{S}^{\nu\rho}$$

n'est pas nul, les seules valeurs de $\frac{dx^\mu}{ds}$ qui soient solutions de (79) sont les vecteurs parallèles à

(89) $$\mathrm{P}^\mu\omega + \mathrm{S}^{\mu\nu}\left\{ [q - f'(\alpha)]\mathrm{F}_{\nu\rho}\mathrm{P}^\rho + \frac{1}{2}f'(\alpha)\mathrm{S}^{\rho\sigma}\hat{\partial}_\nu\mathrm{F}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\alpha\beta,\nu\rho}\mathrm{S}^{\alpha\beta}\mathrm{P}^\rho \right\}$$

Il n'est pas difficile, maintenant, de regrouper les résultats obtenus jusqu'ici pour arriver au théorème :

(90) *Soit f une fonction arbitraire positive.*
On lui associe un modèle de particule élémentaire, *où sont vérifiées les relations*

(a) $$\mathrm{S}^{\mu\nu}\mathrm{P}_\nu = 0$$

(b) $$\mathrm{P}_\mu\mathrm{P}^\mu = f(\alpha)$$

et où le moment électro-magnétique est donné par la formule

(c) $$\mathcal{M}^{\mu\nu} = \left[\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\mathrm{P}_\rho\frac{dx^\rho}{ds}\right]\mathrm{S}^{\mu\nu}$$

— A partir de conditions initiales vérifiant les conditions (a, b), *le mouvement est déterminé par les équations universelles* (55b), *auquel on joint l'équation*

(d) $$\frac{dx^\mu}{ds}$$

parallèle à

$$\omega\mathrm{P}^\mu + \mathrm{S}^{\mu\nu}\left\{ [q - f'(\alpha)]\mathrm{F}_{\nu\rho}\mathrm{P}^\rho + \frac{1}{2}f'(\alpha)\mathrm{S}^{\rho\sigma}\hat{\partial}_\nu\mathrm{F}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\alpha\beta,\nu\rho}\mathrm{S}^{\alpha\beta}\mathrm{P}^\rho \right\};$$

on a posé par abréviation :

(e) $$\alpha = \mathrm{S}^{\mu\nu}\mathrm{F}_{\mu\nu}$$

(f) $$\omega = f(\alpha) + \frac{q}{2}\alpha + \frac{1}{4}\mathrm{R}_{\lambda\mu,\nu\rho}\mathrm{S}^{\lambda\mu}\mathrm{S}^{\nu\rho}$$

10. INTERPRÉTATION DU MODÈLE PROPOSÉ

En un point quelconque de la ligne d'univers Λ de la particule, les conditions $P_\mu P^\mu > 0$, $S^{\mu\nu}P_\nu = 0$ montrent facilement que l'on peut choisir un repère orthonormal de l'espace vectoriel tangent à l'univers dans lequel les variables P_μ, $S_{\mu\nu}$ prennent la forme suivante

$$(91) \qquad P : \begin{pmatrix} \sqrt{f(\alpha)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 0 & s & 0 \end{pmatrix}$$

s étant un nombre positif.

S s'interprète immédiatement comme un *moment cinetique propre*, de mesure s (s est donc le *spin scalaire*) ; on le calcule immédiatement par la formule

$$(92) \qquad \boxed{s^2 = \frac{1}{2} S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}$$

il suffit d'ailleurs d'utiliser la formule (55*b*) donnant $\dfrac{\hat{d}S^{\mu\nu}}{ds}$, en remplaçant $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ par $\lambda S^{\mu\nu}$ pour vérifier que *s est une constante du mouvement* ; on pourra donc la considérer comme une grandeur caractéristique de la particule.

La définition (90*c*) de α donne ici

$$(93) \qquad \alpha = 2 \langle \vec{s}, \vec{B} \rangle$$

$\vec{s}$ étant le vecteur de spin, $\vec{B}$ le champ magnétique (dans le repère ci-dessus) ; ainsi la masse $m = \sqrt{f(\alpha)}$ dépend-elle du produit scalaire $\langle \vec{s}, \vec{B} \rangle$.

On trouve donc, pour les petites valeurs du champ, une variation de masse (donc une énergie additionnelle) proportionnelle à la composante du champ magnétique dans la direction du spin : c'est bien la théorie d'une particule munie d'un *moment magnétique* (orienté parallèlement au spin) et placée dans un champ. L'intensité du moment magnétique est ici

$$(94) \qquad \mu = s\frac{f'(0)}{m_0} \qquad (m_0 = \sqrt{f(0)})$$

L'interprétation de la formule donnant les valeurs de $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ (90*c*) est immédiate : on trouve, pour les petites valeurs du champ, les composantes

$$\mathcal{M} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \tag{95}$$

μ est bien le moment magnétique ; le moment électrique est nul.

Pour interpréter les équations du mouvement, nous allons les étudier dans le cas particulier *du champ électro-magnétique constant* (en relativité restreinte, bien entendu).

En regroupant les formules (67*b*), (74) et $\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$, on constate immédiatement que α est, dans ce cas, une constante du mouvement — donc aussi $f(\alpha)$. Les formules (91) montrent alors que les grandeurs P et S ont une forme réduite constante (puisque s est aussi une intégrale première) ; ainsi *la figure constituée par* S *et* P *reste isométrique à elle-même au cours du mouvement ;* entre deux instants t_0, t_1 il existe un élément U du groupe de Lorentz qui applique la figure (S_0, P_0) sur la figure (S_1, P_1) ; infinitésimalement, il existe donc un élément de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz (c'est-à-dire un tenseur antisymétrique A) tel que

$$\frac{dP}{ds} = AP \qquad \frac{dS}{ds} = AS\text{-}SA \tag{96}$$

(dans cette écriture, on a identifié les 2-tenseurs avec des opérateurs linéaires). A est d'ailleurs défini par ces formules *à un multiple près de* S ; on peut si l'on veut achever de le déterminer par la condition accessoire

$$\mathrm{Tr}(AS) = 0\ ; \tag{97}$$

Nous avons ainsi défini la *rotation instantanée* A de la particule. Un calcul élémentaire montre que la solution de ce système (96, 97) est

$$A = \frac{1}{P^2}[\dot{P}\bar{P} - P\dot{\bar{P}}] + \frac{1}{s^2}\left\{ S\dot{S}\left[1 - \frac{P\bar{P}}{P^2}\right] - \left[1 - \frac{P\bar{P}}{P^2}\right]\dot{S}S \right\}; \tag{98}$$

dans cette écriture, $\bar{P}$ désigne le covecteur transposé du vecteur P ; $P\bar{P}$ est une dyade ; $1 - \dfrac{P\bar{P}}{P^2}$ est le projecteur orthogonal à P ; le point désigne la dérivation par rapport à s ; si nous choisissons de préciser s par la condition

$$\bar{P}\dot{X} = \sqrt{f(\alpha)} \tag{99}$$

le point sera aussi la dérivation par rapport au temps du repère (91) ; ou encore au temps propre de la particule, dans le cas où P et $\dot{X}$ sont parallèles.

Il ne reste plus qu'à utiliser les valeurs (90) de $\dot{P}$ et $\dot{S}$ pour obtenir la valeur de la rotation A. Le calcul utilise l'identité

$$\text{FSF} = -\frac{\alpha}{2}\text{F} + pf(\text{S}) * (\text{S}) \tag{100}$$

où $pf(\text{F})$ désigne le *pfaffien* de F (c'est-à-dire le produit scalaire du champ électrique et du champ magnétique) et $*(\text{S})$ le tenseur adjoint de S; on trouve

$$\text{A} = \beta\text{F} + \gamma[\text{F}\mathscr{P} + \mathscr{P}\text{F}] + \varepsilon[*(\text{S})\mathscr{P} + \mathscr{P} * (\text{S})] + \text{multiple de S}\ ; \tag{101}$$

$\mathscr{P}$ désigne le projecteur orthogonal sur $\text{P}\left(\mathscr{P} = \frac{\text{P}\bar{\text{P}}}{\text{P}^2}\right)$; les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$\beta = \frac{f'(\alpha)}{\sqrt{f(\alpha)}}\ ; \qquad \gamma = \sqrt{f(\alpha)}\,\frac{q - f'(\alpha)}{f(\alpha) + \frac{q}{2}\alpha}\ ; \qquad \varepsilon = \gamma\frac{q}{f(\alpha)}pf(\text{F}). \tag{102}$$

Nous allons comparer avec les équations Bargmann-Michel-Telegdi, qui s'écrivent

$$\boxed{\dot{\text{P}} = \frac{q}{m}\text{FP}} \quad \boxed{\dot{\sigma} = \frac{q}{m}\left\{\frac{g}{2} + \left[1 - \frac{g}{2}\right]\mathscr{P}\right\}\text{F}\sigma} \tag{103}$$

elles décrivent le comportement de l'impulsion P et du vecteur de spin

$$\boxed{\sigma = *(\text{S})\frac{\text{P}}{m}} \tag{104}$$

(ces vecteurs sont orthogonaux, et ont respectivement comme carré scalaire m^2 et $-\ s^2$). g est *le coefficient gyromagnétique* (ou *facteur de Landé*); on l'interprète comme

$$g = \frac{2\mu m}{qs} \tag{105}$$

Pour calculer la rotation A de la particule correspondant à ces équations, il suffit de remarquer que l'on a

$$\dot{\text{P}} = \text{AP} \qquad \dot{\sigma} = \text{A}\sigma \tag{106}$$

cette dernière équation résultant du fait que σ est rigidement lié à la figure (S, P), et a donc même rotation qu'elle. Il se trouve que la rotation ainsi trouvée est encore du type (101), avec

$$\varepsilon = 0 \qquad \frac{\gamma}{\beta} = \frac{2 - g}{g} \tag{107}$$

(nous ne nous intéressons ici qu'à la *direction* de A, qui ne dépend pas du choix du paramétrage). La comparaison avec (103) montre donc que *l'on pourra identifier les équations* B. M. T. *avec celles du modèle proposé*, à condition de poser

$$g = \frac{2f'(\alpha)}{q} \quad \frac{f(\alpha) + q\alpha/2}{f(\alpha) + f'(\alpha)\alpha/2} \tag{108}$$

et de supposer

$$pf(\mathrm{F}) = 0 \tag{109}$$

Cette dernière condition se trouve en fait vérifiée dans le cas d'un champ purement magnétique (comme dans les expériences de mesure de $g - 2$ que l'on interprète avec les équations B. M. T.) ; mais bien entendu, nous sommes amenés à *corriger* les équations B. M. T. dans le cas général : il suffit de reporter la valeur (102) de ε/γ dans les équations (100), ce qui donne :

(110)

$$a)\quad \boxed{\dot{\mathrm{P}} = \frac{q}{m}\mathrm{FP} + \left[1 - \frac{g}{2}\right]\frac{q^2}{m^2}pf(\mathrm{F})\sigma}$$

$$b)\quad \boxed{\dot{\sigma} = \frac{q}{m}\left\{\frac{g}{2} + \left[1 - \frac{g}{2}\right]\mathscr{P}\right\}\mathrm{F}\sigma + \left[1 - \frac{g}{2}\right]\frac{q^2 s^2}{m^4}pf(\mathrm{F})\mathrm{P}}$$

Par ailleurs, dans les équations B. M. T., on suppose que la vitesse est parallèle à l'impulsion, ce qui s'écrit

$$\dot{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{P}}{m} \tag{111}$$

Cette équation aussi doit être corrigée : en utilisant la formule (90*d*), on trouve la relation

$$\boxed{\dot{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{P}}{m} + \left[1 - \frac{g}{2}\right]\frac{q}{m^3}\left[\mathrm{SF} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{SF})\right]\mathrm{P}} \tag{112}$$

(attention ! Le paramétrage n'est pas le même que ci-dessus, la condition (99) n'est pas vérifiée).

Même sans passer par l'intermédiaire de la relativité générale, la nécessité de ces corrections peut s'établir par de simples considérations de conservation. Considérons d'abord le cas d'une particule soumise à un champ purement électrique $\vec{\mathrm{E}}$: les principes les plus sacrés de la physique imposent au moment cinétique autour de la direction du champ d'être constant ; de fait, le théorème (66) nous donne une intégrale première des équations (110) (112) qui vaut

$$\frac{1}{||\vec{\mathrm{E}}||}\left[\bar{\mathrm{P}} * (\mathrm{F})\mathrm{X} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S} * (\mathrm{F}))\right] \tag{113}$$

Cette quantité est visiblement la somme du moment cinétique orbital (celui qu'aurait une particule sans spin de même impulsion) et du moment cinétique propre (une composante du tenseur de spin).

Au contraire, si on prend les équations B. M. T. (103) (qui dans ce cas coïncident avec les équations (110) puisque $pf(\mathrm{F}) = 0$) et la condition (111), on constate immédiatement que le moment orbital seul est conservé, alors que le moment propre oscille : le bilan est donc défectueux si on n'adopte pas la correction (112).

Par ailleurs, quel que soit le champ F, le même théorème (66) nous fournit une grandeur vectorielle conservée

$$\mathrm{P} - q\mathrm{FX} \tag{114}$$

corrélative de l'invariance du champ par translation.

On doit donc avoir $\dot{\mathrm{P}} = q\mathrm{F}\dot{\mathrm{X}}$: alors l'équation (110*a*) se déduit immédiatement de (112) que nous venons de confirmer.

Enfin, on ne pourra sauvegarder l'orthogonalité de P et σ qu'en corrigeant l'équation donnant $\dot{\sigma}$ en (110, *b*). Cependant ces termes correctifs restent très petits dans des conditions habituelles : pour un électron soumis simultanément à un champ électrique et un champ magnétique de 100 000 gauss, les termes correctifs de (110) valent environ 10^{-11} fois les termes principaux ; la vitesse additionnelle prévue par (112) est de l'ordre de 10^{-5} cm/sec pour un champ électrique de 10 000 volts/cm.

Ceci n'empêche évidemment pas d'envisager une vérification expérimentale des équations modifiées.

De même il serait intéressant de mettre en évidence la variation de m et g avec α : les expériences effectuées jusqu'ici doivent être interprétées comme donnant la valeur de ces quantités pour $\alpha = 0$ (les formules (94) et (108) donnent bien alors $g = 2\mu m/qs$).

— Pour terminer cette étude, il faudrait étudier l'influence des termes que nous avons supposés nuls ci-dessus (cas d'un champ électro-magnétique variable ou d'un champ de gravitation). L'expérimentation semble difficile : les champs variables peuvent faire apparaître des effets quantiques (comme dans l'expérience de Stern et Gerlach) ; les effets gravitationnels (qui dévient la particule d'une géodésique là où le tenseur de Riemann-Christoffel n'est pas nul) semblent trop petits pour pouvoir être détectés (voir G. Bigot [*19*]).

11. CONSTRUCTION D'UN FORMALISME SYMPLECTIQUE

Étudions géométriquement une particule conforme aux équations (90) ; nous supposons donnés le spin s, la fonction f, et la charge q.

Nous nous proposons d'étudier tous les mouvements possibles de cette particule dans un champ gravitationnel et électromagnétique donné.

Le système différentiel porte sur le triplet de variables

(115) $$y = (X, S, P)$$

qui sont astreintes aux liaisons :

(116)

$S^{\mu\nu} + S^{\nu\mu} = 0$	$S^{\mu\nu}P_\nu = 0$
$S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 2s^2$	$P_\rho P^\rho = f(S^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$

Désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble parcouru par la variable y ; $\mathcal{V}$ est de toute évidence un « espace fibré » au-dessus de l'espace-temps V_4, puisqu'il existe une « projection »

(117) $$y \mapsto X$$

de $\mathcal{V}$ sur V_4 (figure 4).

Précisons la structure de la « fibre » au-dessus d'un point X ; c'est l'ensemble des couples (S, P) de tenseurs au point X qui vérifient les équations (116); il peut être commode d'introduire les variables

(118) $$\Omega^{\mu\nu} = \frac{1}{s} S^{\mu\nu} ; \qquad I^\rho = \frac{1}{\sqrt{f(\alpha)}} P^\rho$$

qui paramètrent la fibre, puisqu'on a inversement

(119) $$S^{\mu\nu} = s\Omega^{\mu\nu} \qquad P^\rho = I^\rho\sqrt{f(s\Omega^{\mu\nu}F_{\mu\nu})}$$

et que F est connu.

Les variables Ω et I sont liées par les contraintes :

(120)

$\Omega^{\mu\nu} + \Omega^{\nu\mu} = 0$	$\Omega^{\mu\nu}I_\nu = 0$
$\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} = 2$	$I_\mu I^\mu = 1$

qui expriment que la figure (Ω, I) est rigide ; de façon précise, on en déduit (comme au § précédent) que la fibre est *un espace homogène du groupe de Lorentz* ; on vérifie que le stabilisateur d'un point de la fibre est isomorphe à $O(1) \times SO(2)$ (donc de dimension 1), et par conséquent que la fibre possède une structure de variété de dimension $6 - 1 = 5$. Par conséquent $\mathcal{V}$ est un *espace fibré différentiable*, de dimension 9.

En tenant compte des 4 composantes connexes du groupe de Lorentz, on vérifie aussi que la fibre possède 2 composantes : elles correspondent aux deux orientations temporelles du vecteur I (ou P). En supposant, pour fixer les idées, que V_4 est globalement orientable dans le temps, $\mathcal{V}$ possède deux composantes connexes ; nous en choisirons une en ajoutant aux conditions (116) la liaison

(121) P est de genre futur.

Les mouvements de la particule sont des courbes tracées sur $\mathcal{V}_9$ (qui se projettent sur V_4 selon les lignes d'univers correspondantes) ; le système différentiel (90) donne, en chaque point y, *la direction tangente à la courbe*

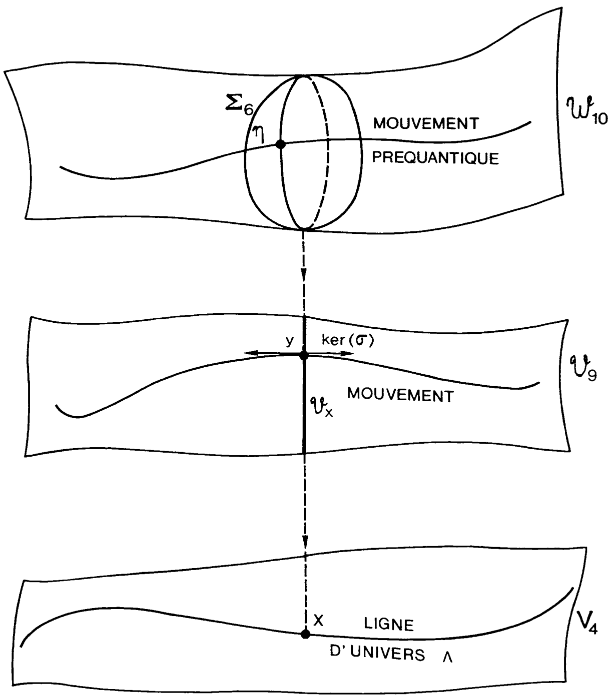

FIG. 4.

qui passe par y $\left(\text{en effet, (90}d\text{) ne donne que la direction de } \frac{dX}{ds}\right.$, et les dérivées des autres variables en dépendent linéairement). Autrement dit, les équations (90) définissent un *feuilletage de dimension 1* de $\mathcal{V}_9$, et les mouvements sont les feuilles correspondantes.

Rappelons ces équations ; elles s'écrivent

(122) $$A_\sigma = 0, \qquad B^{\mu\nu} = 0 ; \qquad C^\sigma = 0$$

en posant :

$$
(123)\quad \left\{ \begin{aligned}
A_\sigma &= \frac{\hat{d}P_\sigma}{ds} - qF_{\sigma\rho}\frac{dx^\rho}{ds} - \frac{1}{2}\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}P_\lambda\frac{dx^\lambda}{ds}S^{\mu\nu}\hat{\partial}_\sigma F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}R_{\mu\nu,\rho\sigma}S^{\mu\nu}\frac{dx^\rho}{ds} \\
B^{\mu\nu} &= \frac{\hat{d}}{ds}S^{\mu\nu} - P^\mu\frac{dx^\nu}{ds} + P^\nu\frac{dx^\mu}{ds} + \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}P_\lambda\frac{dx^\lambda}{ds}[S^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu - S^{\nu\rho}F_\rho{}^\mu] \\
C^\sigma &= \frac{dx^\sigma}{ds} - \frac{1}{f(\alpha)}P^\sigma P_\lambda\frac{dx^\lambda}{ds} + \frac{1}{s^2}S^\sigma{}_\mu S^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{ds}
\end{aligned} \right.
$$

($A = 0$, $B = 0$ sont les équations universelles (55*b*); compte tenu des liaisons (116), $C = 0$ est équivalent à (87), d'où l'on tire (90*d*)).

Nous allons interpréter ces équations à la manière *du principe des travaux virtuels*, en formant la combinaison linéaire

$$
(124)\qquad C^\sigma\hat{\delta}P_\sigma - A_\sigma\delta x^\sigma - \frac{1}{s^2}B^{\mu\nu}S_{\nu\rho}\hat{\delta}S^\rho{}_\mu
$$

où δx^σ, $\hat{\delta}P_\sigma$, $\hat{\delta}S^\rho{}_\mu$ définissent une *variation* arbitraire de X, P, S ; après un certain nombre de transformations (utilisant les équations de liaison (116) et les relations

$$
\mathrm{SFS} = -\alpha/2\,\mathrm{S},\qquad \mathrm{S}^3 = -s^2\mathrm{S},\qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}\delta\mathrm{S}) = 0,
$$
$$
\hat{\delta}\mathrm{SP} + \mathrm{S}\hat{\delta}\mathrm{P} = 0,\qquad \bar{\mathrm{P}}\delta\mathrm{P} = \frac{1}{2}f'(\alpha)\delta\alpha
$$

qui en résultent), on parvient à mettre l'expression (124) sous la forme

$$
(125)\quad \frac{dx^\sigma}{ds}\hat{\delta}P_\sigma - \delta x^\sigma\frac{\hat{\delta}P_\sigma}{ds}
+ qF_{\sigma\rho}\frac{dx^\rho}{ds}\delta x^\sigma - \frac{1}{2}R_{\mu\nu,\rho\sigma}S^{\mu\nu}\frac{dx^\rho}{ds}\delta x^\sigma - \frac{1}{s^2}\frac{\hat{d}}{ds}S^\mu{}_\nu S^\nu{}_\rho\hat{\delta}S^\rho{}_\mu
$$

qui a la propriété remarquable d'être *antisymétrique* par rapport aux deux dérivations $\frac{d}{ds}$ et δ.

Réciproquement, on vérifie que si l'expression (125) ou (124) est nulle pour toute variation δ compatible avec les liaisons, les expressions A, B, C sont nulles. Ce qui conduit à l'énoncé suivant :

(126) a) *On peut définir, sur la variété $\mathcal{V}_9$ une 2-forme σ par la formule :*

$$
\left\{ \begin{aligned}
\sigma(dy)(\delta y) &= dx^\sigma\hat{\delta}P_\sigma - \delta x^\sigma\hat{d}P_\sigma \\
&\quad - qF_{\rho\sigma}dx^\rho\delta x^\sigma - \frac{1}{2}R_{\mu\nu,\rho\sigma}S^{\mu\nu}dx^\rho\delta x^\sigma - \frac{1}{s^2}\hat{d}S^\mu{}_\nu S^\nu{}_\rho\hat{\delta}S^\rho{}_\mu
\end{aligned} \right.
$$

où d et δ désignent deux dérivations quelconques.

b) *Les équations du mouvement* (122) *s'écrivent*

$$\sigma\left(\frac{dy}{ds}\right)(\delta y) = 0 \qquad \forall \delta y$$

ou encore

$$\frac{dy}{ds} \in \ker(\sigma)$$

— Nous avons vu que les équations (122) déterminent la *direction* de $\frac{dy}{ds}$ si le nombre

(127) $$\omega = f(\alpha) + \frac{q}{2}\alpha + \frac{1}{4}\mathrm{R}_{\lambda\mu,\nu\rho}\mathrm{S}^{\lambda\mu}\mathrm{S}^{\nu\rho}$$

n'est pas nul (voir (88)). Dans ces conditions le noyau de σ est de dimension 1 ; par conséquent le rang de σ est 9-1 = 8 ; on sait que c'est le maximum pour une 2-forme de $\mathscr{V}_9$ (dont le rang est toujours pair).

En dehors des points singuliers où $\omega = 0$ (qui ne semblent pas susceptibles d'être obtenus expérimentalement), le feuilletage de $\mathscr{V}_9$ est donc simplement l'application

(128) $$y \mapsto \ker(\sigma)$$

Il est tout naturel, à ce stade, de calculer la *dérivée extérieure* de σ ; c'est une 3-forme, que nous noterons $\Delta\sigma$, définie par la condition

(129) $$\nabla\sigma(\delta_1 y)(\delta_2 y)(\delta_3 y) = \delta_1[\sigma(\delta_2 y)(\delta_3 y)] + \delta_2[\sigma(\delta_3 y)(\delta_1 y)] + \delta_3[\sigma(\delta_1 y)(\delta_2 y)]$$

où $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ désignent trois dérivations qui commutent. Le calcul peut se faire sur l'expression (126*a*) de σ ; en utilisant les diverses équations de liaisons, l'introduction du tenseur de courbure dans les dérivations covariantes secondes, et les identités de Bianchi entre dérivées du tenseur de Riemann-Christoffel, on arrive au résultat

(130) $$\nabla\sigma = 0$$

Nous donnerons plus loin une démonstration plus brève de ce résultat (168).

Ainsi la forme σ est *fermée* ; il en résulte immédiatement (voir [*20*]) que le feuilletage de $\mathscr{V}_9$ coïncide avec le feuilletage caractéristique de σ, et que par conséquent σ est un *invariant intégral absolu* des équations du mouvement ; si on enlève les singularités éventuelles $\omega = 0$, σ donne à $\mathscr{V}_9$ une *structure de variété présymplectique.*

Une autre question naturelle est de savoir si σ est une forme *exacte*, c'est-à-dire si elle possède un « potentiel » ϖ : ce serait une 1-forme de $\mathscr{V}_9$ telle que

(131) $$\sigma = \nabla\varpi$$

ce qui s'écrit encore, avec deux dérivations d et δ qui commutent

$$\sigma(dy)(\delta y) = d[\varpi(\delta y)] - \delta[\varpi(dy)] \tag{132}$$

On sait que la condition (130) est nécessaire pour l'existence de ϖ, et localement suffisante (théorème de Poincaré) ; mais nous allons voir que les propriétés *topologiques* de $\mathscr{V}_9$ empêchent l'existence globale de ϖ.

En effet, si la relation (131) est vérifiée, elle le sera encore sur toute sous-variété de $\mathscr{V}_9$ (en remplaçant σ et ϖ par les formes induites). Choisissons comme sous-variété celle d'équation

$$X = X_0 \qquad I = I_0 \tag{133}$$

I_0 étant un vecteur unitaire donné au point X_0 de V_4.

En choisissant une base orthonormale en X_0 où I_0 a pour composantes (1, 0, 0, 0), on voit que Ω sera représenté par une matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ 0 & u_3 & 0 & -u_1 \\ 0 & -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{134}$$

avec $u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 = 1$; autrement dit, (133) définit une sous-variété difféomorphe à la sphère S_2 parcourue par la variable $U = (u_1 u_2 u_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Le calcul de σ est immédiat : seul le dernier terme de l'expression (126*a*) n'est pas nul ; on trouve

$$\sigma(dy)(\delta y) = -\, s \operatorname{vol}(U)(dU)(\delta U) \tag{135}$$

vol désignant l'élément de volume $\mathbb{R}^3$; c'est-à-dire au facteur $-\,s$ près, l'élément d'aire de S_2 ; et il est évident que cet élément d'aire n'admet pas de potentiel global (sinon, en l'intégrant sur un parallèle entourant le pôle nord, on obtiendrait l'aire de la calotte sphérique contenue ; en faisant descendre le parallèle au-delà de l'équateur et en le faisant tendre vers le pôle sud, l'intégrale tendrait d'une part vers l'aire 4π de la sphère ; et d'autre part vers 0, puisque le parallèle se réduirait à un point ; on peut bien entendu affiner cet argument).

Nous avons donc le théorème

(136) la forme σ de $\mathscr{V}_9$ n'est pas exacte.

Ce résultat nous montre qu'il *faut renoncer à déduire le formalisme canonique* (que nous allons développer dans la suite) *d'un principe variationnel :* en effet, si les équations du mouvement dérivaient d'un lagrangien (construit à l'aide d'un hypothétique espace de configuration), elles constitueraient le feuilletage caractéristique d'une 2-forme présymplectique qui devait coïncider (à un facteur près) avec σ ; mais la 2-forme d'un problème variationnel est toujours exacte (elle admet la force de Cartan comme potentiel).

12. FORMALISME PRÉQUANTIQUE

Dans le cadre de la mécanique rationnelle d'un système dynamique lagrangien, on peut montrer que la réalisation des relations de commutation et d'évolution proposées par Dirac comme principe de la mécanique quantique (Dirac [*21*]) est possible si l'on sait construire un certain espace fibré (Souriau [*22*]) ; il semble raisonnable de faire de cette construction un préalable obligé à la quantification (Souriau [*20*]) ; Kostant a proposé une construction équivalente, à laquelle il a donné le nom de « prequantization » (Kostant [*23*]).

Ici, le problème consiste à construire une variété $\mathscr{W}_{10}$, *fibrée en cercles* au-dessus de $\mathscr{V}_9$ (fig. 4), et munie d'une 1-forme ϖ telle que :

(137) *L'image réciproque de la 2-forme σ de $\mathscr{V}_9$ (par la projection $\eta \mapsto y$) coïncide avec la dérivée extérieure de ϖ ;*
— La 1-forme induite par ϖ sur les fibres (circulaires) de $\mathscr{W}_{10}$ ne s'y annule pas;
— La circulation de ϖ sur chacune de ces fibres est égale à la constante de Planck $2\pi\hbar$.

Nous dirons, si une telle variété $\mathscr{W}_{10}$ existe, qu'elle constitue une *variété préquantique* au-dessus de $\mathscr{V}_9$. La possibilité de cette construction est lié à des considérations de topologie différentielle que nous n'examinerons pas ici dans le cas général. Contentons-nous de quelques remarques.

Si cette construction est possible, il est évident que l'image réciproque (par la projection $\eta \mapsto y$) de la sous-variété S_2 définie par les équations (133) constituera une variété préquantique au-dessus de S_2 (munie de la forme définie en (135)) ; or on peut montrer qu'une telle variété préquantique n'existe que si $2s/\hbar$ est entier (Souriau [*20*]) ; d'où le résultat :

(138) *La préquantification de la variété V_9 n'est possible que si le spin s est un multiple entier de $\hbar/2$;*

résultat satisfaisant, puisque les spins des particules réelles vérifient cette condition.

Nous allons désormais nous occuper du seul cas $s = \hbar/2$ (cas de l'électron du proton ou du muon par exemple).

Commençons par choisir un point X_0 ; la fibre de $\mathscr{V}_9$ correspondante est, nous l'avons vu, l'ensemble des figures (Ω, I) liées par les relations (120) ; la forme induite par σ est — d'après (126*a*)

$$\sigma(dy)(\delta y) = -\frac{1}{2} d\Omega^\mu{}_\nu\, \Omega^\nu{}_\rho \delta\Omega^\rho{}_\mu \tag{139}$$

où il est inutile d'employer des dérivations covariantes, puisque X est fixe.

Nous allons effectuer la préquantification de cette variété par voie algébrique. Rappelons quelques résultats concernant les spineurs.

$$\Psi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$ étant un élément de l'espace numérique

$\mathbb{C}^4$, nous poserons

(140) $$\overline{\Psi} = \frac{1}{2}(\bar{z}\bar{t}\bar{x}\bar{y})\,;$$

$\Psi \mapsto \overline{\Psi}\Psi$ est une forme d'Hermite réelle (mais non définie).
Considérons les *matrices de Pauli* (complexes, 2×2)

(141) $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et les *matrices de Dirac* (complexes, 4×4)

(142) $$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$$

auxquelles il est utile de joindre la matrice

(143) $$\Gamma_5 = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Choisissons un repère orthonormé

(144) $$\mathrm{N} = (\mathrm{N}_0\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2\mathrm{N}_3) \qquad (\mathrm{N}_0 \text{ de genre futur})$$

de l'espace vectoriel tangent à V_4 en X_0 ; il existe une application γ, $\mathbb{R}$-linéaire, de cet espace vectoriel tangent dans l'espace des matrices 4×4 défini par

(145) $$\gamma(\mathrm{N}_\mu) = \Gamma_\mu \qquad (\text{pour } \mu = 0, 1, 2, 3)\,;$$

pour tout vecteur V tangent en X, on vérifie immédiatement les formules

(146) $$\gamma(\mathrm{V})^2 = \langle \mathrm{V}, \mathrm{V} \rangle 1\,; \qquad \gamma(\mathrm{V})\Gamma_5 + \Gamma_5\gamma(\mathrm{V}) = 0$$

Si l'on choisit un autre repère quelconque $\mathscr{R}$, et si l'on pose

(147) $$\gamma_\mu = \gamma(\mathscr{R}_\mu)$$

on déduit de (142) la formule

(148) $$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}1$$

les $g_{\mu\nu}$ étant les composantes du tenseur métrique dans $\mathscr{R}$. Les éléments de $\mathbb{C}^4$ ainsi structuré s'appelleront des *spineurs*.

Si A est une matrice unimodulaire complexe 2×2, l'application

(149) $$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $SL(2, \mathbb{C})$ sur un sous-groupe de $SL(4, \mathbb{C})$, appelé *groupe de Clifford*; il existe un morphisme du groupe de Clifford sur le groupe de Lorentz connexe, $B \mapsto C$, défini par

(150) $$B\gamma(V)B^{-1} = \gamma(C(V)) \qquad \forall V \text{ tangent en } X.$$

Posons $$\theta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

l'orbite de θ_0 pour le groupe de Clifford est l'ensemble des θ tels que

(151) $$\boxed{\bar{\theta}\theta = 1 \quad \bar{\theta}\Gamma_5\theta = 0}$$

Le stabilisateur de θ_0 est réduit à l'élément neutre : (151) est donc l'équation d'une variété réelle Σ, plongée dans $\mathbb{C}^4$, difféomorphe au groupe de Clifford, donc à $SL(2, \mathbb{C})$, donc à $\mathbb{R}^3 \times S_3$, donc simplement connexe de dimension 6.

Si θ appartient à cette variété Σ_6, et si l'on pose

(152) $$\boxed{\bar{\theta}\gamma_\mu\theta = I_\mu \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\,\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_\nu\theta\right) = \Omega_{\mu\nu}}$$

les nombres I_μ et $\Omega_{\mu\nu}$ sont les composantes (dans le repère $\mathscr{R}$) d'un vecteur I et d'un tenseur antisymétrique Ω qui vérifient les relations (120, 121); les formules (152) définissent donc une application de Σ_6 dans la fibre $\mathscr{V}_{X_0}$ de $\mathscr{V}_9$ au point X_0; on peut montrer qu'elle est surjective, et que deux points θ, θ' de Σ_6 qui se projettent au même point sont liés par la relation

$$\theta' = \theta e^{i\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

si bien que Σ_6 est un fibré en cercles au-dessus de $\mathscr{V}_{X_0}$.

Enfin, si l'on pose Σ_6

(153) $$\omega(\delta\theta) = \hbar \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\,\bar{\theta}\delta\theta\right)$$

Σ_6 devient une variété préquantique au-dessus de $\mathscr{V}_{X_0}$, les axiomes (137) sont vérifiées (Voir Souriau [*20*]).

Pour préquantifier $\mathscr{V}_9$, il faut évidemment effectuer cette construction au-dessus de chaque point X de V_4, « recoller » les variétés Σ_6 correspondantes pour en faire un fibré différentiable, et ajouter à la forme ω des termes en δX de façon à réaliser les axiomes (137).

La façon la plus simple de faire ce recollement — et, en fait, la seule possible — est de supposer qu'il existe *globalement* sur V_4 un champ différentiable de repères orthonormaux

(154) $$X \mapsto N$$

ce qui assure, d'ailleurs, l'orientation globale dans le temps. Il existe alors une application λ de l'espace vectoriel tangent en X dans l'algèbre de Lie du groupe de Clifford qui est caractérisée par la formule

(155) $$\delta[\gamma(V)] = \gamma(\hat{\delta} V) + [\gamma(V), \lambda(\delta X)]$$

(les crochets [,] désignent un commutateur ; $X \mapsto V, X \mapsto \delta X$ sont deux champs de vecteurs quelconques).

Le calcul montre d'ailleurs l'équivalence de cette formule avec

(156) $$\lambda_\mu = \frac{1}{8}[\gamma^\nu, \partial_\mu \gamma_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\gamma_\rho]$$

où les λ_μ sont les composantes de λ dans une carte quelconque ; on a posé

(157) $$\gamma^\nu = g^{\nu\rho}\gamma_\rho$$

Si l'on définit la *dérivée covariante* $\hat{\delta}\Psi$ d'un spineur Ψ par la formule

(158) $$\hat{\delta}\Psi = \delta\Psi + \lambda(\delta X)\Psi$$

il résulte de (155) la formule

(159) $$\hat{\delta}[\gamma(V)\Psi] = \gamma(\hat{\delta}V)\Psi + \gamma(V)\hat{\delta}\Psi$$

Signalons aussi les formules

(160) $$\delta[\bar{\Psi}\Psi'] = \overline{\hat{\delta}\Psi}\Psi' + \bar{\Psi}\hat{\delta}\Psi'$$

et

(161) $$\hat{d}[\hat{\delta}\Psi] - \hat{\delta}[\hat{d}\Psi] = -\frac{1}{4}R_{\mu\nu,\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\Psi dx^\rho \delta x^\sigma$$

si d et δ commutent.

Si nous construisons la variété

(162) $$\mathscr{W}_{10} = V_4 \times \Sigma_6$$

parcourue par la variable

(163) $$\eta = (X, \theta) \qquad (\theta \text{ vérifiant } (151))$$

on peut y définir une 1-forme ω, prolongement de (153), obtenue en y remplaçant $\delta\theta$ par la dérivée covariante :

(164) $$\omega(\delta\eta) = \hbar \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\,\bar{\theta}\hat{\delta}\theta\right)$$

Les formules (158) à (161) permettent de calculer la dérivée extérieure de ω

(165) $$\nabla\omega(d\eta)(\delta\eta) = d[\omega(\delta\eta)] - \delta[\omega(d\eta)] = \hbar\mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}[\overline{\hat{d}\theta}\hat{\delta}\theta - \overline{\hat{\delta}\theta}\hat{\delta}\theta]\right) - \frac{1}{4}\hbar\mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\,\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma^\nu\theta\right)\mathrm{R}_{\mu\nu,\,\rho\sigma}dx^\rho\delta x^\sigma$$

Ce dernier terme s'écrit aussi (Cf. (152))

$$-\frac{\hbar}{4}\mathrm{R}_{\mu\nu,\rho\sigma}\Omega^{\mu\nu}dx^\rho\delta x^\sigma$$

ou, en se souvenant que le spin est égal à $\hbar/2$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{R}_{\mu\nu,\rho\sigma}\mathrm{S}^{\mu\nu}dx^\rho\delta x^\sigma$$

Par un heureux hasard, ce terme figure exactement dans l'expression (126) de σ ; ainsi que le premier de (165), Cf. (153)).

Il reste donc

(166) $$\sigma(dy)(\delta y) = \nabla\omega(d\eta)(\delta\eta) + dx^\sigma\hat{\delta}\mathrm{P}_\sigma - \delta x^\sigma\hat{d}\mathrm{P}_\sigma - q\mathrm{F}_{\rho\sigma}dx^\rho\mathrm{F}x^\sigma$$

et il se trouve — comme nous l'espérions — que les termes supplémentaires sont la dérivée extérieure d'une forme en $\delta\mathrm{X}$, à savoir

(167) $$-[\mathrm{P}_\mu + q\mathrm{A}_\mu]\delta x^\mu$$

D'où l'énoncé : (Réf. [*20*], [*24*], [*16*], [*25*], [*18*]).

(168) *Dans le cas où le spin s est égal à $\hbar/2$, et où il existe un champ global de repères orthonormés sur* V_4, *on préquantifie la variété* $\mathscr{V}_9$ *(au sens* (137)*) par la procédure suivante :*

a) *On construit la variété*

$$\mathscr{W}_{10} = \mathrm{V}_4 \times \Sigma_6$$

où Σ_6 *est l'ensemble des spineurs* θ *vérifiant les équations*

$$\bar{\theta}\theta = 1, \qquad \bar{\theta}\Gamma_5\theta = 0$$

b) $\mathscr{W}_{10}$ *est fibrée en cercles au-dessus de* $\mathscr{V}_9$ *par l'application*

$$(\mathrm{X}, \theta) \mapsto (\mathrm{X}, \mathrm{S}, \mathrm{P})$$

S *et* P *étant donnés par*

$$S_{\mu\nu} = \frac{\hbar}{2} \mathrm{R}e\,(i\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_\nu\theta)$$

$$P_\mu = \sqrt{f(S_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}\bar{\theta}\gamma_\mu\theta$$

c) *On munit* $\mathscr{W}_{10}$ *de la* 1*-forme* ϖ :

$$\varpi(\delta\eta) = \hbar\mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\,\bar{\theta}\hat{\delta}\theta\right) - [P_\mu + qA_\mu]\delta x^\mu$$

13. QUELQUES PROBLÈMES

Nous venons de construire un modèle répondant à un certain nombre d'exigences *a priori* : conformité aux équations universelles de l'électrodynamique (formulées en termes d'hyperespace) ; déterminisme du système différentiel ; existence d'une structure symplectique et d'une structure préquantique.

Cependant la possibilité même d'une telle construction soulève quelques questions fondamentales.

• Dans la construction d'un modèle « universel » (§ 5), nous nous sommes arrêtés aux termes dipolaires. Ne serait-il pas légitime — et nécessaire — d'envisager des termes d'ordre plus élevé ?

Cette procédure est certainement nécessaire lorsqu'on envisage une description ponctuelle approximative d'une particule étendue. Cependant il se pourrait que la physique fournisse quelques raisons de se limiter aux termes dipolaires.

On sait par exemple que les particules complexes (telles qu'un noyau atomique) possèdent un *spin* bien déterminé expérimentalement : ceci semble suggérer que les degrés de liberté internes peuvent être gelés, et que la particule puisse adopter extérieurement un comportement « élémentaire » — décrit par les termes du modèle ci-dessus.

Mais, plus fondamentalement, il existe une raison géométrique d'exclure les termes quadrupolaires dans la description d'une particule élémentaire : c'est que ceux-ci permettent des répartitions de matière éphémères, occupant un seul point de l'espace-temps.

En effet, une telle répartition — conformément aux principes formulés au § 3, se caractérisera par une fonctionnelle

$$[A^{\lambda\mu}\delta g_{\lambda\mu} + B^{\lambda,\mu\nu}\partial_\lambda\delta g_{\mu\nu} + C^{\lambda\mu,\nu\rho}\partial_\lambda\partial_\mu\delta g_{\gamma\rho}]_{X_0} \tag{169}$$

astreinte à la condition d'être nulle si δg est une dérivée de Lie.

Si on se limite aux termes monopolaire et dipolaire A et B, le calcul montre que cette fonctionnelle est nulle. Par contre, dans le cas de la relativité restreinte, il existe une solution quadrupolaire non nulle : en effet, l'équation

$$C^{\lambda\mu,\nu\rho}\partial_\lambda\partial_\mu[\partial_\nu V_\rho + \partial_\rho V_\nu] = 0$$

où C désigne un tenseur admettant les symétries

(170) $$C^{\lambda\mu,\nu\rho} = C^{\mu\lambda,\nu\rho} = C^{\lambda\mu,\rho\nu}$$

est évidemment vérifiée si (et seulement si) C possède la symétrie supplémentaire

(171) $$C^{\lambda\mu,\nu\rho} + C^{\mu\nu,\lambda\rho} + C^{\nu\lambda,\mu\rho} = 0$$

il n'est pas trop difficile de déduire de (171) la formule

(172) $$C^{\lambda\mu,\nu\rho} = C^{\nu\rho,\lambda\mu}$$

Il existe des solutions non nulles de ces symétries (170, 1, 2) ; de façon précise, elles constituent un espace vectoriel de dimension 20 ; une façon de le montrer est de les mettre en bijection avec les tenseurs possédant les symétries du tenseur de Riemann-Christoffel : si en effet on pose

(173) $$D^{\lambda\mu,\nu\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}}[C^{\lambda\nu,\mu\rho} - C^{\mu\nu,\lambda\rho}]$$

ce qui s'inverse en

(174) $$C^{\lambda\nu,\mu\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}}[D^{\lambda\mu,\nu\rho} + D^{\nu\mu,\lambda\rho}]$$

on constate que D vérifie les symétries

(175) $$D^{\lambda\mu,\nu\rho} = -D^{\mu\lambda,\nu\rho} = -D^{\lambda\mu,\rho\nu}$$

et

(176) $$D^{\lambda\mu,\nu\rho} + D^{\mu\nu,\lambda\rho} + D^{\nu\lambda,\mu\rho} = 0$$

qui entraînent d'ailleurs

(177) $$D^{\lambda\mu,\nu\rho} = D^{\nu\rho,\lambda\mu}\,;$$

réciproquement, de toute solution D de (175, 6, 7), la formule (174) déduit une solution C de (170, 1, 2). En particulier, si A est un tenseur antisymétrique de rang 2, on aura la solution

(178) $$C^{\lambda\nu,\mu\rho} = A^{\lambda\mu}A^{\nu\rho} + A^{\nu\mu}A^{\lambda\rho}$$

(Cf. (82)).

Le caractère paradoxal d'une telle distribution de matière est que toutes les grandeurs conservées associées au groupe de Poincaré sont nulles : il suffit en effet de les calculer (par la procédure du § VII), *avant* ou *après* l'événement X_0.

Bien entendu, il est possible de répartir arbitrairement de telles distributions sur une ligne d'univers pour avoir une distribution sur cette ligne, solution des équations de la dynamique avec moment quadrupolaire — et ayant encore des grandeurs conservatives identiquement nulles : cet objet est si scandaleux qu'il montre à l'évidence la nécessité de prendre des précautions particulières si l'on désire introduire des moments quadrupolaires. De même, si l'on répartit convenablement une distribution de ce type dans tout l'espace, on obtient une distribution complètement continue :

(179) $$\int C^{\lambda\mu,\nu\rho}\partial_\lambda\partial_\mu\delta g_{\nu\rho} \text{ vol}$$

est évidemment égale à

(180) $$\int \frac{1}{2} T^{\nu\rho}\delta g_{\nu\rho} \text{ vol}$$

si l'on pose

(181) $$T^{\nu\rho} = 2\partial_\lambda\partial_\mu C^{\lambda\mu,\nu\rho}$$

les équations de conservation

(182) $$\partial_\nu T^{\nu\rho} = 0$$

sont automatiquement vérifiées, quel que soit le tenseur C solution de (170, 171); les grandeurs conservatives associées sont encore nulles : on retrouve ainsi un résultat de Fock [*2*] qui appelle « tenseur de Krutkov » ([1]) l'expression (181), exprimée à l'aide du tenseur D.

• Les constructions que nous avons effectuées ont profité d'un grand nombre de hasards heureux que nous allons rappeler rapidement : les hypothèses *a priori* (67)

(183) $$S^{\mu\nu}P_\nu = 0\,; \qquad \mathscr{M}^{\mu\nu} = \lambda S^{\mu\nu}$$

jointes aux équations universelles des particules, permettent de poser (77)

(184) $$P_\rho P^\rho = f(S^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$$

ce qui fournit alors un système déterministe; de plus, elles entraînent l'existence d'une nouvelle intégrale première, le spin scalaire; ce qui permettra d'inclure le spin dans la description de la particule (en le faisant passer du rang de « constante du mouvement » à celui de « constante du système »). En conséquence de quoi il sera possible, par une généralisation convenable du principe de d'Alembert, de construire le formalisme symplectique, puis d'effectuer la préquantification.

([1]) En effet, l'analogie tridimensionnelle de ces résultats fournit une expression du tenseur de contraintes T^{jk} à l'intérieur d'un corps en équilibre qui n'est soumis à aucune force extérieure — expression utilisée dans le livre de Krutkov [*26*] ; bien entendu ces résultats peuvent aussi s'interpréter par une répartition de *contraintes « ponctuelles » en équilibre*, quadrupolaires, appartenant à un espace de dimension 6.

Si tout cela est en accord avec l'expérience, il apparaît trop de coïncidences mathématiques pour que cette construction soit vraiment « achevée » : la coexistence dialectique du formalisme symplectique avec les équations universelles de la relativité générale devrait évidemment résulter d'une synthèse mieux formulée ; celle-ci existe dans le cas des milieux continus (principes variationnels à lagrangiens invariants) ; mais nous avons vu que cette méthode ne s'applique pas dans le cas des particules à spin (136).

Une telle synthèse permettrait peut-être de construire des modèles de particules *non élémentaires* (tels par exemple que *le rotateur relativiste* de Kunzle [*27*].

• La construction du formalisme spinoriel (168) dépend, en apparence, du choix d'un champ global de repères orthonormés : en fait, il n'en dépend pas effectivement si V_4 possède *une seule* structure spinorielle. Dans ces conditions, deux données de potentiels sur V_4 qui sont équivalentes par un difféomorphisme conduisent à des préquantifications équivalentes.

De même, si on modifie les potentiels électromagnétiques par une transformation de jauge

(185) $$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

il est clair sur la formule (168*c*) que celle-ci peut se compenser par la substitution

(186) $$\theta \rightarrow \theta e^{\frac{iq}{\hbar}\alpha}$$

ce qui conduit encore à une préquantification équivalente.

— Il est intéressant de considérer les feuilles du *feuilletage caractéristique* de la 1-forme ϖ (168) ; ce sont des courbes tracées sur $\mathscr{W}_{10}$ (fig. 4) qui se projettent sur $\mathscr{V}_9$ selon les « mouvements », et qui sont caractérisées par l'équation supplémentaire

(187) $$\varpi\left(\frac{d\eta}{ds}\right) = 0 \ ;$$

nous les « nommerons préquantiques » ; on peut noter que les différents mouvements préquantiques de $\mathscr{W}_{10}$ qui se projettent sur un même mouvement de $\mathscr{V}_9$ se déduisent l'un de l'autre par un *déphasage constant*

(188) $$\theta \rightarrow \theta e^{iC}$$

Il résulte des propriétés d'invariance que nous venons d'étudier sommairement que deux potentiels de V_4 qui se déduisent l'un de l'autre par un élément du groupe G (produit semi-direct du groupe des difféomorphismes et du groupe de jauge électromagnétique) ont des mouvements préquantiques en bijection — bijection qui n'est d'ailleurs définie qu'à une phase près — ; en d'autres termes, il existe une extension de G par le tore U(1) qui agit sur l'espace des mouvements préquantiques.

En particulier, si les potentiels présentent une symétrie — c'est-à-dire s'ils sont invariants par l'action d'un sous-groupe de G — le relèvement de ce sous-groupe dans l'extension ci-dessus opérera symplectiquement sur les mouvements préquantiques.

Dans le cas de la particule libre, on trouve ainsi une extension du groupe de Poincaré qui est *non triviale* : c'est le produit direct du tore par le revêtement à deux feuillets du groupe de Poincaré, ainsi qu'il résulte des propriétés bien connues des spineurs ; il en résulte *a fortiori* que *l'extension de* G *par le tore est aussi non-triviale.*

La formulation infinitésimale de ces propriétés de symétrie permet de mettre en œuvre le *théorème de Noether* sous une forme particulièrement simple : si le champ de vecteur de $\mathscr{W}_{10}$: $\eta \mapsto \delta\eta$ donne une dérivée de Lie nulle à la forme ϖ, la grandeur

$$- \varpi(\delta\eta) \tag{189}$$

est une intégrale première des équations du mouvement préquantique.

Tout se projette sur la variété $\mathscr{V}_9$: $\delta\eta$ est le relèvement d'un vecteur δy ; la grandeur conservée (189) ne dépend en fait que du mouvement lui-même (elle est invariante par déphasage).

En d'autres termes, nous avons une *nouvelle méthode* pour associer des grandeurs conservées aux symétries du champ ; comme on peut s'y attendre, elle donne les mêmes valeurs que celles trouvées au § 7 (voir Duval [*18*]). Mais cette coïncidence fait partie des faits insuffisamment expliqués au stade actuel de la théorie.

Il serait intéressant de savoir si le sous-groupe des difféomorphismes et transformations de jauge *à support compact* agit, en même temps que sur les potentiels, sur l'ensemble des mouvements préquantiques — ce qui serait conforme au principe de relativité générale tel que nous l'avons formulé au § 3.

Ceci revient à dire que le relèvement de G_0 dans l'extension de G est triviale — en d'autres termes, que l'on peut fixer sans ambiguïté la phase du mouvement préquantique transformé : il est évident que l'on obtiendra ce choix en supposant le déphasage nul en dehors du support de l'élément de G_0 concerné. Mais il reste quelques questions géométriques à résoudre — notamment pour savoir dans quelle mesure on peut éviter des hypothèses sur la structure spinorielle de V_4.

• L'union à laquelle nous avons procédé entre le groupe de jauge et celui des difféomorphismes (§ 3) peut sembler un peu artificielle. Elle apparaît au contraire comme toute naturelle dans la *théorie de Kaluza-Klein* ([*28*], [*29*]), dont le support géométrique est une variété V_5, riemannienne, hyperbolique normale, munie d'un vecteur de Killing I de carré scalaire -1, dont les feuilles sont des géodésiques. On définit l'espace-temps V_4 comme l'ensemble abstrait de ces géodésiques ; le tenseur contravariant g^{jk}, par la projection $V_5 \to V_4$, définit un tenseur contravariant de V_4, qui lui confère sa structure riemannienne. La dérivée extérieure de la 1-forme I_j est un invariant intégral, et définit une 2-forme F de V_4, que l'on identifie au champ électromagnétique (avec un choix convenable des unités). On peut associer un potentiel A de F (sur V_4) à toute section de V_5 ; ce qui permet d'identifier le groupe G des difféomorphismes et transformations de jauge de V_4 avec le groupe des difféomorphismes de V_5 qui respectent le vecteur I.

Il existe des raisons sérieuses de penser que les feuilles de I sont des courbes fermées ([*30*], [*31*], [*32*]) dont la longueur — nécessairement constante — vaut

$$\frac{4\pi\hbar}{ec}\sqrt{G} \neq 2.38 \quad 10^{-31} \text{ cm} \tag{190}$$

(e = charge de l'électron ; G = constante de la gravitation de Newton), ce qui est très petit à l'échelle nucléaire ; cette petitesse explique évidemment l'« invisibilité » de la 5^e dimension.

Cette théorie parvient à expliquer assez convenablement un certain nombre de faits, notamment la quantification de la charge électrique. Il est donc naturel d'examiner si elle apporte quelque contribution à la théorie des particules.

Mais il apparaît ici une difficulté fondamentale : on ne peut espérer décrire une particule par une courbe tracée sur V_5 que si ses dimensions sont très petites devant la longueur élémentaire (190); sinon il faudra décrire la particule par une variété hyperbolique de *dimension 2* de V_5 — ce qui conduit à une analogie avec la théorie des cordes.

La théorie de la particule décrite par une courbe tracée sur V_5 est faite depuis longtemps en l'absence de spin ([*33*]) et conduit effectivement aux équations (37), la charge électrique q apparaissant comme la grandeur conservative associée au vecteur de Killing I. Mais dans le cas du spin les résultats sont assez troublants : on parvient bien, par une méthode d'approximations, au modèle du § 9 ; mais la fonction phénoménologique f est alors déterminée : c'est un polynôme du second degré

$$f(\alpha) = A + \frac{q}{2}\alpha + B\alpha^2 \tag{191}$$

où le coefficient B est négligeable ; le coefficient gyromagnétique g est donc voisin de 1 (formule (108)) et non de 2 comme dans le cas « normal » de l'électron. L'utilisation de la théorie pentadimensionnelle semble donc moins satisfaisante ici que dans le cadre quantique (où elle fournit un support géométrique au principe d'interaction minimale).

• L'existence d'un modèle *préquantique* pose évidemment le problème de la quantification effective : il serait agréable de pouvoir passer du modèle du § 12 à une description réellement quantique de la particule.

C'est possible dans le cas particulier de *la particule libre* (où il existe un groupe de symétries opérant transitivement sur $\mathscr{V}_9$, à savoir le groupe de Poincaré); grâce à une méthode voisine de la théorie des *polarisations* (complexes) de Kostant, on associe effectivement au modèle (168) l'espace de Hilbert des solutions à fréquences positives de l'équation de Dirac

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + im\Psi = 0 \tag{192}$$

(voir la référence (30)).

Mais le traitement de la particule soumise au champ semble être un problème redoutable; peut-être cependant la méthode de quantification de Feynman ([*34*]) permettra-t-elle de l'aborder.

— Plus modestement, on peut songer à déquantifier l'équation de Dirac (comportant éventuellement un terme de Pauli pour tenir compte du moment anormal).

Là-aussi les difficultés sont grandes : le livre de Maslov ([*35*]) ne traite la question qu'assez évasivement.

L'origine de la difficulté est claire : la méthode B. K. W. pour l'équation de Schrödinger s'interprète à l'aide des solutions de l'équation de Jacobi; or une *intégrale complète* de l'équation de Jacobi peut se définir par un *feuilletage de Planck* d'une variété préquantique (défini par la condition de nullité de la forme ϖ sur les feuilles et la maximalité de la dimension localement compatible avec cette condition; voir ([*20*]). Or, dans le cas du modèle (168), il n'existe pas de feuilletage de Planck global, pour des raisons topologiques; c'est ce qui explique la nécessité d'introduire une polarisation *complexe* dans la quantification de la particule libre. Ce fait suggère que de profondes modifications à la méthode B. K. W. ou à la méthode de Maslov sont nécessaires dans ce cas.

Si cette déquantification est possible, elle permettra de déterminer la fonction $f(\alpha)$, qui est restée phénoménologique au stade préquantique.

Bien entendu, la détermination de cette fonction peut se faire plus simplement, en comparant — dans le cas d'un champ symétrique — les grandeurs conservatives associées à l'équation de Dirac et celles que nous avons obtenues ici : c'est la méthode utilisée par Dirac pour déterminer le moment magnétique ([*21*]).

Il semble que cette méthode doive conduire à la fonction

$$f(\alpha) = m_0^2 + q\alpha \tag{193}$$

qui correspond au moment magnétique normal et simplifie légèrement les équations du mouvement (90*d*). Le choix d'une fonction f affine correspond d'ailleurs à une proposition antérieure ([*24*]).

• On peut adapter le modèle au cas d'une *particule de masse nulle* en ajoutant aux équations universelles les conditions

$$\mathrm{SP} = 0, \qquad \mathrm{P}^2 = 0, \tag{194}$$

la charge électrique étant supposée nulle; il est assez facile d'étendre à ce cas le principe des travaux virtuels et d'obtenir un formalisme pré-quantique.

Ce modèle peut être utilisé pour étudier les effets du spin sur la propagation des photons dans le champ de gravitation ; on vérifie par exemple que la propagation se fait selon une géodésique isotrope dans le cas de propagation radiale dans le modèle de Schwarzschild (H. H. Fliche et P. Saturnini, non publié) ; que par conséquent le spin ne modifie pas l'effet Einstein. Il est à prévoir que la propagation non radiale conduit à une *biréfringérence gravitationnelle* (une étoile ou une radio-source apparaîtra dédoublée au voisinage du Soleil, les deux images étant polarisées circulairement en sens contraire), mais que cet effet est extrêmement faible.

Mais ce modèle présente une grave difficulté (déjà signalée par Künzle ([*16*]) : le rang de la 2-forme σ se modifie dans le cas particulier de la relativité restreinte; les mouvements ne dépendent que de 6 paramètres au lieu de 8, la notion de ligne d'univers du photon devenant évanescente.

Pourtant ce modèle dégénéré est quantifiable, et conduit, comme on peut l'espérer, aux équations de Maxwell (à variables complexes) dans le cas du spin 1, et aux équations du neutrino (avec un demi-spineur comme variable) dans le cas du spin 1/2 (voir [*20*]).

RÉFÉRENCES

[*1*] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, 1922.
[*2*] V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon ed., 1964.
[*3*] J.-M. Souriau, *C. R. Acad. Sc.*, t. **270**, 1970, p. 731.
[*4*] G. Berenguier, *C. R. Acad. Sc.*, t. **273**, 1971, p. 947.
[*5*] J. Breuneval, *Journ. Mécanique*, t. **12**, 1, 1973, p. 137-149.
[*6*] J. Frenkel, *Zeits. für Phys.*, t. **37**, 1926, p. 243.
[*7*] L. H. Thomas, *Phil. Mag.*, t. **3**, 1927, p. 1.
[*8*] M. Mathisson, *Zeits. für Phys.*, t. **67**, 1931, p. 270 et 826.
[*9*] J. V. Weyssenhoff, *Act. Phys. Polon.*, t. **9**, 1947, p. 8.
[*10*] A. Papapetrou, *Proc. Roy. Soc.*, A **209**, 1951, p. 248-258.
[*11*] V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi, *Phys. Rev. Lett.*, t. **2**, 1959, p. 435.
[*12*] F. Halbwachs, *Théorie relativiste des fluides à spin*, Gauthiers-Villards ed., 1960.
[*13*] H. Bacry, *Les moments multipolaires en relativité restreinte*, Masson ed., 1963.
[*14*] W. G. Dixon, *Proc. Roy. Soc.*, A **314**, 1970, p. 499.
[*15*] J. Madore, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **11**, 1969, p. 221-237.
[*16*] H. P. Kunzle, *J. Math. Phys.*, t. **13**, 1972, p. 739-744.
[*17*] A. Trautman, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, t. **20**, 1972, p. 195 et 503.
[*18*] Ch. Duval, *Un modèle de particule à spin* (thèse de 3e Cycle), Centre de Physique Théorique, C. N. R. S., Marseille, 1972.
[*19*] G. Bigot, *Relativité générale et particules à spin* (thèse de 3e Cycle), Centre de Physique Théorique, C. N. R. S., Marseille, 1971.
[*20*] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod éd., 1970.
[*21*] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 1930.

[22] J.-M. SOURIAU, *Commun. Math. Phys.*, t. **1**, 1966, p. 374-398.
[23] B. KOSTANT, *Lect. Mod. Anal. and Appl.*, t. **III**, 1970, p. 170.
[24] J.-M. SOURIAU, *C. R. Acad. Sc.*, t. **271**, 1970, p. 751-753 et 1086-1088.
[25] Ch. DUVAL, H. H. FLICHE, J.-M. SOURIAU, *C. R. Acad. Sc.*, t. **274**, 1972, p. 1082-1084.
[26] A. KRUTKOV, The Stress Tensor and the Solution of General Problems in the Static Theory of Elasticity, *Ak. Nauk U. S. S. R.*, 1949.
[27] H. P. KUNZLE, *Dynamics of a Rigid Test Body in Curved Space-Time*, Preprint, Univ. Alberta, 1972.
[28] KALUZA, *Sitz. Preuss. Akad. Wissens.*, 1921, p. 966.
[29] O. KLEIN, *Zeit. für Phys.*, t. **73**, 1926, p. 895.
[30] J.-M. SOURIAU, *C. R. Acad. Sc.*, t. **247**, 1958, p. 1559 et t. **248**, 1959, p. 1478.
[31] J.-M. SOURIAU, Coll. Intern. C. N. R. S., Royaumont, *Théories Relativistes de la gravitation*, 1959, p. 239-297.
[32] J.-M. SOURIAU, *Géométrie et relativité*, Hermann ed., 1964.
[33] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson ed., 1955.
[34] R. P. FEYNMAN, *Rev. Mod. Phys.*, t. **20**, 1948, p. 367.
[35] V. P. MASLOV, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Univ. de Moscou, 1965, et Dunod, 1972.

(Manuscrit reçu le 6 juillet 1973).