ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

Sur une géométrisation de la mécanique relativiste de milieux continus à densité de spin

Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, nº 3 (1974), p. 221-236

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_3_221_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XX, n° 3, 1974, p. 221-236. *Physique théorique.*

Sur une géométrisation de la mécanique relativiste de milieux continus à densité de spin

par

A. CRUMEYROLLE
Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne,
31077 Toulouse, Cedex.

ABSTRACT. — The aim of this paper is to give a trial of geometrisation of relativistic schemas, welding together Einstein's gravitationnal, Maxwell's electromagnetic fields and some spinning continued media. The geometric setting is the tangent bundle over space-time (state space or phase space) endowed with a particular pseudo-euclidean connexion. In the symmetric case we obtain without phenomenologic considerations equations ruling gravitation and spin effects—we give law of motion generalising naturally that of GR and relativistic models. Likewise, in asymmetric case appear equations susceptible of describe gravitation, spin density and maxwellian field.

INTRODUCTION

En Relativité les schémas asymétriques ont été introduits tantôt dans le but de fondre dans un cadre unitaire la gravitation et l'électromagnétisme, tantôt dans celui d'inclure le cas de certains milieux continus pourvus d'une densité de spin. Dans la première optique, les auteurs ont très souvent voulu lier le champ électromagnétique à la partie antisymétrique $g_{[\alpha\beta]}$ d'un tenseur « métrique » généralisé, et dans l'autre à la suite d'une suggestion d'E. Cartan, le tenseur densité de spin serait représenté par la torsion de la « connexion fondamentale ». On sait les difficultés de l'interprétation des $g_{[\alpha\beta]}$ comme champ de Maxwell. La deuxième conjecture, plus séduisante *a priori,* nous paraît néanmoins assez ambiguë. Introduire un champ de tenseurs de type (1, 2), antisymétriques en leurs indices inférieurs, et introduire une connexion euclidienne avec torsion, sont des démarches strictement équivalentes puisque sur toute variété pseudo-riemannienne existe la connexion de même nom et que la différence de deux connexions euclidiennes est un tenseur de type (1, 2). Le problème est donc de savoir s'il y a avantage à introduire le tenseur densité de spin comme torsion de la « connexion fondamentale » (avec toutes les réserves qu'appelle cette manière de parler) pour écrire et étudier les équations de champs et de mouvement. On pourrait aussi se demander si cette conjecture de E. Cartan est valable pour tous les milieux quelle que soit la valeur quantique du spin.

Dans une telle étude, largement spéculative, nous pensons que les considérations qui ont du prix sont surtout les considérations géométriques, les équations doivent se déduire de structures simples, évitant le plus possible les apports directement phénoménologiques. On trouvera par exemple dans l'article de F. W. Hehl, en cours de publication dans *General Relativity and Gravitation*, vol. **4**, n° 4, 1973, des références bibliographiques abondantes sur la littérature des milieux à spin. On peut considérer qu'à ce jour le problème est largement ouvert, tant au point de vue des résultats que des méthodes. Il serait en particulier très souhaitable de se débarrasser de la technique bâtarde des tétrapodes (*), visiblement créée pour pallier l'insuffisance des techniques spinorielles, la plupart des auteurs s'inspirant d'un travail déjà ancien de H. Weyl [*4*] et prenant heuristiquement appui sur la théorie de l'électron de Dirac $\left(\text{spin } \frac{1}{2}\right)$. A l'inverse on pourrait se demander s'il ne serait pas plutôt préférable de quantifier une bonne théorie unitaire relativiste des milieux continus.

L'origine de cet article se trouve dans nos publications [*3*, *a*, *b*] essentiellement, et dans une réflexion critique sur le travail [*1*], utilisant le même formalisme, et qui représente une tentative, à ce jour parmi les plus étoffées, pour inclure géométriquement en Relativité Générale une conjecture bien antérieure d'O. Costa de Beauregard [*2*].

L'introduction de structures « complexes hyperboliques » nous avait permis dans [*3*, *b*] de géométriser complètement les schémas classiques de la Relativité Générale dans le cas symétrique ; le cas asymétrique, abordé faute de mieux par des techniques d'approximation, nous donnait un schéma de type électromagnétique. Le fibré tangent de l'espace-temps V — qui a toujours localement une structure complexe hyperbolique, et globalement si V est parallélisable — nous a paru un bon cadre pour inclure aux précédents schémas des schémas à spin. Nous obtenons dans le cas symétrique des équations très maniables, des résultats qui sont bien ce que l'on pouvait raisonnablement attendre et qui généralisent ceux qui sont conjecturés dans [*2*]. Le vecteur-vitesse d'univers est normal au vecteur densité de spin, les particules d'épreuve sont déviées parce qu'il existe un moment orbital,

(*) Dans un article ultérieur, nous avons pu réaliser complètement ce programme *(Note ajoutée au moment de l'impression)*.

un courant de spin apparaît (mais ce n'est pas un observable dans le cas symétrique). Par contre le tenseur densité de spin, n'est pas lié à la torsion de la connexion fondamentale sur V. On peut toutefois se ramener à cette situation par l'artifice rappelé plus haut.

Dans le cas asymétrique nous obtenons un courant et des équations de type maxwellien assez satisfaisantes. C'est à la partie antisymétrique « d'un » tenseur de Ricci que serait lié le champ électromagnétique. Ainsi disparaîtrait peut-être une difficulté rappelée plus haut (sur ce sujet se rappeler les travaux d'Eddington et d'Eyraud, références dans [7]). Signalons aussi que même dans le cas symétrique un tenseur de type maxwellien peut être obtenu ; faut-il en conclure que le mouvement de matière, même non chargée, est susceptible de créer un champ électrique ?

Il est raisonnable de penser que les milieux continus à spin décrits ici résultent du point de vue quantique d'un couplage gravitation-électromagnétisme (spin 2, spin 1) et non d'un couplage gravitation-champ de Dirac de l'électron. Si on observe que les coefficients $\mathring{\Lambda}^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$, $\Lambda^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$ sont bien représentatifs de la torsion d'une connexion euclidienne sur $T^2(V)$ de base restreinte à V, dans le cas symétrique, il semble assez logique de penser qu'en gravitation-spin $\frac{1}{2}$, la torsion d'une connexion euclidienne, sur T(V) de base V, V munie d'une structure spinorielle (sur T(V) cette condition est toujours réalisée si V est orientable) joue un rôle analogue, sans pour autant que la torsion, sauf cas particulier, représente nécessairement la densité de spin. Des recherches sont en cours dans ce domaine et apportent confirmation de ces conjectures.

1. PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES

Considérons une variété V de dimension n. T(T(V)) désigne *le fibré tangent à* T(V), *c'est-à-dire* selon le langage de la physique mathématique, *l'espace des états*, lorsque V est l'espace de configuration. T(T(V)) sera encore noté $T^2(V)$ est appelé deuxième fibré tangent.

Dans T(V) soient (x^α, x^{α^*}) un système de coordonnées locales, (α, et toute lettre grecque, égale $1, 2, \ldots, n$, i et toute lettre latine, égale $1, 2, \ldots, 2n$).

Les conditions de cohérence relatives à l'intersection de deux ouverts de trivialisations de $T^2(V)$ s'écrivent, en utilisant, les coordonnées locales naturelles :

$$x^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^\lambda)\,,$$

$$dx^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\beta} dx^\beta \quad , \quad A^{\alpha'}_{\beta} = \partial_\beta f^{\alpha'} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\,,$$

$$x^{\alpha^{*\prime}} = A^{\alpha^{*\prime}}_{\beta^*} x^{\beta^*} \quad \text{avec} \quad A^{\alpha^{*\prime}}_{\beta^*} = A^{\alpha'}_{\beta}\,.$$

$$dx^{\alpha^{*\prime}} = \partial_\beta A^{\alpha^{*\prime}}_{\lambda^*}\, dx^\beta + A^{\alpha^{*\prime}}_{\lambda^*} dx^{\lambda^*}\,.$$

La matrice des fonctions de transitions pour $T^2(V)$ s'écrit donc :

$$\begin{Vmatrix} A_{\beta}^{\alpha'} & 0 \\ (\partial_{\beta} A_{\lambda^*}^{\alpha^{*\prime}}) x^{\lambda^*} & A_{\beta^*}^{\alpha^{*\prime}} \end{Vmatrix}$$

On note que :

$$A_{\beta}^{\alpha'} = A_{\beta^*}^{\alpha^{*\prime}}$$
$$A_{\beta^*}^{\alpha'} = 0 \,.$$

Cette matrice est dans le sous-groupe de $GL(2n, R)$ des éléments qui commutent avec Δ : $\Delta_{\beta}^{\alpha^*} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, $\Delta_j^i = 0$ dans tout autre cas.

Introduisons une connexion linéaire quelconque ω, sur le fibré $T^2(V)$. Avec les coordonnées naturelles ci-dessus apparaissent 8 sortes de composantes pour cette connexion :

$$L_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad L_{\beta^*\gamma}^{\alpha^*}, \quad L_{\beta\gamma^*}^{\alpha^*}, \quad L_{\beta^*\gamma}^{\alpha}, \quad L_{\beta\gamma}^{\alpha^*}, \quad L_{\beta^*\gamma^*}^{\alpha^*}, \quad L_{\beta^*\gamma^*}^{\alpha}, \quad L_{\beta\gamma^*}^{\alpha} \,.$$

De plus définissons sur $T(V)$ un champ de 2-formes différentielles symétriques avec coefficients locaux notés $g_{\alpha\beta^*}$, $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha^*\beta^*}$. Il est immédiat de vérifier qu'il est loisible de supposer que :

$$g_{\alpha^*\beta^*} = 0, \qquad \partial_{\lambda^*}(g_{\alpha\beta^*}) = 0 \,.$$

Par hypothèse cette 2-forme différentielle sera toujours supposée partout régulière.

Nous postulons dorénavant que la connexion ω est euclidienne :

(I) $\quad \nabla g_{ij} = 0$, si ∇ est la dérivation que définit ω.

Restreignons maintenant la base de $T^2(V)$ à la variété V. Localement nous prenons donc $x^{\alpha^*} = 0$, et $\hat{}$ désignant toute restriction à V, $\hat{A}_{\beta}^{\alpha^{*\prime}} = 0$.

Il est aussi permis de supposer que :

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = 0, \quad \hat{L}_{\beta\cdot\gamma^*}^{\alpha\cdot} = \hat{L}_{\beta\gamma^*}^{\alpha} = 0 \,,$$
$$\hat{L}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \hat{L}_{\gamma^*\beta}^{\alpha^*} = \hat{L}_{\beta\gamma^*}^{\alpha^*}$$
$$\hat{L}_{\beta\gamma}^{\alpha^*} = \hat{L}_{\gamma^*\beta^*}^{\alpha} \,.$$

Observons que les $\hat{L}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ définissent sur V une connexion, $\hat{L}_{\beta\gamma}^{\alpha^*}$ et $\hat{L}_{\beta^*\gamma}^{\alpha}$ des tenseurs du 3[e] ordre. Nous écrirons :

$$\hat{L}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \mathscr{L}_{\beta\gamma}^{\alpha}, \qquad \hat{L}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \dot{\Lambda}_{\beta\gamma}^{\alpha}, \qquad \hat{L}_{\beta^*\gamma}^{\alpha} = \Lambda_{\gamma\beta}^{\alpha}$$

et

$$\hat{g}_{\alpha\beta^*} = \hat{g}_{\beta^*\alpha} = \mathscr{G}_{\alpha\beta} \,.$$

V est donc munie d'un champ de formes bilinéaires symétriques de coefficients locaux $\mathscr{G}_{\alpha\beta}$, d'une connexion $\mathscr{L}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ et de deux champs de tenseurs $\dot{\Lambda}_{\beta\gamma}^{\alpha}$, $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha}$.

La condition (I) s'explicite en :

$$
(\mathrm{II}) \begin{cases}
\partial_\rho \hat{g}_{\alpha\beta^*} - \hat{\mathrm{L}}^\sigma_{\alpha\rho}\ \hat{g}_{\sigma\beta^*} - \hat{\mathrm{L}}^{\sigma^*}_{\beta^*\rho}\ \hat{g}_{\alpha\sigma^*} = 0 & (1) \\
\widehat{\partial_{\rho^*} g_{\alpha\beta}} - \hat{\mathrm{L}}^{\sigma^*}_{\beta\rho^*} \hat{g}_{\alpha\sigma^*} - \hat{\mathrm{L}}^{\sigma^*}_{\alpha\rho^*}\ \hat{g}_{\sigma\cdot\beta} = 0 & (2) \\
\hat{\mathrm{L}}^\sigma_{\alpha\cdot\rho}\ \hat{g}_{\sigma\beta^*} + \hat{\mathrm{L}}^\sigma_{\beta^*\rho}\ \hat{g}_{\alpha^*\sigma} = 0 & (3) \\
\hat{\mathrm{L}}^{\sigma^*}_{\alpha\rho}\ \hat{g}_{\sigma^*\beta} + \hat{\mathrm{L}}^{\sigma^*}_{\beta\rho}\ \hat{g}_{\alpha\sigma^*} = 0 & (4) \\
\hat{\mathrm{L}}^\sigma_{\alpha\cdot\rho^*} \hat{g}_{\sigma\beta^*} + \hat{\mathrm{L}}^\sigma_{\beta^*\rho^*} \hat{g}_{\sigma\alpha^*} = 0 & (5)
\end{cases}
$$

qu'il sera agréable d'écrire sous la forme :

$$
(\mathrm{III}) \begin{cases}
\partial_\rho \mathscr{G}_{\alpha\beta} - \mathscr{L}^\sigma_{\alpha\rho} \mathscr{G}_{\sigma\beta} - \mathscr{L}^\sigma_{\rho\beta} \mathscr{G}_{\alpha\sigma} = 0 & (6) \\
\Lambda^\sigma_{\rho\alpha} \mathscr{G}_{\sigma\beta} + \ \Lambda^\sigma_{\rho\beta} \mathscr{G}_{\sigma\alpha} = 0 & (7) \\
\dot{\Lambda}^\sigma_{\alpha\rho} \mathscr{G}_{\beta\sigma} + \ \dot{\Lambda}^\sigma_{\beta\rho} \mathscr{G}_{\alpha\sigma} = 0 & (8) \\
\dot{\Lambda}^\sigma_{\rho\alpha} \mathscr{G}_{\sigma\beta} + \ \dot{\Lambda}^\sigma_{\rho\beta} \mathscr{G}_{\sigma\alpha} = 0 & (9)
\end{cases}
$$

(la deuxième équation du système (II) étant simplement la définition de $\widehat{\partial_{\rho^*} g_{\alpha\beta}}$).

(III, 7, 8, 9) donnent des conditions d'antisymétrie :

$$
\begin{aligned}
&\text{si} \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda^\sigma_{\beta\gamma} \mathscr{G}_{\sigma\alpha}, \quad \text{alors} \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma} + \Lambda_{\beta\alpha\gamma} = 0 \\
&\text{si} \quad \dot{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma} = \dot{\Lambda}^\sigma_{\beta\gamma} \mathscr{G}_{\alpha\sigma}, \quad \text{alors} \quad \dot{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma} + \dot{\Lambda}_{\beta\alpha\gamma} = 0 \\
&\text{si} \quad \tilde{\dot{\Lambda}}_{\alpha\beta\gamma} = \dot{\Lambda}^\sigma_{\beta\gamma} \mathscr{G}_{\sigma\alpha}, \quad \text{alors} \quad \tilde{\dot{\Lambda}}_{\alpha\beta\gamma} + \tilde{\dot{\Lambda}}_{\beta\alpha\gamma} = 0 .
\end{aligned}
$$

Observons que l'on peut choisir en particulier :

$$
\Lambda_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{|g|}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathrm{U}^\delta = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathrm{U}^\delta, \qquad |g| = \det \mathscr{G}_{\alpha\beta} ,
$$

U étant un vecteur arbitraire.

La résolution du système (III, 1) est bien connue [7], mais donne pour les connexions des expressions difficilement utilisables. Il en serait de même pour (III, 7, 8). Nous avons établi antérieurement [3, *a*] que $\dot{\Lambda}^\alpha_{\beta\gamma}$ est déterminé, modulo le choix arbitraire d'un quadrivecteur V : cela suffira pour la suite.

Il peut être remarqué que l'on a :

$$
\mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma} = \widehat{\left\{ {}^{\ \alpha}_{\beta\gamma} \right\}}_g + \mathrm{S}^\alpha_{\beta\gamma}
$$

$\left\{ {}^{\ \alpha}_{\beta\gamma} \right\}_g$ désigne les symboles de Christoffel de (g_{ij}), $\mathrm{S}^\alpha_{\beta\gamma}$ est le tenseur de torsion $\frac{1}{2}(\mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma} - \mathscr{L}^\alpha_{\gamma\beta})$, que l'on peut déterminer par :

$$
h_{\beta\sigma} \mathrm{S}^\sigma_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ {}^{\ \sigma}_{\alpha\beta} \right\}_g g_{\sigma^*\gamma} - \frac{1}{2} \left\{ {}^{\ \sigma}_{\beta\gamma} \right\}_g g_{\sigma^*\alpha} - \frac{1}{4} (\partial_{\alpha^*} g_{\beta\gamma} - \partial_{\gamma^*} g_{\beta\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta^*\gamma} - \partial_\gamma g_{\beta^*\alpha})
$$

où figurent les restrictions à V, et $h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathscr{G}_{\alpha\beta} + \mathscr{G}_{\beta\alpha})$.

On peut déduire de (II, 2) que :

$$\widehat{\partial_{\alpha^*} g_{\beta\gamma}} = \sum_{\text{P. C.}} (\partial_\alpha h_{\beta\gamma}) + 2 \sum_{\text{P. C.}} \widehat{\left\{ {\sigma \atop \beta\gamma} \right\}}_g k_{\alpha\sigma} \quad , \quad k_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathscr{G}_{\alpha\beta} - \mathscr{G}_{\beta\alpha})$$

formule qui permettrait de faire tous les calculs d'approximation en supposant que les $k_{\alpha\beta}$ sont « petits » relativement aux $h_{\alpha\beta}$.

REMARQUE

Dans des publications antérieures [*3*] et dans le travail consécutif [*1*], on utilise pour $n = 4$, au lieu de $T^2(V)$ restreint à V, une sous-variété diagonale du produit V × V. Si le fibré T(V) est trivial on retrouve le cadre des structures « complexes hyperboliques » : il existe une connexion sur $T^2(V)$ pour laquelle le sous-espace horizontal en chaque point $x \in V$ est $T_x(V)$. Mais si l'on admet que V est l'espace temps muni d'une structure spinorielle, il est possible d'établir que T(V) est précisément trivial [*3*, *d*], de sorte que le cadre choisi ici est alors exactement celui des publications antérieures. Ainsi l'actuelle géométrisation peut se développer indifféremment dans les deux cadres : l'espace des états est plus familier aux physiciens.

La nullité du vecteur de torsion.

Si $|g| = |\det \| g_{ij} \| \, |$, remarquons qu'il existe sur T(V) une $2n$-forme η de composante stricte $|g|$ (on sait que T(V) est orientable). La condition (II, 1) implique que $\nabla_\rho \eta = 0$. Sur V, il existe, modulo un facteur ± 1, une n-forme μ de composante stricte $\sqrt{|g|}$. Pour que $\hat{\nabla}_\rho \mu = 0$ il faut et il suffit que $\hat{L}^\alpha_{\alpha\rho} = \hat{L}^{\alpha^*}_{\alpha^*\rho}$ ou $S^\alpha_{\alpha\rho} = 0$, comme le montre un calcul facile ($\hat{\nabla}_\rho \mu = 0$ se traduit par $\hat{\nabla}_\rho \sqrt{|g|} = 0$). Mais compte tenu de $\hat{L}^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma^*} = \hat{L}^\alpha_{\beta\gamma^*} = 0$, la condition $S^\alpha_{\alpha\rho} = 0$ équivaut encore à $\hat{\omega}^\alpha_\alpha = \hat{\omega}^{\alpha^*}_{\alpha^*}$ (*).

R^i_{jkl} désigne les composantes du tenseur de courbure de ω, ce qui nous conduit à introduire des semi-tenseurs de Ricci [*3*, *a*, *b*, *c*] :

$$\mathscr{P}_{\alpha\beta} = \hat{R}^\lambda_{\alpha\lambda\beta} \quad , \quad Q_{\alpha\beta} = \hat{R}^{\lambda^*}_{\alpha\lambda\beta} .$$

On désignera par $\tilde{\mathscr{P}}_{\alpha\beta}$ le tenseur déduit de $\mathscr{P}_{\alpha\beta}$ en remplaçant $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ par $\Lambda^\alpha_{\gamma\beta}$ et $\dot{\Lambda}^\alpha_{\beta\gamma}$ par $\dot{\Lambda}^\alpha_{\gamma\beta}$. $\tilde{Q}_{\alpha\beta}$ se déduit de $Q_{\alpha\beta}$ en remplaçant $\mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ par $\mathscr{L}^\alpha_{\gamma\beta}$.

2. ÉTUDE DIRECTE DU CAS SYMÉTRIQUE

Nous supposons maintenant que V est l'espace-temps, bien que la plupart de nos résultats soient indépendants de toute dimension et de toute signature. 0 est un indice temporel, i, j, k et tout indice latin sont des indices spatiaux.

(*) Dans un article ultérieur, on montre que ces conditions ont une signification spinorielle *(Note ajoutée au moment de l'impression)*.

Prenons $g_{\alpha\beta*} = g_{\alpha*\beta}$, alors nécessairement $\mathscr{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathscr{L}^{\alpha}_{\gamma\beta}$ et $\dot{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\dot{\Lambda}}_{\alpha\beta\gamma}$ est antisymétrique en tous ses indices.

Il est loisible de choisir $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ avec la même propriété. Il sera opportun de poser :

$$\dot{\Lambda}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \sqrt{|g|} \quad g^{\lambda\alpha}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma\delta} \quad V^{\delta}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} = \sqrt{|g|} \quad g^{\alpha\lambda}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma\delta} \quad U^{\delta},$$

U^{δ} et V^{δ} orientés dans le temps, s'ils ne sont pas isotropes.

$\Rightarrow$ Si (U^{δ}) et (V^{δ}) ne sont pas isotropes, prenons U^{δ} avec $g_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\delta} = f^2$, $U^{\alpha} = fu^{\alpha}$, (u^{α}) unitaire (il serait loisible de choisir $f = 1$).

Soit $\mathscr{P}_{\alpha\beta} = \mathscr{R}_{\alpha\beta} + \dot{\mathscr{R}}_{\alpha\beta}$ (*), où $\mathscr{R}_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de la connexion symétrique. Nous allons appliquer un principe variationnel au lagrangien $\sqrt{|g|}\,\mathscr{P}_{\alpha\beta}\mathscr{G}^{\alpha\beta}$, où $\mathscr{G}_{\alpha\beta}$ varient, $\delta\mathscr{G}_{\alpha\beta}$ nuls au bord du domaine d'intégration.

La méthode déjà utilisée dans [*3*, *b*, p. 65], conduit à poser :

$$U^{\alpha} = \sqrt{|g|}^{\omega}p^{\alpha} \qquad (\omega \text{ n'a évidemment rien de commun avec le symbole utilisé au } 1^{\circ})$$

$$V^{\alpha} = \sqrt{|g|}^{\omega}q^{\alpha} \quad , \quad g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} = \lambda^2,\ V^{\alpha} = \lambda w^{\alpha},$$

p_{α} et q_{α} ne variant pas, ω étant un scalaire fixe.

Si $g_{\alpha\beta}u^{\alpha}w^{\beta} = a$, $w^{\beta} = av^{\alpha}$, alors $g^{\alpha\beta}u_{\alpha}v_{\beta} = 1$.

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\alpha\beta}\mathscr{G}^{\alpha\beta} = (\mathscr{R}_{\alpha\beta} - 6V_{\alpha}U_{\beta})\mathscr{G}^{\alpha\beta}.$$

Définissant

$$\chi\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 6\lambda af$$

$$\chi\frac{p}{c^2} = 3(2\omega + 1)\lambda af,$$

les équations déduites du principe variationnel s'écrivent (cf. aussi [*1*]) :

$$\boxed{\mathscr{R}_{\alpha\beta} - 1/2\,\mathscr{R}g_{\alpha\beta} = \chi\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{u_{\alpha}v_{\beta} + u_{\beta}v_{\alpha}}{2} - \frac{p}{c^2}\mathscr{G}_{\alpha\beta}\right]} \tag{10}$$

Si $u^{\alpha} = v^{\alpha}$, on retrouve le schéma classique et la méthode donnée dans [*3*, *b*] mais on observera, et cette remarque est importante pour les interprétations physiques, que nous avons lorsque $u^{\alpha} = v^{\alpha}$, $a = 1$ et $\chi\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 6\lambda f$ et non $6\lambda^2$; quand $p = 0$ et $f = 1$, $\chi\rho = 6\lambda$, et il nous paraît plus intéressant de prendre ρ proportionnel à λ et non à λ^2 (en mécanique quantique la masse au repos est représentée d'une telle manière).

Revenant à $u^{\alpha} \neq v^{\alpha}$, on peut toujours poser : $v^{\alpha} = u^{\alpha} + b\sigma^{\alpha}$, avec σ orthogonal à u donc orienté dans l'espace : $g_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta} = -1$ puisque $g_{\alpha\beta}u^{\alpha}v^{\beta} = 1$. *L'adjoint de σ définira le tenseur densité de spin* [*2*].

(*) $\dot{\mathscr{R}}_{\alpha\beta} = \Lambda^{\lambda}_{\lambda\rho}\dot{\Lambda}^{\rho}_{\alpha\beta} - \Lambda^{\lambda}_{\beta\rho}\dot{\Lambda}^{\rho}_{\alpha\lambda}$.

⇒ Si (U^α) est isotrope, nous nous bornerons à (V^α) isotrope.

$$\mathcal{P} = (\mathcal{R}_{\alpha\beta} - 6\sqrt{|g|}^{2\omega}p_\alpha q_\beta)\mathcal{G}^{\alpha\beta}$$

Par variation de $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, on a maintenant :

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} - 6\sqrt{|g|}^{2\omega}p_\alpha q_\beta - \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathcal{G}_{\alpha\beta} = 0, \qquad \text{si on prend } 2\omega + 1 = 0,$$

(ce cas correspondait précédemment à $p = 0$), soit

$$S_{\alpha\beta} = -6U_\alpha V_\beta,$$

et comme U_α et V_β sont à préciser, on peut considérer U et V colinéaires, supposer que $U_\alpha V_\beta = -\xi^2 l_\alpha l_\beta$, et on obtient :

$$\boxed{S_{\alpha\beta} = \xi^2 l_\alpha l_\beta} \qquad (l_\alpha) \text{ isotrope.} \tag{11}$$

avec un deuxième membre de type « radiation pure ».

Étude du mouvement.

Envisageons d'abord le cas général (10) et prenons pour simplifier $p=0$. Selon la méthode exposée dans [6] les équations s'écrivent :

$$\underline{u^\alpha D_\alpha u_\beta = K_\beta - Ku_\beta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_\beta = -\dfrac{1}{2\rho}D_\alpha \rho b(u^\alpha\sigma_\beta + u_\beta\sigma^\alpha) & (12) \\ K = K_\beta u^\beta. \end{cases}$$

D est la dérivation covariante relative aux symboles de Christoffel de $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$.

On a $u^\beta D_\alpha u_\beta = 0$ et :

$$\underline{D_\alpha(\rho u^\alpha) = \rho K} \tag{13}$$

De $\sigma^\alpha u_\alpha = 0$ et tenant compte de (12) on déduit aisément :

$$\begin{aligned} \rho K &= -\frac{1}{2}D_\alpha(\rho b\sigma^\alpha) + \frac{\rho b}{2}(D_\alpha u^\beta)(u^\alpha\sigma_\beta + u_\beta\sigma^\alpha) \\ &= -\frac{1}{2}D_\alpha(\rho b\sigma^\alpha) + \frac{\rho b}{2}K_\beta\sigma^\beta. \end{aligned}$$

Puis, appliquant à σ le transport de Fermi :

$$D_\alpha\sigma^\alpha = -\sigma_\beta(D_\alpha u^\beta)u^\alpha = -\sigma_\beta(K^\beta - Ku^\beta) = -K_\beta\sigma^\beta.$$

$$\rho K = -\frac{\sigma^\alpha}{2}D_\alpha(\rho b) + \rho b K_\alpha\sigma^\alpha,$$

donc :

$$\rho K = D_\alpha(\rho u^\alpha) = -\frac{1}{2}(D_\alpha \rho b)\sigma^\alpha - \rho b D_\alpha \sigma^\alpha . \tag{14}$$

(12) s'écrit donc :

$$\underline{u^\alpha D_\alpha u_\beta = -\frac{1}{2\rho}(D_\alpha \rho b)u^\alpha \sigma_\beta - \frac{b}{2} D_\alpha(u^\alpha \sigma_\beta + u_\beta \sigma^\alpha) + b(D_\alpha \sigma^\alpha)u_\beta} \tag{15}$$

ce qui entraîne :

$$u^\beta D_\alpha(u^\alpha \sigma_\beta) = D_\alpha \sigma^\alpha$$

puis, s étant un paramètre réel (arc d'univers) :

$$u^\beta \frac{D\sigma_\beta}{ds} = D_\alpha \sigma^\alpha .$$

Ainsi u et $\frac{D\sigma}{ds}$ *sont orthogonaux, si σ est conservatif et réciproquement.*

Mais de $D_\gamma \sigma^\alpha = -\sigma_\beta(D_\gamma u^\beta)u^\alpha$, on déduit banalement :

$$\frac{D\sigma^\alpha}{ds} u_\alpha = -\sigma_\beta \frac{Du^\beta}{ds}$$

de sorte que : *σ et* $\frac{Du}{ds}$ *sont orthogonaux ; si σ est conservatif et réciproquement, si (bρ) est constant et (bρ) ≠ 0, σ conservatif équivaut à (ρu) conservatif, d'après* (14).

Plus particulièrement si ρ et b sont constants :

$$\underline{u^\alpha D_\alpha u_\beta = -\frac{b}{2} D_\alpha(u^\alpha \sigma_\beta + u_\beta \sigma^\alpha) + b(D_\alpha \sigma^\alpha)u_\beta} \tag{16}$$

où le terme du 2[e] membre, selon la terminologie de [*1*] est « universel » et représente la déviation due à la densité de spin.

Ce résultat s'écrit encore :

$$u^\alpha D_\alpha v_\beta + v^\alpha D_\alpha u_\beta = -k v_\beta \tag{17}$$

$$\underline{D_u v + D_v u = -kv} \tag{18}$$

formule d'une grande simplicité, « polaire » de celle que donne le schéma sans « densité de spin » : $D_u u = 0$, quand σ est conservatif.

Le changement de $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ et $\mathring{\Lambda}^\alpha_{\beta\gamma}$ respectivement en $\Lambda^\alpha_{\gamma\beta}$ et $\mathring{\Lambda}^\alpha_{\gamma\beta}$ transforme u et v respectivement en $(-u)$ et $(-v)$ et correspond donc à un schéma dont le vecteur de spin est $(-\sigma)$ opposé au premier. Si l'échantillon de matière envisagé renferme un mélange « égal » de « spins » σ et $-\sigma$, le milieu se comporte comme un milieu non polarisé du point de vue macroscopique.

Dans le cas particulier (10) il est facile d'obtenir :

$$\underline{l^\alpha D_\alpha l^\beta = -(D_\alpha l^\alpha) l^\beta - 2 l^\alpha (D_\alpha \xi^2) l^\beta} \tag{19}$$

de sorte que les trajectoires sont des géodésiques de longueur nulle.

3. LE CAS ASYMÉTRIQUE

Nous postulerons dorénavant que dans nos schémas $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ est asymétrique.

τ étant une constante, nous considérons un lagrangien « naturel » où apparaissent les semi-Ricci et les multiplicateurs S_α, car nous postulons que le vecteur de torsion de $\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ est nul, soit ([6] [7]) $\partial_\alpha \sqrt{|g|}\,\mathcal{G}^{[\alpha\rho]} = 0$:

$$\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\,\mathcal{G}^{\alpha\beta}(\mathcal{P}_{\alpha\beta} + \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha\beta} - \tau Q_{\alpha\beta} - \tau \tilde{Q}_{\alpha\beta}) - S_\rho(\partial_\alpha \sqrt{|g|}\,\mathcal{G}^{[\alpha\rho]}).$$

Nous varions les $(\sqrt{|g|}\,\mathcal{G}^{\alpha\beta})$ qui satisfont par hypothèse au système (III). *Il reste cependant un arbitraire dans le choix des $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$, $\dot\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$, ce qui laisse la possibilité d'envisager une infinité de schémas (dont un grand nombre peuvent avoir une signification physique). On doit considérer que cet arbitraire est un avantage. Il permettra à la théorie de ne pas se refermer sur elle-même comme il arrive souvent dans ce genre de tentative unitaire.*

Nous introduisons encore la notation :

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{R}}_{\alpha\beta},$$

où $\dot{\mathcal{R}}_{\alpha\beta}$ est constitué par les termes qui ne dépendent pas des $\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma}$.

Le terme $\sqrt{|g|}\,g^{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ donne la contribution de même forme que dans le cas symétrique : $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ (quand on prend comme variables les $(\sqrt{|g|}\,\mathcal{G}^{\alpha\beta})$).

Soit $(-\chi\theta_{\alpha\beta})$ la contribution de $\dfrac{\sqrt{|g|}}{2}(\dot{\mathcal{R}}_{\alpha\beta} + \tilde{\dot{\mathcal{R}}}_{\alpha\beta})$.

Dans la variation de $\tau(Q_{\alpha\beta} + \tilde{Q}_{\alpha\beta})$, considérons $\mathcal{G}^{\alpha\beta}\delta Q_{\alpha\beta}$, il y a des termes venant de la variation des $\dot\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ et de $\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma}$, considérés comme fonctions des $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$ (ou des $\sqrt{|g|}\,\mathcal{G}^{\alpha\beta}$).

$$Q_{\alpha\beta} = D_\lambda \dot\Lambda^\lambda_{\alpha\beta} - D_\beta \dot\Lambda^\lambda_{\alpha\lambda},$$

D étant la dérivation par rapport aux $\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma}$.

Dans la variation de $\dot\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$, tenant compte de la formule de Stokes et de la nullité du vecteur de torsion on trouve seulement,

$$2S^\beta_{\sigma\lambda}\,g^{\alpha\sigma}\delta\dot\Lambda^\lambda_{\alpha\beta}$$

et le terme déduit en changeant $L^\alpha_{\beta\gamma}$ en $L^\alpha_{\gamma\beta}$ donne l'opposé. *Cette contribution est nulle.*

Dans la variation de $\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ on obtient :

$$(-\dot\Lambda^\rho_{\alpha\lambda}g^{\alpha\lambda} - \dot\Lambda^\beta_{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\alpha\lambda} + \delta^\alpha_\rho\mathcal{G}^{\mu\nu}\dot\Lambda^\beta_{\mu\nu} + \dot\Lambda^\rho_{\rho\lambda}\mathcal{G}^{\alpha\beta})\partial L^\rho_{\alpha\beta}$$

ajoutant le terme venant de $\tilde{Q}_{\alpha\beta}$, tenant compte de (III (7), (8)), *on trouve encore* 0.

Finalement le principe variationnel donne les équations rigoureuses :

$$\underline{\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \chi\theta_{\alpha\beta} + \frac{\tau}{2}(Q_{\alpha\beta} + \tilde{Q}_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)} \tag{20}$$

où seul le terme $\theta_{\alpha\beta}$ est laissé à la disposition des physiciens.

4. LE CAS SYMÉTRIQUE COMME CAS « LIMITE » DU CAS ASYMÉTRIQUE

Comme dans nos études antérieures [*3*] nous écrivons que

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta} \quad (\text{avec } \det k_{\alpha\beta} \neq 0) \quad (h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha},\ k_{\alpha\beta} = -k_{\beta\alpha})$$

et nous supposons que les $k_{\alpha\beta}$ sont infiniment petits (ou du moins « petits » au sens physique) devant les $h_{\alpha\beta}$.

En première approximation : $\dot{\Lambda}^\alpha_{\beta\gamma} = \dot{\Lambda}^\alpha_{[\beta\gamma]}$ et

$$\dot{\Lambda}^\alpha_{[\beta\gamma]} = \sqrt{|h|}\, h^{\lambda\alpha}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma\delta}V^\delta, \quad \dot{\Lambda}^\alpha_{(\beta\gamma)} = \frac{\varepsilon^{\sigma\alpha\delta\lambda}}{\sqrt{|h|}}(h_{\lambda\beta}k_{\sigma\gamma} + h_{\lambda\gamma}k_{\sigma\beta})V_\delta$$

Il est loisible de choisir $\Lambda^\alpha_{[\beta\gamma]}$ de manière analogue, avec V^δ remplacé par U^δ. $\Lambda^\alpha_{(\beta\gamma)}$ est négligeable devant $\Lambda^\alpha_{[\beta\gamma]}$, par exemple de même forme que $\dot{\Lambda}^\alpha_{(\beta\gamma)}$ mais ces choix ne sont pas nécessaires.

Un calcul facile montre que si on fait varier $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, $\chi\theta_{\alpha\beta}$ peut prendre la forme :

$$\chi\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\beta v_\alpha - \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)g_{\alpha\beta}\right] + \varepsilon_{\alpha\beta},$$

en choisissant $\dot{\Lambda}^\alpha_{[\beta\gamma]}$ et $\Lambda^\alpha_{[\beta\gamma]}$ comme nous l'avons fait dans le cas symétrique.

De même $\frac{\tau}{2}(Q_{\alpha\beta} + \tilde{Q}_{\alpha\beta})$ se réduit en première approximation à

$$\tau Q_{\alpha\beta} = \tau(D_\lambda\dot{\Lambda}^\lambda_{\alpha\beta} - D_\beta\dot{\Lambda}^\lambda_{\alpha\lambda}).$$

Ainsi les équations (8), donnerons lorsque les $k_{\alpha\beta}$ tendent vers 0 et avec le choix des $\Lambda^\alpha_{[\beta\gamma]}$, $\dot{\Lambda}^\alpha_{[\beta\gamma]}$:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{R}_{(\alpha\beta)} = \chi\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\beta v_\alpha - \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)\mathcal{G}_{\alpha\beta}\right]& \\ + \tau(D_\gamma\dot{\Lambda}^\gamma_{[\alpha\beta]}) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)&\end{aligned}} \tag{21}$$

on obtient ainsi :

— Une partie symétrique identique à (10) dans sa signification.

— Une partie antisymétrique :

$$\underline{\frac{\chi}{2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)(u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) = \tau D_\gamma \dot{\Lambda}^{\gamma}_{[\alpha\beta]} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)\,.} \tag{22}$$

$\dot{\Lambda}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ étant supposé de la forme $\sqrt{|h|}\, h^{\lambda\alpha}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma\delta}U^{\delta}$, de la décomposition $v^\alpha = u^\alpha + b\sigma^\alpha$, on déduit maintenant :

$$\dot{\Lambda}^{\lambda}_{[\alpha\beta]} = \Lambda^{\lambda}_{[\alpha\beta]} + b\sigma^{\lambda}_{[\alpha\beta]}$$

Ainsi apparaissent dans (22) : un tenseur de type E. Durand, un tenseur de type Tétrode et un tenseur de type électromagnétique, selon la terminologie de Costa de Beauregard dans [2].

Nous prenons comme plus haut $\underline{p = 0}$ et nous obtenons, définissant $P_\alpha = \rho v_\alpha$:

$$\underline{\frac{\chi}{2}(u_\alpha P_\beta - u_\beta P_\alpha) = \tau D_\gamma \Lambda^{\gamma}_{[\alpha\beta]} + \tau D_\gamma \sigma^{\gamma}_{[\alpha\beta]} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)} \tag{23}$$

$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$, est de type électromagnétique.

Il y a cependant une difficulté dans ce « passage à la limite », car nous avons considéré τ comme une constante. On peut introduire une famille à un paramètre t de schémas, supposer que τ dépend de t et tend vers une limite τ_0 quand t tend vers 0 (la partie antisymétrique de $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ tendant vers 0 avec t). τ n'est pas nécessairement fonction continue de t. A-t-on le droit de supposer $\tau_0 \neq 0$? Du point de vue purement mathématique, rien ne s'y oppose, mais est-ce valable du point de vue physique ?

τ s'élimine de l'équation des trajectoires, et nous allons voir qu'il s'élimine aussi dans la définition du courant.

LE SPIN-COURANT :

$\dot{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ étant totalement antisymétrique, $D_{\gamma\lambda}\dot{\Lambda}^{\gamma\lambda}{}_{\beta} = 0$, selon un résultat facile à établir et bien connu, ainsi :

$$D_\lambda F^{\alpha\lambda} = \frac{\chi}{2} D_\lambda(u^\lambda P^\alpha - u^\alpha P^\lambda)\,.$$

Si nous considérons ρ et b comme des constantes :

$$D_\lambda F^{\alpha\lambda} = \frac{\chi}{2} b_\rho D_\lambda(u^\lambda \sigma^\alpha - u^\alpha \sigma^\lambda)\,,$$

ce qui selon l'égalité,

$$D_\gamma \sigma^\alpha = -\,\sigma_\beta(D_\gamma u^\beta)u^\alpha\,,$$

qui exprime le transport de Fermi, donne :

$$\underline{J^\alpha = \frac{\chi}{2} D_\lambda F^{\alpha\lambda} = -\frac{\chi}{2} b\rho\sigma^\lambda(D_\lambda u^\alpha) + \frac{\chi b\rho}{2} K\sigma^\alpha .} \tag{24}$$

où l'on a tenu compte de (14), puis $\underline{J^\alpha u_\alpha = 0.}$

Ainsi apparaissent un « spin-courant » et les équations de type maxwellien :

$$\begin{cases} dF_{\alpha\beta} = 0 \\ D_\lambda F^{\alpha\lambda} = J^\alpha \end{cases} \tag{25}$$

Mais ce courant n'est pas orienté dans le temps, ce n'est donc pas un observable.

Ne doit-on pas en conclure que la réduction du cas asymétrique au cas symétrique n'est qu'une approximation ?

Ce spin-courant, ajouté à un autre courant obtenu plus bas doit contribuer à déterminer un courant orienté dans le temps qui, lui, est un observable.

Notons que (16) permet d'écrire, si σ est conservatif :

$$\frac{Du}{ds} = -\frac{b}{2}\frac{D\sigma}{ds} + \frac{1}{\chi\rho} J \tag{26}$$

et :

$$\underline{J^\alpha \sigma_\alpha = 0} \tag{27}$$

car (16) implique $\sigma^\alpha \sigma^\beta D_\alpha u_\beta = 0$.

Ce « spin-courant » n'est donc pas de type « convectionnel » : *il est normal à u et σ, quand ρ et b sont constants et qu'on postule le transport de Fermi pour σ.*

5. LE TENSEUR DE SPIN EN RELATION AVEC LA TORSION D'UNE CONNEXION

Supposons encore $\mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{ {}^{\alpha}_{\beta\gamma} \right\}$ et posons :

$$\mathscr{L}'^\alpha_{\beta\gamma} = \mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma} + b\sigma^{\ \alpha}_{[\beta\gamma]}$$

$\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ étant complètement antisymétrique et les $\mathscr{L}'^\alpha_{\beta\gamma}$ étant les coefficients d'une connexion euclidienne dont le tenseur de Ricci, selon un calcul facile est tel que :

$$R'_{[\alpha\beta]} = D'_\gamma \mathscr{L}'^{\ \gamma}_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{2}\left(\partial_\beta \mathscr{L}'^\rho_{\alpha\rho} - \partial_\alpha \mathscr{L}'^\rho_{\beta\rho}\right),$$

D' est la dérivation relativement aux $\mathscr{L}'^\alpha_{\beta\gamma}$.

Le vecteur de torsion de $\mathscr{L}'^\alpha_{\beta\gamma}$ est zéro, de sorte que :

$$R'_{[\alpha\beta]} = D'_\gamma \mathscr{L}'^{\ \gamma}_{[\alpha\beta]} = D'_\gamma\left(b\sigma^{\ \alpha}_{[\beta\gamma]}\right) = D_\gamma b\sigma^{\ \alpha}_{[\beta\gamma]} .$$

Les équations (21) s'écrivent ainsi :

$$\mathscr{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}\mathscr{R}\mathscr{G}_{\alpha\beta} = \chi u_\beta P_\alpha + \tau D_\gamma \Lambda_{[\alpha\beta]} + \tau D_\gamma S'^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$$

$S'^{\alpha}_{\beta\gamma}$ est la torsion de la nouvelle connexion, $S'^{\alpha}_{\beta\gamma} = b\sigma^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$, $\mathscr{R}_{(\alpha\beta)}$ est le tenseur de Ricci de $\{ {}^{\alpha}_{\beta\gamma} \}$. On note que $\mathscr{G}^{\alpha\beta}u_\alpha v_\beta = 1$ et que $\mathscr{R} = -\chi\rho$. Nous savons que les coefficients $\Lambda^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$ sont liés à la vitesse. Il pourrait se faire que $D_\gamma \Lambda^{\gamma}_{[\alpha\beta]} = 0$ (si f est choisi de manière que les (fu_α) soient les composantes d'une forme fermée).

Certains auteurs, qui pensent que le tenseur de torsion doit nécessairement représenter la densité de spin donnent des équations qui rappellent les nôtres.

Lenoir dans [*5*], clarifiant une méthode dont le principe remonte à H. Weyl [*4*], obtient pour le couplage gravitation-champ de Dirac, des équations que nous pourrions traduire par :

$$\mathscr{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}\mathscr{R}\mathscr{G}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \tau D_\gamma S'^{\gamma}_{\alpha\beta} + k\mathscr{G}_{\alpha\beta}\,.$$

Le sens de $T_{\alpha\beta}$ n'est pas précisé. On voit des analogies et des différences.

Nous envisageons de poursuivre l'étude de ces problèmes en utilisant nos techniques spinorielles [*3*, *d*].

6. UNE SYNTHÈSE GÉOMÉTRIQUE DE LA THÉORIE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ÉLARGIE ET DE LA THÉORIE DES SCHÉMAS A DENSITÉ DE SPIN

Sans faire tendre les parties antisymétriques de $\mathscr{G}_{\alpha\beta}$ vers 0, introduisons les classiques hypothèses d'approximations. Il vient, en ne conservant que les termes prépondérants :

$$\mathscr{R}_{\alpha\beta} = \chi\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\beta v_\alpha - \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)\mathscr{G}_{(\alpha\beta)}\right] + \tau(\overline{D}_\gamma \dot{\Lambda}^{\gamma}_{\alpha\beta} - \overline{D}_\beta \dot{\Lambda}^{\lambda}_{\alpha\lambda}) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)\,. \quad (28)$$

$\overline{D}$ est la dérivation relative aux $\mathscr{L}^{\alpha}_{(\beta\gamma)}$.

La partie symétrique apporte des termes de même forme que ceux que nous avions donnés dans (3, *b*).

Quant à la partie antisymétrique, elle s'écrit :

$$\mathscr{R}_{[\alpha\beta]} = \frac{\chi}{2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)(u_\beta v_\alpha - u_\alpha v_\beta) + \tau\overline{D}_\gamma \dot{\Lambda}^{\gamma}_{[\alpha\beta]} + \frac{\tau}{2}(\overline{D}_\alpha \dot{\Lambda}^{\lambda}_{\beta\lambda} - \overline{D}_\beta \dot{\Lambda}^{\lambda}_{\alpha\lambda}) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)\,. \quad (29)$$

Définissant $F_{\alpha\beta}$ comme plus haut, on obtient en calculant $\hat{\nabla}_\lambda F^{\alpha\lambda}$, un courant somme du « spin-courant » et de celui que donne les termes :

$$- \tau\overline{D}_\gamma\dot{\Lambda}^\gamma_{[\alpha\beta]} - \frac{\tau}{2}(\overline{D}_\alpha\dot{\Lambda}^\lambda_{\beta\lambda} - \overline{D}_\beta\dot{\Lambda}^\lambda_{\alpha\lambda}) + R_{[\alpha\beta]} ;$$

soit en définissant :

$$\Sigma_\alpha = \frac{1}{2}\dot{\Lambda}^\lambda_{\alpha\lambda}$$

$$\dot{\Lambda}^\alpha_{\beta\gamma} = U^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta\Sigma_\gamma ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} dF_{\alpha\beta} = 0 \\ \overline{D}_\lambda F^{\lambda\beta} = J^\alpha + I^\alpha, \quad I_\alpha = - \tau\overline{D}_\rho\overline{D}_\gamma\mathscr{G}^{\rho\sigma}U^\gamma_{[\sigma\alpha]} + \overline{D}_\rho(\mathscr{R}^{[\rho\sigma]}\mathscr{G}_{\sigma\alpha}) , \end{array}\right. \tag{30}$$

la deuxième formule de (30) étant approchée.

S_α peut s'interpréter comme le vecteur de torsion d'une connexion avec mêmes géodésiques :

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \mathscr{L}^\gamma_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}\delta^\gamma_\alpha S_\beta \qquad ([6]\ [7])$$

et on peut écrire (21) :

$$(\mathscr{R}_{(\alpha\beta)})_\Gamma = \chi\rho\left(u_\beta v_\alpha - \frac{1}{2}\mathscr{G}_{\alpha\beta}\right) + \tau D_\gamma\dot{\Lambda}^\gamma_{[\alpha\beta]} ,$$

tandis que $(\mathscr{R}_{[\alpha\beta]})_\Gamma$ serait proportionnel au tenseur de type électromagnétique.

Prenons maintenant $u^\alpha = v^\alpha$, de sorte que le « spin-courant » disparaît et profitons de cette circonstance plus simple pour choisir l'ordre de τ relativement à $\frac{1}{c}$. $\mathscr{R}_{(\alpha\beta)}$ est au moins d'ordre $\frac{1}{c^2}$, également $\mathscr{R}_{[\alpha\beta]}$. Dans $\dot{\Lambda}^\alpha_{\beta\gamma}$ intervient le facteur λ d'ordre $\frac{1}{c^2}$ et un autre facteur d'ordre $\frac{1}{c^2}$ au moins. Si l'on admet que la gravitation reste prépondérante on pourrait choisir $\tau = 0(1)$. $F_{\alpha\beta}$ serait donc en première approximation identifié à $\mathscr{R}_{[\alpha\beta]}$. Aucun courant ne viendrait des termes d'ordre 2 de $\mathscr{R}_{[\alpha\beta]}$, ni des termes prépondérants contenant τ comme on peut le voir. Le courant I_α d'ordre 4 en $\left(\frac{1}{c}\right)$ viendrait donc de $\mathscr{R}_{[\alpha\beta]}$. Si on suppose $b = 0\left(\frac{1}{c^k}\right)$, J_α serait $0\left(\frac{1}{c^{3+k}}\right)$ au plus, puisque $D_\alpha u^\beta$ est $0\left(\frac{1}{c}\right)$ au plus.

Mais $F_{\alpha\beta}$ pourrait dans nos équations être muni d'un coefficient arbitraire ce qui fait que ces ordres de grandeurs n'ont qu'une signification relative (prendre par exemple $F_{\alpha\beta} = c^2(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$, on multiplie le courant créé par le champ par c^2).

L'idée de définir le champ électromagnétique comme proportionnel à $(\partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$ devrait donc être retenue.

REMARQUES.

1° Au lieu de considérer les hypothèses classiques d'approximations, avec des vitesses faibles et des champs faibles, on peut simplement considérer que les $k_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées sont petits devant $h_{\alpha\beta}$. Selon [7] on obtient:

$$\mathscr{R}_{[\alpha\beta]} \simeq \tilde{\nabla}_\rho S^\rho_{\alpha\beta}, \qquad \text{(modulo } \varepsilon^3, \varepsilon \text{ « petit paramètre »),}$$

de sorte que dans ce cas le courant I_α pourrait s'exprimer par :

$$\tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\nabla}_\rho (S^{\rho\lambda}{}_\beta - \tau U^{\rho\lambda}{}_\beta),$$

avec peut-être une ambiguïté dans l'élévation des indices.

L'antisymétrie de $S^\alpha_{\beta\gamma}$ et de $U^\alpha_{\beta\gamma}$ entraîne que : $\nabla_\alpha I^\alpha = 0$ (modulo ε^3).

2° Dans l'article (3, *b*) nous avons obtenu dans le cas asymétrique des résultats assez voisins quoique différents. Le lagrangien choisi ici, postule des « symétries internes » qui permettent d'écrire les équations de champ (20) sans approximations. Le tenseur de type électromagnétique et le courant étaient liés dans (3, *b*) au tenseur adjoint de $\mathscr{R}_{[\alpha\beta]}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CLERC, *Thèse*, Toulouse, 1972.

[2] O. COSTA DE BEAUREGARD, *Théorie de la Relativité Restreinte*, Masson, Paris, 1949.

[3] A. CRUMEYROLLE, a) *Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse*, 1964; b) *Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse*, 1967; c) Thèse, Paris, 1961, *Riv. Mat. Univ. Parma*, 1964; d) *Annales de l'I. H. P.*, Section A, vol. XIV, n° 4, 1971 et vol. XVI, n° 3, 1972.

[4] H. WEYL, A remark on the coupling of gravitation and electron, *Phys. Review*, vol. 77, n° 5, 1950.

[5] M. LENOIR, *CRAS, Paris*, t. **273**, 15 novembre 1971, p. 943-946.

[6] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

[7] M. A. TONNELAT, *Théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Gauthier-Villars, Paris.

(Manuscrit reçu le 10 décembre 1973).