

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-GUY DUBOIS

JEAN-PAUL DUFOUR

La théorie des catastrophes. II. Dynamiques gradientes à une variable d'état

Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, n° 2 (1974), p. 135-151

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_2_135_0

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

La théorie des catastrophes.

II. Dynamiques gradientes

à une variable d'état (*)

par

Jean-Guy DUBOIS et Jean-Paul DUFOUR ()**

Département des Sciences Pures,
Université du Québec, Rimouski, P. Qué., Canada

RÉSUMÉ. — Ce travail donne la classification locale des ensembles catastrophes de bifurcation pour les dynamiques de type gradient à une variable d'état et à quatre variables de contrôle. Après avoir caractérisé de façon simple les bonnes fonctions, nous montrons que presque toutes les fonctions qui décrivent ces dynamiques sont bonnes. Le théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange nous permet d'isoler six types canoniques locaux pour les bonnes fonctions. La même technique est utilisée pour démontrer que les ensembles catastrophes locaux des bonnes fonctions sont qualitativement ceux correspondant à chacun de ces six types. Les morphologies que présentent ces ensembles sont stables.

SUMMARY. — This work gives the local classification of bifurcation catastrophe sets for the gradient dynamics described by one state and four control variables. After a characterization of the good functions in a simple manner, we show that almost all the functions which describe these dynamics are good functions. By the Weierstrass-Malgrange preparation theorem, we obtain six local canonical forms of good functions. The same technique is used to demonstrate that the good functions local catastrophe sets are qualitatively those which correspond to each of these six forms. The morphologies presented by these sets are stable.

(*) Travail subventionné partiellement par le Conseil National de Recherches du Canada.

(**) Présente adresse : Institut de Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

1. INTRODUCTION

Il nous paraît utile de décrire, de façon simple mais rigoureuse, les principaux aspects de la théorie des catastrophes de René Thom, vu les nombreuses applications [1] [2] aux sciences biologiques [3] [4], humaines (par exemple, à la linguistique [5]) et physiques [6] [7] [8] auxquelles elle est promise. Le but de ce travail est de fournir, à l'utilisateur éventuel de cette théorie, un exposé complet de la classification des ensembles catastrophes de bifurcation dans le cadre des dynamiques de type gradient à une variable d'état.

Pour les dynamiques gradientes à n variables d'état et contrôlées par \mathbb{R}^4 , R. Thom a donné une classification exhaustive des ensembles catastrophes élémentaires. Cette classification met en jeu un ensemble dense de fonctions potentielles, les bonnes fonctions. Lorsqu'il n'y a qu'une variable d'état, on peut caractériser les bonnes fonctions de manière simple. La densité de ces bonnes fonctions se démontre par un argument de transversalité ; pour cela, nous avons utilisé la technique de H. Whitney de la référence classique [9]. Ainsi, plutôt que de parler de « topologie C^∞ de Whitney », nous parlons de (r, ε) -approximations. Le théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange [10] nous permet d'isoler six types de modèles locaux pour ces bonnes fonctions. La classification donnée des ensembles catastrophes évite l'emploi de la notion de déploiement universel au sens de Thom [1] en généralisant la technique utilisée dans la référence [6]. Toutefois, nous indiquerons à la fin, à l'aide de cette notion, la situation pour un nombre quelconque de variables d'état.

2. LE MODÈLE

Les systèmes physiques qui se conforment à une dynamique gradiente à une variable d'état se décrivent de la manière suivante [6]. Le modèle comprend un espace de contrôle C qui est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^4 , un espace d'état U qui est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R} et où, pour chaque contrôle c dans C , on a une fonction potentielle V_c définie sur U et à valeurs réelles. Pour un contrôle fixé c , les états possibles du système sont les minima de V_c . Un tel système est donc décrit par une fonction V de $C \times U$ dans \mathbb{R} qui à (c, x) associe $V(c, x) = V_c(x)$. De manière naturelle, nous supposons que V est différentiable de classe C^∞ . Alors si c est assez proche de c' , les fonctions V_c et $V_{c'}$ seront aussi proches que l'on veut, ainsi qu'un certain nombre de leurs dérivées partielles, au moins sur un voisinage compact de 0 dans U .

Supposons que la fonction V_{c_0} n'admette pas de points critiques dégé-

nérés et soit x_0 un minimum de V_{c_0} : on a $\frac{\partial V}{\partial x}(c_0, x_0) = 0 < \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(c_0, x_0)$.

Alors le théorème des fonctions implicites nous permet d'écrire que l'équation implicite $\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = 0$ est équivalente à $x = g(c)$, où g est une fonction de classe C^∞ définie sur un voisinage ouvert de c_0 avec $x_0 = g(c_0)$. De plus, pour c proche de c_0 , $(c, g(c))$ est proche de (c_0, x_0) . On a donc

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(c, g(c)) > 0$$

et $g(c)$ est un minimum de V_c . Pour c proche de c_0 , la fonction V_c admet un minimum x qui est non seulement voisin de x_0 mais encore qui s'exprime continûment en fonction de c . Dans les systèmes physiques étudiés, cela se traduit par le fait qu'une petite variation du contrôle c_0 amène une petite variation de l'état x_0 .

Par contre, si V_{c_0} admet des points critiques dégénérés, des phénomènes « catastrophiques » peuvent se produire. Prenons par exemple

$$V(c, x) = V(c_1, c_2, c_3, c_4, x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + c_1x.$$

Pour $c_0 = (2, 0, 0, 0)$, V_{c_0} admet le point critique dégénéré $x_0 = 1$. Pour c très proche de c_0 avec $c_1 < 2$, le graphe de V_c est représenté sur la figure 1.

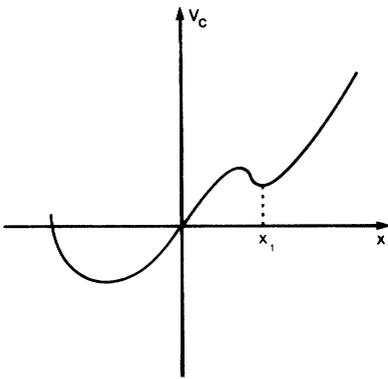


FIG. 1.

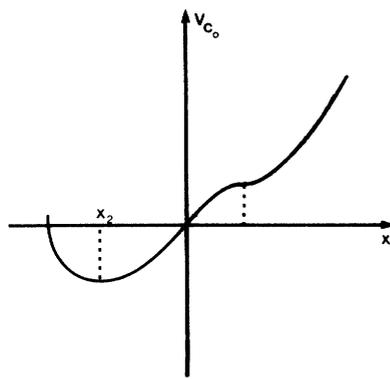


FIG. 2.

Si l'état du système est x_1 , une variation du contrôle de c à c_0 détruit le minimum x_1 (cf. figure 2) : le système va brusquement changer d'état pour adopter le minimum x_2 .

DÉFINITION 1. — Nous disons que c , point de l'espace de contrôle C ,

est un point catastrophe si V_c admet un point critique dégénéré. L'ensemble des points catastrophes est appelé « ensemble catastrophe », c'est l'ensemble

$$K_V = \left\{ c \in C; \frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(c, x) = 0, x \in U \subset \mathbb{R} \right\}.$$

Dans la terminologie introduite par R. Thom, nous avons défini-là les points catastrophes de bifurcation. Lorsque c varie au voisinage d'une telle valeur, le champ de vecteurs $X_c = -\text{grad } V_c$ change de type topologique. Suivant le système physique étudié (voir la référence [J]), on pourra être amené à considérer un autre type de points catastrophes, les points catastrophes de conflit : ce sont les points $c \in C$ où V_c admet deux valeurs critiques identiques.

3. LES BONNES FONCTIONS

Par la suite, la lettre V , avec ou sans indices, désignera toujours une fonction de classe C^∞ de $C \times U$ dans \mathbb{R} . Pour une telle fonction, nous définissons les conditions (i), $i = 1, 2, \dots, 6$, par les éq. (1), (2) et (i, a, b), $i = 3, 4, 5, 6$:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) \neq 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = 0 \neq \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(c, x); \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(c, x) = 0 \neq \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(c, x), \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_i}(c, x) \neq 0 \text{ pour l'un au moins des indices } i = 1, \dots, 4; \quad (3b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(c, x) = \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(c, x) = 0 \neq \frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(c, x), \quad (4a)$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_i}(c, x) & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_j}(c, x) \\ \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial c_i}(c, x) & \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial c_j}(c, x) \end{bmatrix} \neq 0 \text{ pour au moins un couple } (i, j); \quad (4b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = \dots = \frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(c, x) = 0 \neq \frac{\partial^5 V}{\partial x^5}(c, x), \quad (5a)$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_i}(c, x) & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_j}(c, x) & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_k}(c, x) \\ \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial c_i}(c, x) & \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial c_j}(c, x) & \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial c_k}(c, x) \\ \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial c_i}(c, x) & \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial c_j}(c, x) & \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial c_k}(c, x) \end{bmatrix} \neq 0 \text{ pour au moins un triplet } (i, j, k); \tag{5b}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = \dots = \frac{\partial^5 V}{\partial x^5}(c, x) = 0 \neq \frac{\partial^6 V}{\partial x^6}(c, x), \tag{6a}$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_1}(c, x) & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_4}(c, x) \\ \dots & & \\ \frac{\partial^5 V}{\partial x^4 \partial c_1}(c, x) & \dots & \frac{\partial^5 V}{\partial x^4 \partial c_4}(c, x) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{6b}$$

DÉFINITION 2. — Nous dirons qu'une fonction V est une bonne fonction si elle vérifie en chaque point (c, x) dans $C \times U$ l'une des conditions (i), $i = 1, 2, \dots, 6$.

DÉFINITION 3. — Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ d'un ouvert W de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et ε une fonction continue strictement positive de W dans \mathbb{R} . Nous dirons que g est une (r, ε) -approximation de f si $|f(p) - g(p)| < \varepsilon(p)$ pour tout p dans W et si l'on a des inégalités analogues pour chaque dérivée partielle d'ordre inférieur ou égal à r .

PROPOSITION 1. — Toute fonction V_0 peut être approchée d'aussi près que l'on veut par une bonne fonction, i. e. pour tout entier r et toute fonction continue strictement positive ε de $C \times U$ dans \mathbb{R} , il existe une bonne fonction V qui est une (r, ε) -approximation de V_0 .

Démonstration. — Pour la démonstration de cette proposition, nous aurons à utiliser le théorème 11A de Whitney [9], qui est en fait un théorème de transversalité. Pour cela, nous avons d'abord à construire une « stratification » de \mathbb{R}^{22} . Posons

$$\bar{V} = \left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^6 V}{\partial x^6}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_1}, \dots, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_4}, \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial c_1}, \dots, \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial c_4}, \dots, \frac{\partial^5 V}{\partial x^4 \partial c_1}, \dots, \frac{\partial^5 V}{\partial x^4 \partial c_4} \right].$$

Alors tout point $\bar{V}(c, x)$ est un point

$$(a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, \dots, b_4, d_1, \dots, d_4, e_1, \dots, e_4, f_1, \dots, f_4)$$

de \mathbb{R}^{22} . Une hypersurface S' de \mathbb{R}^{22} est un sous-ensemble de \mathbb{R}^{22} qui vérifie la propriété suivante : pour tout point p de S' , il existe un voisinage ouvert W de p dans \mathbb{R}^{22} et des fonctions de classe C^∞ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ de W dans \mathbb{R} dont les gradients sont indépendants, tels que $p' \in W \cap S'$ équivaut à

$$\gamma_1(p') = \dots = \gamma_n(p') = 0.$$

Une telle hypersurface S' est dite de codimension n . Nous dirons que S est une « stratification » de \mathbb{R}^{22} de codimension m si S est une réunion d'hypersurfaces disjointes S_1, \dots, S_k avec

$$m = \inf \{ \text{codimension } (S_i)_{i=1,2,\dots,k} \}$$

et telles que chaque ensemble $S_1 \cup \dots \cup S_i$ est fermé dans \mathbb{R}^{22} .

Dans la situation considérée, nous avons à construire une « stratification » $S = \bigcup_{i=1}^5 S_i$. Nous prenons pour S_1 l'ensemble des points (a_1, a_2, \dots, f_4) de \mathbb{R}^{22} qui vérifient $a_1 = a_2 = b_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$. Pour S_2 nous prenons les points de \mathbb{R}^{22} tels que $a_i = 0, i = 1, 2, 3$, l'un des b_i est non-nul et

$$\det \begin{bmatrix} b_i & b_j \\ d_i & d_j \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

pour tout couple $(i, j), i, j = 1, 2, 3, 4$. Pour S_3 nous prenons les points de \mathbb{R}^{22} tels que $a_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$, la condition (7) n'est pas vérifiée et

$$\det \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ d_i & d_j & d_k \\ e_i & e_j & e_k \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

pour tout triplet (i, j, k) . Pour S_4 nous prenons les points tels que

$$a_i = 0, i = 1, 2, \dots, 5,$$

(8) n'est pas vérifiée et

$$\det \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_4 \\ \vdots & & \\ f_1 & \dots & f_4 \end{bmatrix} = 0. \quad (9)$$

Pour S_5 nous imposons que $a_i = 0, i = 1, 2, \dots, 6$ et que le déterminant (9) soit non-nul.

De manière évidente, S_1 est une hypersurface de codimension 6. Soit

$$p = (a_1, a_2, \dots, f_4)$$

un point de S_2 . On a par exemple $b_1 \neq 0$ et ceci est encore vrai sur tout un voisinage W de p . Alors sur $W \cap S_2$, la condition (7) s'écrit

$$d_2 = b_2 d_1 / b_1, \quad d_3 = b_3 d_1 / b_1, \quad d_4 = b_4 d_1 / b_1. \quad (10)$$

Ceci suffit pour affirmer que S_2 est une hypersurface de codimension 6. Soit p un point de S_3 ; on a, par exemple,

$$\det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} \neq 0. \tag{11}$$

Alors la condition (8) devient

$$\det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_4 \end{bmatrix} = 0. \tag{12}$$

Autrement dit, cette condition devient équivalente à

$$e_3 = f(b_1, b_2, \dots, e_2) \quad \text{et} \quad e_4 = g(b_1, b_2, \dots, e_2),$$

où f et g sont des fonctions de classe C^∞ sur tout un voisinage de p ; d'où S_3 est une hypersurface de codimension 6. Soit p un point de S_4 ; on a, par exemple,

$$\det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ \vdots & & \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Alors la condition (9) devient équivalente à $f_4 = h(b_1, b_2, \dots, f_3)$, où h est une fonction de classe C^∞ sur tout un voisinage de p ; d'où S_4 est une hypersurface de codimension 6. Enfin il est évident que S_5 est encore une

hypersurface de codimension 6. Il est alors facile de voir que $S = \bigcup_{i=1}^5 S_i$ est toujours fermé et que S est bien une stratification de codimension 6.

Adaptant le théorème 11A de la référence [9] à notre cas, nous avons l'énoncé suivant. Soient V_0 une fonction de classe C^∞ de $C \times U$ dans \mathbb{R} et S une « stratification » de codimension supérieure ou égale à 6 dans \mathbb{R}^{22} , soient r un nombre entier et ε une fonction continue strictement positive de $C \times U$ dans \mathbb{R} , alors il existe une (r, ε) -approximation V de V_0 telle que

$$\bar{V}(C \times U) \cap S = \emptyset. \tag{14}$$

Comme poser (14) est équivalent à dire que V est une bonne fonction, la proposition est démontrée.

PROPOSITION 2. — Sous une perturbation assez petite, toute bonne fonction V_0 reste une bonne fonction, i. e. il existe un entier r et une fonction continue strictement positive ε de $C \times U$ dans \mathbb{R} tels que toute (r, ε) -approximation de V_0 soit une bonne fonction.

Démonstration. — Recouvrons $C \times U$ par une famille de boules ouvertes $(U_i)_{i \in I}$ telles que \bar{U}_i , l'adhérence de U_i , soit incluse dans $C \times U$ et soit $(g_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité subordonnée [11] à $(U_i)_{i \in I}$. Rappelons

que cela veut dire que les fonctions g_j sont des fonctions de classe C^∞ de $C \times U$ dans \mathbb{R} telles que

- i) $g_j(p) \geq 0$ pour tout p dans $C \times U$ et tout j dans J ;
 - ii) L'ensemble $\text{supp } g_j = \{p \in C \times U; g_j(p) \neq 0\}$, le support de g_j , est un compact inclus dans l'un des U_i ;
 - iii) Tout p dans $C \times U$ admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de $\text{supp } g_j$;
- iv) Pour tout p dans $C \times U$, $\sum_j g_j(p) = 1$.

Sur \mathbb{R}^{22} nous prenons la norme définie par

$$\|(a_1, a_2, \dots, f_4)\| = \sup \{|a_1|, |a_2|, \dots, |f_4|\}.$$

Nous avons $\bar{V}_0(\bar{U}_i) \cap S = \emptyset$, car V_0 est une bonne fonction et alors $\bar{V}_0(C \times U) \cap S$ est vide. $\bar{V}_0(\bar{U}_i)$ est un compact et S est un fermé de \mathbb{R}^{22} . Il existe alors un nombre strictement positif ε_i tel que, pour tout $p \in \bar{U}_i$ et tout $s \in S$,

$$\|\bar{V}_0(p) - s\| > \varepsilon_i. \quad (15)$$

Pour chaque $i \in I$, nous choisissons un tel ε_i ; pour chaque $j \in J$, nous sélectionnons un i_j tel que $\text{supp } g_j \subset U_{i_j}$; et nous posons $\varepsilon_j \equiv \varepsilon_{i_j}$. Alors on définit une fonction ε de classe C^∞ de $C \times U$ dans \mathbb{R} par

$$\varepsilon(p) = \sum_{j \in J} g_j(p) \varepsilon_j. \quad (16)$$

Cette fonction est bien définie car iii) nous assure que pour tout p on a

$$g_j(p) = 0,$$

sauf pour un nombre fini d'indices j . Soit p un tel point et j_1, j_2, \dots, j_n les indices j pour lesquels $g_j(p) \neq 0$. D'après la relation (15) et la définition des ε_j , on a $\|\bar{V}_0(p) - s\| > \varepsilon_{j_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, pour tout $s \in S$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \|\bar{V}_0(p) - s\| &> \sup_k \varepsilon_{j_k} = \left(\sum_j g_j(p) \right) \sup_k \varepsilon_{j_k} \\ &= \sum_k g_{j_k}(p) \sup_k \varepsilon_{j_k} \geq \sum_k (g_{j_k}(p) \varepsilon_{j_k}) = \sum_j g_j(p) \varepsilon_j = \varepsilon(p), \end{aligned} \quad (17)$$

$k = 1, 2, \dots, n$, pour tout $s \in S$.

Soit V une $(6, \varepsilon)$ -approximation quelconque de V_0 . Pour tout p , on a

$$|V(p) - V_0(p)| < \varepsilon(p)$$

et des inégalités analogues pour les dérivées partielles d'ordre ≤ 6 . On peut ainsi écrire $\|\bar{V}_0(p) - \bar{V}(p)\| < \varepsilon(p)$. Combinant cette relation et (17),

on arrive à $||\bar{V}(p) - s|| \neq 0$, pour tout $s \in S$. Ceci étant vrai pour tout p dans $C \times U$, on a $\bar{V}(C \times U) \cap S = \emptyset$; ainsi V est une bonne fonction. Ce qui démontre la proposition 2.

Aux vues des propositions 1 et 2, presque toutes les fonctions V sont de bonnes fonctions. Ce sont les ensembles catastrophes de ces fonctions que nous allons classifier par la suite.

4. MODÈLES CANONIQUES LOCAUX POUR LES BONNES FONCTIONS

Nous définissons les fonctions $V_i, i = 1, 2, \dots, 6$, que nous appellerons « potentiels canoniques », par

$$V_1(c, x) = x, \tag{18a}$$

$$V_2(c, x) = x^2, \tag{18b}$$

$$V_3(c, x) = \frac{1}{3}x^3 + c_1x, \tag{18c}$$

$$V_4(c, x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_1x, \tag{18d}$$

$$V_5(c, x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}c_3x^3 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_1x, \tag{18e}$$

$$V_6(c, x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}c_4x^4 + \frac{1}{3}c_3x^3 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_1x. \tag{18f}$$

La fonction V étant donnée, nous noterons \bar{V} la fonction de $C \times U$ dans $C \times \mathbb{R}$ qui associe à (c, x) la valeur $(c, V(c, x))$.

DÉFINITION 4. — Si f et g sont deux fonctions de classe C^∞ d'ouverts de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m définies respectivement au voisinage de x et y , on dira que f est localement équivalente à g aux voisinages de x et de y s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{f} & O_1 \\ \downarrow H & & \downarrow K \\ U_2 & \xrightarrow{g} & O_2, \end{array} \tag{19}$$

où U_1, U_2, O_1 et O_2 sont des voisinages respectifs de $x, y, f(x)$ et $g(y)$, H et K sont des difféomorphismes de classe C^∞ tels que $H(x) = y$. On notera $f, x \sim g, y$.

PROPOSITION 3. — La fonction V vérifie les conditions (i), $i = 1, 2, \dots, 6$, en (c, x) si et seulement si $\bar{V}, (c, x) \sim \bar{V}_i, 0$.

Remarque. — Si $\tilde{V}, (c, x) \sim \tilde{V}_i, 0$, nous dirons que V est du type V_i au voisinage de (c, x) . La proposition 3 affirme qu'une bonne fonction est, au voisinage de chaque point (c, x) , de l'un des types $V_i, i = 1, 2, \dots, 6$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3. — Sans perte de généralité, posons $(c, x) = 0$. Si $\tilde{V}, 0 \sim \tilde{V}_i, 0$, on peut écrire un diagramme commutatif du type (19). En posant

$$H(c, x) = (\bar{h}(c, x), h(c, x)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{U} \quad \text{et} \quad K(c, y) = (\bar{k}(c, y), k(c, y)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R},$$

on a

$$\bar{h}(c, x) = \bar{k}(c, V(c, x)), \quad (20a)$$

$$k(c, V(c, x)) = V_i(\bar{h}(c, x), h(c, x)); \quad (20b)$$

donc

$$k(c, V(c, x)) = V_i(\bar{k}(c, V(c, x)), h(c, x)). \quad (21)$$

Utilisant le fait que H et K sont des difféomorphismes et dérivant un certain nombre de fois les deux membres de (21) par rapport à x et c_j , on démontre que V vérifie les conditions (i) en 0.

Démontrons la réciproque dans le cas $i = 3$; la généralisation à i quelconque est évidente. Pour cela, nous supposons que V vérifie les conditions (3a) en 0 et que, par exemple, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_1}(0) \neq 0$. Nous pouvons encore

supposer que $V(0) = \frac{\partial V}{\partial c_1}(0) = 0$, quitte à remplacer $V(c, x)$ par

$$V'(c, x) = V(c, x) - V(0) - c_1 \frac{\partial V}{\partial c_1}(0).$$

Nous posons $f(c, x, y) = V(c, x) - y$, alors

$$f(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = 0 \neq \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0). \quad (22)$$

Le théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange (voir l'appendice de [6]) nous permet d'écrire, sur un voisinage de 0,

$$V(c, x) - y = g(c, x, y)(x^3 + g_1(c, y)x^2 + g_2(c, y)x + g_3(c, y)), \quad (23)$$

où les fonctions g, g_1, g_2, g_3 sont de classe C^∞ sur un voisinage de 0, avec $g(0) \neq 0$. Posant $y = V(c, x)$, l'éq. (23) devient

$$x^3 + g_1(c, V(c, x))x^2 + g_2(c, V(c, x))x + g_3(c, V(c, x)) = 0 \quad (24)$$

sur un voisinage de 0. Soient

$$h(c, x) = x + \frac{1}{3}g_1(c, V(c, x)), \quad (25a)$$

$$h^1(c, x) = \frac{1}{3}g_2(c, V(c, x)) - \frac{1}{9}[g_1(c, V(c, x))]^2, \quad (25b)$$

$$k(c, y) = -\frac{1}{3}g_3(c, y) + \frac{1}{9}g_1(c, y)g_2(c, y) - \frac{2}{81}[g_1(c, y)]^3, \quad (25c)$$

$$k^1(c, y) = \frac{1}{3}g_2(c, y) - \frac{1}{9}[g_1(c, y)]^2. \quad (25d)$$

Alors l'éq. (24) devient

$$k(c, V(c, x)) = \frac{1}{3}[h(c, x)]^3 + h^1(c, x)h(c, x), \quad (26)$$

et on peut écrire un diagramme commutatif du type (19) :

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\tilde{V}} & O_1 \\ \downarrow H & & \downarrow K \\ U_2 & \xrightarrow{\tilde{V}^3} & O_2, \end{array} \quad (27)$$

où

$$H(c, x) = (h^1(c, x), c_2, c_3, c_4, h(c, x))$$

et

$$K(c, y) = (k^1(c, y), c_2, c_3, c_4, k(c, y)).$$

Il reste à vérifier que H et K ont des jacobiens non-nuls en 0. On constate de suite que $\frac{\partial h^1}{\partial x}(0) = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(0) = 1$; il reste donc à voir, dans le cas de H,

que $\frac{\partial h^1}{\partial c_1}(0) \neq 0$. Comme $\frac{\partial h^1}{\partial c_1}(0) = \frac{1}{3} \frac{\partial g_2}{\partial c_1}(0)$ et que des dérivations suc-

cessives des deux membres de (23) amènent à $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_1}(0) = g(0) \frac{\partial g_2}{\partial c_1}(0)$,

on a $\frac{\partial h^1}{\partial c_1}(0) \neq 0$. Dans le cas de K, on montre que $\frac{\partial k}{\partial c_1}(0) = 0$ et que

$$\frac{\partial k^1}{\partial c_1}(0) = \frac{\partial h^1}{\partial c_1}(0) ;$$

donc il suffit de vérifier que $\frac{\partial k}{\partial y}(0)$ est non-nul. Le fait que

$$\frac{\partial k}{\partial y}(0) = -\frac{1}{3} \frac{\partial g_3}{\partial y}(0) = \frac{1}{3g(0)} \neq 0$$

achève la démonstration.

Remarque. — Au lieu de démontrer la réciproque directement, nous aurions pu rappeler l'article de B. Morin [12] où l'on voit qu'une certaine condition (α) équivaut à une condition (β) : on remarquerait que si V vérifie (i) en 0, alors \tilde{V} vérifie une condition (α) ; puis, que \tilde{V} vérifie la condition (β) correspondante revient à dire que $\tilde{V}, 0 \sim \tilde{V}_i, 0$.

5. CLASSIFICATION DES ENSEMBLES CATASTROPHES

Les ensembles catastrophes des potentiels canoniques V_1 et V_2 sont vides. Ceux de V_i , $i = 3, 4, 5, 6$, sont déterminés respectivement par (28), (29a, b), (30a, b), (31a, b):

$$c_1 = 0 ; \quad (28)$$

$$x^3 + c_2x + c_1 = 0, \quad (29a)$$

$$3x^2 + c_2 = 0 ; \quad (29b)$$

$$x^4 + c_3x^2 + c_2x + c_1 = 0, \quad (30a)$$

$$4x^3 + 2c_3x + c_2 = 0 ; \quad (30b)$$

$$x^5 + c_4x^3 + c_3x^2 + c_2x + c_1 = 0, \quad (31a)$$

$$5x^4 + 3c_4x^2 + 2c_3x + c_2 = 0. \quad (31b)$$

On les appelle respectivement le pli, la cuspside, la queue d'aronde et le papillon. Ces noms proviennent des morphologies associées à ces ensembles catastrophes (à l'ensemble des points critiques dans le cas du pli) ou à l'une de leurs sections remarquables. On retrouvera dans le livre de Thom [7] la plupart des tracés qualitatifs de ces ensembles catastrophes dits élémentaires. Indiquons aussi les travaux de T. Poston et A. E. R. Woodcock [13] sur la géométrie des catastrophes élémentaires. Nous allons maintenant montrer, qu'à un difféomorphisme local de \mathbb{R}^4 près, les bonnes fonctions n'admettent localement que l'un de ces quatre types d'ensembles catastrophes.

PROPOSITION 4. — Si V est du type V_i en (c, x) , il existe un difféomorphisme δ d'un voisinage de c dans \mathbb{R}^4 sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^4 , avec $\delta(c) = 0$, qui échange les ensembles catastrophes de V et de V_i .

Démonstration. — Sans perte de généralité, prenons $(c, x) = 0$. Dans le cas $i = 1$ et $i = 2$, $\frac{\partial V}{\partial x}$ ou $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ sont non-nuls sur tout un voisinage de 0: il n'y a pas de points catastrophes au voisinage de 0. Raisonnons dans les cas $i > 2$. Dans tous ces cas, l'un au moins des $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_j}(0)$ est non-nul, nous supposons que c'est $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_4}(0)$. Ceci implique que l'équation implicite $\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = 0$ est équivalente à $c_4 = p(c_1, c_2, c_3, x)$ sur un voisinage de 0, où p est une fonction de classe C^∞ nulle en 0. Pour une telle fonction p ,

nous pouvons définir les conditions (1), (2), . . . , (5) exactement comme nous l'avons fait pour les fonctions V. De même, nous notons \tilde{p} la fonction de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 définie par $\tilde{p}(c_1, c_2, c_3, x) = (c_1, c_2, c_3, p(c_1, c_2, c_3, x))$, et nous définissons les fonctions canoniques p_i par les mêmes formules que V_i , $i = 1, 2, \dots, 5$.

On a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} / \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_4}. \tag{32}$$

En dérivant les deux membres de cette formule, on prouve que si V vérifie les conditions (i), $i > 2$, en 0 alors p vérifie les conditions (i - 1) en 0. Comme dans la démonstration de la proposition 3, il en résulte que $\tilde{p}, 0 \sim \tilde{p}_{i-1}, 0$, et l'on peut écrire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\tilde{p}} & O_1 \\ \downarrow H & & \downarrow K \\ U_2 & \xrightarrow{\tilde{p}_{i-1}} & O_2 \end{array} \tag{33}$$

du type (19). La commutativité de ce diagramme assure que $Y = \tilde{p}(X)$ est une valeur critique de \tilde{p} (i. e. le jacobien de \tilde{p} en X est nul) si et seulement si $K(Y)$ est une valeur critique de \tilde{p}_{i-1} . Alors K est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^4 sur un voisinage de 0, avec $K(0) = 0$, qui échange les valeurs critiques de \tilde{p} et \tilde{p}_{i-1} .

Déterminons les valeurs critiques de \tilde{p} . Comme son jacobien en (c_1, c_2, c_3, x) est

$$\frac{\partial p}{\partial x}(c_1, c_2, c_3, x) = - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} / \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_4}(c_1, c_2, c_3, p(c_1, c_2, c_3, x), x), \tag{34}$$

(c_1, c_2, c_3, x) est point critique de \tilde{p} si et seulement si

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(c_1, c_2, c_3, p(c_1, c_2, c_3, x), x)$$

est nul. La valeur critique correspondante (c_1, c_2, c_3, c_4) est telle que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(c_1, c_2, c_3, c_4, x) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(c_1, c_2, c_3, c_4, x) = 0. \tag{35}$$

Autrement dit, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ est une valeur critique de \tilde{p} si et seulement si c est un point catastrophe de V : les valeurs critiques de \tilde{p} forment l'ensemble catastrophe de V.

Déterminons les valeurs critiques de $\tilde{p}_{i-1}, i = 3, 4, 5, 6$. Le jacobien de \tilde{p}_2 est 2x au point (c_1, c_2, c_3, x) . Les points critiques de \tilde{p}_2 sont donc caractérisés par $x = 0$; donc les valeurs critiques de \tilde{p}_2 sont déterminées par $c_4 = 0$, qui définit précisément la catastrophe pli à un difféomorphisme

local de \mathbb{R}^4 près. Ceci démontre notre résultat pour $i = 3$. Le jacobien de \tilde{p}_3 en (c_1, c_2, c_3, x) est $x^2 + c_1$, les valeurs critiques de \tilde{p}_3 sont déterminées par

$$\frac{x^3}{3} + c_1 x = c_4, \quad (36a)$$

$$x^2 + c_1 = 0. \quad (36b)$$

Le difféomorphisme de \mathbb{R}^4 défini par $(c_1, c_2, c_3, c_4) \mapsto (-3c_4, 3c_1, c_3, c_2)$ échange l'ensemble des valeurs critiques de \tilde{p}_3 , déterminé par (36a, b) et la cuspide définie par (29a, b). Ceci démontre notre résultat pour $i = 4$. Dans les deux autres cas, un raisonnement analogue prouve que l'ensemble des valeurs critiques de \tilde{p}_4 et \tilde{p}_5 sont la queue d'aronde et le papillon, à un difféomorphisme local de \mathbb{R}^4 près; ce qui achève la démonstration de la proposition 4.

6. STABILITÉ DES MORPHOLOGIES

PROPOSITION 5. — Supposons que V_0 est du type V_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, au voisinage de (c_0, x_0) . Soit W un voisinage quelconque de (c_0, x_0) , alors toute fonction V assez proche de V_0 est du type V_i au voisinage d'un point (c, x) de W .

Tel qu'on le voit des travaux de Mather [14], les fonctions \tilde{V}_i sont localement stables en 0. La proposition 5 pourrait découler de ce fait, mais nous allons en donner ici une démonstration directe.

Démonstration de la proposition 5. — Le cas $i = 1$ est évident, nous raisonnerons dans les cas $i = 2, 3, \dots, 6$. Sans perte de généralité, nous poserons $(c_0, x_0) = 0$. Pour toute fonction V , nous noterons \hat{V}^j la fonction de \mathbb{R}^j dans \mathbb{R}^j obtenue en fixant c_j, \dots, c_4 à la valeur 0 dans la fonction

$$(c, x) \mapsto \left[\frac{\partial V}{\partial x}(c, x), \dots, \frac{\partial^j V}{\partial x^j}(c, x) \right] \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, 5.$$

Il est clair que si V vérifie les conditions (i), $i = 2, 3, \dots, 6$, en 0 alors \hat{V}^{i-1} admet un jacobien non-nul en ce point, quitte à permuter les variables c_1, c_2, c_3, c_4 . Reprenant cette idée pour V_0 , \hat{V}_0^{i-1} est un difféomorphisme local d'un voisinage \mathcal{U} de 0 dans \mathbb{R}^{i-1} sur un autre voisinage de 0 tel que $\hat{V}_0^{i-1}(0) = 0$. Soit W un voisinage quelconque de 0 dans \mathbb{R}^5 , il existe alors une boule B centrée en 0 dans $\mathbb{R}^{i-1} = \mathbb{R}^5 \cap \{(c, x) \in \mathbb{R}^5; c_{i-1} = \dots = c_4 = 0\}$ qui soit à la fois incluse dans W et \mathcal{U} . Pour toute fonction V assez proche de V_0 , \hat{V}^{i-1} sera proche de \hat{V}_0^{i-1} ; en particulier, \hat{V}^{i-1} s'annulera en un point voisin de 0, donc sur un point de B . On aura alors

$$\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = \dots = \frac{\partial^{i-1} V}{\partial x^{i-1}}(c, x) = 0$$

en un point (c, x) dans $W \cap \mathcal{U}$. Par ailleurs, si V est assez proche de V_0 , V vérifiera la condition (ib) ainsi que $\frac{\partial^i V}{\partial x^i} \neq 0$ sur \mathcal{U} . Combinant ce résultat au précédent, on voit que V vérifie les conditions (i) en un point (c, x) de W . Ceci prouve que V est du type V_i au voisinage d'un point (c, x) de W , et la proposition 5 est démontrée.

La signification physique de cette proposition est qu'une petite perturbation d'une bonne fonction V ne modifie pas les morphologies locales. En effet, si V est du type V_i en (c, x) , sous une perturbation assez petite, V restera du type V_i en un certain point (c', x') aussi voisin que l'on veut de (c, x) . L'ensemble catastrophe local que l'on avait en c se retrouve en c' aussi voisin que l'on veut de c . Si une expérience physique se conforme à une dynamique gradiente qui est décrite par une fonction V , cette expérience sera facilement reproductible : toute nouvelle expérience qui suit d'assez près le protocole de la première correspondra à une fonction perturbée V' de V qui impliquera qualitativement les mêmes morphologies locales que pour V . Réciproquement, on devrait s'attendre à ce que les expériences qui se conforment à des dynamiques gradientes et qui sont reproductibles soient décrites par de bonnes fonctions V .

7. DYNAMIQUES GRADIENTES A n VARIABLES D'ÉTAT

Mentionnons d'abord que la notion de déploiement universel de Thom [1] [15] permet d'améliorer la proposition 3. Si f est une bonne fonction réelle définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R} , un déploiement de dimension p de f , au voisinage de 0, est une fonction $(c, x) \mapsto (c, F(c, x))$ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$, et telle que

$$F(0, x) = f(x).$$

Par exemple, la fonction \tilde{V} considérée précédemment est un déploiement de V_0 de dimension 4. Pour certaines fonctions f , il existe (cf. le théorème 8.1.1 de F. Sergeraert [16]) des déploiements « universels » : ce sont des déploiements $(u, x) \mapsto (u, G(u, x))$ de dimension k tels que, pour n'importe quel autre déploiement $(c, x) \mapsto (c, F(c, x))$ de f , il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \\ \downarrow s & & \downarrow T \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{G}} & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}, \end{array} \quad (37)$$

où \tilde{G} est l'application $(u, x) \mapsto (u, G(u, x))$, \tilde{F} est

$$(c, x) \mapsto (u, F(u, x)), S(c, x) = (p(c), s(c, x)) \quad \text{et} \quad T(c, y) = (p(c), t(c, y))$$

dont les fonctions $x \mapsto s(c, x)$ et $y \mapsto t(c, y)$ sont des difféomorphismes locaux. Par exemple, les fonctions \tilde{V}_i , $i = 3, 4, 5, 6$, sont des déploiements universels de x^i/i .

Revenons à la démonstration de la proposition 3. Le fait que V vérifie les conditions (ia) permet de démontrer que $V_0, 0 \sim x^i/i, 0$ par des difféomorphismes λ et μ . Alors $\tilde{V}' = (\text{Id} \times \mu) \circ \tilde{V} \circ (\text{Id} \times \lambda)^{-1}$ est un déploiement de x^i/i . Utilisant l'universalité du déploiement \tilde{V}_i , on construit un diagramme commutatif du type (37) entre \tilde{V}' et \tilde{V}_i . On en déduit l'existence d'un diagramme commutatif du type (27) entre \tilde{V} et \tilde{V}_i , où

$$H(c, x) = (\bar{h}(c), h(c, x)) \quad \text{et} \quad K(c, x) = (\bar{h}(c), k(c, x)).$$

Remarquons que \bar{h} ne dépend pas ici de x : on dira que H et K conservent l'espace de contrôle. Notons que les conditions (ib) permettent de montrer que H et K sont des difféomorphismes. La proposition 4 devient ici évidente : le difféomorphisme δ n'est autre que \bar{h} .

Pour les dynamiques gradientes à n variables d'état, l'espace d'état U est un ouvert de \mathbb{R}^n plutôt que de \mathbb{R} . Les bonnes fonctions sont alors définies comme les fonctions V telles que $c \mapsto V_c$ est transverse à une certaine stratification de $C^\infty(U)$, l'espace des fonctions de classe C^∞ de U dans \mathbb{R} . D'après la méthode indiquée par Thom [15], cette propriété de transversalité assure l'existence de proposition équivalente aux propositions 1 et 2. Pour ces bonnes fonctions V , on peut écrire une proposition du type de la proposition 3. Dans ce but, introduisons les fonctions V_7, V_8 et V_9 , définies par

$$V_7(c, x, y) = x^3 + y^3 + c_3xy - c_2y - c_1x, \quad (38a)$$

$$V_8(c, x, y) = x^3 - 3xy^2 + c_3(x^2 + y^2) - c_2y - c_1x, \quad (38b)$$

$$V_9(c, x, y) = x^2y + y^4 + c_4y^3 + c_3y^2 - c_2y - c_1x. \quad (38c)$$

Ainsi si V est une bonne fonction telle que $V_c, m \sim (V_i)_0 + q, 0$, alors

$$\tilde{V}, (c, m) \sim \widetilde{V_i + q}, 0,$$

où q est une forme quadratique non-dégénérée des $n - 1$ ou $n - 2$ variables autres que celles intervenant dans V_i , $i = 1, 2, \dots, 9$. De plus, cette équivalence entre \tilde{V} et $\widetilde{V_i + q}$ peut être construite à l'aide de difféomorphismes H et K qui conservent l'espace de contrôle. On peut alors énoncer l'équivalent de la proposition 4 : « Si $V_c, m \sim (V_i)_0 + q, 0$, il existe un difféomorphisme δ d'un voisinage de c dans \mathbb{R} sur un voisinage de 0, avec $\delta(c) = 0$, qui échange les ensembles catastrophes de V et V_i , $i = 1, 2, \dots, 9$ ». Cette propriété reste vraie pour les catastrophes de conflit. Dans le langage de Thom, $\widetilde{V_i + q}$ est un déploiement universel de centre organisateur $(V_i)_0 + q$.

REFERENCES

- [1] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse* (Benjamin, Reading, Mass., 1972).
- [2] E. C. ZEEMAN, Applications of Catastrophe Theory, Tokyo International Conference on Manifolds, Avril 1973 (*à paraître*).
- [3] R. THOM, Topological Models in Biology, *Topology*, vol. 8, 1969, p. 313.
- [4] E. C. ZEEMAN, Differential Equations of the Heartbeat and Nerve Impulse, dans *Towards a Theoretical Biology, 4. Essays*, ed. C. H. Waddington (Edinburgh University Press, 1972), p. 8.
- [5] R. THOM, Topologie et linguistique, dans *Essays on Topology and Related Topics*, Mémoires dédiés à Georges de Rham (Springer-Verlag, Berlin, 1970).
- [6] J.-G. DUBOIS et J.-P. DUFOUR, La théorie des catastrophes. I. La machine à catastrophes, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. XX, n° 2, 1974, p. 113.
- [7] R. THOM, Phase Transitions as Catastrophes, dans *Statistical Mechanics, New Concepts, New Problems, New Applications*, ed. S. A. Rice, K. F. Freed, J. C. Light (University of Chicago Press, 1972), p. 93.
- [8] D. FOWLER, The Riemann-Hugoniot Catastrophe and Van der Waals' Equation, dans *Towards a Theoretical Biology 4. Essays*, ed. C. H. Waddington (Edinburgh University Press, 1972), p. 1.
- [9] H. WHITNEY, On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane, *Ann. of Math.*, vol. 62, no. 3, 1955, p. 374.
- [10] C. T. C. WALL, Introduction to the Preparation Theorem, dans Proceedings of Liverpool Singularities. Symposium I, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 192 (Springer-Verlag, Berlin, 1971), p. 90.
- [11] S. LANG, *Analysis*. II (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969).
- [12] B. MORIN, Formes canoniques des singularités d'une application différentiable, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. 260, 1965, p. 5662.
- [13] A. E. R. WOODCOCK and T. POSTON, The Geometry of the Elementary Catastrophes (*à paraître* dans la collection *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin).
- [14] J. N. MATHER, Stability of C^∞ Mappings. IV. Classification of Stable Germs by \mathbb{R} -Algebras. *Publ. Math. I. H. E. S.*, no. 37, 1970, p. 523.
- [15] R. THOM, *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, chapitre 3, Théorie du déploiement universel (I. H. E. S., Bures-sur-Yvette, multigr. 1971).
- [16] F. SERGERAERT, Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 5, 1972, p. 599.

(Manuscrit reçu le 27 février 1973)