GÉRARD A. MAUGIN

Sur les fluides relativistes à spin

Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, nº 1 (1974), p. 41-68
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_1_41_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XX, n° 1, 1974, p. 41-68.

Section A :
Physique théorique.

Sur les fluides relativistes à spin

par

Gérard A. MAUGIN

Université de Paris VI,
Département de Mécanique Théorique (E. R. A. du C. N. R. S.),
Tour 66, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

RÉSUMÉ. — On présente un principe variationnel qui conduit aux équations du champ ainsi qu'aux lois de comportement d'un fluide parfait non chargé et non conducteur en interaction avec les champs électromagnétiques et présentant une répartition continue de spins d'origine magnétique. Les interactions entre spins voisins sont prises en compte et conduisent à des forces du type d'Heisenberg sous forme d'actions de contact. Les expressions du tenseur d'impulsion-énergie (non symétrique) et du tenseur total de spin sont ainsi construites ainsi que celle de la vitesse de précession du spin en fonction des différentes interactions. Les conséquences de l'invariance de Lorentz et de l'isotropie du fluide sont étudiées et des lois de comportement exactes ou bien approchées en sont déduites. Le schéma physique ainsi construit est complet et peut être appelé « *ferrofluide* » *relativiste parfait.* On montre que le cas de la magnétohydrodynamique parfaite correspond à celui d'un « ferrofluide » paramagnétique. La géométrisation possible du modèle est brièvement discutée.

ABSTRACT. — A variational principle is formulated which yields the field equations and constitutive equations of a nonconducting charge-free perfect fluid interacting with electromagnetic fields and endowed with spins of magnetic origin. The interactions between neighboring spins are accounted for and give rise to Heisenberg exchange forces in the form of contact actions. The forms of the nonsymmetric energy-momentum and total spin tensors are thus constructed as well as the expression of the spin precession velocity as a function of the different interactions. The consequences of Lorentz invariance and isotropy of the fluid are studied and exact and approximate forms of constitutive equations are deduced. The physical scheme so constructed is complete and may be referred to as that of a *perfect relativistic ferrofluid.* It is shown that the perfect magnetohydrodynamics scheme corresponds to that of a paramagnetic ferrofluid. The geometrization of the model is briefly discussed.

1. INTRODUCTION

En nous appuyant sur une récente formulation phénoménologique de la théorie du ferromagnétisme (cf. [*9*] [*12*] [*31*]) et notre théorie des interactions magnétoélastiques (cf. [*3*] [*8*] [*24*]) en relativité restreinte, nous établissons un modèle de fluide relativiste à spin dans lequel on tient compte non seulement de l'effet gyromagnétique, mais aussi de l'interaction entre les spins. Suivant une interprétation de physique du continu donnée par Brown [*20*], le milieu fluide étant muni d'une répartition continue de spins, l'interaction entre spins magnétiques voisins (les forces d'échange d'Heisenberg en ferromagnétisme) se manifeste par la présence du gradient spatial du spin dans le potentiel thermodynamique utilisé dans la formulation variationnelle. Cette dernière suit la méthode introduite par Taub [*21*] et récemment utilisée par l'auteur [*1*] (1). Le fluide électromagnétique considéré est évidemment non dissipatif. Le principe variationnel utilisé permet d'obtenir — en tenant compte des contraintes imposées à l'entropie, la 4-vitesse et la densité de spin — toutes les équations « mécaniques » de conservation — conservation de l'impulsion-énergie, conservation du moment de l'impulsion-énergie équivalente à l'équation d'évolution du spin le long d'une ligne de courant — mais aussi, les expressions détaillées du tenseur total d'impulsion-énergie, de la densité totale de spin et de la vitesse de précession du spin en fonction des différentes interactions : matière-matière, matière-champs électromagnétiques, spin-spin. Cette dernière interaction donne naissance — d'une manière « continue » — à des actions de *contact* (couples surfaciques) responsables, en partie, de l'asymétrie du tenseur d'impulsion-énergie. On montre également (§ 4.5) que cette asymétrie résulte du fait que, localement, matière et spin ont un taux de rotation différent, ce qui est en accord avec les interprétations données dans les théories des milieux continus à microstructure (cf. [*25*]). La forme exacte des lois de comportement de notre modèle — pour la pression thermodynamique et le tenseur d'interaction des spins — résulte de la condition d'invariance de Lorentz appliquée au potentiel thermodynamique considéré ainsi que de la nécessaire isotropie

(1) Une autre formulation variationnelle du même type que celle donnée en [*2*] pour la M. H. D. est donnée ailleurs [« Un principe variationnel pour le schéma fluide relativiste à spin » (preprint, 1973)].

du fluide. Des lois de comportement approchées dites quasi linéaires sont également obtenues. Si l'on néglige l'interaction entre spins, alors la présente formulation redonne la théorie simplifiée exposée par Halbwachs [6]. Comme dans cette théorie, la 4-vitesse et la 4-impulsion ne sont pas colinéaires. On montre que le schéma « magnétohydrodynamique parfaite » correspond au cas où notre fluide est paramagnétique (§ 5). Enfin, notant que dans quelques situations rencontrées en astrophysique et en cosmologie, la géométrisation d'un modèle de fluide à spin s'impose (§ 6), on examine brièvement deux schémas géométriques possibles. Le premier (§ 6.1) conserve la structure géométrique riemannienne de la relativité générale classique à condition d'introduire un terme de courbure dans « l'équation de conservation » de l'impulsion-énergie et de redéfinir le terme de source dans les équations d'Einstein, ce qui concorde avec un schéma récemment proposé par Israel [19]. Le second (§ 6.2) fait appel à la structure d'un espace d'Einstein-Cartan U^4 à torsion non nulle basée sur une connexion affine non symétrique ; dans ce cas, la torsion de l'espace-temps résulte en partie de l'action des forces d'échange d'Heisenberg.

2. PRÉLIMINAIRES

Les notations sont celles d'articles précédents [1] [2]. Soit x^α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, une carte locale curviligne — x^4 de genre temps — de M^4, l'espace-temps *plat* de Minkowski. La courbure $R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta}$ de M^4 associée à la métrique hyperbolique normale $g_{\alpha\beta}$ (de signature $+, +, +, -$) est nulle. Les ∇ indiquent la dérivée covariante. Une « particule » fluide de coordonnées de Lagrange X^K, $K = 1, 2, 3$, décrit une ligne d'univers $\mathscr{C}$ de M^4 orientée dans le temps et d'équations (en coordonnées locales)

$$x^\alpha = \mathscr{X}^\alpha(X^K, s) \tag{2.1}$$

où s est le temps propre de la « particule ». (1.1) est considérée C^m avec m supérieur à deux. La 4-vitesse u^α est définie par (c = vitesse de la lumière dans le vide)

$$u^\alpha = \left.\frac{\partial \mathscr{X}^\alpha}{\partial s}\right|_{X^K}, \qquad g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + c^2 = 0. \tag{2.2}$$

L'opérateur $\dfrac{D}{Ds} = \left.\dfrac{\partial}{\partial s}\right|_{X^K}$ est la *dérivée invariante* dans la direction u^α, définie en chaque point événement de $\mathscr{C}$ par

$$\frac{DA}{Ds} = u^\alpha \nabla_\alpha A = \dot{A}, \qquad \forall A. \tag{2.3}$$

Il constitue la généralisation relativiste de la dérivée particulaire. Soit

$M^3_\perp(x)$ la 3-hypersurface localement orthogonale à u^α en x de $\mathscr{C}$. L'opérateur de projection $P_{\alpha\beta}$ est défini par

$$(2.4)\qquad \begin{cases} P_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) + \dfrac{1}{c^2}u_\alpha(x)u_\beta(x), \\ P_{\alpha\beta}(x)u^\alpha(x) = 0, \qquad P_{\alpha\beta}P^{\beta\gamma} = P^{\cdot\gamma}_{\alpha\cdot}, \qquad P^{\cdot\alpha}_{\alpha\cdot} = 3. \end{cases}$$

$P_{\alpha\beta}$ est utile pour effectuer la décomposition d'un tenseur en ses composantes purement spatiales, mixtes et temporelles (voir [*3*] [*4*]). En particulier, on dira qu'un tenseur d'ordre quelconque $A^{\alpha\beta\ldots\mu}$ est complètement P. U. dans M^4 au point événement x de $\mathscr{C}$ si et seulement si u^α est un vecteur nul de $A^{\alpha\beta\ldots\mu}$, soit

$$(2.5)\qquad A^{\alpha\beta\ldots\mu}u_\alpha = A^{\alpha\beta\ldots\mu}u_\beta = \ldots = A^{\alpha\beta\ldots\mu}u_\mu = 0.$$

Alors,

$$(2.6)\qquad (A^{\alpha\beta\ldots\mu})_\perp \equiv P^\alpha_{\cdot\sigma}P^\beta_{\cdot\rho}\ldots P^\mu_{\cdot\nu}A^{\sigma\rho\ldots\nu} \equiv A^{\alpha\beta\ldots\mu}$$

où la notation symbolique $(\ldots)_\perp$ indique l'opération de projection. Un tenseur P. U. est à valeurs essentiellement spatiales ou tridimensionnelles. Dans un repère au repos, il se réduit au concept tridimensionnel équivalent de la physique classique.

On définit le tenseur relativiste gradient de vitesse $e_{\alpha\beta}$ et ses parties symétriques et antisymétriques appelées respectivement *tenseur relativiste des taux de déformation* et *tourbillon relativiste* (ou tenseur des taux de rotation) par

$$(2.7)\qquad e_{\alpha\beta} \equiv (\nabla_\beta u_\alpha)_\perp,$$

$$(2.8)\qquad \sigma_{\alpha\beta} \equiv e_{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2}(e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}\underset{u}{\pounds}P_{\alpha\beta},$$

$$(2.9)\qquad \omega_{\alpha\beta} \equiv e_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{2}(e_{\alpha\beta} - e_{\beta\alpha}),$$

où $\underset{u}{\pounds}$ indique la dérivée de Lie par rapport au champ u^α. $\sigma_{\alpha\beta}$ est un tenseur *objectif* au sens de l'auteur (cf. [5]) ; $\omega_{\alpha\beta}$ ne l'est pas.

ρ indiquera la *densité relativiste invariante* de matière. C'est un invariant *propre*, c'est-à-dire, mesuré par un observateur en co-mouvement avec la « particule » fluide. Dans une région continue $\mathscr{R}$ de M^4, ρ vérifie l'équation dite de continuité écrite sous l'une des trois formes :

$$(2.10)\qquad \frac{D\rho}{Ds} + \rho\Theta = 0, \qquad \frac{D\ln\rho}{Ds} + \Theta = 0, \qquad \nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0.$$

où $\Theta \equiv e^\alpha_{\cdot\alpha}$ est la dilatation.

3. PHÉNOMÈNES GYROMAGNÉTIQUES

(*a*) La théorie que nous exposons ici est conçue de manière à tenir compte du spin (moment cinétique) associé au moment magnétique. Ce spin est d'origine électronique. Suivant Uhlenbeck et Goudsmit, le spin de l'électron est purement magnétique dans le repère au repos attaché à l'électron (cf. [*6*]). C'est dire que le 3-vecteur de polarisation **P** est tel que (2)

$$\mathbf{P} = \mathbf{O} \tag{3.1}$$

dans un tel repère. La relation gyromagnétique (pour un effet gyromagnétique *isotrope*, ce que nous supposons) s'écrit alors

$$\tilde{\pi}^{\alpha\beta} = \gamma \tilde{\mathrm{S}}^{\alpha\beta}, \qquad \gamma \equiv -\frac{e_0}{m_0 c} \tag{3.2}$$

(e_0 : charge de l'électron, m_0 : masse au repos de l'électron, γ : rapport gyromagnétique). $\tilde{\mathrm{S}}^{\alpha\beta}$ est le tenseur antisymétrique de spin intrinsèque par unité de volume propre. $\tilde{\pi}^{\alpha\beta}$ est le tenseur antisymétrique de magnétisation-polarisation (par unité de volume propre) qui admet la décomposition (cf. [*2*]) :

$$\left\{\begin{aligned} &\pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}(\mathcal{P}^\alpha u^\beta - \mathcal{P}^\beta u^\alpha) + \frac{1}{ic}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{M}_\gamma u_\delta, \\ &\mathcal{P}^\alpha \equiv \frac{1}{c}\pi^{\beta\alpha}u_\beta, \qquad \mathrm{M}_\alpha \equiv \frac{1}{2ic}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\pi^{\beta\gamma}u^\delta, \\ &\mathcal{P}^\alpha u_\alpha = \mathrm{M}^\beta u_\beta = 0, \end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

où $\mathcal{P}^\alpha$ et M_β sont les 4-vecteurs P. U. de polarisation et de magnétisation volumique (3). En dehors de la matière,

$$\tilde{\pi}^{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}^\beta = 0, \qquad \mathrm{M}_\beta = 0. \tag{3.4}$$

---

(2) Notons que l'hypothèse (3.1) n'entraîne pas que la polarisation soit nulle dans un corps en mouvement. En effet, dans un repère d'inertie instantané, $\mathcal{P}^\alpha$ admet la décomposition bien connue

$$\mathcal{P}^\alpha = \left[\frac{\mathbf{P} - \boldsymbol{v} \times \mathbf{M}/c}{\sqrt{(1-\beta^2)}}, \frac{i\boldsymbol{v}.\mathbf{P}/c}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\right], \qquad \beta = \left|\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right|,$$

où **M** est la 3-magnétisation et $\boldsymbol{v}$ la 3-vitesse. La condition covariante $(3.5)_1$ conduit, dans un tel repère (qui n'est pas au repos) à une polarisation induite par la magnétisation en mouvement et telle que $\mathbf{P} \approx \boldsymbol{v} \times \mathbf{M}/c$.

(3) On rappelle que

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{|g|}, \qquad \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}}{\sqrt{|g|}}, \qquad g = \text{dét}\,(g_{\alpha\beta}),$$

où $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le symbole de permutation complètement antisymétrique.

La transcription covariante de l'hypothèse (3.1) est la *condition de Frenckel* [7] :

$$\mathscr{P}^{\alpha} \equiv 0 \Leftrightarrow \tilde{\pi}^{\alpha\beta}u_{\alpha} = \gamma \tilde{S}^{\alpha\beta}u_{\alpha} = 0, \tag{3.5}$$

condition moins forte que (3.4). Au lieu des quantités volumiques $\tilde{\pi}^{\alpha\beta}$, M_{α} et $\tilde{S}^{\alpha\beta}$, on préférera employer des quantités définies par unité de masse propre, $\pi^{\alpha\beta}$, $\mathscr{M}_{\alpha}$ et $S^{\alpha\beta}$. On aura donc

$$S^{\alpha\beta} = \gamma^{-1}\pi^{\alpha\beta} = \frac{\gamma^{-1}}{ic}\eta^{\alpha\beta\sigma\rho}\mathscr{M}_{\sigma}u_{\rho}, \qquad \mathscr{M}_{\sigma} \equiv M_{\sigma}/\rho. \tag{3.6}$$

Il s'ensuit que, définissant le 4-vecteur axial P. U. de spin s_{α}, (3.6) s'écrit sous forme 4-vectorielle

$$s_{\alpha} = \gamma^{-1}\mathscr{M}_{\alpha}, \quad \text{avec} \quad s_{\alpha} \equiv \frac{1}{2ic}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}S^{\beta\gamma}u^{\delta}. \tag{3.7}$$

(*b*) On considère qu'en un point $\mathbf{X}$ du 3-espace physique habituel $\mathbb{E}^3$, le moment magnétique ne peut que tourner. Sa norme est donc fixe dans $\mathbb{E}^3$. La transcription covariante de cette hypothèse s'écrit dans $M_{\perp}^3(x)$:

$$\boxed{P_{\alpha\beta}(x)\mathscr{M}^{\alpha}(x)\mathscr{M}^{\beta}(x) = \text{cte} \quad \text{le long de } \mathscr{C}.} \tag{3.8}$$

Il s'ensuit que

$$\mathscr{M}_{\alpha}\left(\frac{D\mathscr{M}^{\alpha}}{Ds}\right)_{\perp} = 0 \quad \text{le long de } \mathscr{C}. \tag{3.8}$$

Une solution de cette équation a été donnée dans [8] ; l'évolution temporelle de $\mathscr{M}^{\alpha}$ (ou du spin s^{α}) le long de $\mathscr{C}$ est décrite par les équations *cinématiques* suivantes :

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{D\mathscr{M}^{\alpha}}{Ds} = \left(\Omega^{\alpha}_{.\beta} + \frac{1}{c^2}u^{\alpha}\frac{Du_{\beta}}{Ds}\right)\mathscr{M}^{\beta}, \\ \left(\frac{D\mathscr{M}^{\alpha}}{Ds}\right)_{\perp} = \Omega^{\alpha}_{.\beta}\mathscr{M}^{\beta}, \qquad \Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}, \qquad \Omega_{\alpha\beta}u^{\beta} = 0, \end{gathered}} \tag{3.9}$$

où le tenseur antisymétrique P. U. $\Omega_{\alpha\beta}$ représente la *vitesse angulaire* du spin qu'il convient de déterminer. Comme le montre $(3.9)_2$, ce tenseur P. U. mesure la vitesse de précession du spin dans le repère d'inertie alors que le terme $\frac{1}{c^2}u^{\alpha}\frac{Du_{\beta}}{Ds}$ de $(3.9)_1$ représente un transport de Fermi-Walker le long de $\mathscr{C}$. Comme $\Omega^{\alpha\beta}$ est P. U., on lui associe son dual π_{α} tel que

$$\pi_{\alpha} = \frac{1}{ic}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\Omega^{\beta\gamma}u^{\delta}, \qquad \pi_{\alpha}u^{\alpha} = 0. \tag{3.10}$$

Considérons le travail *réel* W fourni par le spin dans une rotation finie dans un repère d'inertie. Le couple associé au spin étant $-\left(\frac{Ds^\alpha}{Ds}\right)_\perp$, on a

$$W = -\frac{Ds^\alpha}{Ds}\pi_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds}\Omega_{\alpha\beta}. \tag{3.11}$$

Avec l'aide de $(3.9)_1$, on montre que (cf. [8])

$$\boxed{W = 0.} \tag{3.12}$$

Le couple produit par le spin est donc du type de d'Alembert. Le spin représente évidemment un effet de nature gyroscopique ; il n'est pas possible de construire une énergie cinétique de rotation sous forme intégrée pour le spin. On ne peut que considérer une forme « déjà variée » (4).

(*c*) *Variation spatiale du spin.* — Si $\mathcal{M}^\alpha$ garde une norme constante (cf. 3.8) le long de la ligne d'univers $\mathscr{C}$ décrite par (2.1), sa norme peut varier lorsque l'on passe à une ligne d'univers voisine de $\mathscr{C}$ (5), c'est-à-dire, si l'on considère une variation spatiale

$$\mathscr{C} : x^\alpha = \mathscr{X}^\alpha(X^K, s) \mapsto \tilde{\mathscr{C}} : \tilde{x}^\alpha = \tilde{\mathscr{X}}^\alpha(\tilde{X}^K = X^K + \delta X^K, s).$$

Ce qui peut s'écrire localement dans $M^3_\perp(x)$ sous la forme évidente (cf. [5])

$$\tilde{x}^\alpha(\tilde{X}^K, s) - x^\alpha(X^K, s) = (\delta x^\alpha)_\perp + 0(|\delta \boldsymbol{x}|^2). \tag{3.13}$$

D'où,

$$\tilde{\mathcal{M}}_\alpha(\tilde{x}) - \mathcal{M}_\alpha(x) \equiv (\delta\mathcal{M}_\alpha)_\perp = \mathfrak{M}_{\alpha\beta}(x)(\delta x^\beta)_\perp + 0(|\delta \boldsymbol{x}|^2), \tag{3.14}$$

où l'opérateur de projection prend sa valeur en $\boldsymbol{x}$ et l'on a défini le *tenseur relativiste gradient de la magnétisation* $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ par

$$\boxed{\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(x) = (\nabla_\beta\mathcal{M}_\alpha)_\perp, \quad \mathfrak{M}_{\alpha\beta}u^\alpha = 0, \quad \mathfrak{M}_{\alpha\beta}u^\beta = 0.} \tag{3.15}$$

Non symétrique et essentiellement spatial, ce tenseur P. U. a en général neuf composantes indépendantes.

4. SCHÉMA « FERROFLUIDE PARFAIT »

4.1. **Introduction.**

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'établir à partir d'un principe variationnel les équations du champ et les lois de comportement

(4) Voir les commentaires à ce sujet en théorie classique du micromagnétisme [9] [10] [11].

(5) Tridimensionnellement, cela signifie que la norme de la magnétisation varie de point en point dans $\mathbb{E}^3$.

correspondant au schéma *ferrofluide relativiste parfait.* Par ceci, nous entendons un schéma correspondant à celui d'un fluide électromagnétique présentant une répartition continue de spins d'origine magnétique, et *non dissipatif.* En particulier, le fluide considéré aura une *conductivité électrique σ infinie.* C'est dire que le 4-courant de conduction j^α qu'on peut montrer, pour des hypothèses simplificatrices acceptables (loi linéaire, isotropie, non couplage avec les autres phénomènes de transport) être de la forme

$$j^\alpha = \sigma \mathscr{E}^\alpha, \tag{4.1}$$

où $\mathscr{E}^\alpha$ est le 4-vecteur P. U. *champ électrique*, ajouté au courant de convection qu^α (q : charge électrique volumique) ne peut fournir un courant total fini que si (6)

$$\boxed{\mathscr{E}^\alpha = 0.} \tag{4.2}$$

Il s'ensuit que l'action associée aux champs électromagnétiques dans un ouvert $\mathring{\mathscr{B}}$ de M^4 (tube engendré par un corps matériel B) qui s'écrit en général sous la forme (dv_4 : élément de volume riemannien de M^4)

$$\mathscr{A}_{(em)} = \int_{\mathring{\mathscr{B}}} \left(\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}\tilde{\pi}^{\alpha\beta}F_{\beta\alpha}\right)dv_4 \tag{4.3}$$

où les deux contributions de l'intégrand représentent respectivement l'énergie du champ électromagnétique libre et l'énergie du doublet magnétique, se réduit, compte tenu de (3.5), (4.2), $(3.6)_2$ et de la décomposition suivante du tenseur flux magnétique $F_{\alpha\beta}$ (cf. [*12*] [*3*])

$$\left\{\begin{aligned} &F_{\alpha\beta} = \frac{1}{c}(\mathscr{E}_\beta u_\alpha - \mathscr{E}_\alpha u_\beta) + \frac{1}{ic}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathscr{B}^\gamma u^\delta, \\ &\mathscr{E}^\alpha \equiv \frac{1}{c}F^{\alpha\beta}u_\beta, \quad \mathscr{B}^\alpha \equiv \frac{1}{2ic}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\beta\gamma}u_\delta, \quad \mathscr{E}^\alpha u_\alpha = 0, \quad \mathscr{B}^\alpha u_\alpha = 0, \end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

($\mathscr{B}^\alpha$: 4-vecteur P. U. d'induction magnétique), à

$$\boxed{\tilde{\mathscr{A}}_{(em)} = -\int_{\mathring{\mathscr{B}}} \rho\left(\frac{1}{2\rho}\mathscr{B}^\alpha\mathscr{B}_\alpha - \mathscr{M}^\alpha\mathscr{B}_\alpha\right)dv_4.} \tag{4.5}$$

Pour plus de simplicité, nous poserons $q \equiv 0$. Le fait que le schéma considéré est non dissipatif implique que l'on a conservation de l'*entropie spécifique* η le long d'une ligne de courant, soit

$$\boxed{\frac{D\eta}{Ds} = 0 \quad \text{le long de } \mathscr{C}.} \tag{4.6}$$

(6) Voir la remarque concernant cette équation dans la note (9), p. 160 de la référence [*2*].

4.2. Conditions de la variation.

4.2.1. DÉFINITION. — Nous nous attachons ici à la détermination des équations de conservation (les lois du mouvement). Il convient donc de varier la ligne d'univers des « particules » fluides. Cette variation peut être définie par :

$$(4.7) \qquad \delta : x^\alpha(\mathscr{C}) \mapsto x^\alpha(\hat{\mathscr{C}}) = x^\alpha + \varepsilon\xi^\alpha, \qquad \delta x^\alpha = \varepsilon\xi^\alpha,$$

où ε est un infiniment petit et ξ^α est un champ de 4-vecteur non nécessairement P. U. La variation résultante d'un tenseur **A** s'écrit

$$(4.8) \qquad \delta\mathbf{A} = \varepsilon \underset{\xi}{\pounds}\mathbf{A},$$

où $\underset{\xi}{\pounds}$ indique la dérivée de Lie par rapport au champ ξ^α. En particulier, pour $\mathscr{B}^\alpha$ (cf. [*13*], p. 86)

$$(4.9) \qquad \delta\mathscr{B}^\lambda = (\nabla_\rho\mathscr{B}^\lambda)\delta x^\rho - \mathscr{B}^\rho\nabla_\rho(\delta x^\lambda) + \mathscr{B}^\lambda\nabla_\rho(\delta x^\rho).$$

D'où,

$$(4.10) \quad \delta\left(\frac{1}{2}\mathscr{B}^\lambda\mathscr{B}_\lambda\right) = (\mathscr{B}_\lambda\mathscr{B}^\lambda g^{\alpha\beta} - \mathscr{B}^\alpha\mathscr{B}^\beta)\nabla_\beta(\delta x_\alpha) + \nabla_\alpha\left(\frac{1}{2}\mathscr{B}_\lambda\mathscr{B}^\lambda\right)\delta x^\alpha,$$

$$(4.11) \quad \delta(\mathscr{M}^\lambda\mathscr{B}_\lambda) = \mathscr{B}_\lambda\delta\mathscr{M}^\lambda + \mathscr{M}_\lambda(\nabla_\rho\mathscr{B}^\lambda)\delta x^\rho - (\mathscr{M}^\alpha\mathscr{B}^\beta - \mathscr{B}^\lambda\mathscr{B}_\lambda g^{\alpha\beta})\nabla_\beta(\delta x_\alpha).$$

La variation $\delta\mathscr{M}^\lambda$ a un caractère particulier car $\mathscr{M}^\lambda$ doit vérifier la contrainte (3.8) le long d'une ligne d'univers $\mathscr{C}$. Cette variation est donnée au paragraphe suivant.

Compte tenu de (4.8), on calcule aisément les expressions suivantes :

$$(4.12) \qquad \delta u^\alpha = u^\beta\nabla_\beta(\delta x^\alpha),$$

$$(4.13) \qquad \delta\rho = -\rho P^{\alpha\beta}\nabla_{(\alpha}(\delta x_{\beta)}),$$

$$(4.14) \qquad \delta(dv_4) = g^{\alpha\beta}\nabla_{(\alpha}(\delta x_{\beta)})dv_4,$$

$$(4.15) \qquad \delta(\rho dv_4) = -\rho\frac{u^\alpha u^\beta}{c^2}\nabla_{(\beta}(\delta x_{\alpha)})dv_4,$$

$$(4.16) \qquad \delta P_{\alpha\mu} = \frac{2}{c^2}u^\lambda\nabla_\lambda(\delta x^\gamma)P_{\gamma(\alpha}u_{\mu)},$$

et l'on note que pour tout $\boldsymbol{\phi}$:

$$(4.17) \qquad \delta(\nabla_\alpha\boldsymbol{\phi}) = \nabla_\alpha(\delta\boldsymbol{\phi}) - (\nabla_\beta\boldsymbol{\phi})\nabla_\alpha(\delta x^\beta).$$

4.2.2. VARIATION DE LA MAGNÉTISATION. — Considérons que $\mathscr{M}^\lambda$ — ou le 4-vecteur s^α — est *rigidement lié* (car sa norme est constante le long de $\mathscr{C}$; cf. 3.8) à un trièdre $\{ \boldsymbol{a}_{(K)}, K = 1, 2, 3 \}$ orthonormé de vecteurs de genre espace, défini au point $\boldsymbol{x}$ de $\mathscr{C}$. Les vecteurs $\boldsymbol{a}_{(K)}$ et leurs réciproques $\boldsymbol{a}^{(K)}$ sont contenus dans $M_{\perp}^{3}(\boldsymbol{x})$, donc P. U., et leurs composantes quadridimensionnelles vérifient les relations (cf. [*14*])

$$(4.18)\qquad a_{(\dot{K})}{}^{\alpha}u_{\alpha}=0,\qquad a_{(\dot{K})}{}^{\alpha}a^{(K)}_{\cdot\,\beta}=P^{\alpha}_{\cdot\beta},\qquad a_{(\dot{K})}{}^{\alpha}a^{(L)}_{\cdot\,\alpha}=\delta^{L}_{K}.$$

Au cours de la variation (4.7), les $\boldsymbol{a}_{(K)}$ restent orthonormés et P. U. au sens de (4.18). La variation résultante de $\boldsymbol{a}_{(K)}$ définie en $\boldsymbol{x}$ sur $\mathscr{C}$ admet une décomposition en une partie essentiellement spatiale (P. U.) notée $(\delta\boldsymbol{a}_{(K)})_{\perp}$ et une partie de genre temps notée $(\delta\boldsymbol{a}_{(K)})_{||}$ parallèle à $u^{\alpha}(\boldsymbol{x})$. On a donc

$$(4.19)\qquad \left\{\begin{array}{l}\delta a_{(\dot{K})}{}^{\alpha}=(\delta a_{(\dot{K})}{}^{\alpha})_{\perp}+(\delta a_{(\dot{K})}{}^{\alpha})_{||},\\ (\delta a_{(\dot{K})}{}^{\alpha})_{\perp}u_{\alpha}=0,\qquad (\delta a_{(\dot{K})}{}^{\alpha})_{||}\equiv A_{K}u^{\alpha}.\end{array}\right.$$

Variant $(4.18)_3$, multipliant le résultat par $a_{(\dot{L})}{}^{\beta}$, sommant sur L et utilisant $(4.18)_2$, on obtient

$$(4.20)\qquad \left\{\begin{array}{l}(\delta a_{(\dot{K})}{}^{\beta})_{\perp}=\delta\omega^{\beta}_{\cdot\alpha}a_{(\dot{K})}{}^{\alpha},\\ \delta\omega^{\beta}_{\cdot\alpha}\equiv -\,a_{(\dot{L})}{}^{\beta}(\delta a^{(L)}_{\cdot\,\alpha}),\qquad u_{\beta}\delta\omega^{\beta}_{\cdot\alpha}=0,\qquad \delta\omega^{\beta}_{\cdot\alpha}u^{\alpha}=0.\end{array}\right.$$

On montre que le tenseur $\delta\omega_{\alpha\beta}$ est *antisymétrique* en variant $(4.18)_2$. Finalement, multipliant $(4.19)_1$ par u_{α} et tenant compte de $(4.19)_3$, on obtient

$$(4.21)\qquad A_{K}=-\frac{1}{c^{2}}u_{\alpha}\delta a_{(\dot{K})}{}^{\alpha}=\frac{1}{c^{2}}a_{(\dot{K})}{}^{\alpha}\delta u_{\alpha}.$$

La dernière égalité provient de $(4.18)_1$. Compte tenu de (4.19), $(4.20)_1$, (4.21) et (4.12), $(4.19)_1$ s'écrit donc

$$(4.22)\qquad \delta a_{(\dot{K})}{}^{\alpha}=\left[\delta\omega^{\alpha}_{\cdot\beta}+\frac{1}{c^{2}}u^{\alpha}\frac{D}{Ds}(\delta x_{\beta})\right]a_{(\dot{K})}{}^{\beta}.$$

Les deux contributions entre crochets fournissent respectivement une rotation infinitésimale de $\boldsymbol{a}_{(K)}$ dans $M_{\perp}^{3}(\boldsymbol{x})$ — soit, dans un repère d'inertie — et la forme variée d'un transport de Fermi-Walker du vecteur de norme constante $\boldsymbol{a}_{(K)}$ le long de $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{M}^{K}$ (K = 1, 2, 3) les composantes non holonomes *constantes* de $\mathscr{M}^{\alpha}$ sur $\{\boldsymbol{a}_{(K)}\}$. On a donc

$$\mathscr{M}^{\alpha}=\mathscr{M}^{K}a_{(\dot{K})}{}^{\alpha},\qquad \mathscr{M}^{K}=\mathscr{M}^{\alpha}a^{(K)}_{\cdot\,\alpha},\qquad \delta\mathscr{M}^{K}=0.$$

D'où avec (4.22),

$$(4.23)\qquad \boxed{\delta\mathscr{M}^{\alpha}=\left[\delta\omega^{\alpha}_{\cdot\beta}+\frac{1}{c^{2}}u^{\alpha}\frac{D}{Ds}(\delta x_{\beta})\right]\mathscr{M}^{\beta},\quad (\delta\mathscr{M}^{\alpha})_{\perp}=\delta\omega^{\alpha}_{\cdot\beta}\mathscr{M}^{\beta}.}$$

Ces expressions variées correspondent aux expressions finies (3.9). Compte tenu de $(4.23)_2$, (4.11) s'écrit donc

$$(4.24)\qquad \delta(\mathscr{M}^{\lambda}\mathscr{B}_{\lambda})=\mathscr{B}^{[\alpha}\mathscr{M}^{\beta]}\delta\omega_{\alpha\beta}+\mathscr{M}_{\lambda}(\nabla_{\rho}\mathscr{B}^{\lambda})\delta x^{\rho}-(\mathscr{M}^{\alpha}\mathscr{B}^{\beta}-\mathscr{B}^{\lambda}\mathscr{M}_{\lambda}g^{\alpha\beta})\nabla_{\beta}(\delta x_{\alpha}).$$

4.2.3. ÉNERGIE CINÉTIQUE DE ROTATION DU SPIN. — Nous avons vu plus haut qu'on ne pouvait considérer qu'une forme « déjà variée » dite de Hertz pour l'énergie cinétique de rotation du spin. Compte tenu de la forme des expressions (3.11) et (3.12) de W, on posera donc pour tenir compte du spin dans l'ouvert $\mathring{\mathscr{B}}$ de M^4 :

$$\boxed{\delta W = \int_{\mathring{\mathscr{B}}} \frac{1}{2} \rho \frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds} \left[\delta\omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} u_\alpha \frac{D}{Ds} (\delta x_\beta) \right] dv_4} \tag{4.25}$$

où $\delta\omega_{\alpha\beta}$ est arbitraire (virtuelle). Compte tenu du fait que $\delta\omega_{\alpha\beta}$ et $S^{\alpha\beta}$ sont P. U., ainsi que des antisymétries, (4.25) s'écrit aussi

$$\delta W = \int_{\mathring{\mathscr{B}}} \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds} \right)_\perp \delta\omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} \rho S^{\beta\alpha} \frac{Du_\alpha}{Ds} u^\gamma \nabla_\gamma (\delta x_\beta) \right] dv_4.$$

Soit,

$$\delta W = \int_{\mathring{\mathscr{B}}} \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds} \right)_\perp \delta\omega_{\alpha\beta} - \nabla_\beta \left(\frac{1}{c^2} \rho S^{\alpha\gamma} \dot{u}_\gamma u^\beta \right) \delta x_\alpha \right] dv_4 + \int_{\mathring{\mathscr{B}}} \nabla_\beta \left(\frac{1}{c^2} \rho S^{\alpha\gamma} \dot{u}_\gamma u^\beta \delta x_\alpha \right) dv_4, \tag{4.26}$$

4.2.4. VARIATION DE L'ÉNERGIE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE. — Compte tenu de (4.13)-(4.15) et de (4.10) et (4.24), on obtient à partir de (4.5) en réarrangeant les termes

$$\delta\tilde{\mathscr{A}}_{(em)} = - \int_{\mathring{\mathscr{B}}} [(\nabla_\beta T^{\alpha\beta}_{(em)}) \delta x_\alpha - \rho \mathscr{B}^{[\alpha} \mathscr{M}^{\beta]} \delta\omega_{\alpha\beta}] dv_4 + \int_{\mathring{\mathscr{B}}} \nabla_\beta (T^{\alpha\beta}_{(em)} \delta x_\alpha) dv_4, \tag{4.27}$$

où l'on a posé

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{T}^{\alpha\beta}_{(em)} = {} & \left(\frac{1}{2} \mathscr{B}^\lambda \mathscr{B}_\lambda - \rho \mathscr{B}^\lambda \mathscr{M}_\lambda \right) \frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} - \mathscr{B}^\alpha \mathscr{B}^\beta + \rho \mathscr{M}^\alpha \mathscr{B}^\beta \\ & + \left(\frac{1}{2} \mathscr{B}^\lambda \mathscr{B}_\lambda - \rho \mathscr{B}^\lambda \mathscr{M}_\lambda \right) P^{\alpha\beta}. \end{aligned}} \tag{4.28}$$

Remarque (i). — Dans la présente formulation, nous n'avons pas considéré une variation propre d'un paramètre électromagnétique (le 4-potentiel électromagnétique A_α) car nous ne cherchons pas à déduire les équations de Maxwell de la formulation variationnelle (comparer avec [*15*] [*16*] [*1*]).

Indiquons seulement ce qu'il faudrait faire si nous le cherchions. On a classiquement

$$F_{\alpha\beta} = 2\nabla_{[\alpha}A_{\beta]}. \tag{4.29}$$

Introduisons le 4-*potentiel magnétique* P. U. a_α et le *potentiel électrique scalaire* φ grâce à la décomposition de A_α sur $M^3_\perp(x)$ et le long de u_α :

$$A_\alpha = \frac{\varphi}{c} u_\alpha + a_\alpha, \qquad \varphi \equiv -\frac{1}{c} A_\alpha u^\alpha, \qquad a_\alpha u^\alpha = 0. \tag{4.30}$$

Reportant (4.30) dans (4.29) et ce résultat dans $(4.4)_2$ et $(4.4)_3$, on obtient

$$\mathscr{E}_\alpha = -(\nabla_\alpha \varphi)_\perp - \frac{1}{c}(\underset{u}{\pounds} a_\alpha)_\perp - \frac{1}{c^2} \varphi \frac{Du_\alpha}{Ds}, \tag{4.31}$$

$$\mathscr{B}^\alpha = \frac{1}{ic} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\delta \nabla_\beta a_\gamma + \frac{\varphi}{ic^2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \omega_{\gamma\beta} u_\delta, \tag{4.32}$$

représentations qui sont valables dans la matière déformable en mouvement et qui, dans un *repère au repos*, se réduisent aux relations tridimensionnelles classiques

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}.$$

Dans la présente étude, $\mathscr{E}_\alpha = 0$; on n'a donc qu'à considérer le potentiel magnétique P. U. a_α. Introduisant alors la variation « invariante de jauge » de Weiss (cf. [*1*] [*15*]), on mettrait en évidence une variation propre de a_α et une variation due à la variation de la ligne d'univers $\mathscr{C}$. La variation de $\mathscr{B}^\alpha$ et la variation propre de a_α permettraient alors d'obtenir l'un des groupes des équations de Maxwell (avec $\mathscr{E}^\alpha = \mathscr{P}^\alpha = 0$, $q = 0$) sous forme 4-vectorielle, l'autre groupe étant identiquement vérifié d'après (4.32). Nous ne ferons pas ici ce calcul.

Remarque (ii). — Le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique dans la matière défini par (4.28) n'est autre que le tenseur introduit par Grot et Eringen [*17*], soit

$$T^{\alpha\beta}_{(em)} = -F^{\alpha}_{\cdot\mu} G^{\mu\beta} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} g^{\alpha\beta}, \qquad G^{\mu\beta} \equiv F^{\mu\beta} - \pi^{\mu\beta}, \tag{4.33}$$

compte tenu de $(4.4)_1$, $(3.3)_1$ et des hypothèses (3.5) et (4.2). Rappelons que le tenseur non symétrique (4.33) déjà utilisé en [*1*] [*3*] et [*16*] est différent de ceux introduits par Abraham et Minkowski, mais il est proche de celui construit par Suttorp et de Groot [*18*] ainsi que du tenseur considéré par Israel [*19*].

4.3. Variation de l'énergie interne.

4.3.1. INTRODUCTION. — En physique du continu, l'énergie interne spécifique e sert à représenter l'état thermodynamique du système et les interactions internes (ou « efforts intérieurs »). Pour un *fluide électromagnétique*, les variables d'état thermodynamiques sont la densité ρ, l'entropie η et la densité de moment magnétique $\mathcal{M}^\alpha$. La dépendance de e par rapport à ρ pour un fluide représente l'interaction matière-matière puisqu'elle conduit à la définition de la pression thermodynamique, notion qui est équivalente à celle de contrainte normale. De plus, nous cherchons à tenir compte des interactions entre spins magnétiques voisins. Il est montré en théorie classique du micromagnétisme ([*20*] [*9*]) que la dépendance fonctionnelle de l'énergie interne spécifique par rapport au gradient de la magnétisation permet la représentation phénoménologique des forces d'échange d'Heisenberg, c'est-à-dire, des interactions entre spins voisins. On prendra donc dans notre étude

$$\boxed{e = e(\rho, \eta, \mathcal{M}^\alpha, \mathfrak{M}_{\alpha\beta})} \tag{4.34}$$

où $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ est le tenseur P. U. défini en (3.15). Résultant d'une approximation infinitésimale dans le voisinage d'une ligne d'univers $\mathscr{C}$ (cf. 3.14), la définition (3.15) montre que l'interaction représentée dans (4.34) par l'intermédiaire de la dépendance par rapport à $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ est à courte distance, soit, dans le langage de la mécanique des milieux continus, est une « action de contact » ([7]). On dit que l'on a une *théorie du premier gradient* car on ne tient compte que du premier gradient de la magnétisation dans l'expression (4.34). On montre plus loin que la dépendance de e par rapport à $\mathcal{M}^\alpha$ sert à représenter les interactions matière-spin.

4.3.2. CONSÉQUENCES DE L'INVARIANCE DE LORENTZ. — L'énergie interne spécifique e est un invariant de Lorentz. En conséquence, si l'on considère une transformation infinitésimale sous la forme (en coordonnées rectangulaires)

$$\overset{*}{x}{}^\alpha = (\delta^\alpha_\beta + \varepsilon Q^\alpha{}_\beta)x^\beta, \qquad Q_{\alpha\beta} = - Q_{\beta\alpha}, \tag{4.35}$$

où ε est un infiniment petit, on obtient pour les quantités $\mathcal{M}^\alpha$ et $\mathfrak{M}^{\alpha\beta}$ les lois de transformation

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathcal{M}}{}^\alpha &= \mathcal{M}^\alpha + \varepsilon Q^\alpha_{.\beta}\mathcal{M}^\beta, \\ \overset{*}{\mathfrak{M}}{}^{\alpha\beta} &= \mathfrak{M}^{\alpha\beta} + \varepsilon(\mathfrak{M}^{\alpha\lambda}Q^\beta_{.\lambda} + \mathfrak{M}^{\mu\beta}Q^\alpha_{.\mu}) + 0(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{4.36}$$

([7]) On sait d'après les travaux de Dirac, Heisenberg et Bloch que l'intensité des interactions entre spins décroît très rapidement avec la distance.

Avec $\rho = \overset{*}{\rho}, \eta = \overset{*}{\eta}$ et (4.36), on vérifie que la condition $e = \overset{*}{e}$ pour tout $Q_{\alpha\beta}$ à ε^2 près conduit aux équations

$$(4.37) \qquad \mathscr{L}^{[\alpha\beta]} \equiv \frac{\partial e}{\partial \mathscr{M}_{[\alpha}} \mathscr{M}^{\beta]} + \frac{\partial e}{\partial \mathfrak{M}_{[\alpha|\mu|}} \mathfrak{M}^{\beta]}_{\cdot\mu} + \frac{\partial e}{\partial \mathfrak{M}_{\mu[\alpha}} \mathfrak{M}_{\mu}^{\cdot\beta]} = 0,$$

équations que l'on peut projeter sur $M^3_\perp$ et dans la direction de u^α en tout point $\boldsymbol{x}$ de $\mathscr{C}$ suivant

$$(4.38) \qquad (\mathscr{L}^{[\alpha\beta]})_\perp = 0, \qquad u_\alpha \mathscr{L}^{[\alpha\beta]} = 0.$$

La seconde de ces équations, valable pour tout $\mathscr{M}^\alpha$ et tout $\mathfrak{M}^{\alpha\beta}$ [considérés comme variables indépendantes d'après (4.34)] est satisfaite si

$$(4.39) \qquad \frac{\partial e}{\partial \mathscr{M}_\alpha} u_\alpha = 0, \qquad \frac{\partial e}{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}} u_\alpha = 0, \qquad \frac{e}{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}} u_\beta = 0.$$

On peut donc définir les champs P. U. ${}^l\mathscr{B}^\alpha$ et $\tau^{\alpha\beta}$ par

$$(4.40) \qquad \boxed{{}^l\mathscr{B}^\alpha \equiv -\left(\frac{\partial e}{\partial \mathscr{M}_\alpha}\right)_\perp = -\frac{\partial e}{\partial \mathscr{M}_\alpha}, \qquad \tau^{\alpha\beta} \equiv \rho\left(\frac{\partial e}{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}\right)_\perp = \rho\frac{\partial e}{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}.}$$

L'équation $(4.38)_1$ fournit alors la condition

$$(4.41) \qquad \boxed{-\rho\,{}^l\mathscr{B}^{[\alpha}\mathscr{M}^{\beta]} + \tau^{[\alpha}_{\cdot\mu}\mathfrak{M}^{\beta]\mu} + \tau^{\mu[\alpha}\mathfrak{M}_{\mu}^{\cdot\beta]} = 0.}$$

Le champ de 4-vecteur P. U. ${}^l\mathscr{B}^\alpha$ est homogène à une induction magnétique ; on l'appellera *induction magnétique locale* — ou *champ d'anisotropie magnétique* par analogie avec la théorie du micromagnétisme (cf. [9]). D'après ce qui a été dit plus haut, on peut appeler le tenseur P. U. $\tau^{\alpha\beta}$ qui, en général, a neuf composantes indépendantes, *tenseur d'interaction des spins.* On peut maintenant calculer δe.

4.3.3. VARIATION. — On a immédiatement

$$(4.42) \qquad \rho\delta e = \frac{p}{\rho}\delta\rho + \rho\theta\delta\eta - {}^l\mathscr{B}_\alpha(\delta\mathscr{M}^\alpha)_\perp + \tau^{\alpha\beta}(\delta\mathfrak{M}_{\alpha\beta})_\perp$$

où l'on a défini la *pression thermodynamique* p et la *température* propre θ d'une manière usuelle par

$$(4.43) \qquad \boxed{p \equiv \rho^2 \left.\frac{\partial e}{\partial \rho}\right|_{\eta,\mathscr{M}^\alpha,\mathfrak{M}_{\alpha\beta}}, \qquad \theta \equiv \left.\frac{\partial e}{\partial \eta}\right|_{\rho,\mathscr{M}^\alpha,\mathfrak{M}_{\alpha\beta}}.}$$

Moyennant l'utilisation de (4.8), de la contrainte (4.6) et de (2.10), on peut montrer que

$$(4.44) \qquad \rho\theta\delta\eta = \rho\theta\eta\frac{u^\alpha u^\beta}{c^2}\nabla_{(\beta}(\delta x_{\alpha)}).$$

Un long calcul qui requiert l'emploi de (3.15), (4.16), (4.17), (3.9) et (4.23) et que nous n'expliciterons pas conduit à l'expression du dernier terme de (4.42). On obtient :

$$(4.45)\quad \tau^{\alpha\beta}\delta\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = \nabla_\mu(\mathrm{M}^{\beta\alpha\mu}\delta\omega_{\alpha\beta}) - (\nabla_\mu\tau^{[\alpha|\mu|})\mathcal{M}^{\beta]}\delta\omega_{\alpha\beta} - \left(\frac{2}{c^2}\mathrm{M}^{\mu\alpha\nu}e_{\mu\nu}u^\beta + \frac{2}{c^2}\mathrm{M}^{\gamma\mu(\alpha}u^{\beta)}\Omega_{\mu\gamma} + \tau_\mu^{\cdot\beta}\mathfrak{M}^{\mu\alpha}\right)\nabla_\beta(\delta x_\alpha),$$

où l'on a défini le tenseur P. U. $\mathrm{M}^{\gamma\mu\alpha}$ par

$$(4.46)\quad \boxed{\mathrm{M}^{\gamma\mu\alpha} \equiv \mathcal{M}^{[\gamma}\tau^{\mu]\alpha},\quad \mathrm{M}^{\gamma\mu\alpha} = -\mathrm{M}^{\mu\gamma\alpha},\quad \mathrm{M}^{\gamma\mu\alpha}u_\gamma = 0,\quad \mathrm{M}^{\gamma\mu\alpha}u_\alpha = 0.}$$

Reportant alors les résultats (4.13), (4.44), $(4.23)_2$ et (4.45) dans (4.42), il vient

$$(4.47)\quad \rho\delta e = -\left(\frac{2}{c^2}\mathrm{M}^{\mu\alpha\nu}e_{\mu\nu}u^\beta + \frac{2}{c^2}\mathrm{M}^{\gamma\mu(\alpha}u^{\beta)}\Omega_{\mu\gamma} + \tau_\mu^{\cdot\beta}\mathfrak{M}^{\mu\alpha} - \rho\theta\eta\frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} + p\mathrm{P}^{\alpha\beta}\right)\nabla_\beta(\delta x_\alpha) - [\rho^l\mathscr{B}^{[\alpha}\mathcal{M}^{\beta]} + (\nabla_\mu\tau^{[\alpha|\mu|})\mathcal{M}^{\beta]}] \times \delta\omega_{\alpha\beta} + \nabla_\mu(\mathrm{M}^{\beta\alpha\mu}\delta\omega_{\alpha\beta}).$$

Enfin, au cours de la variation, il faut tenir compte de la contrainte $(2.2)_2$ imposée à la 4-vitesse. Pour ceci, on introduit un multiplicateur de Lagrange $\mathfrak{M}$. On écrit donc l'action représentant la matière associée à $\mathring{\mathscr{B}} \subset \mathrm{M}^4$ sous la forme

$$(4.48)\quad \mathscr{A}_{(m)} = -\int_{\mathring{\mathscr{B}}}\rho\left[e - \frac{1}{2}\mathfrak{M}(u^\alpha u_\alpha + c^2)\right]dv_4.$$

La variation de $\mathfrak{M}$ fournira la contrainte $(2.2)_2$. Compte tenu de (4.15), (4.47) et (4.12), on a donc

$$(4.49)\quad \delta\mathscr{A}_{(m)} = -\int_{\mathring{\mathscr{B}}}\{(\nabla_\beta\tilde{\mathrm{T}}^{\alpha\beta})\delta x_\alpha - [\rho^l\mathscr{B}^{[\alpha}\mathcal{M}^{\beta]} + (\nabla_\mu\tau^{[\alpha|\mu|})\mathcal{M}^{\beta]}]\delta\omega_{\alpha\beta}\}\,dv_4 + \int_{\mathring{\mathscr{B}}}\nabla_\mu(\tilde{\mathrm{T}}^{\alpha\mu}\delta x_\alpha - \mathrm{M}^{\beta\alpha\mu}\delta\omega_{\alpha\beta})dv_4,$$

où l'on a posé

$$(4.50)\quad \tilde{\mathrm{T}}^{\alpha\beta} \equiv \rho\left(\mathfrak{M} + \frac{\psi}{c^2}\right)u^\alpha u^\beta + p\mathrm{P}^{\alpha\beta} + \mathfrak{M}^{\mu\alpha}\tau_\mu^{\cdot\beta} + \frac{2}{c^2}\mathrm{M}^{\mu\alpha\nu}e_{\mu\nu}u^\beta + \frac{2}{c^2}\mathrm{M}^{\gamma\mu(\alpha}u^{\beta)}\Omega_{\mu\gamma}$$

où ψ est l'énergie libre spécifique définie par la transformation de Legendre

$$(4.51)\quad \psi(\rho, \theta, \mathcal{M}^\alpha, \mathfrak{M}_{\alpha\beta}) = e(\rho, \eta, \mathcal{M}^\alpha, \mathfrak{M}_{\alpha\beta}) - \eta\theta$$

avec, dorénavant,

$$p=\rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho},\quad \eta=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad {}^{l}\mathscr{B}^\alpha=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mathscr{M}_\alpha}\right)_\perp,\quad \tau^{\alpha\beta}=\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{M}_{\alpha\beta}}\right)_\perp. \tag{4.52}$$

4.4. Principe variationnel pour le schéma « ferrofluide parfait ».

4.4.1. ÉNONCÉ. — *Les lois de conservation et les lois de comportement du schéma « ferrofluide parfait relativiste » découlent du principe variationnel*

$$\boxed{\delta\mathscr{A}_{(m)}+\delta\tilde{\mathscr{A}}_{(em)}+\delta\mathrm{W}=0} \tag{4.53}$$

pour toute variation δx_α des lignes de courant $\mathscr{C}$ et toute rotation arbitraire $\delta\omega_{\alpha\beta}$ du spin dans un repère d'inertie, les expressions $\mathscr{A}_{(m)}$, $\tilde{\mathscr{A}}_{(em)}$ et δW étant données respectivement par (4.48), (4.5) *et* (4.25).

4.4.2. DÉMONSTRATION. — Rassemblant les résultats (4.49), (4.27) et (4.26), le principe variationnel (4.53) conduit à

$$-\int_{\mathring{\mathscr{B}}}\left\{(\nabla_\beta \mathrm{T}^{\alpha\beta}_{(\mathrm{tot})})\delta x_\alpha-\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\mathrm{DS}^{\alpha\beta}}{\mathrm{D}s}\right)_\perp+\rho\mathscr{B}^{[\alpha}_{\mathrm{eff.}}\mathscr{M}^{\beta]}\right]\delta\omega_{\alpha\beta}\right\}dv_4 + 0(\partial\mathscr{B})=0 \tag{4.54}$$

où $0(\partial\mathscr{B})$ signifie modulo un terme surfacique et on a défini

$$\mathrm{T}^{\alpha\beta}_{(\mathrm{tot})}\equiv\tilde{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}+\frac{\rho}{c^2}\mathrm{S}^{\alpha\gamma}\frac{\mathrm{D}u_\gamma u^\beta}{\mathrm{D}s}+\tilde{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}_{(em)}, \tag{4.55}$$

$$\mathscr{B}^\alpha_{\mathrm{eff.}}\equiv\mathscr{B}^\alpha+{}^{l}\mathscr{B}^\alpha+\rho^{-1}\nabla_\mu\tau^{\alpha\mu}, \tag{4.56}$$

$$0(\partial\mathscr{B})\equiv\int_{\mathring{\mathscr{B}}}\nabla_\mu(\mathrm{T}^{\alpha\mu}_{(\mathrm{tot})}\delta x_\alpha-\mathrm{M}^{\beta\alpha\mu}\delta\omega_{\alpha\beta})dv_4. \tag{4.57}$$

La dernière expression est en fait une intégrale de surface sur l'hypersurface $\partial\mathscr{B}$, frontière du domaine $\mathscr{B}$ de M^4 dont $\mathring{\mathscr{B}}$ est l'ouvert. On supposera soit que les variations δx_α et $\delta\omega_{\alpha\beta}$ s'annulent sur $\partial\mathscr{B}$, soit que $\partial\mathscr{B}$ est rejetée à l'infini. Notons cependant que $\mathrm{M}^{\beta\alpha\mu}$ intervient sur $\partial\mathscr{B}$ dans un terme de la forme $\mathrm{M}^{\beta\alpha\mu}\mathrm{N}_\mu$ [N_μ : normale unitaire (de genre espace) orientée extérieurement à $\partial\mathscr{B}$] en facteur du terme $\delta\omega_{\alpha\beta}$; ce qui montre bien que l'interaction entre spins magnétiques voisins se manifeste sous la forme d'une *action de contact*, ici un couple surfacique. L'expression (4.54) étant valable pour toute région continue de $\mathring{\mathscr{B}}$ dans M^4 et toutes variations δx_α et $\delta\omega_{\alpha\beta}$, elle conduit aux équations locales de conservation dans $\mathring{\mathscr{B}}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla_\beta \mathrm{T}^{\alpha\beta}_{(\mathrm{tot})} = 0, && (4.58)\\ &\left(\frac{\mathrm{DS}^{\alpha\beta}}{\mathrm{D}s}\right)_\perp = 2\mathscr{M}^{[\alpha}\mathscr{B}^{\beta]}_{\mathrm{eff.}}. && (4.59)\end{aligned}}$$

La première de ces équations exprime évidemment la conservation de l'impulsion-énergie. La seconde fournit l'évolution du spin magnétique $\mathrm{S}^{\alpha\beta}$ dans un repère d'inertie (sous forme covariante). Il reste à établir les expressions de $\Omega_{\alpha\beta}$ et $\mathfrak{M}$ qui figurent dans $\tilde{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}$ et à montrer que (4.59) n'est autre que l'équation de conservation du moment de l'impulsion-énergie.

4.4.3. VITESSE DE PRÉCESSION DU SPIN. — Exprimons le premier membre de (4.59) à l'aide de $(3.6)_1$ et multiplions le résultat par $\frac{1}{ic}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$. On obtient en réarrangeant les indices

$$\left(\frac{\mathrm{D}\mathscr{M}_\gamma}{\mathrm{D}s}\right)_\perp = \left(-\frac{\gamma}{ic}\eta_{\gamma\alpha\beta\delta}\mathscr{B}^\beta_{\mathrm{eff.}}u^\delta\right)\mathscr{M}^\alpha.$$

Identifiant avec $(3.9)_2$, on voit que, $\Omega_{\gamma\alpha}$ étant P. U., la seule possibilité est

$$\boxed{\Omega_{\gamma\alpha} \equiv -\frac{\gamma}{ic}\eta_{\gamma\alpha\beta\delta}\mathscr{B}^\beta_{\mathrm{eff.}}u^\delta.} \tag{4.60}$$

D'après (4.56), la vitesse de précession du spin dans un repère d'inertie provient de l'action conjuguée de l'induction magnétique de Maxwell $\mathscr{B}^\alpha$, du champ d'anisotropie magnétique ${}^l\mathscr{B}^\alpha$ et de l'interaction entre spins magnétiques voisins par l'intermédiaire de $\tau^{\alpha\mu}$. Introduisant le 4-vecteur P. U. π^α défini en (3.10) et tenant compte de $(3.6)_1$, on peut écrire (4.59) sous la forme [8]

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(\frac{\mathrm{D}\pi^{\alpha\beta}}{\mathrm{D}s}\right)_\perp = 2\pi^{[\alpha}\mathscr{M}^{\beta]},\\ &\pi^\alpha = -\gamma\mathscr{B}^\alpha_{\mathrm{eff.}} = -\gamma(\mathscr{B}^\alpha + {}^l\mathscr{B}^\alpha + \rho^{-1}\nabla_\mu\tau^{\alpha\mu}).\end{aligned}} \tag{4.61}$$

4.4.4. CONSERVATION DU MOMENT DE L'IMPULSION-ÉNERGIE. — En développant l'équation (4.59), il vient

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\mathrm{DS}^{\alpha\beta}}{\mathrm{D}s}\right)_\perp = \rho\mathscr{M}^{[\alpha}\mathscr{B}^{\beta]} + \rho\mathscr{M}^{[\alpha l}\mathscr{B}^{\beta]} + \mathscr{M}^{[\alpha}\nabla_\mu\tau^{\beta]\mu}. \tag{4.62}$$

[8] Rappelons que pour un électron isolé de moment magnétique $\boldsymbol{m}$, on a classiquement $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega}_\mathrm{B} \times \boldsymbol{m}$, où $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{B} = -\gamma\mathbf{B}$ est la précession de Larmor.

Mais d'après (4.55), (4.50) et (4.28),

$$(4.63)\quad T^{[\alpha\beta]}_{(\mathrm{tot})} = \mathfrak{M}^{\mu[\alpha}\tau_{\mu}^{\cdot\beta]} + \frac{2}{c^2}M^{\mu[\alpha|\nu|}e_{\mu\nu}u^{\beta]} + \rho\mathcal{M}^{[\alpha}\mathcal{B}^{\beta]} + \frac{\rho}{c^2}S^{[\alpha|\gamma|}\frac{Du_\gamma}{Ds}u^{\beta]}.$$

Eliminant $\rho\mathcal{M}^{[\alpha}\mathcal{B}^{\beta]}$ entre ces deux équations et tenant compte de la condition d'invariance (4.41) également valable si ψ est le potentiel thermodynamique, on arrive, en regroupant les termes, à l'équation

$$(4.64)\quad \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds}\right)_{\perp} + \frac{2}{c^2}S^{[\alpha|\gamma|}u^{\beta]}\frac{Du_\gamma}{Ds}\right] - T^{[\alpha\beta]}_{(\mathrm{tot})} = \left[(\nabla_\mu M^{\alpha\beta\mu})_{\perp} - \frac{2}{c^2}M^{[\alpha|\mu\nu|}u^{\beta]}e_{\mu\nu}\right].$$

Les termes entre [ ] ne sont autres, comme on le vérifie aisément, que les termes $DS^{\alpha\beta}/Ds$ et $\nabla_\mu M^{\alpha\beta\mu}$ non projetés sur $M^3_\perp$. (4.64) s'écrit donc, compte tenu de $(2.10)_1$ et de (2.3), sous la forme canonique d'une loi de conservation pour le moment de l'impulsion-énergie :

$$(4.65)\quad \boxed{\nabla_\mu \mathcal{S}^{\alpha\beta\mu} - T^{[\alpha\beta]}_{(\mathrm{tot})} = 0}$$

où l'on a défini le tenseur total de spin $\mathcal{S}^{\alpha\beta\mu}$ par

$$(4.66)\quad \boxed{\mathcal{S}^{\alpha\beta\mu} \equiv \frac{\rho}{2}S^{\alpha\beta}u^{\mu} - M^{\alpha\beta\mu}, \quad \mathcal{S}^{\alpha\beta\mu} = -\mathcal{S}^{\beta\alpha\mu}, \quad \mathcal{S}^{\alpha\beta\mu}u_\alpha = 0.}$$

Notons que si les équations (4.59) et (4.65) sont équivalentes et si (4.65) se prête mieux à la géométrisation, la forme de l'équation (4.59) ou $(4.61)_1$ est plus intéressante car elle contient l'expression de la vitesse de précession du spin. L'équation cinématique $(3.9)_1$ est également équivalente aux équations (4.59) et (4.65) à γ près bien que sa forme ne soit qu'une conséquence cinématique de la contrainte (3.8). L'intérêt de la présente formulation variationnelle est qu'elle fournit la forme du tenseur de précession en fonction des différentes interactions ainsi que les couplages présents dans le tenseur d'impulsion-énergie.

4.4.5. Détermination du multiplicateur $\mathfrak{M}$. — Ce calcul est assez fastidieux et nous n'en donnons que les étapes principales. Il faut d'abord considérer les résultats intermédiaires suivants :

(*a*) Compte tenu de (3.12), en multipliant (4.64) par $\Omega_{\alpha\beta}$, il vient

$$(T^{[\alpha\beta]}_{(\mathrm{tot})} + \nabla_\mu M^{\alpha\beta\mu})_{\perp}\Omega_{\alpha\beta} = 0.$$

soit, avec (4.63),

$$(4.67)\quad (\nabla_\mu M^{\alpha\beta\mu})_{\perp}\Omega_{\alpha\beta} = -(\mathfrak{M}^{\mu[\alpha}\tau_{\mu}^{\cdot\beta]} + \rho\mathcal{B}^{[\alpha}\mathcal{M}^{\beta]})\Omega_{\alpha\beta}.$$

(*b*) En vertu de la condition (4.41), on a

$$(4.68)\quad \rho^{l}\mathcal{B}^{[\alpha}\mathcal{M}^{\beta]}\Omega_{\alpha\beta} = (\tau^{[\alpha}_{\cdot\mu}\mathfrak{M}^{\beta]\mu} + \tau^{\mu[\alpha}\mathfrak{M}_{\mu}^{\cdot\beta]})\Omega_{\alpha\beta}.$$

(*c*) On calcule $\dfrac{D\psi}{Ds}$ à partir de (4.51) en utilisant $(2.10)_1$, (4.6), (4.52) et $(3.9)_1$. Le calcul, simple mais un peu long et semblable à celui fait pour les variations en vue d'obtenir (4.47), conduit au résultat

$$(4.69)\quad \rho\frac{D\psi}{Ds} = -p\Theta - \rho\frac{D(\eta\theta)}{Ds} - \rho^{l}\mathscr{B}^{[\alpha}\mathscr{M}^{\beta]}\Omega_{\alpha\beta} - \tau^{\mu\beta}\mathfrak{M}_{\mu}^{\cdot\,\alpha}e_{\alpha\beta} + \tau^{[\alpha|\mu|}\mathfrak{M}^{\beta]}_{\cdot\mu}\Omega_{\alpha\beta} + M^{\lambda\mu\nu}\mathscr{A}_{\mu\lambda\nu},$$

où $\mathscr{A}_{\mu\lambda\nu}$ est la quantité cinématique (P. U.) introduite en [*8*] :

$$(4.70)\quad \begin{cases} \mathscr{A}_{\mu\lambda\nu} \equiv \left(\nabla_\nu\Omega_{\mu\lambda} + \dfrac{1}{c^2}\Omega_{\mu\lambda}\dfrac{Du_\nu}{Ds} + \dfrac{2}{c^2}(\nabla_\nu u_{[\mu})\dfrac{Du_{\lambda]}}{Ds}\right)_\perp, \\ \mathscr{A}_{\mu\lambda\nu} = -\mathscr{A}_{\lambda\mu\nu}, \qquad \mathscr{A}_{\mu\lambda\nu}u^\mu = 0, \qquad \mathscr{A}_{\mu\lambda\nu}u^\nu = 0, \end{cases}$$

qui généralise relativistiquement la notion de gradient de la vitesse de précession. Pour déterminer la valeur de $\mathfrak{M}$, nous employons alors la même méthode qu'en [*1*] (introduite par Taub [*21*]) : nous projetons (4.58) selon la direction de u_α de manière à obtenir l'équation de « conservation de l'énergie ». Compte tenu de (4.55), (4.50), (4.28) et $(2.10)_1$, il vient

$$-\left(\rho c^2\frac{D\mathfrak{M}}{Ds} + \rho\frac{D\psi}{Ds} + p\Theta + \mathfrak{M}^{\mu\alpha}\tau_{\mu}^{\cdot\,\beta}e_{\alpha\beta}\right) + A = -\rho\mathscr{B}^{[\alpha}\mathscr{M}^{\beta]}\Omega_{\alpha\beta},$$

où

$$A \equiv u_\alpha\nabla_\beta\left(\frac{\rho}{c^2}S^{\alpha\gamma}\frac{Du_\gamma}{Ds}u^\beta + \frac{2}{c^2}M^{\mu\alpha\nu}e_{\mu\nu}u^\beta + \frac{2}{c^2}M^{\gamma\mu(\alpha}u^{\beta)}\Omega_{\mu\gamma}\right).$$

Le calcul de A se fait en utilisant successivement les résultats (4.67)-(4.69). Le terme $\dfrac{D\psi}{Ds}$ s'élimine et l'équation différentielle, valable le long de la ligne de courant $\mathscr{C}$, qui détermine $\mathfrak{M}$ s'écrit finalement

$$(4.71)\quad \frac{D}{Ds}(c^2\mathfrak{M} - \eta\theta) = 0.$$

Intégrant le long de $\mathscr{C}$ et introduisant la constante d'intégration c^2 — l'énergie au repos par unité de masse propre du fluide — on a donc

$$(4.72)\quad \boxed{\mathfrak{M} = 1 + \frac{\eta\theta}{c^2}.}$$

4.4.6. Résumé des résultats. — Les lois de conservation et les lois de comportement correspondant au schéma « ferrofluide parfait relativiste » sont, dans un ouvert $\mathring{\mathscr{B}}$ de M^4, les équations (4.58), (4.59) ou (4.65), $(2.10)_1$, (4.6) et (4.52), auxquelles il convient d'ajouter la contrainte (3.8) et les équations de Maxwell correspondant aux hypothèses simplificatrices (3.5) et (4.2) ([9]). Compte tenu des résultats (4.50), (4.28), (4.55) et (4.72), on peut écrire le tenseur total d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}_{(tot)}$ sous la forme canonique décomposée :

$$(4.73) \qquad T^{\alpha\beta}_{(tot)} \equiv \omega_{(tot)} u^\alpha u^\beta + p^\alpha u^\beta + \bar{p}^\beta u^\alpha - t^{\beta\alpha} - \bar{t}^{\beta\alpha}_{(em)},$$

avec

$$(4.74) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_{(tot)} &\equiv \rho\left[1 + c^{-2}\left(\psi + \eta\theta + \frac{1}{2\rho}\mathscr{B}^\lambda \mathscr{B}_\lambda - \mathscr{M}^\lambda \mathscr{B}_\lambda\right)\right], \\ p^\alpha &\equiv \frac{1}{c^2}\left(\rho S^{\alpha\gamma}\frac{Du_\gamma}{Ds} + 2M^{\mu\alpha\nu}e_{\mu\nu} + M^{\gamma\mu\alpha}\Omega_{\mu\gamma}\right), \\ \bar{p}^\beta &\equiv \frac{1}{c^2} M^{\gamma\mu\beta}\Omega_{\mu\gamma}, \\ t^{\beta\alpha} &\equiv -\ p P^{\alpha\beta} - \tau^{\mu\beta}\mathfrak{M}_\mu^{\cdot\alpha} \\ \bar{t}^{\beta\alpha}_{(em)} &\equiv \mathscr{B}^\alpha \mathscr{B}^\beta - \rho \mathscr{M}^\alpha \mathscr{B}^\beta - \left(\frac{1}{2}\mathscr{B}^\lambda \mathscr{B}_\lambda - \rho \mathscr{B}^\lambda \mathscr{M}_\lambda\right) P^{\alpha\beta}, \end{aligned} \right.$$

où $\Omega_{\gamma\alpha}$ et $M^{\gamma\mu\alpha}$ sont respectivement donnés par (4.60) et $(4.46)_1$ et p, θ, ${}^l\mathscr{B}^\alpha$ et $\tau^{\alpha\beta}$ sont déterminés à partir de ψ par les équations (4.52).

4.5. **Équation de conservation de l'énergie.**

On peut donner une forme remarquable à l'équation de « conservation de l'énergie ». Transformant le troisième terme du membre de droite de (4.69) à l'aide de (4.68), on a

$$(4.75) \qquad \rho\frac{D(\psi + \eta\theta)}{Ds} = -\ p\Theta - \tau^{\mu\beta}\mathfrak{M}_\mu^{\cdot\alpha}(e_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta}) + M^{\lambda\mu\nu}\mathscr{A}_{\mu\lambda\nu}.$$

Mais, suivant $(4.74)_4$ et la définition $\Theta \equiv P^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}$, on a

$$(4.76) \qquad t^{(\beta\alpha)} = -\ (pP^{\alpha\beta} + \tau^{\mu(\beta}\mathfrak{M}_\mu^{\cdot\alpha)}), \qquad t^{[\beta\alpha]} = -\ \tau^{\mu[\beta}\mathfrak{M}_\mu^{\cdot\alpha]}.$$

Avec (4.51) et (4.76), on voit que (4.75) n'est autre que ([10])

$$(4.77) \qquad \boxed{\rho\frac{De}{Ds} = t^{(\beta\alpha)}\sigma_{\alpha\beta} + t^{[\beta\alpha]}v_{\alpha\beta} + M^{\lambda\mu\nu}\mathscr{A}_{\mu\lambda\nu},}$$

([9]) Ces équations de Maxwell sont données sous forme 4-vectorielle dans la référence [*3*].

([10]) L'équation complète pour des processus thermodynamiques généraux dans des milieux relativistes avec spin a été obtenue par d'autres moyens dans la référence [*24*] (équation 2.4) :

$$\rho\frac{De}{Ds} + P_\beta^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma q^\beta + \rho h = t^{(\beta\alpha)}\sigma_{\alpha\beta} + t^{[\beta\alpha]}v_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta\gamma}\mathscr{A}_{\beta\alpha\gamma} + \mathscr{E}_\gamma j^\gamma$$

où $t^{\beta\alpha}$ et $M^{\alpha\beta\gamma}$ présentent des parties conservatives dérivées d'un potentiel, mais aussi des parties dissipatives, et q^β et h sont respectivement le 4-vecteur P. U. flux de chaleur et la source massique de chaleur.

où le tenseur antisymétrique P. U. $\nu_{\alpha\beta}$ représente la vitesse relative de précession du spin par rapport au fluide rotationnel :

$$(4.78) \qquad \boxed{\nu_{\alpha\beta} \equiv \omega_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta} = -\nu_{\beta\alpha}, \qquad \nu_{\alpha\beta}u^{\alpha} = 0.}$$

La relation (4.77) n'est valable que pour des processus thermodynamiques réversibles ([10]). En accord avec l'interprétation de la thermodynamique des milieux continus (cf. Germain [*22*], de Groot et Mazur [*25*]) et la notion de dualité inhérente à cette thermodynamique, l'expression (4.77) signifie que $t^{(\beta\alpha)}$, $t^{[\beta\alpha]}$ (les parties symétriques et antisymétriques du *tenseur relativiste des contraintes*) et $M^{\lambda\mu\nu}$ sont les « forces » dérivables du potentiel e, les quantités cinématiques $\sigma_{\alpha\beta}$, $\nu_{\alpha\beta}$ et $\mathscr{A}_{\mu\lambda\nu}$ étant les « vitesses généralisées » correspondantes. Il s'ensuit que nous avons une interprétation du couplage entre le champ de spin et le champ de vitesse du fluide analogue à celle décrite dans les théories phénoménologiques ou statistiques des milieux continus avec microstructure ([11]).

4.6. **Conséquences de l'isotrope du fluide et linéarisation.**

Le schéma établi au paragraphe 4.4 comporte des lois de comportement — pour ${}^{l}\mathscr{B}^{\alpha}$ et $\tau^{\alpha\beta}$ (ou $M^{\alpha\beta\mu}$) — qu'on peut qualifier de *non linéaires* car les potentiels ψ ou e sont des fonctions non spécifiées de leurs arguments tensoriels. Par ailleurs, nous n'avons pas tenu compte d'une propriété essentielle liée au caractère spécifique des fluides : relativistes ou non, *les fluides sont nécessairement isotropes* ([12]). Le potentiel e (Eq. 4.34) doit donc être nécessairement une fonction *isotrope* de ses arguments. Les arguments tensoriels $\mathscr{M}^{\alpha}$ et $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ étant P. U., donc essentiellement équivalents à des arguments tridimensionnels ([13]), on peut employer les théo-

([11]) « The spin field is a kinematical macroscopic representation of the internal angular momentum of spinning molecules and is dynamically coupled to the fluid velocity by means of the collisional interactions of the translating and rotating molecules. This coupling was described somewhat earlier by Born [*26*] and later by Grad [*27*] who regarded the difference between the fluid vorticity $\frac{1}{2}\,\mathbf{V} \times \mathbf{U}$ and the molecular spin precession $\mathbf{W}$ as the kinematical strain field responsible for giving rise to an asymmetric state of stress » ([*25*], p. 914).

([12]) On montre que ceci est une conséquence du fait que les fluides n'ont aucune « mémoire » d'une configuration antérieure. La démonstration, en mécanique classique des milieux continus, est donnée dans [*28*].

([13]) La notion d'isotropie (et de groupe cristallographique) est liée au concept euclidien tridimensionnel de l'espace physique habituel ; l'isotropie devrait donc être étudiée dans un repère orthonormé, en x sur $\mathscr{C}$, du type introduit en (4.18). Cependant, les invariants obtenus en (4.80) sont identiques à ceux que l'on formerait à partir des composantes non holonomes de $\mathscr{M}^{\alpha}$ et $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ sur un tel repère.

rèmes récents de Wang [29] sur les représentations des fonctions isotropes. $\mathcal{M}^\alpha$ étant P. U. et devant vérifier la contrainte (3.8), $\mathcal{M}^\alpha$ et $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ n'ont respectivement que deux et neuf composantes scalaires indépendantes, soit N = 11. D'après Wang [29], la dimensionnalité de l'espace étant n (ici $n = 3$ car l'espace de représentation de $\mathcal{M}^\alpha$ et $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ est $\mathrm{M}_\perp^3$), pour que le scalaire e soit une fonction isotrope, il faut et il suffit que e soit une fonction de $\mathrm{N} - \dfrac{n(n-1)}{2} = 11 - 3 = 8$ invariants fonctionnellement indépendants entre eux et construits à partir de $\mathcal{M}^\alpha$ et $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$. On aura donc

$$e = e(\rho, \eta, \mathrm{I}_{(\alpha)}\,;\, \alpha = i, \ldots, 8). \tag{4.79}$$

Les invariants peuvent être choisis parmi les listes fournies par Spencer [30] en notant que $\mathcal{M}^\alpha$ et $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ se comportent comme des vecteurs axiaux ; on peut prendre

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{I}_{(1)} = \frac{1}{2}\mathcal{M}^\alpha\mathcal{M}_\alpha, & \mathrm{I}_{(2)} = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}^\alpha_{.\alpha})^2, & \mathrm{I}_{(3)} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}^{\alpha\beta}\mathfrak{M}_{\alpha\beta}, \\ \mathrm{I}_{(4)} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}^{\alpha\beta}\mathfrak{M}_{\beta\alpha}, & \mathrm{I}_{(5)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,(\mathcal{M}^\gamma)\mathcal{M}^\alpha\mathcal{M}^\beta\mathfrak{M}_{(\alpha\beta)}, & \\ \mathrm{I}_{(6)} = \frac{1}{2}\mathcal{M}^\alpha\mathcal{M}^\beta\mathcal{M}^\gamma\mathcal{M}^\delta\mathfrak{M}_{(\alpha\beta)}\mathfrak{M}_{(\gamma\delta)}, & & \\ \mathrm{I}_{(7)} = \frac{1}{3}\mathfrak{M}^{\alpha\beta}\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\mathfrak{M}^\gamma_{.\alpha}, & \mathrm{I}_{(8)} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}^{\alpha\beta}\mathfrak{M}_{\beta\gamma}\mathcal{M}^\gamma\mathcal{M}_\alpha, & \end{array}\right. \tag{4.80}$$

qui satisfont au critère d'indépendance fonctionnelle. Suivant (4.40), on aura donc

$${}^l\mathscr{B}^\alpha = -\sum_{(\beta)}\alpha_{(\beta)}\frac{\partial \mathrm{I}_{(\beta)}}{\partial \mathcal{M}_\alpha}, \qquad \tau^{\alpha\beta} = \rho\sum_{(\beta)}\alpha_{(\beta)}\frac{\partial \mathrm{I}_{(\beta)}}{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}, \tag{4.81}$$

où les coefficients scalaires $\alpha_{(\beta)}$, $\beta = 1, \ldots, 8$, sont encore des fonctions de ρ, η et des $\mathrm{I}_{(\beta)}$. Des expressions *finies* pour ${}^l\mathscr{B}^\alpha$ et $\tau^{\alpha\beta}$ découlent immédiatement des équations (4.81) et (4.80). Ce sont des lois de comportement *exactes* pour le schéma « ferrofluide parfait ». Nous ne donnerons pas ces expressions mais considérons des lois de comportement *quasi linéaires*. Posons $0(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ l'ordre de grandeur des composantes de $\mathcal{M}^\alpha$. On suppose que $0(\mathfrak{M}_{\alpha\beta}) = 0(\boldsymbol{\mathcal{M}})$. Les invariants $\mathrm{I}_{(\beta)}$, $\beta = 1, \ldots, 4$ sont $0(\boldsymbol{\mathcal{M}}^2)$ et tous les autres invariants que l'on peut construire à l'aide de $\mathcal{M}^\alpha$ et $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ sont d'un ordre supérieur. De manière à obtenir des lois linéaires isotropes de comportement, il suffit donc de ne considérer que les invariants d'ordre $0(\boldsymbol{\mathcal{M}}^2)$. Avec cette hypothèse, on obtient à partir de (4.81) et (4.80) :

$$\left\{\begin{array}{l} {}^l\mathscr{B}^\alpha = -\alpha_{(1)}\mathcal{M}^\alpha, \\ \tau^{\alpha\beta} = \rho[\alpha_{(2)}\mathfrak{M}^\gamma_{.\gamma}\mathrm{P}^{\alpha\beta} + \alpha_{(3)}\mathfrak{M}^{\alpha\beta} + \alpha_{(4)}\mathfrak{M}^{\beta\alpha}] \end{array}\right. \tag{4.82}$$

et

$$\text{(4.83)} \quad M^{\gamma\alpha\beta} \equiv \mathcal{M}^{[\gamma}\tau^{\alpha]\beta} = \rho[\alpha_{(2)}\mathfrak{M}^{\mu}_{.\mu}\mathcal{M}^{[\gamma}P^{\alpha]\beta} + \alpha_{(3)}\mathcal{M}^{[\gamma}\mathfrak{M}^{\alpha]\beta} + \alpha_{(4)}\mathcal{M}^{[\gamma}\mathfrak{M}^{\beta]\alpha}]$$

où, maintenant

$$\text{(4.84)} \quad \alpha_{(\beta)} = \alpha_{(\beta)}(\rho, \eta, \boldsymbol{\mathcal{M}}^2), \qquad \beta = 1, \ldots, 8, \qquad \boldsymbol{\mathcal{M}}^2 \equiv P^{\alpha\beta}\mathcal{M}_\alpha\mathcal{M}_\beta.$$

Les équations (4.82) et (4.83) sont des lois de comportement *quasi linéaires* pour un fluide ferromagnétique parfait ([14]). On remarque que : (*a*) ${}^{l}\mathcal{B}^{\alpha}$ est colinéaire à $\mathcal{M}^{\alpha}$; d'après (4.59), le champ d'anisotropie magnétique ne joue aucun rôle dans ce fluide. Il jouerait néanmoins un rôle si l'on avait conservé l'expression complète (4.79) ; (*b*) il n'y a évidemment aucun effet de magnétostriction ou de piezomagnétisme dans le fluide [cf. $(4.74)_4$] ; (*c*) les termes représentant l'interaction entre spins magnétiques voisins dans les expressions $(4.74)_{2\text{-}4}$ sont toujours en $0(\boldsymbol{\mathcal{M}}^2)$. Il en est de même pour le terme de forces d'échange qui contribue au second membre de l'équation (4.59).

On peut montrer suivant une méthode déjà classique (cf. [*31*]) que l'approximation faite ci-dessus est équivalente à celle qu'on obtiendrait en considérant un développement limité de e sous la forme

$$\text{(4.85)} \quad e(\rho, \eta, \mathcal{M}^\alpha, \mathfrak{M}_{\alpha\beta}) = \tilde{e}(\rho, \eta) + \frac{1}{2}\alpha_{(1)}P^{\alpha\beta}\mathcal{M}_\alpha\mathcal{M}_\beta + \frac{1}{2}(\alpha_{(2)}P^{\alpha\beta}P^{\gamma\delta} + \alpha_{(3)}P^{\alpha\gamma}P^{\beta\delta} + \alpha_{(4)}P^{\alpha\delta}P^{\gamma\beta})\mathfrak{M}_{\alpha\beta}\mathfrak{M}_{\gamma\delta} + 0(\boldsymbol{\mathcal{M}}^3),$$

e étant *définie positive* à $0(\boldsymbol{\mathcal{M}}^3)$ près si et seulement si

$$\alpha_{(1)} \geqq 0, \qquad 3\alpha_{(2)} + \alpha_{(3)} + \alpha_{(4)} \geqq 0, \qquad \alpha_{(4)} + \alpha_{(3)} \geqq 0 \geqq \alpha_{(4)} - \alpha_{(3)}.$$

Cependant, le second terme du développement (4.85) est constant (si $\alpha_{(1)} = $ cte) d'après (3.8) le long de $\mathscr{C}$; il n'est donc pas nécessaire de le considérer.

4.7 **Commentaires.**

(*a*) A notre connaissance, le modèle construit dans ce paragraphe est le seul modèle complet de fluide relativiste à spin dans lequel on essaie de tenir compte d'une manière « phénoménologique » de l'interaction entre spins. On notera l'intérêt de la formulation variationnelle qui permet d'obtenir des expressions du type (4.76) qu'il serait bien difficile de postuler. (*b*) Dans l'approximation dite « semi-classique » où l'on néglige les

([14]) $\tau^{\alpha\beta}$ est linéaire en $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ mais $M^{\gamma\alpha\beta}$ est $0(\boldsymbol{\mathcal{M}}^2)$; l'équation (4.59) est intrinsèquement non linéaire.

forces d'échange de Heisenberg, alors $2\mathcal{S}^{\alpha\beta\mu} = \rho S^{\alpha\beta}u^{\mu}$, et les équations (4.59), $(4.74)_{2-4}$, (4.60) et (4.63), se réduisent à

$$
(4.86)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds}\right)_{\perp} = 2\mathcal{M}^{[\alpha}\mathcal{B}^{\beta]},\\
&p^{\alpha} = \frac{\rho}{c^2}S^{\alpha\gamma}\frac{Du_{\gamma}}{Ds}, \qquad \bar{p}^{\beta} = 0, \qquad t^{\beta\alpha} = -\,pP^{\alpha\beta},\\
&\Omega_{\alpha\beta} = -\frac{\gamma}{ic}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{B}^{\gamma}u^{\delta} \equiv -\,\gamma F_{\alpha\beta},\\
&T^{[\alpha\beta]}_{(\mathrm{tot})} = \rho\mathcal{M}^{[\alpha}\mathcal{B}^{\beta]} + p^{[\alpha}u^{\beta]}.
\end{aligned}
\right.
$$

On retrouve ainsi la théorie simplifiée des fluides relativistes à spin exposée par Halbwachs [*6*]; (*c*) Le modèle thermodynamiquement réversible obtenu ici peut être complété par l'étude des phénomènes irréversibles: viscosité, relaxation du spin magnétique, conductions électrique et calorique, suivant une analyse analogue à celle faite en [*24*].

5. LE SCHÉMA « MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE PARFAITE » COMME CAS LIMITE

Considérons le cas où le fluide examiné précédemment est *paramagnétique*. Dans ce cas, les notions de spin magnétique et de forces d'échange — ou d'interactions entre spins voisins — n'ont pas de sens. En conséquence, $S^{\alpha\beta}$ est nul et e ne peut dépendre de $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$; donc $\tau^{\alpha\beta}$ et $M^{\alpha\beta\gamma}$ sont nuls. Cependant $\mathcal{M}^{\alpha}$ est différent de zéro car la relation gyromagnétique (3.7) n'est pas valable. Le tenseur d'impulsion-énergie total devient symétrique. L'hypothèse (3.8) n'a plus de sens et on ne peut construire une équation cinématique telle que $(3.9)_1$. On est réduit à considérer $\delta\mathcal{M}^{\alpha}$ comme variation indépendante dans la formulation variationnelle du paragraphe 4.4. Cette variation indépendante conduit à l'*équation d'équilibre* entre l'induction de Maxwell et l'induction magnétique locale :

$$(5.1)\qquad \mathcal{B}^{\alpha} + {}^{l}\mathcal{B}^{\alpha} = 0.$$

D'où, avec la loi de comportement $(4.40)_1$,

$$(5.2)\qquad \mathcal{B}^{\alpha} = \left(\frac{\partial e}{\partial \mathcal{M}_{\alpha}}\right)_{\perp}.$$

Dans le cadre de l'approximation linéaire du fluide isotrope du paragraphe précédent, il vient

$$(5.3)\qquad \mathcal{B}^{\alpha} = \alpha_{(1)}(\rho, \eta, \mathcal{M}^2)\mathcal{M}^{\alpha}, \qquad \alpha_{(1)} \geqq 0.$$

L'induction magnétique et la magnétisation sont colinéaires. On posera

$$(5.4) \qquad \alpha_{(1)} \equiv \rho \frac{\mu}{\mu - 1}, \qquad \mu = \mu(\rho, \eta, \mathcal{M}^2) > 1,$$

(si $\mu \mapsto 1$, on doit avoir $|\mathcal{M}^\alpha| \mapsto 0$). Avec la relation $\mathcal{H}^\alpha \equiv \mathcal{B}^\alpha - \rho\mathcal{M}^\alpha$, on obtient

$$(5.5) \qquad \mathrm{M}^\alpha \equiv \rho\mathcal{M}^\alpha = (\mu - 1)\mathcal{H}^\alpha, \qquad \mathcal{B}^\alpha = \mu\mathcal{H}^\alpha.$$

Le coefficient μ est donc la perméabilité magnétique du fluide. Remplaçant $\mathcal{M}^\alpha$ et $\mathcal{B}^\alpha$ par leurs valeurs (5.5) dans (4.73) où l'on a fait

$$\mathrm{S}^{\alpha\gamma} = \mathrm{M}^{\alpha\beta\gamma} = \mathfrak{M}_{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta} = 0,$$

et utilisant l'approximation (4.85), soit

$$e(\rho, \eta, \mathcal{M}^\alpha) \approx \tilde{e}(\rho, \eta) + \frac{1}{2}\alpha_{(1)}\mathcal{M}^\alpha\mathcal{M}_\alpha = \tilde{e} + \frac{1}{2}\frac{\mu(\mu - 1)}{\rho}\mathcal{H}^\lambda\mathcal{H}_\lambda,$$

on obtient l'expression du tenseur d'impulsion-énergie pour le schéma « magnétohydrodynamique parfaite » d'après le présent modèle :

$$(5.6) \quad \mathrm{T}^{\alpha\beta}_{(\mathrm{tot})} = \left[\rho f + \frac{\mu}{2c^2}(3 - \mu)\boldsymbol{\mathcal{H}}^2\right]u^\alpha u^\beta - \mu\mathcal{H}^\alpha\mathcal{H}^\beta + \left[p + \mu\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\boldsymbol{\mathcal{H}}^2\right]g^{\alpha\beta}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{H}^\lambda\mathcal{H}_\lambda,$$

où l'on a défini l'*indice* f du fluide par

$$f \equiv 1 + c^{-2}\left[\tilde{e}(\rho, \eta) + \frac{p}{\rho}\right].$$

Dans notre analyse, nous sommes partis d'un tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique différent de celui considéré par M. Lichnerowicz [*12*, p. 87-96]. Cependant, dans les conditions de l'astrophysique où μ est peu différent de un, on peut écrire $3 - \mu \# 2$ et $1 - \frac{\mu}{2} \# \frac{1}{2}$, et (5.6) se réduit à

$$\mathrm{T}^{\alpha\beta}_{(\mathrm{tot})} = \left(\rho f + \frac{\mu}{c^2}\boldsymbol{\mathcal{H}}^2\right)u^\alpha u^\beta - \mu\mathcal{H}^\alpha\mathcal{H}^\beta + \left(p + \frac{\mu}{2}\boldsymbol{\mathcal{H}}^2\right)g^{\alpha\beta},$$

ce qui est bien le tenseur de M. Lichnerowicz [*12*, p. 150] de la magnétohydrodynamique parfaite à la signature de la métrique $g_{\alpha\beta}$ près.

6. GÉOMÉTRISATION

On sait que le spin nucléaire ou électronique a une influence non négligeable sur le champ de gravitation d'un corps macroscopique seulement lorsque ce dernier a été comprimé de sorte que ses dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde de Compton de l'électron. Cependant, si les « particules » considérées sont des protogalaxies en rotation, des courants turbulents ou des « trous noirs primitifs » *(primitive black holes)*, alors l'influence des spins peut être significative pendant le premier stade de l'évolution de l'univers ou lors d'un phénomène « d'écroulement gravitationnel » (*gravitational collapse* ; en particulier, il est possible que toute singularité de la métrique soit évitée si l'on tient compte des spins (cf. Kopczynski [*32*], Hehl et v. der Heyde [*40*]). Dans ces conditions, l'idéalisation du milieu comme un nuage gazeux de « particules » douées de spin et le modèle physique proposé plus haut requièrent une géométrisation dans le cadre de la relativité générale. Cependant, la construction d'une structure géométrique associée aux systèmes à tenseur d'impulsion-énergie non nécessairement symétrique reste un problème ouvert. Pour conclure, examinons brièvement plusieurs possibilités.

6.1. **Espace-temps riemannien V^4.**

C'est la plus simple des généralisations possibles : la structure géométrique reste celle de l'espace-temps riemannien quadridimensionnel V^4 à métrique $g_{\alpha\beta}$ symétrique hyperbolique normale. Suivant Belinfante [*33*] et Rosenfeld [*34*], l'équation de conservation (4.58) est modifiée et s'écrit ([15])

$$(6.1) \qquad \nabla_\beta T^{\alpha\beta}_{(\mathrm{tot})} = - R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta}\mathcal{S}^{\gamma\delta\beta},$$

où $R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta}$ est le tenseur de courbure de V^4 et le membre de droite représente une « 4-force de Mathisson ». L'équation (4.65) n'est pas modifiée. Introduisant alors le tenseur $J^{\alpha\beta}$:

$$(6.2) \qquad J^{\alpha\beta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} T^{\alpha\beta}_{(\mathrm{tot})} + \nabla_\gamma(\mathcal{S}^{\alpha\gamma\beta} + \mathcal{S}^{\beta\gamma\alpha} - \mathcal{S}^{\alpha\beta\gamma}),$$

qui, d'après (6.1) et (4.65), est *symétrique* et *conservé*, on peut *postuler* les équations d'Einstein sous la forme

$$(6.3) \qquad G^{\alpha\beta} = - \kappa J^{\alpha\beta} \qquad \left(\kappa \equiv \frac{8\pi k}{c^4}\right)$$

de sorte que les identités de Bianchi sont satisfaites et (6.3) est *la seule relation géométrie-source* de la théorie ([16]).

([15]) Dans V^4, on a défini $R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta}$, le tenseur de Ricci $R_{\beta\gamma}$ et le tenseur d'Einstein $G^{\alpha\beta}$ par :

$$2\nabla_{[\delta}\nabla_{\gamma]}A_\beta = A_\alpha R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta}, \qquad R_{\beta\gamma} \equiv R^{\alpha}_{.\beta\gamma\alpha}, \qquad G^{\alpha\beta} \equiv G^{\beta\alpha} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R^{\gamma}_{.\gamma}.$$

([16]) Comparer avec Israel [*19*] qui utilise un modèle élémentaire de théorie cinétique.

6.2. **Espace-temps d'Einstein-Cartan U^4.**

Costa de Beauregard [*39*], Weyl [*35*], Sciama [*36*], Kibble [*37*] et Hehl [*38*], quant à eux, admettent, suivant les travaux de E. Cartan, qu'il doit exister une profonde liaison entre le tenseur densité de spin et le tenseur de torsion de la connexion d'un espace-temps non riemannien U^4 : l'existence locale d'une densité de spin pourrait induire une torsion de la région correspondante de l'univers, de la même façon que la présence de la matière induit une courbure locale de l'univers en relativité générale classique. Ainsi ces auteurs lient le tenseur de spin (17) à la partie antisymétrique de la connexion affine (préservant la métrique) $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ (18) :

$$(6.4) \qquad \mathrm{K}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = \kappa \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}, \qquad \mathrm{K}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} \equiv \Gamma^{\gamma}_{[\alpha\beta]}.$$

Les équations du champ correspondantes sont données par Hehl et v. der Heyde [*40*]. Leur structure est proche de celle de (6.1), (6.3) et (4.65). Si une telle description est acceptée, alors on a une interprétation possible de la torsion $\mathrm{K}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$. En effet, suivant l'interprétation accordée à la dépendance du potentiel thermodynamique par rapport à $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ au paragraphe 4.3.1, le tenseur $\mathrm{M}^{\alpha\beta\gamma}$ de $(4.66)_1$ est supposé représenter l'action des forces d'échange d'Heisenberg sous forme d'actions de contact (cf. § 4.4.2). Il s'ensuit que même si l'on ne tient pas compte des phénomènes gyromagnétiques dans $\mathcal{S}^{\alpha\beta\gamma}$, le terme $\mathrm{M}^{\alpha\beta\gamma}$ est lié à la torsion de U^4 par la relation (6.4) : *la torsion peut représenter géométriquement l'action de « contact » spin-spin.* Notre modèle heuristique rejoint donc la conjecture de Hehl ([*38*] [*40*]).

Notons finalement qu'une structure géométrique substantiellement équivalente peut être obtenue à partir d'un Lagrangien géométrique sur une variété V^4 pseudo-riemannienne à connexion non symétrique, V^4 étant en outre la sous-variété diagonale d'une certaine variété de dimension huit, V^8 (voir le procédé de plongement de A. Crumeyrolle dans Clerc [*41*]).

REFERENCES

[*1*] G. A. MAUGIN, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **15**, No. 4, 1971, p. 275-302.
[*2*] G. A. MAUGIN, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **16**, No. 3, 1972, p. 133-169.
[*3*] G. A. MAUGIN, *J. Phys. A. Gen. Phys.*, t. **5**, 1972, p. 786-802.

(17) L'expression générale de $\mathcal{S}^{\alpha\beta\mu}$ est de la forme

$$\mathcal{S}^{\alpha\beta\gamma} = a^{\alpha}u^{\beta}u^{\gamma} - b^{\beta}u^{\alpha}u^{\gamma} + b_1^{\alpha\beta}u^{\gamma} - b_2^{\beta\gamma}u^{\alpha} + b_2^{\alpha\gamma}u^{\beta} - \mathrm{M}^{\alpha\beta\gamma}.$$

L'expression (4.66) correspond au cas particulier $a^{\alpha} = b^{\alpha} = b_2^{\alpha\beta} = 0$.

(18) Hehl et v. der Heyde [*40*] utilisent le tenseur de torsion *modifié*

$$\overline{\mathrm{K}}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} \equiv \mathrm{K}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} + \delta^{\gamma}_{\alpha}\mathrm{K}_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\mu} - \delta^{\gamma}_{\beta}\mathrm{K}_{\alpha\mu}^{\cdot\cdot\mu}$$

au lieu de $\mathrm{K}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ dans $(6.4)_1$. Sciama [*36*] considère en outre un $g_{\alpha\beta}$ non symétrique.

[4] T. TAKABAYASI, *Prog. Theoret. Phys.*, Suppl. **4**, 1957.
[5] G. A. MAUGIN *(en préparation).*
[6] F. HALBWACHS, *Théorie relativiste des fluides à spin*, Gauthier-Villars, Paris, 1960.
[7] J. FRENCKEL, *Zeit. Phys.*, t. **37**, 1926, p. 243.
[8] G. A. MAUGIN, *J. Phys. A. Math. Nucl. Gen.*, t. **6**, 1973, p. 306-321.
[9] G. A. MAUGIN, « Micromagnetism », in *Continuum Physics*, Vol. 3, édité par A. C. Eringen, Academic Press, New York *(à paraître).*
[10] G. A. MAUGIN, *J. Mécanique* (t. **13**, n° 1, 1974, p. 1-22.)
[11] G. A. MAUGIN et A. C. ERINGEN, *J. Math. Phys.*, t. **13**, 1972, 143-155.
[12] A. LICHNEROWICZ, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, Benjamin, New York, 1967.
[13] A. C. ERINGEN, « Tensor Analysis », in *Continuum Physics*, Vol. I, édité par A. C. Eringen, Academic Press, New York, 1971.
[14] G. A. MAUGIN et A. C. ERINGEN, *J. Math. Phys.*, t. **13**, 1972, p. 1788-1797.
[15] R. A. GROT, *J. Math. Phys.*, t. **11**, 1970, p. 109-113.
[16] G. A. MAUGIN et A. C. ERINGEN, *J. Math. Phys.*, t. **13**, 1972, p. 1777-1788.
[17] R. A. GROT et A. C. ERINGEN, *Int. J. Engng. Sci.*, t. **4**, 1966, p. 611-670.
[18] L. G. SUTTORP et S. R. DE GROOT, *Physica*, t. **39**, 1968, p. 84.
[19] W. ISRAEL, Commun, au *Coll. Int. Ondes Gravitationnelles* (Paris, juin 1973), à paraître dans les *proceedings* (C. N. R. S., Paris).
[20] W. F. BROWN, *Magnetoelastic Interactions*, Springer-Verlag, New York, 1966.
[21] A. H. TAUB, *Illinois J. of Math.*, t. **1**, 1957, p. 370-388.
[22] P. GERMAIN, *Cours de mécanique des milieux continus*, Vol. I, Masson, Paris, 1973.
[23] S. R. DE GROOT et P. MAZUR, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1962.
[24] G. A. MAUGIN, *J. Phys. A. Math. Nucl. Gen.*, t. **6**, 1973, p. 1647-1666.
[25] T. ARIMAN, M. A. TURK et N. D. SYLVESTER, *Int. J. Engng. Sci.*, t. **11**, 1973, p. 905-930.
[26] M. BORN, *Zeit. Phys.*, t. **1**, 1920, p. 22.
[27] H. GRAD, *Communs. pure appl. Math.*, t. **5**, 1952, p. 455.
[28] C. TRUESDELL et W. NOLL, *Handbuch der Physik*, Vol. III/3, édité par S. Flügge, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
[29] C. C. WANG, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, t. **36**, 1970, p. 166-223.
[30] A. J. M. SPENCER, « Theory of Invariants », in *Continuum Physics*, Vol. I, édité par A. C. Eringen, Academic Press, New York, 1971.
[31] G. A. MAUGIN et A. C. ERINGEN, *J. Math. Phys.*, t. **13**, 1972, p. 1334-1347.
[32] W. KOPCZYNSKI, *Phys. Letters*, t. **39A**, 1972, p. 219.
[33] F. J. BELINFANTE, *Physica*, t. **7**, 1940, p. 449.
[34] L. ROSENFELD, *Mém. Acad. Royl. Belg. Cl. Sci.*, t. **18**, No. 6, 1940.
[35] H. WEYL, *Phys. Rev.*, t. **77**, 1950, p. 699.
[36] D. W. SCIAMA, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. **54**, 1958, p. 72.
[37] T. W. KIBBLE, *J. Math. Phys.*, t. **2**, 1961, p. 212.
[38] F. W. HEHL, *Habilitazionschrift*, Clausthal, 1970.
[39] O. COSTA DE BEAUREGARD, *J. Math. Pures Appl.*, t. **28**, 1943, p. 85.
[40] F. W. HEHL et P. VON DER HEYDE, « Spin and Structure of Space-time », preprint, Clausthal, 1972.
[41] R.-L. CLERC, *Thèse*, Toulouse, 1972.

(Version revisée).
(Manuscrit reçu le 4 octobre 1973).