ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

IULIAN POPOVICI
ADRIANA TURTOI

Prolongement des structures spinorielles

Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, nº 1 (1974), p. 21-39
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_1_21_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XX, n° 1, 1974, p. 21-39

Section A :
Physique théorique.

Prolongement des structures spinorielles

par

Iulian POPOVICI et Adriana TURTOI

SOMMAIRE. — Dans le paragraphe 1 nous présentons certains résultats sur la classification des graduations maximales normées, en améliorant le théorème central de [*14*].

Le but du paragraphe 2 est de montrer que le revêtement Pin Q → O(Q) [*2*] est induit, dans un sous-espace convenable, par la représentation adjointe d'un groupe unitaire qui contient Pin Q. On considère seulement le cas où la forme quadratique Q est donnée dans un espace vectoriel de dimension paire. Les graduations maximales normées jouent un rôle auxiliaire, mais elles donnent à l'exposé un caractère plus systématique.

Dans le paragraphe 3 nous introduisons la notion de structure spinorielle généralisée, qui s'obtient naturellement, en considérant la représentation adjointe d'un groupe unitaire arbitraire au lieu de Pin Q → O(Q). On associe à chaque structure spinorielle [*7*], [*9*] sur une variété pseudo-riemannienne de dimension paire une structure spinorielle généralisée, construite à l'aide d'une métrique de type sasakien.

Nous indiquons aussi le prolongement d'une structure à l'autre des spin-tenseurs et des connexions spinorielles et nous établissons quelques propriétés de *permutation.*

1. PROPRIÉTÉS DE BASE DES GRADUATIONS MAXIMALES NORMÉES

Nous appelons *algèbre* sur le corps commutatif K une algèbre associative à unité 1, de dimension finie sur K. Le corps K est identifié à K.1.

Soient G un groupe abélien fini, $\{ e_a \}_{a \in G}$ une base de l'algèbre A sur K et $\theta : G \times G \to K$. Si la structure de A est donnée par

$$e_a e_b = \theta(a, b) e_{a+b} \qquad (a, b \in G), \tag{1}$$

le triplet $\mathscr{G} = (G, \{ e_a \}, \theta)$ est une G-*graduation maximale* (ou une graduation maximale) de A. Il résulte tout de suite que $e_0 (0 \in G)$ et 1 sont colinéaires et nous supposons toujours $e_0 = 1$.

La relation $(e_a e_{-a}) e_a = e_a (e_{-a} e_a)$ implique $\theta(a, -a) = \theta(-a, a)$. La graduation maximale $\mathscr{G}$ est *normée* si nous avons pour a, b arbitraires de G :

$$\theta(a, b) \quad \theta(b, a) = 1. \tag{2}$$

Pour une telle graduation

$$\theta(a, -a) = \theta(-a, a) = \varepsilon_a = \pm 1, \qquad \varepsilon_0 = 1 \tag{2'}$$

quel que soit $a \in G$.

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des G-graduations maximales de A. Chaque système $k = \{ k_a \}_{a \in G}$ de scalaires non nuls ($k_0 = 1$) définit un opérateur $\bar{k}$ de $\mathscr{M}$ par :

$$\bar{k}(\mathscr{G}) = (G, \{ k_a e_a \}, \theta'), \qquad \theta'(a, b) = \frac{k_a k_b}{k_{a+b}} \theta(a, b). \tag{1'}$$

Soit $\mathscr{M}'$ l'ensemble des G'-graduations maximales de A (G' isomorphe à G). Chaque isomorphisme $h : G' \rightarrow G$ définit un opérateur $\bar{h} : \mathscr{M} \rightarrow \mathscr{M}'$ par :

$$\bar{h}(\mathscr{G}) = (G', \{ e_{h(a)} \}, \theta''), \qquad \theta''(a, b) = \theta(h(a), h(b)). \tag{1''}$$

Soient $\mathscr{G} = (G, \{ e_a \}, \theta)$ et $\mathscr{G}' = (G', \{ e'_b \}, \theta')$ deux graduations maximales de A resp. A'. Si $G = G'$ et $\theta = \theta'$, alors $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont *isomorphes*. S'il existe un opérateur $\bar{h} \circ \bar{k}$ tel que $\bar{h} \circ \bar{k}(\mathscr{G})$ et $\mathscr{G}'$ sont isomorphes, alors $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont équivalentes ($\mathscr{G} \sim \mathscr{G}'$). Si nous avons encore $k_a = \pm 1, a \in G$ (cas où $\bar{h} \circ \bar{k}$ est appelé *opérateur de ε-équivalence*), alors $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont *ε-équivalentes* ($\mathscr{G} \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{G}'$). Si $\mathscr{G} \sim \mathscr{G}'$, les algèbres A et A' sont isomorphes.

On montre facilement que $\sim$ (resp. $\overset{\varepsilon}{\sim}$) est une relation d'équivalence dans l'ensemble des graduations maximales (resp. des graduations maximales normées) des algèbres sur un corps commutatif. Supposant $\mathscr{G} \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{G}'$, il résulte que $\mathscr{G}'$ est normée si et seulement si $\mathscr{G}$ est normée.

Soit $\mathscr{G}_i = (G_i, \{ e^i_{a_i} \}, \theta_i)$ une graduation maximale de l'algèbre A_i sur $K (i = 1, 2)$. Alors $A_1 \otimes_K A_2$ est munie de la graduation maximale (le *produit tensoriel* de $\mathscr{G}_1$ et de $\mathscr{G}_2$)

$$\mathscr{G}_1 \otimes \mathscr{G}_2 = (G_1 \times G_2, \qquad e^1_{a_1} \otimes e^2_{a_2}, \theta)$$

où

$$\theta((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \theta_1(a_1, b_1) \theta_2(a_2, b_2).$$

Notons par $\mathscr{G}^{[r]}$ la puissance tensorielle d'ordre r de la graduation maximale $\mathscr{G}$. Si $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ sont normées, alors $\mathscr{G}_1 \otimes \mathscr{G}_2$ est normée.

Soient Z_n un groupe cyclique de période n, Z^r_n le produit direct de r exemplaires de Z_n et (α_1, α_2) un système de générateurs de Z^2_n. Les éléments de Z^2_n sont de la forme

$$a = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2, \qquad b = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2, \ldots$$

Considérons un espace vectoriel A_n de dimension n^2 sur un corps commutatif K qui contient une racine primitive ω d'ordre n de l'unité. En choisissant une base $\{ u_a \}_{a\in Z_n^2}$ de A_n et en introduisant le produit

$$u_a u_b = \omega^{a_2 b_1} u_{a+b} \tag{3}$$

A_n devient une algèbre qui est *simple* et qui est munie d'une Z_n^2-graduation maximale $\mathscr{A}_n$. D'ailleurs, A_n est une exemple d'algèbre de Clifford généralisée [*10*], [*11*], [*13*].

D'autre part soient $M_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n sur K et les matrices $e_1, e_2 \in M_n(K)$ d'éléments

$$(e_1)_k^h = \omega^h \delta_k^h, \qquad (e_2)_k^h = \delta_k^{h+1}, \qquad h, k \in Z_n \tag{4}$$

qui vérifient les conditions

$$e_1^n = e_2^n = 1, \qquad e_2 e_1 = \omega e_1 e_2 \tag{4'}$$

Alors les matrices

$$e_a = e_1^{a_1} e_2^{a_2} \qquad (a \in Z_n^2) \tag{5}$$

vérifient la relation

$$e_a e_b = \omega^{a_2 b_1} e_{a+b} \qquad (a, b \in Z_n^2) \tag{3'}$$

et l'application $u_a \to e_a$ définit un isomorphisme entre A_n et $M_n(K)$, car A_n est simple. Dans ce qui suit, l'algèbre A_n *sera identifiée à* $M_n(K)$, $\{ e_a \}$ sera la base de A_n et les $e_i = e_{\alpha_i} (i = 1, 2)$ seront appelés *les générateurs* de $\mathscr{A}_n$. On montre facilement que $\mathscr{A}_n$ ne dépend pas, à une équivalence près, de e_1, e_2 et ω.

Si $\zeta = \sqrt{\omega} \in K$, nous considérons l'opérateur $\bar{k}$ correspondant aux scalaires $k_a (a \in Z_n^2)$ définis plus loin. Quand n est impaire, nous prenons :

$$\zeta = \omega^{(n+1)/2}, \qquad k_a = \zeta^{a_1 a_2}.$$

Quand n est paire, nous associons à chaque $a \in Z_n^2$ la composante supplémentaire a_3 donnée par $a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \pmod{n}$ et nous prenons :

$$k_a = \zeta^{\sum_{s>t} a_s a_t + a_3^2} \qquad (0 \leqslant a_s < n\,;\, s, t = 1, 2, 3).$$

Nous avons dans les deux cas :

$$k_a^2 = \omega^{a_1 a_2}, \qquad k_a = k_{-a}. \tag{6}$$

Il en résulte de (1′), (3′) et (6) que la Z_n^2-graduation maximale $\mathscr{A}_n^0 = \bar{k}(\mathscr{A}_n)$ est normée et les coefficients ε_a de (2′) sont égaux à 1.

Nous considérons aussi, pour n paire et $\zeta \in K$, les opérateurs $\bar{k}'$ et $\bar{k}''$ correspondants respectivement aux scalaires

$$k'_a = \zeta^{a_1}, \; k''_a = \zeta^{a_2} \qquad (a \in Z_n^2, \; 0 \leqslant a_i < n, \; i = 1, 2)$$

et les graduations maximales normées de $M_n(K)$

$$\mathscr{A}_n^1 = \bar{k}'(\mathscr{A}_n^0), \quad \mathscr{A}_n^2 = \bar{k}''(\mathscr{A}_n^0), \quad \mathscr{A}_n^3 = \bar{k}' \circ \bar{k}''(\mathscr{A}_n^0).$$

Les coefficients ε_a sont pour $\mathscr{A}_n^1$:

(7) $$\varepsilon_a = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_1 \equiv 0 \pmod{n} \\ -1 & \text{si} \quad a_1 \not\equiv 0 \pmod{n} \end{cases}$$

Si $\{ f_a \}$ est la base de $\mathscr{A}_n^m (0 \leqslant m \leqslant 3)$, les éléments $f_1 = f_{\alpha_1}$, $f_2 = f_{\alpha_2}$ (appelés les *générateurs* de $\mathscr{A}_n^m$) vérifient les conditions :

(4″) $$f_i^n = \pm 1, \qquad f_2 f_1 = \omega f_1 f_2$$

et nous avons :

(5′) $$f_a = \pm \zeta^{a_1 a_2} f_1{}^{a_1} f_2{}^{a_2} \qquad (0 \leqslant a_i < n).$$

Les graduations maximales normées $\mathscr{A}_n^m$ ne dépendent pas, à une ε-équivalence près, de f_1, f_2, ω et ζ.

Nous allons montrer les relations :

(8) $$\mathscr{A}_n^1 \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{A}_n^2 \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{A}_n^3,$$

(8′) $$\mathscr{A}_n^1 \otimes \mathscr{A}_n^1 \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{A}_n^1 \otimes \mathscr{A}_n^0.$$

En effet, considérant l'automorphisme h de Z_n^2 suivant :

$$\alpha_1 \to \alpha_1, \qquad \alpha_2 \to \alpha_1 + \alpha_2,$$

nous trouvons en vertu de (4″) et de (5′) :

$$f_{h(a)} = \pm \zeta^{a_1 a_2} f_1{}^{a_1} (\zeta f_1 f_2)^{a_2}.$$

Mais, si f_1 et f_2 sont les générateurs de $\mathscr{A}_n^3$, alors f_1 et $\zeta f_1 f_2$ sont, à un isomorphisme près, les générateurs de $\mathscr{A}_n^1$; donc $\mathscr{A}_n^3 \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{A}_n^1$. La relation $\mathscr{A}_n^3 \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{A}_n^2$ résulte à l'aide de l'automorphisme

$$\alpha_1 \to \alpha_1 + \alpha_2, \qquad \alpha_2 \to \alpha_2$$

Soient $\{ E_a \}$ resp. $e_1, \dots, e_4$ la base et les générateurs de $\mathscr{A}_n^1 \otimes \mathscr{A}_n^3$ (*). Le groupe de graduation Z_n^4 est engendré par les éléments α_i pour lesquels $e_i = e_{\alpha_i} (i = 1, \dots, 4)$. En considérant l'automorphisme h de Z_n^4 suivant :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\to \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4, & \alpha_2 &\to \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4, \\ \alpha_3 &\to \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 \ , & \alpha_4 &\to \alpha_4 + \alpha_1 - \alpha_2, \end{aligned}$$

la relation

$$E_a = \pm \zeta^{a_1 a_2 + a_3 a_4} e_1{}^{a_1} e_2{}^{a_2} e_3{}^{a_3} e_4{}^{a_4} \qquad (a = a_1 \alpha_1 + \dots + a_4 \alpha_4)$$

implique :

$$E_{h(a)} = \pm \zeta^{a_1 a_2 + a_3 a_4} f_1{}^{a_1} f_2{}^{a_2} f_3{}^{a_3} f_4{}^{a_4}$$

(*) Si nous considérons la graduation maximale normée $\mathscr{G} = \mathscr{A}_{n_1}^{m_1} \otimes \dots \otimes \mathscr{A}_{n_r}^{m_r} (0 \leqslant m_k \leqslant 3)$ et si e_{2k-1}, e_{2k} sont les générateurs de $\mathscr{A}_{n_k}^{m_k}$, alors

$$e'_{2k-1} = 1^{[k-1]} \otimes e_{2k-1} \otimes 1^{[r-k]} \qquad e'_{2k} = 1^{[k-1]} \otimes e_{2k} \otimes 1^{[r-k]},$$

où $k = 1, \dots, r$ sont appelés les *générateurs de* $\mathscr{G}$.

où :

$$f_1=\zeta^{-1}e_1e_3e_4^{-1},\quad f_2=\zeta^{-1}e_2e_3e_4^{-1},\quad f_3=\zeta^{-1}e_3e_1e_2^{-1},\quad f_4=\zeta^{-1}e_4e_1e_2^{-1}.$$

Donc $\mathscr{A}_n^1 \otimes \mathscr{A}_n^3 \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{A}_n^1 \otimes \mathscr{A}_n^0$, parce que $f_1, \ldots, f_4$ sont les générateurs de $\mathscr{A}_n^1 \otimes \mathscr{A}_n^0$ et nous obtenons, en vertu de (8), la relation (8′).

Il est connu que tout groupe abélien G_n à n éléments ($n > 1$) admet une représentation de la forme :

$$(9) \qquad G_n \approx Z_{q_1} \times Z_{q_2} \times \ldots \times Z_{q_r} \qquad (q_1q_2 \ldots q_r = n)$$

où

$$(9') \qquad q_i = p_i^{m_i} \qquad (p_i \text{ premiers};\ i = 1, \ldots, r).$$

Les nombres q_i et r sont des invariants de G_n. L'algèbre $M_n(K)(\omega \in K)$ admet la $G_n \times G_n$-graduation maximale

$$(10) \qquad \mathscr{G}_n = \mathscr{A}_{q_1} \otimes \mathscr{A}_{q_2} \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_{q_r}$$

Deux graduations maximales (10) sont équivalentes si et seulement si leurs groupes de graduation sont isomorphes.

L'algèbre $M_n(K)(\zeta \in K)$ admet la $G_n \times G_n$-graduation maximale normée

$$(10') \qquad \mathscr{G}_n^0 = \mathscr{A}_{q_1}^0 \otimes \mathscr{A}_{q_2}^0 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_{q_r}^0 \qquad (\mathscr{G}_n^0 \sim \mathscr{G}_n).$$

Nous supposons qu'on a dans (9) et (9′)

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_s = 2, \qquad p_i \neq 2 \quad \text{pour} \quad i > s$$

et que la suite $q_1, q_2, \ldots, q_s$ contient $t = t(G_n)$ termes distincts

$$q_1' > q_2' > \ldots > q_t'.$$

Si s_j termes sont égaux à $q_j'(j = 1, \ldots, t)$, nous pouvons écrire :

$$q_1 = \ldots = q_{s_1} = q_1' > q_{s_1+1} = \ldots = q_{s_1+s_2} = q_2' > \ldots >$$
$$q_{s-s_t+1} = \ldots = q_s = q_t' \qquad (s_1 + s_2 + \ldots + s_t = s).$$

L'invariant $t(G_n)$ est nul si et seulement si n est impaire.

L'algèbre $M_n(K)(n$ paire, $\zeta \in K)$ admet aussi la $G_n \times G_n$-graduation maximale normée

$$(11) \quad \mathscr{G}_n^j = \mathscr{A}_{q_1}^{x_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_{q_s}^{x_s} \otimes \mathscr{A}_{q_{s+1}}^0 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_{q_r}^0 \qquad (\mathscr{G}_n^j \sim \mathscr{G}_n,\ 1 \leqslant j \leqslant t),$$

où

$$(11') \qquad x_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = s_1 + \ldots + s_{j-1} + 1 \\ 0 & \text{au cas contraire} \end{cases}$$

Donc les relations (10′), (11), (11′) associent à chaque groupe G_n les graduations maximales normées $\mathscr{G}_n^j$, $0 \leqslant j \leqslant t(G_n)$. Deux graduations $\mathscr{G}_n^j$ et $\mathscr{G}_n^{j'}$ sont ε-équivalentes si et seulement si leurs groupes de graduation sont isomorphes et $j = j'$ [*14*].

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{G}$ une G-graduation maximale normée de l'algèbre simple* A *sur le corps commutatif* K. *Si* K *est de caractéristique zéro et contient les racines de toute équation binôme sur* K, *alors*

$$A \approx M_n(K),\ G \approx G_n \times G_n \quad \text{et} \quad \mathcal{G} \overset{\varepsilon}{\sim} \mathcal{G}_n^j,\ 0 \leqslant j \leqslant t(G_n).$$

Démonstration. — Nous avons $A \approx M_n(K)$, $G \approx G_n \times G_n$, $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}_n$ d'après le corollaire 2 de [*15*]. Alors $\mathcal{G} \overset{\varepsilon}{\sim} \mathcal{G}_n^j$, en répétant la démonstration du théorème 10 de [*14*]. Q. E. D.

Soient un corps commutatif K, dont la caractéristique n'est pas un diviseur de l'entier $n > 1$ et la forme bilinéaire symétrique non dégénérée dans $M_n(K)$

$$\text{(12)} \quad B(X, Y) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} t_{XY} = \operatorname{tr}(XY), \quad t_X : Z \to XZ, \quad X, Y, Z \in M_n(K).$$

Nous associons à chaque base $\{ E_a \}$ de $M_n(K)$ les matrices

$$\text{(12')} \qquad E^a = B^{ab}E_b, \quad B^{ab}B_{bc} = \delta^a_c, \quad B_{ab} = B(E_a, E_b).$$

Alors nous avons, quelle que soit la base $\{ E_a \}$ de $M_n(K)$:

$$\text{(13)} \qquad E^i_{ja}E^{ka}_l = \delta^i_l \delta^k_j,$$

où E^i_{ja} et E^{ia}_j sont les éléments de la ligne i et de la colonne j des matrices E_a resp. E^a, ou

$$\text{(13')} \qquad E_aXE^a = \operatorname{tr} X, \quad X \text{ arbitraire de } M_n(K).$$

En effet, la relation (13), qui est invariante relativement au groupe $GL(M_n(K))$, peut être vérifiée sans difficulté dans la base canonique de $M_n(K)$.

Si $\{ E_a \}$ est la base d'une graduation maximale normée de $M_n(K)$, la relation (12) devient d'après (1) et (2') :

$$\text{(12'')} \qquad B(X, Y) = n \sum_{a \in G} \varepsilon_a X^a Y^{-a} \qquad (X = X^aE_a,\ Y = Y^aE_a)$$

et par suite $\operatorname{tr} E_a = 0 (a \neq 0)$, en vertu de (13). Donc $\{ E_a \}_{a \neq 0}$ est une base du sous-espace $M_n(K)'$ des matrices de trace nulle de $M_n(K)$.

2. COMPARAISON DES REPRÉSENTATIONS ADJOINTES DES GROUPES ET DES REVÊTEMENTS Pin Q → O(Q)

Chaque paire (n, p) d'entiers $(0 \leqslant p \leqslant [n/2])$ définit une anti-involution $X \to X^+$ de l'algèbre $M_n(C)$ (C étant le corps complexe) par :

$$\text{(14)} \qquad X^+ = H_pX^*H_p,\ H_p = \begin{pmatrix} I_{n-p} & O \\ O & -I_p \end{pmatrix} (I_p \text{ unité de } M_p(C)),$$

où X^* est l'adjointe de X.

Nous considérons les espaces vectoriels réels

$$J(n, p) = \{ X \in M_n(C) : X = X^+ \}, \quad J(n, p)' = J(n, p) \cap M_n(C)',$$

et les groupes de Lie réels

$$U(n, p) = \{ X \in SL(n, C) : XX^+ = \pm 1 \}, \quad U_0(n, p) = \{ X \in SL(n, C) : XX^+ = 1 \}.$$

L'espace $J(n, p)$ est muni d'une structure naturelle d'algèbre de Jordan réelle. Nous avons $U(n, 0) = U_0(n, 0) = SU_n$. Si n est impaire,

$$U(n, p) = U_0(n, p).$$

La forme bilinéaire (12) définit deux formes quadratiques réelles non dégénérées Q_p et Q'_p dans $J(n, p)$ resp. $J(n, p)'$ et $Q_p = Q'_p \oplus q(q : x \to x^2, x \in R)$, relation qui correspond à la décomposition $J(n, p) = J(n, p)' \oplus R.1$. La signature de Q'_p est égale à $(n - 2p)^2 - 1$. Les formes Q_0 et Q'_0 sont définies positives.

Soient $\lambda(X)$ l'automorphisme intérieur de $M_n(C)$ qui correspond à $X \in SL(n, C)$ et λ la représentation de $SL(n, C)$ définie par $X \to \lambda(X)$. On établit facilement que $\lambda(SL(n, C))$ est le groupe des automorphismes de $M_n(C)$. On montre aussi que $J(n, p)$ est invariant par $\lambda(X)$ si et seulement si $X \in U(n, p)$. Ce résultat nous suggère de considérer les représentations ρ_p et ρ'_p de $U(n, p)$, induites par λ dans $J(n, p)$ resp. $J(n, p)'$. Les noyaux de λ, ρ_p et ρ'_p sont identiques au groupe multiplicatif des racines d'ordre n de l'unité. Nous avons $\rho_p = \rho'_p \oplus 1$, où $1 : X \to I_n$, *ρ'_p étant équivalente à la représentation adjointe de* $U(n, p)$. D'autre part,

$$\rho_p(U(n, p)) \subset SO(Q_p) \qquad \text{et} \qquad \rho'_p(U(n, p)) \subset SO(Q'_p).$$

En choisissant une base $\{ E_a \}$ de $J(n, p)'$, l'isomorphisme $d\rho'_p$ est donné par (*) :

$$d\rho'_p(X)^b_a E_b = [X, E_a], \qquad X \in U(n, p)'. \tag{15}$$

Les relations (13') et (15), ainsi que la relation évidente $\operatorname{tr}(E^a E_b) = \delta^a_b$, nous donnent les expressions de $d\rho'_p$ et de $d\rho'^{-1}_p$, à savoir :

$$d\rho'_p(X)^b_a = \operatorname{tr}(X[E_a, E^b]), \tag{15'}$$

$$d\rho'^{-1}_p(T) = \frac{1}{n} T^a_b E_a E^b, \tag{15''}$$

où les E^a sont obtenus de $\{ E_a \}$ à l'aide de la forme quadratique Q'_p.

THÉORÈME 2. — *Toute graduation maximale normée* $\mathcal{G} = (G, \{ E_a \}, \theta)$ *de* $M_n(C)$ *vérifie, a un isomorphisme près, les conditions :*

$$E^+_a = E_a, \quad E^*_a = \varepsilon_a E_{-a} \quad (a \in G), \tag{16}$$

(*) Si L est un groupe de Lie, notons par L' son algèbre de Lie.

où les ε_a sont donnés par (2'). L'entier $p = p(\mathscr{G})$ de (14) est uniquement déterminé par $\mathscr{G}$, a savoir, si $\mathscr{G} \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{G}_n^j$, alors $p = n/2$ pour $j \neq 0$ et $n - 2p$ est le nombre des éléments de période 2 (y compris zéro) de G_n pour $j = 0$.

Démonstration. — Nous remarquons d'abord que chaque opérateur de ε-équivalence, ainsi que le produit tensoriel, conserve les relations (16) et il suffit de considérer les cas $\mathscr{G} = \mathscr{A}_n^0$ (n impair) et $\mathscr{G} = \mathscr{A}_n^0$, $\mathscr{G} = \mathscr{A}_n^1$ (n pair).

Si $\mathscr{G} = \mathscr{A}_n^0$ alors $E_a = k_a e_1{}^{a_1} e_2{}^{a_2}$ où k_a vérifient (6) et les e_i sont donnés par (4). D'autre part on montre facilement que

$$e_i^+ = e_i, \quad e_i^* = e_i^{-1} \qquad (i = 1, 2)$$

où le symbole « + » signifie l'adjonction relativement à la forme hermitienne $\sum_{k \in Z_n} \mathscr{X}^{-k} \overline{\mathscr{X}}^k$ dont la réduction diagonale est de matrice H_p où $n-2p$ est le nombre des éléments de période 2 de Z_n.

Si $\mathscr{G} = \mathscr{A}_n^1$ on montre que ses générateurs $f_1 = \zeta e_1$, $f_2 = e_2$ sont autoadjoints relativement à la forme hermitienne $\sum_{k \in Z_n} \mathscr{X}^{-k} \overline{\mathscr{X}}^{k+1}$, dont la réduction diagonale est de matrice H_p où $p = \dfrac{n}{2}$. Pour établir la deuxième relation (16) on utilise aussi (6) et (7). Q. E. D.

Remarque 1. — On a $U(n, n/2) \neq U_0(n, n/2)$ pour n paire. En effet, si $\{ E_a \}$ est la base de $\mathscr{A}_n^1$, alors $E_a^2 = -1 \left(a = \dfrac{n}{2} \alpha_1 \right)$.

Remarque 2. — Les deux conditions (16) sont identiques si et seulement si $\mathscr{G} \overset{\varepsilon}{\sim} (\mathscr{A}_2^0)^{[r]}$.

Remarque 3. — Si $\mathscr{G} = (G, \{ E_a \}, \theta)$ est une graduation maximale normée de $M_n(C)$, alors $\{ E_a \}_{a \neq 0}$ et $\{ iE_a \}_{a \neq 0} (i^2 = -1)$ sont respectivement des bases pour l'espace $J(n, p)'$ et pour l'algèbre de Lie unitaire $U(n, p)'$ avec $p = p(\mathscr{G})$. Nous considérons la relation totale d'ordre $<$ dans G et nous notons $G' = \{ a \in G : a \leqslant -a, a \wedge 0 \}$. Alors

$$\{ E_a + E^a, \; i(E_a - E^a) \}_{a \in G'} \quad \text{et} \quad \{ E_a - E^a, \; i(E_a + E^a) \}_{a \in G'} (E^a = \varepsilon_a E_{-a})$$

sont respectivement des bases pour les espaces $J(n, 0)'$ et SU_n' (*).

Soient un espace vectoriel réel V de dimension $2r (r > 1)$, une forme

(*) Ce résultat est établi dans [*16*] pour SU_3', utilisant la base de la graduation maximale $\mathscr{A}_3$.

quadratique non dégénérée Q dans V et la représentation suivante de GL(V) où de O(Q) dans $\wedge$ V :

$$(17) \qquad \mu = \bigoplus_{s=0}^{2r} \wedge^s \mathrm{Id},\ \mathrm{Id} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}, \qquad \wedge^0 \mathrm{Id} : \mathrm{A} \to 1 \in \wedge \mathrm{V}.$$

Nous considérons l'ensemble Δ des suites $(i_1, \ldots, i_s)$ avec

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant 2r, \qquad s = 1, \ldots, 2r;$$

supposons que Δ contient aussi $0 \in Z_2^{2r}$. A chaque base $\{ e_i \}$ de V correspond la base $\{ e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s} \}$ de $\wedge$ V, avec $(i_1, \ldots, i_s) \in \Delta$ et $e_0 = 1$, dans laquelle la matrice $\mu(\mathrm{A})$ est :

$$(17') \qquad \mu(\mathrm{A})^{j_1 \ldots j_t}_{i_1 \ldots i_s} = \begin{cases} \det (\mathrm{A}^{j_v}_{i_u}) u, v = 1, \ldots, s & \text{pour} \quad s = t \\ 0 \quad \text{pour} \quad s \neq t \end{cases}$$

ce qui nous donne, en prenant pour A l'identité de GL(V), la relation bien connue :

$$(17'') \qquad \det \begin{pmatrix} \delta^{j_1}_{i_1} & \ldots & \delta^{j_s}_{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{j_1}_{i_s} & \ldots & \delta^{j_s}_{i_s} \end{pmatrix} = \delta^{j_1}_{i_1} \ldots \delta^{j_s}_{i_s}$$

Tout système de générateurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2r}$ de Z_2^{2r} définit une bijection

$$\delta\colon Z_2^{2r} \to \Delta \quad \text{par} \quad \delta(\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_s}) = (i_1, \ldots, i_s).$$

Supposons que dans un repère orthonormé $(e_1, \ldots, e_{2r})$ de V

$$(18) \quad \mathrm{Q}(x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 - (x^{m+1})^2 - \ldots - (x^{2r})^2 (0 \leqslant m \leqslant 2r).$$

Alors nous avons dans l'algèbre de Clifford réelle C(Q) :

$$(18') \qquad e_i e_j + e_j e_i = 2\eta_i \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, 2r),$$

$$(18'') \qquad \eta_1 = \ldots = \eta_m = -\eta_{m+1} = \ldots = -\eta_{2r} = 1.$$

Le repère orthonormé considéré définit la base $\{ e_a \}_{a \in Z_2^{2r}}$ de C(Q), où

$$e_a = e_{i_1} \ldots e_{i_s}, \quad \delta(a) = (i_1, \ldots, i_s), \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad e_0 = 1.$$

Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\wedge$ V $\to$ C(Q) tel que

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s} \to e_a$$

pour tout repère orthonormé de V. La représentation μ de O(Q) sera identifiée à la représentation induite par μ dans C(Q), à l'aide de cet isomorphisme.

Notons par $f_1, \ldots, f_{2r}$ et $\{ f_a \}$ les générateurs, respectivement la base de $\mathscr{A}_2^{m_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_2^{m_r}$, $0 \leqslant m_k \leqslant 3$ et considérons les générateurs α_i de Z_2^{2r} définis par $f_i = f_{\alpha_i} (i = 1, \ldots, 2r)$.

Soient h_0 l'automorphisme suivant de Z_2^{2r} :

$$(19)\qquad \begin{aligned} h_0(\alpha_{2k-1}) &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_{2k-2} + \alpha_{2k-1} \\ h_0(\alpha_{2k}) &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_{2k-2} + \alpha_{2k} \end{aligned} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

et la graduation maximale normée de $M_{2^r}(C)$

$$(19')\qquad \mathscr{G}_0 = h_0(\mathscr{A}_2^{m_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_2^{m_r}) = (Z_2^{2r}, \{ E_a \}, \theta).$$

Les éléments $e_i = E_{\alpha_i}$, appelés les générateurs de $\mathscr{G}_0$, vérifient en vertu de (4″) et de (5′) les relations

$$(19'')\qquad \begin{cases} e_{2k-1}^2 = f_1^2 \ldots f_{2k-2}^2 f_{2k-1}^2 = \pm 1 & (k = 1, \ldots, r) \\ e_{2k}^2 = f_1^2 \ldots f_{2k-2}^2 f_{2k}^2 = \pm 1 & \\ e_i e_j + e_j e_i = 0 \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant 2r) & \end{cases}$$

PROPOSITION 1. — *Les entiers $m_1, \ldots, m_r$ de* (19′) *peuvent être choisis de manière que les relations* (19″) *deviennent* (18′) *et* (18″). *Nous avons*

$$\mathscr{G}_0 \overset{\varepsilon}{\sim} (\mathscr{A}_2^0)^{[r]} \quad ou \quad \mathscr{G}_0 \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{A}_2^1 \otimes (\mathscr{A}_2^0)^{[r-1]}$$

selon que $m = 2r$ ou $m < 2r$.

Démonstration. — Supposons d'abord que dans (18″) $m = 2s$, $0 \leqslant s \leqslant r$. Alors nous prenons dans (19′) $m_1 = \ldots = m_s = 0$, $m_{s+1} = \ldots = m_r = 3$. Donc, si $s = r$, alors $\mathscr{G}_0 \overset{\varepsilon}{\sim} (\mathscr{A}_2^0)^{[r]}$; si $s < r$, alors $\mathscr{G}_0 \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{A}_2^1 \otimes (\mathscr{A}_2^0)^{[r-1]}$ en vertu de (8) et de (8′). Supposant $m = 2s+1$, $0 \leqslant s < r$, nous prenons

$$m_1 = \ldots = m_s = 0,\ m_{s+1} = 2,\ m_{s+2} = \ldots = m_r = 0$$

et
$$\mathscr{G}_0 \overset{\varepsilon}{\sim} \mathscr{A}_2^1 \otimes (\mathscr{A}_2^0)^{[r-1]}. \quad \text{Q. E. D.}$$

Remarque 4. — Nous pouvons supposer toujours, en vertu de la proposition 1, que les générateurs e_i de $\mathscr{G}_0$ définissent un repère orthonormé relativement à la forme quadratique (18). Il en résulte du théorème 2 que la base $\{ E_a \}$ vérifie les relations (16), et nous avons $p(\mathscr{G}_0) = 2^{r-1}$ ou $p(\mathscr{G}_0) = 0$ selon que $m < 2r$ ou $m = 2r$. Donc $\{ E_a \}$ est aussi une base de $J(2^r, p(\mathscr{G}_0))$ (voir la remarque 3).

Utilisant aussi la relation (18′) nous trouvons :

$$(20)\qquad E_a = n_a e_{i_1} \ldots e_{i_s}, \quad \varepsilon_a = \theta(a, a) = \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_s}$$

où

$$(20')\qquad n_a^2 = (-1)^{s(s-1)/2}, \quad \delta(a) = (i_1, \ldots, i_s).$$

Par suite nous pouvons transférer la représentation μ dans $J(2^r, p)$ avec $p = p(\mathscr{G}_0)$ de manière que

$$(20'')\qquad \mu(A)E_a = n_a A e_{i_1} \ldots A e_{i_s}, \qquad \text{A arbitraire de } O(Q)$$

et nous considérons la représentation μ', induite par μ dans $J(2^r, p)'$.

Nous associons à chaque $A \in O(Q)$ le repère orthonormé $e'_i = Ae_i$ (les e_i étant précisés dans la remarque 4) et les éléments $E'_a = n_a e'_{i_1} \ldots e'_{i_s} \in J(2^r, p)$. L'algèbre $M_{2^r}(C)$ étant simple, l'application $E_a \to E'_a$ est un automorphisme d'algèbre ; donc il existe $X \in U(2^r, p)$ tel que $\rho_p(X) = \mu(A)$, parce que $E'_a = \mu(A)E_a$ d'après (20″). Soient S_m le sous-groupe de $U(2^r, p)$ donné par $\rho_p(S_m) = \mu(O(Q))$ et σ_m la représentation de S_m qui associe à chaque $X \in \rho_p^{-1}(\mu(A))$ l'élément A. Il résulte que σ_m est un revêtement d'ordre 2^r de O(Q) et

$$(21) \quad \rho_p \circ i = \mu \circ \sigma_m, \; \rho'_p \circ i = \mu' \circ \sigma_m \qquad (i \text{ inclusion } S_m \to U(2^r, p)).$$

Donc ρ_p induit dans V la représentation σ_m. Nous pouvons dire que ρ'_p est, pour $p = p(\mathcal{G}_0)$, un *prolongement de la représentation* σ_m. Toutes les représentations σ_m, $0 \leqslant m < 2r$, sont prolongées par le même $\rho'_p (p = 2^{r-1})$ et σ_{2r} est prolongée par ρ'_0 (voir la proposition 1).

PROPOSITION 2. — *Soit $\mathcal{G}_0$ la graduation de la proposition 1, dont les générateurs vérifient, a un isomorphisme près, les conditions $e_i^+ = e_i$. Alors :*

1° S_m *est l'ensemble des éléments* $X \in SL(2^r, C)$ *pour lesquels* $Xe_iX^{-1} = Ae_i$ *où* $A \in O(Q)$;

2° *la représentation σ_m est donnée par $\sigma_m(X) = A$;*

3° *les groupes S_m, S_{2r-m} sont isomorphes et les représentations σ_m, σ_{2r-m} sont équivalentes.*

Démonstration. — Les propriétés 1° et 2° sont immédiates. Pour établir la propriété 3°, nous prenons $m < 2r$ et notons par $\mathcal{G}'_0$ la graduation de la proposition 1, qui correspond à l'entier $2r - m$, ayant les générateurs

$$e'_i = \sqrt{-1}\, Y e_i Y^{-1} \qquad (Y \in SL(2^r, C)).$$

Nous avons en vertu du théorème 2 : $e'^{+}_i = e'_i$ ou $e'^{*}_i = e_i$ selon que $m \neq 0$ ou $m = 0$. D'autre part il faut considérer pour l'entier $2r - m$ la forme quadratique $Q'(x) = -Q(\sqrt{-1}x)$ dans $\sqrt{-1}\,V$, parce que S_{2r-m} et σ_{2r-m} sont définis à l'aide de $\mathcal{G}'_0$. Les groupes O(Q) et O(Q′) étant identifiés, nous obtenons pour X arbitraire de S_m :

$$\sigma_m(X)_i^j e_j = (YXY^{-1})e'_i(YXY^{-1}). \quad \text{Q. E. D.}$$

Remarque 5. — Les groupes S_0, S_{2r} coïncident et $\sigma_0 = \sigma_{2r}$, donc σ_{2r} peut être prolongée par ρ'_p avec $p = 0$ ou $p = 2^{r-1}$. En effet, nous avons pour $m = 0$, en vertu de (16), $e_i^* = -e_i$ et nous pouvons prendre $Y = 1$.

Les relations (15), (15′) et la proposition 2 impliquent

$$(22) \qquad d\sigma_m(X)_i^j e_j = [X, e_i], \quad X \in S'_m,$$

$$(22') \qquad d\sigma_m(X)_i^j = \frac{1}{2^r} \operatorname{tr}(X[e_i, e^j]), \quad e^j = \eta_j e_j.$$

Nous associons à chaque $X \in S'_m$ la matrice $Y = e_iXe^i + 2(2 - r)X$ qui vérifie, en vertu de (18′) et de (22), les conditions $Ye_j = e_j Y (j = 1, \ldots, 2r)$. Donc Y est central et le calcul de tr Y conduit à $Y = 0$, c'est-à-dire

$$e_i X e^i + 2(2 - r)X = 0 \qquad (\text{X arbitraire de } S'_m). \tag{23}$$

Il en résulte de (22) et de (23) la relation bien connue

$$d\sigma_m^{-1}(A) = \frac{1}{4} A^i_j e_i e^j, \quad A \in O(Q)'. \tag{22″}$$

Les relations (22), (22′), (22″) et (23) sont invariantes relativement au groupe GL(V). Une comparaison avec (15′), (15″) nous montre que les expressions de $d\rho'_p$, $d\rho'^{-1}_p$ et de $d\sigma_m$, $d\sigma_m^{-1}$ sont respectivement analogues. Il y a la même analogie en ce qui concerne les relations (13′) pour $X \in U(n, p)'$ et (23).

Dans la théorie des spineurs on construit un revêtement (p, Pin Q) d'ordre 2 de O(Q) [*1*], [2]. Il en résulte de (22′) et de (22″) que p et σ_m sont localement équivalentes, mais nous pouvons préciser cette propriété de la manière suivante :

PROPOSITION 3. — *Le groupe* Pin Q *est isomorphe pour la forme quadratique* (18) *à un sous-groupe de* S_m. *Si cet isomorphisme correspond à l'application* j : Pin Q $\to S_m$, *alors :*

$$p = \varepsilon \circ \sigma_m \circ j, \quad \varepsilon : A \to (\det A).A, \quad A \in O(Q).$$

Démonstration. — Nous avons $C(Q) \subset M_{2^r}(C)$ d'après la remarque 4. Nous pouvons supposer encore qu'il existe un repère orthonormé $\{ e_i \}$ de V tel que $\det e_i = 1$. Mais, en vertu de la proposition 2, cette propriété reste valable pour tout repère orthonormé de V, car σ_m est un revêtement de O(Q). Soit maintenant $x \in V$ tel que $Q(x) = \pm 1$. Alors $\det x = 1$, parce que x peut être toujours englobé dans un repère orthonormé de V.

D'autre part,

$$\text{Pin } Q = \{ X \in C(Q) : X = x_1 \ldots x_h, \ x_k \in V, \ Q(x_k) = \pm 1 \} \subset SL(2^r, C),$$
$$p(X)^j_i e_j = (-1)^h X e_i X^{-1} \qquad (k = 1, \ldots, h).$$

Alors la proposition 2 implique $p(X) = (-1)^h \sigma_m(X)$. Si nous désignons par s_k la symétrie dans V qui correspond au vecteur x_k, alors

$$\sigma_m(X) = (-1)^h s_1 \circ \ldots \circ s_h,$$

ce qui nous montre que $\det \sigma_m(X) = (-1)^h$. Q. E. D.

3. STRUCTURES SPINORIELLES GÉNÉRALISÉES ET LEUR CONSTRUCTION

Soit $P = P(M, G)$ un fibré principal, supposé différentiable, dont la projection est π. Si nous attachons à chaque homéomorphisme local

$t_\alpha : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ de P la section locale $z_\alpha(x) = t_\alpha(x, e)(x \in U_\alpha, e$ identité de G) et si nous désignons par $(u, a) \to ua$ l'action (à droite) de G sur P, les fonctions de transition $t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ sont définies par $z_\beta = z_\alpha t_{\alpha\beta}$. A chaque famille d'applications $f_\alpha : U_\alpha \to G$ correspond le système d'homéomorphismes locaux

$$\bar{t}_\alpha(x, a) = t_\alpha(x, a) f_\alpha(x) \qquad (x \in U_\alpha, a \in G) \tag{24}$$

dont les sections locales attachées sont $\bar{z}_\alpha = z_\alpha f_\alpha$.

Soit $f : P_1 \to P$, $P_1 = P_1(M, G_1)$, un homomorphisme de fibrés principaux [5] qui se projette sur l'application identique de M et qui correspond à l'homomorphisme $g : G_1 \to G$. Les sections z_α et z'_α attachées aux homéomorphismes locaux de P resp. P_1 et les fonctions de transition correspondantes vérifient, à une transformation (24) près, les relations

$$z_\alpha = f \circ z'_\alpha, \qquad t_{\alpha\beta} = g \circ t'_{\alpha\beta}. \tag{24'}$$

Inversement, si la deuxième condition (24′) est vraie, l'application

$$z'_\alpha(x) \to z_\alpha(x)(x \in U_\alpha)$$

définit un homomorphisme unique $f : P_1 \to P$.

Désignant par $\mathscr{C}(P)$ l'ensemble des connexions sur P, toute connexion $\Gamma \in \mathscr{C}(P)$ est caractérisée par sa forme de connexion ω ou par la famille de 1-formes $\omega_\alpha = \omega \circ dz_\alpha$. Alors, l'homomorphisme f ci-dessus induit l'application $f^* : \mathscr{C}(P_1) \to \mathscr{C}(P)$ par :

$$dg \circ \omega' = \omega \circ df, \qquad dg \circ \omega'_\alpha = \omega_\alpha \tag{24''}$$

où ω', $\omega = f^*\omega'$ sont les 1-formes des connexions $\Gamma' \in \mathscr{C}(P_1)$ resp. $f^*\Gamma'$ et ω'_α, ω_α sont les 1-formes locales correspondantes. Les deux conditions (24″) sont équivalentes en vertu de (24′).

DÉFINITION 1. — Soient M une variété pseudo-riemannienne de dimension $2r$ et de signature $2(m - r)$ avec $r > 1$, $0 \leqslant m \leqslant 2r$ et $P(M, O(Q))$ le fibré principal des repères orthonormés de M, où Q est la forme quadratique (18). Selon Lichnerowicz [7], une *structure spinorielle* sur M est un homomorphisme de fibrés principaux $f : \Sigma(M, S_m) \to P(M, O(Q))$ qui se projette sur l'application identique de M et qui correspond à la représentation $\sigma_m : S_m \to O(Q)$ (voir le paragraphe 2).

Il résulte que f est un revêtement d'ordre 2^r de M, parce que, dans le cas général lui-même, l'action du groupe structural sur l'espace total est libre.

Dans [2], [3] et [4] il y a des conditions d'existence des structures spinorielles, définies en prenant la représentation $p : \mathrm{Pin}\, Q \to O(Q)$ au lieu de σ_m. A toute structure spinorielle, d'après [2], sur M orientée correspond une structure spinorielle au sens de la définition 1 (voir la proposition 3).

DÉFINITION 2. — Soit M une variété pseudo-riemannienne de dimension $n^2 - 1$ et de signature $(n - 2p)^2 - 1$ avec $n > 1$, $0 \leqslant p \leqslant [n/2]$, telle que le fibré principal des repères orthonormés de M admet une réduction P au groupe $L(n, p) = \rho'_p(U(n, p)) \subset SO(Q'_p)$ (voir le paragraphe 2). Une *structure spinorielle généralisée* sur M est un homomorphisme de fibrés principaux $f : \Sigma(M, U(n, p)) \to P(M, L(n, p))$ qui se projette sur l'application identique de M et qui correspond à la représentation

$$\rho'_p : U(n, p) \to L(n, p).$$

S'il existe une graduation maximale normée $\mathcal{G}$ de $M_n(C)$ telle que $p = p(\mathcal{G})$ (voir le théorème 2), on dit que la structure spinorielle généralisée f est attachée à $\mathcal{G}$.

Il résulte que f est un revêtement d'ordre n de M.

L'expression de *structure spinorielle généralisée* est justifiée par le

THÉORÈME 3. — *Nous pouvons associer à chaque variété pseudo-riemannienne* M *de dimension* $2r$ *et de signature* $2(m - r)$, $r > 1$, $0 \leqslant m \leqslant 2r$, *une surjection de variété différentiables* $\pi : M' \to M$ *avec les trois conditions suivantes :*

1° M' *est pseudo-riemannienne de dimension* $n^2 - 1$ *et de signature* $(n - 2p)^2 - 1$ *avec* $n = 2^r$ *et* $p = 2^{r-1}$ *ou* $p = 0$ *selon que* $m < 2r$ *ou* $m = 2r$;

2° *à chaque structure spinorielle* $f : \Sigma \to P$ *sur* M *correspond une structure spinorielle généralisée* $f' : \Sigma' \to P'$ *sur* M' (Σ' *réductible à* S_m) *de manière que :*

$$s'_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} \circ \pi, \qquad t'_{\alpha\beta} = \mu' \circ t_{\alpha\beta} \circ \pi \tag{25}$$

$s_{\alpha\beta}$, $t_{\alpha\beta}$, $s'_{\alpha\beta}$, $t'_{\alpha\beta}$ *étant les fonctions de transition de* Σ, P, Σ', P' *respectivement ;*

3° f' *est attachée à la graduation maximale normée* $\mathcal{G}_0$ *de la proposition* 1 (*).

Démonstration. — A chaque forme bilinéaire B dans un espace vectoriel q-dimensionnel V sur K correspond une forme bilinéaire unique B_k dans $\otimes^k V$ telle que :

$$B_k(x_1 \otimes \ldots \otimes x_k, y_1 \otimes \ldots \otimes y_k) = B(x_1, y_1) \ldots B(x_k, y_k)$$

quels que soient $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in V$. Supposant que le corps K est de caractéristique zéro, notons par B'_k la restriction de $\frac{1}{k!} B_k$ à $\wedge^k V$. Si B est symétrique et non dégénérée, B_k et B'_k en sont aussi. Nous avons

$$B'_k(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}) = \det(B(e_{i_u}, e_{j_v})), \quad u, v = 1, \ldots, k$$

(*) On n'impose aucune condition sur la topologie de la variété de base M.

pour toute base $\{ e_1, \ldots, e_q \}$ de V. Si $B(e_i, e_j) = \eta_i \delta_{ij}$, nous obtenons en vertu de (17′) et de (17″) :

$$(26) \quad B'_k(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, \; e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}) = \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_k} \delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_k j_k}$$

Nous associons à chaque point $x \in M$ l'espace $F_x = \bigoplus_{k=2}^{2r} \Lambda^k T_x$, où $T_x = T_x(M)$ est l'espace tangent à M en x. La métrique g de M induit dans chaque espace F_x la forme bilinéaire $g' = \bigoplus_{k=2}^{2r} g'_k$. Soient M′ le fibré vectoriel sur M dont les points sont les paires (x, y) avec $x \in M, y \in F_x$ et $\pi : M' \to M$ la projection naturelle $(x, y) \to x$.

La connexion riemannienne de M associe à chaque point $u \in M'$ l'espace horizontal H_u tel que $T_u(M') = H_u \oplus V_u$, où $V_u = T_u(F_x)$ est l'espace vertical en u avec $x = \pi(u)$. Soient h l'isomorphisme qui associe à chaque vecteur $X \in T_x(M)$ le vecteur $hX \in H_u$ issu au-dessus de X et v la translation $F_x \to V_u$.

La variété M′ est munie de la *métrique sasakienne*

$$(27) \qquad G = g \circ (h^{-1} \times h^{-1}) \oplus g' \circ (v^{-1} \times v^{-1}).$$

Soit $\{ U_\alpha \}$ un recouvrement ouvert de M, chaque voisinage U_α étant muni d'un champ $\{ \theta_i \}$ de repère orthonormé relativement à g. Considérons sur $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ les champs $\tau_a (a \in Z_2^{2r}, \, a \neq 0)$ suivants :

$$(28) \qquad \tau_a = \begin{cases} h \circ \tilde{\theta}_i (\tilde{\theta}_i = \theta_i \circ \pi) & \text{si} \quad \delta(a) = i \\ v \circ (\tilde{\theta}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{\theta}_{i_k}) & \text{si} \quad \delta(a) = (i_1, \ldots, i_k), \, k \geqslant 2 \end{cases}$$

qui vérifient, d'après (26) et (27), la relation

$$(28') \qquad G(\tau_a, \tau_b) = \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_k} \delta_{ab}, \, \delta(a) = (i_1, \ldots, i_k)$$

où les $\eta_i = g(\theta_i, \theta_i)$ sont donnés par (18″).

Si nous comparons (12″) et (28′) nous voyons, en vertu de la proposition 1 et des relations (20), (20′), que la métrique G est de la même signature que Q'_p, $p = p(\mathcal{G}_0)$. Donc $p = 2^{r-1}$ où $p = 0$ selon que $m < 2r$ ou $m = 2r$ et la propriété 1° est établie.

Considérons maintenant sur U_β et $V_\beta = \pi^{-1}(U_\beta)$ les champs de repères θ'_i et τ'_a, analogues à θ_i resp. τ_a. Alors

$$\theta_i(x) = t_{\alpha\beta}(x)_i^j \theta_j(x), \quad \tau'_a(u) = t'_{\alpha\beta}(u)_a^b \tau_b(u),$$

où $t_{\alpha\beta}$ et $t'_{\alpha\beta}$ sont les fonctions de transition des fibrés des repères orthonormés sur M resp. M′ et on tire la deuxième relation (25). Par suite le fibré principal des repères orthonormés sur M′ admet une réduction P′ à $L(2^r, p(\mathcal{G}_0))$ dont les fonctions de transition sont $t'_{\alpha\beta}$.

D'autre part, la première relation (25) définit les fonctions de transition $s'_{\alpha\beta}$ d'un fibré principal Σ' de base M' et de groupe structural $U(2^r, p(\mathcal{G}_0))$, où $s_{\alpha\beta}$ sont les fonctions de transition de Σ. L'existence de l'homomorphisme $f : \Sigma \to P$ implique $t_{\alpha\beta} = \sigma_m \circ s_{\alpha\beta}$, donc $t'_{\alpha\beta} = \rho'_p \circ s'_{\alpha\beta}$ en vertu de (21) et de (25). Q. E. D.

Remarque 6. — Si $m < 2r$ la variété M' est de signature -1. Si la variété M est riemannienne, M' est soit riemannienne, soit de signature -1, selon que nous considérons la métrique g ou la métrique $-g$ (voir la proposition 2).

On introduit sans difficulté, pour chaque structure spinorielle généralisée $f'' : \Sigma'' \to P''(M'', L(n, p))$, les notions usuelles de la géométrie spinorielle. Par exemple un *spineur contravariant* (resp. *covariant*) de M'' sera une section dans le fibré vectoriel E associé à Σ'' et qui corresponde à l'action naturelle de $U(n, p)$ sur C^n (resp. une section dans le fibré dual E^*).

Une *connexion spinorielle* de M'' sera une connexion $\Gamma \in \mathcal{C}(\Sigma'')$ et f''^* est une bijection $\mathcal{C}(\Sigma'') \to \mathcal{C}(P'')$, car ρ'_p est un isomorphisme local.

Remarque 7. — La connexion riemannienne s'obtient, pour toute structure spinorielle habituelle, d'une connexion spinorielle, propriété, qui n'est pas vraie pour les structures spinorielles généralisées. En effet, nous ne pouvons toujours représenter la connexion riemannienne de M'' par $f''^*\Gamma$ avec $\Gamma \in \mathcal{C}(\Sigma'')$.

On introduit facilement la *dérivé spinorielle* $\nabla\varphi$ d'un spin-tenseur φ à l'aide de $\Gamma \in \mathcal{C}(\Sigma'')$, dont la forme de connexion est ω. Si, par exemple, φ est en même temps un spineur contravariant et un champ de covecteurs, nous avons, d'après (15') et (24''), relativement au champ de repères orthonormés $\dfrac{\partial}{\partial s^a}$:

$$\nabla_a\varphi_b = \frac{\partial\varphi_b}{\partial s^a} + \omega_a\varphi_b - \mathrm{tr}\,(\omega_a[E_b, E^c])\varphi_c \tag{29}$$

où $\{ E_a \}$ est une base orthonormée de $J(n, p)'$ relativement à Q'_p. Les E^a définissent le *spin-tenseur fondamental* de M'', ayant la dérivée spinorielle nulle.

Le champ de Dirac est donnée par :

$$E^a\nabla_a\varphi + \varepsilon\varphi = 0 (\varepsilon = \text{const}) \tag{30}$$

Supposant que Σ'' admet une réduction à $U_0(n, p)$, nous définissons *l'adjonction de Dirac*, qui associe à chaque spineur contravariant φ le spineur covariant $A\varphi = \varphi^*H_p$, où H_p est donné par (14) et * indique l'adjonction vectorielle.

Considérant les structures spinorielles $f : \Sigma \to P$ et $f' : \Sigma' \to P'$ du théorème 3, nous posons $f' = f''$.

Nous introduisons d'abord deux applications $\pi_1 : \mathcal{C}(\Sigma) \to \mathcal{C}(\Sigma')$ et $\pi_2 : \mathcal{C}(P) \to \mathcal{C}(P')$. Si $\Gamma \in \mathcal{C}(\Sigma)$ est définie par les 1-formes locales ω_α, alors $\pi_1\Gamma$ est définie par les 1-formes locales $\omega_\alpha \circ d\pi$ où π est la projection $M' \to M$. Si $\Delta \in \mathscr{C}(P)$ est définie par les 1-formes locales ζ_α, alors $\pi_2\Delta$ est définie par les 1-formes locales $d\mu' \circ \zeta_\alpha \circ d\pi$. Nous obtenons le diagramme commutatif.

(31)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\Sigma) & \xrightarrow{f^*} & \mathscr{C}(P) \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ \mathscr{C}(\Sigma') & \xrightarrow{f'^*} & \mathscr{C}(P') \end{array}$$

Nous voulons maintenant prolonger les spin-tenseurs de M à M'. Si φ est un spineur de M nous considérons le spineur $q\varphi = \varphi \circ \pi$ de M'. Si X est un champ de vecteurs (resp. de covecteurs) sur M, nous considérons le champ de vecteurs $qX = h(X \circ \pi)$ (resp. de covecteurs $qX = h'(X \circ \pi)$) sur M' où h est définie dans la démonstration du théorème 3 et h' est le dual de $d\pi$. Nous avons, relativement ou champ de repères θ_i et τ_a de (28) :

$$(qX)^a = \begin{cases} X^i & \text{si} \quad \delta(a) = i,\ 1 \leqslant i \leqslant 2r \\ 0 & \text{si} \quad \delta(a) = (i_1, \ldots, i_k),\ k \geqslant 2 \end{cases}$$

Nous définissons l'opérateur de prolongement q d'un spin-tenseur arbitraire par la condition de permutation au produit tensoriel. Nous avons :

(32)
$$\nabla_{qX}(q\varphi) = q(\nabla_X\varphi)$$

quels que soient le spin-tenseur φ et le champ de vecteurs X sur M. Les deux opérateurs ∇ correspondent aux connexions $\Gamma \in \mathscr{C}(\Sigma)$ resp. $\pi_1\Gamma$.

PROPOSITION 4. — *Soit un champ de Dirac ψ associé à la structure spinorielle $f : \Sigma \to P$, à savoir*

(30')
$$e^i\nabla_i\psi + \varepsilon\psi = 0,$$

où $e_1, \ldots, e_{2r}$ sont les générateurs de la graduation (19') *et ∇ correspond à $\Gamma \in \mathscr{C}(\Sigma)$. Si, dans* (30), *les E^a sont donnés par* (20), (20') *et ∇ correspond à $\pi_1\Gamma$, alors $q\psi$ est un champ de Dirac sur* M'.

Démonstration. — Nous reprenons la construction de la variété M' indiquée dans la démonstration du théorème 3. Soient $(x^1, \ldots, x^{2r})$ un système de coordonnées dans M et (y^a) les composantes du vecteur $y \in F_x$ dans la base induite par $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Alors (x^i, y^a) est un système de coordonnées dans M' et l'opérateur v (voir la démonstration du théorème 3) est de la forme $(y^a) \to (0, y^a)$.

D'autre part, étant donné un repère orthonormée $\{\theta_i\}$ en $x \in M$, nous pouvons choisir un système géodésique de coordonnées $(x^1, \ldots, x^{2r})$ en x relativement à la connexion riemannienne de M tel que $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \theta_i$ alors

$h : (X^i) \to (X^i, 0)$ pour tout point $u = (x, y) \in M'$ et le repère (28) pris dans le point u est de la forme

$$\tau_a = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & \text{si} \quad \delta(a) = i \\ \dfrac{\partial}{\partial y^a} & \text{si} \quad \delta(a) \neq 1, \dots, 2r. \end{cases}$$

Par suite

$$\nabla_a(q\psi) = \begin{cases} \nabla_i\psi & \text{si} \quad \delta(a) = i \\ 0 & \text{si} \quad \delta(a) \neq 1, \dots, 2r \quad \text{Q. E. D.} \end{cases}$$

Remarque 8. — Le spin-tenseur fondamental E^a de M' n'est pas le prolongement par q du spin-tenseur fondamental e^i de M.

Supposant que Σ admet une réduction de groupe structural

$$S_m \cap U_0(2^r, p(\mathcal{G}_0))$$

on introduit l'opérateur d'adjonction A pour f ainsi que pour f' et on obtient la propriété de permutation $A \circ q = q \circ A$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] M. Atiyah, R. Bott et A. Shapiro, Clifford moduls, *Topology*, t. **3**, Suppl. 1, 1964, p. 3-38.
[*2*] A. Crumeyrolle, Structures spinorielles, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **11**, 1, 1969, p. 19-25.
[*3*] A. Crumeyrolle, Groupes de spinorialité, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **14**, 4, 1971, p. 309-323.
[*4*] R. Geroch, Spinor structure of space-times in general relativity, I. *J. Math. Phys.*, t. **9**, 1968, p. 1739-1744; II. *Ibd.*, t. **11**, 1970, p. 342-348.
[*5*] S. Kobayashi et K. Nomizu, *Fundations of differential geometry*, I. New York, 1963.
[*6*] A. Lichnerowicz, *Théorie des connexions et des groupes d'holonomie*. Cremonese, Rome, 1955.
[*7*] A. Lichnerowicz, Les spineurs en relativité générale. *Conf. Sem. Mat. Univ. Bari*, t. **79**, 1962, p. 1-15.
[*8*] A. Lichnerowicz, Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale. *Bull. Soc. Math. France*, t. **92**, 1964, p. 11-100.
[*9*] J. Milnor, *Spin structures on manifolds*, Genève, 1962.
[*10*] K. Morinaga et T. Nôno, On the linearization of a form of higher degree and its representation. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, t. **16**, 1, 1952, p. 13-41.
[*11*] A. O. Morris, On a generalized Clifford algebra, I. *Quart. J. Math. Oxford*, t. **18**, 1967, p. 7-12; II. *Ibd.*, t. **19**, 1968, p. 289-299.
[*12*] R. Penrose, A spinor approach to general relativity. *Ann. Phis. Princeton*, t. **10**, 1960, p. 171-201.
[*13*] I. Popovici et C. Gheorghe, Algèbres de Clifford généralisées. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **262**, 1966, p. 682-685.
[*14*] I. Popovici, Graduations maximales normées. *Rev. Roum. Math. pures et appl.*, t. **14**, 8, 1969, p. 1187-1200.
[*15*] I. Popovici, Une classe de graduations maximales. *Rev. Roum. Math. pures et appl.*, t. **17**, 1, 1972, p. 77-85.

[*16*] A. RAMAKRISHNAN, P. S. CHANDRASEKARAN, N. R. RANGANATHAN, T. S. SANTHANAM et R. VASUDEVAN, The generalized Clifford algebra and the unitary group. *J. Math. Anal. and appl.*, t. **27**, 1969, p. 164-171.

[*17*] S. SASAKI, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannien manifolds. *Tohoku Math. J.*, t. **10**, 1958, p. 338-354.

[*18*] K. YANO et S. KOBAYASHI, Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles. *J. Math. Soc. Japan*, t. **18**, 1966, p. 194-210.

(Manuscrit reçu en mars 1972).
(Texte revisé reçu le 28 juillet 1973).