ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

DANIEL BANCEL

Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 18, nº 3 (1973), p. 263-284
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1973__18_3_263_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVIII, n° 3, 1973, p. 263-284.

Section A :
Physique théorique.

Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann en relativité générale

par

Daniel BANCEL
Département de Mathématiques,
Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne, 31077 Toulouse-Cedex

RÉSUMÉ. — On étudie, dans un cadre fonctionnel approprié au couplage avec les équations d'Einstein, le problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann non linéaire.

ABSTRACT. — We investigate the Cauchy problem for the non-linear Boltzmann equation by means of a functional analysis technique appropriate to the coupling with Einstein's equations.

INTRODUCTION

L'objet essentiel de ce travail est d'étudier le problème de Cauchy pour l'équation intégrodifférentielle non linéaire de Boltzmann dans le cadre de la relativité générale. La résolution locale du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann est la première étape de l'étude du problème de Cauchy pour le système d'Einstein-Boltzmann : équations tensorielles d'Einstein avec un second membre donné comme moment d'ordre 2 d'une solution de l'équation de Boltzmann. Ce système représente l'évolution d'un ensemble de particules soumises à leur propre champ de gravitation et pouvant interagir. Les résultats obtenus dans ce travail permettent en utilisant les travaux de Y. Choquet-Bruhat d'obtenir un théorème d'existence pour le problème d'Einstein-Boltzmann.

Le chapitre 1 expose le cadre mathématique de la théorie cinétique relativiste et rappelle les propriétés générales de l'équation de Boltzmann. Pour la définition adoptée de l'opérateur de collision, utilisant les formes de Leray, on démontre les résultats mathématiques nécessaires pour le passage de la description « microscopique » par une fonction définie sur un fibré tangent à la description « macroscopique » par des fonctions à valeurs tensorielles définies sur la variété espace-temps.

Le chapitre 2 établit un théorème local d'existence et d'unicité pour l'équation de Boltzmann non linéaire dans le cadre de la relativité générale. Le cadre fonctionnel est un espace de Sobolev « avec poids », le poids étant défini par la donnée sur l'espace-temps de la classe des vecteurs strictement temporels continus et bornés, dans un tel espace on établit une intégrale de l'énergie pour l'opérateur différentiel et des majorations pour l'opérateur intégral qui permettent l'utilisation de généralisations des méthodes de Leray-Dionne pour l'étude des équations hyperboliques quasi linéaires.

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à M^me^ Choquet-Bruhat qui m'a suggéré d'entreprendre ce travail et m'a constamment fait bénéficier de ses conseils et de ses encouragements.

1. THÉORIE CINÉTIQUE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1.1. Cadre géométrique

Un espace-temps est une variété différentiable de dimension n, V_n, de classe C^p ($p \geq 1$) munie d'une métrique riemannienne hyperbolique g de signature $(+, -, \ldots, -)$ et de classe C^q ($q \geq 0$).

Un espace-temps (V_n, g) admettant toujours un espace-temps isométrique (V'_n, g') tel que V'_n soit de classe C^∞, on supposera $p = +\infty$.

L'espace des phases est le fibré tangent à V_n, noté $T(V_n)$.

La métrique g définit sur V_n un champ continu de cônes convexes fermés C_x d'équation dans l'espace tangent T_x en x à V_n :

$$g_x(p, p) = 0.$$

On suppose que l'on peut définir globalement et continûment sur V_n les champs de demi-cônes C_x^+ (cône futur) et C_x^- (cône passé), (V_n, g) est dite munie d'une orientation temporelle.

Un chemin, c'est-à-dire une classe d'équivalence d'arcs paramétrés, différentiables et orientés de V_n est dit temporel si sa demi-tangente positive est en chaque point x dans C_x^+.

Dans le domaine $\mathcal{U}$ d'une carte locale les coordonnées d'un point x seront désignées par (x^α), $\alpha = 0, \ldots, n-1$, les composantes d'un vecteur de l'espace tangent en x dans le repère naturel associé seront désignées par (p^α), les composantes du tenseur métrique par $g_{\alpha\beta}$.

Une particule de masse propre m, m nombre strictement positif, est un chemin dans l'espace des phases (x étant la position et p l'impulsion de la particule) tel que la longueur de p soit égale à m^2 :

$$g_x(p, p) = m^2$$

si l'on suppose que les impulsions des particules sont au point x dans le cône futur, la trajectoire d'une particule de masse propre m est dans le sous-fibré de fibre $P_x \cap C_x^+$, où P_x est l'hyperboloïde d'équations $g_x(p, p) = m^2$. Dans un système de coordonnées adaptées au caractère hyperbolique de la métrique, $P_x \cap C_x^+$ est défini par

$$g_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta = m^2, \qquad p^0 > 0.$$

Nous noterons $P(V_n)$ le fibré de base V_n et de fibre en x, $P_x \cap C_x^+$.
Un élément de volume $\bar{\theta}$ sur $T(V_n)$ peut être défini par

$$\bar{\theta} = \eta \wedge \bar{\omega}$$

où η et $\bar{\omega}$ sont des formes éléments de volume sur V_n et T_x données en coordonnées locales par

$$\eta = |g|^{1/2}\Big(\bigwedge_\alpha d^\alpha x\Big), \qquad \bar{\omega} = |g|^{1/2}\Big(\bigwedge_\alpha d^\alpha p\Big) \qquad (\text{avec } |g| = |\det g_{\alpha\beta}|).$$

Un élément de volume θ sur $P(V_n)$ peut être défini par

$$\theta = \eta \wedge \omega,$$

où ω est une forme de Leray sur P_x, c'est-à-dire une forme de rang $n - 1$ vérifiant

$$dF \wedge \omega = \bar{\omega}, \qquad \text{avec} \quad F = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta - m^2.$$

Une expression possible de ω est

$$\omega = \frac{|g|^{1/2}}{p_0}\Big(\bigwedge_i d^i p\Big) \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1), \qquad \text{avec} \quad p_\beta = g_{\beta\alpha}\, p^\alpha.$$

Une particule définit sur V_n une équation différentielle du second ordre, c'est-à-dire qu'il existe un paramétrage tel que sa trajectoire soit tangente à un champ de vecteur X sur $T(V_n)$ du type

$$X = (p^\alpha, Q^\alpha),$$

nous supposerons que Q^α s'écrit :

$$Q^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\, p^\lambda p^\mu + \psi^\alpha,$$

les $\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}$ étant les symboles de Christoffel de la métrique, supposée de classe C^1 et ψ un (champ de) vecteur vérifiant $g_x(\psi, p) = 0$.

Dans le cadre de la relativité générale, $n = 4$, et dans le cas purement gravitationnel on prend $\psi = 0$, c'est-à-dire que la trajectoire de la particule est une géodésique. Si l'on suppose l'existence d'un champ électromagnétique défini par une 2-forme F et si la particule a une charge e on choisit $\psi^\alpha = e\, F^\alpha_\beta\, p^\beta$. On vérifie que dans l'un et l'autre cas on a la relation $g_x(\psi, p) = 0$.

Énonçons quelques propriétés géométriques du (champ de) vecteur X qui seront utilisées au chapitre 2.

LEMME 1.1 :

(i) *Le vecteur* X *est tangent à* P (V_n).

(ii) (théorème de Liouville) : *La dérivée de Lie dans la direction du vecteur* X *de la forme* θ (*resp.* $\bar{\theta}$) *est nulle sur* P (V_n) [*resp.* T (V_n)].

(iii) *La forme* $i_X\,\theta$ (*resp.* $i_X\,\bar{\theta}$) *est un élément d'invariant intégral absolu pour le système différentiel défini par le champ de vecteur* X *sur* P (V_n) [*resp.* T (V_n)].

Pour la démonstration on utilise le théorème de Ricci pour établir la relation $i_X\,d\mathrm{F} = 0$ et l'expression de la dérivée de Lie d'une forme en fonction de la dérivation extérieure et du produit intérieur :

$$\mathcal{L}_X = i_X\,d + d i_X$$

(*cf.* Y. Choquet-Bruhat) [1]).

1.2. Équation de Boltzmann

Une fonction de distribution est une fonction scalaire définie sur P (V_n), elle s'interprète physiquement de la manière suivante ($n = 4$) :

Soit Σ une hypersurface de P (V_4) de dimension 6 dont la projection sur V_4 est de dimension 3. Le nombre moyen, au sens des ensembles de Gibbs, de particules traversant Σ est donné par

$$\int_\Sigma f i_X\,\theta.$$

Si les particules, supposées de même masse propre m, ne peuvent interagir la forme $f i_X\,\theta$ est un invariant intégral absolu pour le champ X et f satisfait à l'équation de Liouville $\mathcal{L}_X f = 0$.

Si les particules supposées de même masse propre m interagissent par collisions binéaires et élastiques, on introduit pour tenir compte des effets de collision un opérateur intégral que nous noterons $\mathcal{I}$ et appellerons opérateur de collisions. La fonction de distribution satisfait à l'équation de Boltzmann, qui s'écrit (A. Lichnerowicz et R. Marrot [2], A. N. Chernikov [3]) :

$$\mathcal{L}_X f = \mathcal{I} f.$$

Dans la définition générale des opérateurs de collisions, linéaires et élastiques, que nous donnerons, les quantités p et q (resp. $\bar{p}$ et $\bar{q}$) s'interprètent comme impulsions avant le choc (resp. après le choc), la relation de conservation de l'impulsion relativiste totale s'écrivant :

$$p + q = \bar{p} + \bar{q}.$$

Désignons par p, q, $\overline{p}$, $\overline{q}$, des éléments de P_x, nous noterons Σ l'hypersurface de $(P_x)^4$ d'équations $(p+q)-(\overline{p}+\overline{q})=0$. Σ sera appelée « hypersurface de collisions ».

Pour un élément $(\overline{p}, \overline{q})$ [resp. (p, q)] de $(P_x)^2$ nous noterons $\Sigma_{\overline{p},\overline{q}}$ (resp. $\Sigma_{p,q}$) l'hypersurface de $(P_x)^2$ d'équation $p+q=\overline{p}+q$.

Choisissons sur P_x, les coordonnées $(p^i)_{i=1,\ldots,n-1}$, p^0 étant une fonction définie sur R^{n-1}. La fonction p^0 appartient à l'espace $C^\infty(R^{n-1})$ et ses dérivées du premier ordre sont données par les formules

$$\frac{\partial p^0}{\partial p^i} = -\frac{p_i}{p_0}.$$

Le jacobien $\Delta = \dfrac{D(p^\alpha + q^\alpha)}{D(p^i, q^i)}$ qui s'écrit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{p_1}{p_0} & -\frac{p_i}{p_0} & \frac{p_{n-1}}{p_0} & -\frac{q_i}{q_0} & -\frac{q_i}{q_0} & -\frac{q_{n-1}}{q_0} \\ \ddots & & 0 & \ddots & & 0 \\ & 1 & & & 1 & \\ 0 & & \ddots & 0 & & \ddots \end{vmatrix}$$

est de rang maximal sauf aux points $p^i = q^i$.

Les formules

$$\xi \wedge \left(\bigwedge_\alpha d(p^\alpha + q^\alpha)\right) = \omega_p \wedge \omega_q,$$

$$\overline{\xi} \wedge \left(\bigwedge_\alpha d(\overline{p}^\alpha + \overline{q}^\alpha)\right) = \omega_{\overline{p}} \wedge \omega_{\overline{q}}.$$

définissent donc des formes de Leray presque partout sur $\Sigma_{\overline{p},\overline{q}}$ et $\Sigma_{p,q}$.

Nous appelons opérateur de collision l'opérateur intégral, sur les fonctions définies sur $P(V_n)$:

$$(\mathcal{J} f)(x, p) = \int_{P_x}\int_{\Sigma_{p,q}} [f(x, \overline{p}) f(x, \overline{q}) - f(x, p) f(x, q)] \times A(x, p, q, \overline{p}, \overline{q})\, \overline{\xi} \wedge \omega_q,$$

le noyau $A(x, p, q, \overline{p}, \overline{q})$ appelé section efficace de chocs sera toujours une fonction mesurable positive vérifiant :

$$A(x, p, q, \overline{p}, \overline{q}) = A(x, \overline{p}, \overline{q}, p, q).$$

Le lemme 1.2 est une généralisation, pour la forme adoptée de l'opérateur de collision, d'un résultat classique de Chernikov (Chernikov [3]).

LEMME 1.2. — *Pour toute fonction mesurable positive Φ définie sur* $(\mathrm{P}_x)^4$ *on a la relation*

$$\int_{(\mathrm{P}_x)^2}\int_{\Sigma_{\overline{p},\overline{q}}} \Phi(p, q, \overline{p}, \overline{q})\, \xi \wedge \omega_{\overline{p}} \wedge \omega_{\overline{q}}$$
$$= \int_{(\mathrm{P}_x)^2}\int_{\Sigma_{p,q}} \Phi(p, q, \overline{p}, \overline{q})\, \overline{\xi} \wedge \omega_p \wedge \omega_q.$$

Démonstration. — Des formules de définition des formes ξ et $\overline{\xi}$, il résulte que

$$\xi \wedge \overline{\xi} \wedge \Big(\bigwedge_{\alpha} d(p^\alpha + q^\alpha - \overline{p}^\alpha - \overline{q}^\alpha)\Big) = \xi \wedge \omega_{\overline{p}} \wedge \omega_{\overline{q}} - \overline{\xi} \wedge \omega_p \wedge \omega_q$$

donc en intégrant sur l'hypersurface de collision Σ on obtient

$$\int_{\Sigma} \Phi(p, q, \overline{p}, \overline{q})\, \xi \wedge \omega_{\overline{p}} \wedge \omega_{\overline{q}} = \int_{\Sigma} \Phi(p, q, \overline{p}, \overline{q})\, \xi \wedge \omega_p \wedge \omega_q$$

soit le résultat énoncé d'après le théorème de Fubini.

Soit $\mathcal{U}$ le domaine d'une carte locale sur V_n. Si $p = (p^i)_{i=1,\dots,n-1}$ est un élément de R^{n-1} définissons p^0 comme racine positive de l'équation $g_{\alpha\beta}\, p^\alpha\, p^\beta = m^2$. La fonction p^0, donnée explicitement par

$$p^0 = \frac{[g_{00}\, m^2 + (g_{0i}\, g_{0k} - g_{00}\, g_{ik})\, p^i\, p^k]^{1/2} - g_{0k}\, p^k}{g_{00}}$$

est une fonction C^∞ de $(p^i) \in \mathrm{R}^{n-1}$ et $(g^{\alpha\beta})$. Si la métrique est de classe C^1 la fonction p^0 appartient à l'espace $\mathrm{C}^1(\mathcal{U} \times \mathrm{R}^{n-1})$ et ses dérivées du premier ordre sont données par les formules

$$\frac{\partial p^0}{\partial x^\alpha} = -\frac{p^\lambda\, p^u \left(\dfrac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right)}{2\, p_0}, \qquad \frac{\partial p^0}{\partial p^i} = -\frac{p_i}{p_0}.$$

L'application φ est une application de $\mathcal{U} \times \mathrm{R}^{n-1}$ dans $\mathrm{P}(\mathcal{U})$ définie par

$$\varphi(x^\alpha, p^i) = (x^\alpha, p^\alpha) \qquad (\alpha = 0, \dots, n-1;\ i = 1, \dots, n-1).$$

Si f est une fonction de classe C^1 définie sur $\mathrm{P}(\mathcal{U})$ la fonction $f_0\, \varphi$ est une fonction de classe C^1 définie sur $\mathcal{U} \times \mathrm{R}^{n-1}$, un calcul élémentaire montre que

$$\left(p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \mathrm{Q}^i \frac{\partial}{\partial p^i}\right) f_0\, \varphi = (\mathcal{L}_{\mathrm{X}}\, f)_0\, \varphi.$$

Dans le chapitre 2 on se placera dans le domaine $\mathcal{U}$ d'une carte locale et les fonctions de distributions seront considérées comme des fonctions définies sur $\mathcal{U} \times \mathrm{R}^{n-1}$, c'est-à-dire que l'on considérera la fonction $f_0\, \varphi$.

Nous appellerons opérateur de Liouville, l'opérateur différentiel normal sur les fonctions définies sur $\mathcal{U} \times \mathrm{R}^{n-1}$, noté $\mathcal{L}$ et défini par la formule

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\mathrm{Q}^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial p^i}.$$

1.3. Magnétohydrodynamique relativiste et équation de Boltzmann

A la fonction de distribution définie sur le fibré $\mathrm{P}(\mathrm{V}_4)$ correspond une description du gaz relativiste à l'échelle « microscopique ». Les équations de la magnétohydrodynamique, au contraire, utilisent des fonctions, à valeurs tensorielles, définies sur l'espace-temps V_4 et qui peuvent être introduites comme moments de la fonction de distribution.

Définition 1. — Le moment d'ordre n de la fonction de distribution est le (champ de) tenseur

$$\int f\,((\otimes)^n\, p)\,\omega.$$

Le moment du premier ordre permet de définir la vitesse unitaire du fluide par les formules

$$ru = \int fp\,\omega, \qquad u_\alpha\, u^\alpha = 1.$$

Le moment du second ordre permet de définir le tenseur d'impulsion-énergie :

$$\mathrm{T} = \int f\,(\otimes^2 p)\,\omega.$$

Du lemme 1.2 et de la formule

$$\nabla_\alpha \int p^\alpha f = \int \mathcal{L}_{\mathrm{X}} f\,\omega$$

il résulte les équations de conservation

$$\nabla_\alpha\,(ru^\alpha) = 0, \qquad \nabla_\alpha\,\mathrm{T}^{\alpha\beta} = 0$$

et également de théorème H de Boltzmann.

Les différences entre les descriptions macroscopiques proposées par divers auteurs proviennent essentiellement de la façon de définir, à partir des moments du premier et du second ordre de la fonction de distribution, les grandeurs auxquelles on attache traditionnellement une signification physique. Notre objet n'étant pas de proposer une nouvelle description nous nous contenterons de donner sur ce sujet une bibliographie : L. Bel [4], A. N. Chernikov [3], Y. Choquet-Bruhat [5], J. Ehlers [6], C. Marle [7], J. L. Synge [8], etc.

2. PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION DE BOLTZMANN EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

2.1. Introduction et hypothèses sur la métrique

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution locale du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann, lorsque la métrique possède des propriétés de régularité et d'hyperbolicité. On se place dans un ouvert $\mathcal{U}$ domaine d'une carte locale, les données de Cauchy seront portées par $\omega_0 \times R^{n-1}$ où ω_0 est un ouvert borné d'une hypersurface intiale S_0 dont l'équation locale sera $x^0 = 0$. Le théorème d'existence et d'unicité énoncé sera valable dans $\omega \times R^{n-1}$ où ω est un voisinage de ω_0.

Pour les notions de géométrie hyperbolique utilisées dans ce chapitre nous adoptons la terminologie de J. Leray [9] et Y. Choquet-Bruhat [10].

On désigne par Ω un ouvert régulier, par exemple Ω possèdera la propriété du cône (Agmon [11], p. 11), tel que $\Omega \subset\subset \mathcal{U}$ et par $\hat{\Omega}$ le produit $\Omega \times \mathbf{R}^{n-1}$.

Sur la métrique g il sera fait les hypothèses de régularité et d'hyperbolicité :

HYPOTHÈSE 2.1. — Les fonctions $g_{\alpha\beta}$ appartiennent à $\mathcal{H}_\sigma(\Omega)$ où σ est un entier positif et $\mathcal{H}_\sigma(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions de carré sommable sur Ω ainsi que leurs dérivées au sens des distributions d'ordre $\leqq \sigma$.

On note :

$$| g |_\sigma = \sup_{\alpha, \beta} \| g_{\alpha\beta} \|_{\mathcal{H}_\sigma(\Omega)}.$$

HYPOTHÈSE 2.2. — La métrique $(g_{\alpha\beta})$ est uniformément hyperbolique, les hyperplans $x^0 =$ Cte étant uniformément spatiaux, c'est-à-dire qu'il existe une constante a non nulle telle que

$$g^{00} \geqq a^2, \qquad g_{00} \geqq a^2;$$

$$- g_{ij}\,\xi^i\,\xi^j \geqq a^2\,|\,\xi\,|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^{n-1}, \qquad |\,\xi\,| = \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\xi^i)^2 \right]^{1/2}$$

si $p = (p^i)_{i=1, \ldots, n-1}$ désigne un élément de R^{n-1}, p^0 désigne la racine positive de l'équation $g_x(p, p) = m^2$, p^0 est une fonction définie sur $\hat{\Omega}$.

Pour la forme quadratique $g_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\,\xi^\beta$ nous utiliserons la décomposition, introduite par Y. Choquet-Bruhat [5] :

$$g_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\,\xi^\beta = g_{00}\,(\xi^0)^2 + g_{ij}\,(\xi^i + \overline{g}^{0i}\,\xi^0)\,(\xi^j + \overline{g}^{0j}\,\xi^0) - g_{ij}\,\overline{g}^{0i}\,\overline{g}^{0j}\,(\xi^0)^2,$$

où les quantités $\bar{g}^{0i}$ sont définies par, la matrice $(\bar{g}^{ih})$ étant la matrice inverse de la matrice (g_{ik}),

$$\bar{g}^{0i} = \bar{g}^{ih}\, g_{0h}.$$

LEMME 2.1. — *Sous l'hypothèse* 2.2 *on a la minoration*

$$p^0 \geqq m\,(g^{00})^{1/2}.$$

Démonstration. — Il suffit d'écrire la relation $g_x(p, p) = m^2$ sous la forme

$$\frac{m^2}{(p^0)^2} = \frac{1}{g^{00}} + g_{ij}\left(\frac{p^i}{p^0} + \bar{g}^{0i}\right)\left(\frac{p^j}{p^0} + \bar{g}^{0j}\right).$$

LEMME 2.2. — *Sous les hypothèses* 2.2 *et* 2.1 *avec* $\sigma > \left[\frac{n}{2}\right]$, *les fonctions* $\left(\frac{p_i}{p^0}\right)_{i=1,\ldots,n-1}$ *appartiennent à* $L_\infty(\hat{\Omega})$.

Démonstration. — En utilisant les hypothèses 2.1, on a

$$\left(\frac{p^i}{p^0}\right)^2 \leqq 2\left[\frac{1}{a^2\, g^{00}} + (\bar{g}^{0i})^2\right],$$

ce qui démontre le résultat en utilisant le théorème d'inclusion de Sobolev :

$$\mathcal{H}_\sigma(\Omega) \hookrightarrow L_\infty(\Omega) \qquad \text{si} \quad \sigma > \left[\frac{n}{2}\right].$$

REMARQUES 2.1. — Sous les hypothèses du lemme 2.2, on a :

a. Les fonctions $\frac{p^i}{p_0}, \frac{p_i}{p_0}, \frac{p_i}{p^0}$ appartiennent à $L_\infty(\hat{\Omega})$, en effet il suffit d'écrire $p_\alpha = g_{\alpha\beta}\, p^\beta$ et d'utiliser le lemme 2.2.

b. Il existe une constante N et pour tout nombre $\alpha > 0$ une constante M_α telle que

$$N\,|\,p\,| \leqq p^0,$$

$$p^0 \leqq M_\alpha\,|\,p\,| \qquad \text{pour} \quad |\,p\,| \geqq \alpha,$$

la première inégalité résulte du lemme 2.1, la seconde de la relation

$$g_{00}\frac{p^0}{|\,p\,|} = g_{00}\frac{m^2}{|\,p\,|^2} + \left[(g_{0i}\, g_{0k} - g_{00}\, g_{ik})\frac{p^i\, p^k}{|\,p\,|^2}\right]^{1/2} - g_{0k}\frac{p^k}{|\,p\,|}$$

et de l'inclusion $\mathcal{H}_\sigma(\Omega) \hookrightarrow L_\infty(\Omega)$ pour $\sigma > \left[\frac{n}{2}\right]$.

2.2. **Espaces de Sobolev réguliers pour les (champs de) vecteurs temporels**

Dans ce paragraphe, on introduit une classe d'espaces du type de S. L. Sobolev, avec poids. Le poids est défini par la donnée sur l'espace-temps (Ω, g) de la classe des vecteurs continus, bornés et strictement temporels.

Soit Ω un ouvert de V_n. Un vecteur v est strictement temporel sur (Ω, g) s'il existe un scalaire non nul a tel que

$$g_x(v, v) \geq a^2, \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

NOTATION 2.1. — *a*. K_Ω est la classe des vecteurs continus bornés et strictement temporels sur l'espace-temps (Ω, g).

b. θ_v désigne la fonction définie sur Ω par la formule

$$\theta_v = v_0\, \varphi,$$

où φ est l'application de $\hat{\Omega}$ dans $P(\Omega)$ définie au paragraphe 1.2 et v la fonction définie sur $P(\Omega)$ par la donnée d'un élément v de K_Ω et la formule

$$v(x, p) = g_x(v, p).$$

Sous les hypothèses 2.1 avec $\sigma > \left[\frac{n}{2}\right]$ et 2.2 on a les lemmes :

LEMME 2.3. — *Le vecteur* $\delta = (\delta_0^\lambda)$ *appartient à* K_Ω.

En effet, $g_x(\delta, \delta) = g_{00}$.

LEMME 2.4. — *Si v et v' sont deux éléments de* K_Ω *il existe deux constantes* K_1 *et* K_2 *telles que*

$$0 < K_1 \leq \frac{\theta_v}{\theta_{v'}} \leq K_2.$$

LEMME 2.5. — *La fonction* θ_v^{-1} *appartient à* $L_\infty(\hat{\Omega})$.

En effet, $\theta_\delta^{-1} = (p^0)^{-1}$ appartient à $L_\infty(\Omega)$ d'après le lemme 2.1.

Nous supposerons toujours par la suite que $\sigma > \left[\frac{n}{2}\right]$.

Soient $(h) = (h_\mu)$ une suite d'éléments de R^+, $\mu \in N^{2n-1}$, et s un entier positif ou nul. La définition 2.1 est celle des espaces de Sobolev réguliers pour les vecteurs strictement temporels, espaces $K_{s,(h)}(\hat{\Omega})$.

DÉFINITION 2.1. — $K_{s,(h)}(\hat{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions numériques f définies presque partout sur $\hat{\Omega}$, ayant des dérivées au sens des distributions d'ordres $\leq s$ satisfaisant aux conditions :

(i) $$D^\mu f \in L_2(\hat{\Omega}) \qquad \text{si} \quad |\mu| \leq s;$$

(ii) $$\int_{\hat{\Omega}} \sum_{|\mu| \leq s} (\theta_v)^{h_\mu} |D^\mu f|^2\, dx\, dp < +\infty;$$

où v est un élément quelconque de K_Ω (ce qui a un sens d'après le lemme 2.4).

REMARQUES 2.2. — *a.* muni de la norme

$$\| f \|_{s,h} = \left[\int_{\hat{\Omega}} \sum_{|\mu| \leq s} (\theta_v)^{h_\mu} \, | D^\mu f |^2 \, dx \, dp \right]^{1/2},$$

l'espace $K_{s,(h)}(\hat{\Omega})$ est un espace de Hilbert, complété de $C^\infty(\hat{\Omega})$ pour la norme $\| \, . \, \|_{s,h}$.

b. en utilisant le lemme 2.5 on peut écrire l'inclusion algébrique et topologique

$$K_{s,(h)}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{H}_s(\hat{\Omega}).$$

c. si f appartient à $\mathcal{H}_s(\hat{\Omega}) \cap \mathcal{E}(\hat{\Omega})$ alors f appartient à $K_{s,h}(\hat{\Omega})$.

DÉFINITION 2.2. — Désignons par ω_t l'intersection de Ω et de l'hyperplan $x^0 = t$, par $\hat{\omega}_t$ le produit $\omega_t \times R^{n-1}$. D'après le théorème de Fubini si f est un élément de $K_{s,(h)}(\hat{\Omega})$ la fonction de t,

$$\left[\int_{\hat{\omega}_t} \sum_{|\mu| \leq s} (\theta_v)^{h_\mu} \, | D^\mu f |^2 \, dx \, dp \right]^{1/2}$$

est définie pour presque toute valeur de t, nous la nommons quasi-norme et nous la notons $\| f, t \|_{s,(h)}$.

Un produit de dérivées des composantes du tenseur métrique g, $\Pi \, D^\alpha g_{\lambda\mu}$ sera dit d'ordre (k, l) si $\Sigma \, |\alpha| = k$ et $\displaystyle\sum_{\alpha \neq 0} 1 = l$, on supposera toujours que $|\alpha| \leq \sigma$ $\left(\text{on écrit } \displaystyle\sum_{\alpha \neq 0} 1 = l \text{ pour exprimer que le produit contient } l \text{ termes d'ordre de dérivation non nul}\right)$.

En utilisant un lemme de Dionne-Garding (Dionne [12], p. 22), on a :

LEMME 2.6. — *Si* $1 < p < \infty$ *et si* $(\Pi \, D^\alpha g_{\lambda\mu})$ *est un produit d'ordre* $(k, 1)$ *avec* $\left[k - \sigma - l + 1 + \dfrac{n}{2} \right] < \dfrac{n-1}{p}$ *il existe une constante* $C(\Omega, \sigma)$ *telle que*

$$\| \Pi \, D^\alpha g_{\lambda\mu} \|_{L_p(\Omega)} \leq C(\Omega, \sigma) \, | g |_\sigma^l$$

si $p = +\infty$ *le résultat subsiste pour* $k - l < \sigma - 1 - \left[\dfrac{n}{2} \right]$.

Démonstration. — On utilise l'inégalité de Hölder,

$$\| \Pi \, D^\alpha g_{\lambda\mu} \|_{L_p(\Omega)} \leq \Pi \, \| D^\alpha g_{\lambda\mu} \|_{L_{p_\alpha}(\Omega)} \qquad \text{si} \quad \sum_\alpha \frac{1}{p_\alpha} = \frac{1}{p};$$

l'inégalité de Sobolev,

$$\| \Pi\, D^{\alpha}\, g_{\lambda\mu} \|_{L_p(\Omega)} \leqq C(\Omega, \sigma)\, \Pi\, \| g_{\lambda\mu} \|_{\mathcal{H}_\sigma(\Omega)}$$

si

$$\left[|\alpha| - \sigma + \frac{2}{n} \right] < \frac{n-1}{p_\alpha}, \quad \forall\, \alpha.$$

LEMME 2.7. — *Si $\mathcal{U} \subset \omega_t \subset \mathcal{V}$ ou $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des ouverts réguliers de $\mathbf{R}^{2n-1}$ et sous les hypothèses : 2.1, avec $\sigma \geqq s-1$, et 2.2 il existe une constante $C((\Omega, g), s)$ telle que pour tout élément de $\mathcal{K}_{s,h}(\hat{\Omega})$ on ait :*

(i) $$\int (\theta_v)^l\, |D^\nu f|^2\, dp \leqq C \| f, t \|^2_{s,(h)}$$

si $s \geqq n$, $|\nu| \leqq s - \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ *et* $l \leqq h_\mu$ *pour*

$$|\nu| \leqq |\mu| \leqq |\nu| + \left[\frac{n+1}{2}\right];$$

(ii) $$\int (\theta_v)^l\, |D^\nu f|^2\, dp \leqq C \| f \|^2_{s(h)}$$

si $s \geqq 2\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$, $|\nu| \leqq s - \left(\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1\right)$ *et* $l \leqq h_\mu$ *pour*

$$|\nu| \leqq |\mu| \leqq |\nu| + \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Démonstration. — On a, lemme 2.4,

$$\int (\theta_v)^l\, |D^\nu f|^2\, dp \leqq C \int (p^0)^l\, |D^\nu f|^2\, dp$$

il résulte des expressions de $D^\mu(p^0)$, $|\mu| \leqq s$, que la fonction $(p^0)^{l/2} D^\nu f$ possède $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ $\left(\text{resp. } \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1\right)$ dérivées au sens des distributions appartenant à $L_2(\hat{\Omega})$. En effet, $D^\mu[(p^0)^{l/2} D^\nu f]$,

$$|\mu| \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] \quad \left(\text{resp. } \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$$

s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients appartenant à $L_\infty(\hat{\Omega})$ de termes de la forme $(p^0)^{l/2}\, \psi\, D^{\nu+\lambda} f$ avec $\lambda \leqq \mu$ et ψ étant un produit d'ordre (k, l) avec $k \leqq |\mu - \lambda|$ donc appartenant à $L_\infty(\hat{\Omega})$ puisque, lemme 2.6,

$$k - l \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1 < s - \left[\frac{n}{2}\right] \qquad \text{si} \quad s \geqq n$$

$$\left(\text{resp. } k - l \leqq \left[\frac{n}{2}\right] < s - \left[\frac{n}{2}\right] \text{ si } \quad s \geqq 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right).$$

On a donc la majoration :

$$\int (\theta_v)^l \mid D^\nu f \mid^2 dp \leq C \int_{\widehat{\omega}_t} \sum_{|\mu| \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]} \mid D^\mu ((p^0)^{l/2} D^\nu f) \mid^2 dp\, dx$$

$$\left(\text{resp. } \int (\theta_v)^l \mid D^\nu f \mid^2 dp \leq C \int_{\widehat{\Omega}_t} \sum_{|\mu| \leq \left[\frac{n}{2}\right]+1} \mid D^\mu ((p^0)^{l/2} D^\nu f) \mid^2 dp\, dx\right),$$

d'où le lemme en utilisant les hypothèses sur l et de nouveau le lemme 2.4.

2.3. **Inégalité de l'énergie pour l'opérateur de Liouville**

L'inégalité de l'énergie pour l'opérateur de Liouville sera établie dans une classe d'espaces $K_{s,h}(\hat{\Omega})$ correspondant à un choix particulier de l'ouvert Ω et de la suite (h). Pour ce choix de la suite (h), nous noterons $K_s(\hat{\Omega})$ l'espace $K_{s(h)}(\hat{\Omega})$, $\| \, . \, \|_s$ la norme $\| \, . \, \|_{s,(h)}$, etc.

Si μ est un multi-entier de rang $2n - 1$, auquel est associé le symbole de dérivation D^μ défini par

$$D^\mu = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_0^{\mu_0} \ldots \partial x_{n-1}^{\mu_{n-1}} \partial p_1^{\mu_n} \ldots \partial p_{n-1}^{\mu_{2n-2}}},$$

on note $\bar{\mu} = (\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, 0, \ldots, 0)$,

$$\hat{\mu} = (0, \ldots, 0, \mu_n, \ldots, \mu_{2n-2}).$$

La suite (h) est définie par

$$h_\mu = \rho + 2 \mid \hat{\mu} \mid,$$

ρ étant un nombre réel positif.

Ce choix est justifié par le résultat du lemme 2.8.

LEMME 2.8. — *Sous les hypothèses du lemme 2.7 avec*

$$\sigma - 1 \geq s \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \qquad si \quad \mid \nu \mid \leq s,$$

$$D^\nu \left[j_l \left(\frac{p^i}{p^0} \right) \right] \quad \left[resp.\ D^\nu \left(j_l \, \Gamma^i_{\lambda\mu} \frac{p^\lambda p^\mu}{p^0} \right) \right]$$

s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients bornés, uniformément en l, de termes de la forme

$$(\Pi\, D^\alpha g_{\lambda\mu}) (p^0)^{-|\hat{\nu}|}, \quad \Sigma \mid \alpha \mid = \mid \bar{\nu} \mid$$

$$\left[resp.\ \Pi\, D^\alpha g_{\lambda\mu} (p^0)^{1-|\hat{\nu}|}, \quad \Sigma \mid \alpha \mid = \mid \bar{\nu} \mid + 1\right].$$

[La suite $\{j_l\}_{l\in\mathbf{N}}$ est une suite tronquante définie par $j_l(p) = j\left(\frac{p}{l}\right)$ où j est un élément de $C^\infty(R^{n-1})$ vérifiant

$0 \leq j \leq 1, \qquad j(p) = 1 \quad \text{pour } |p| \leq 1, \qquad j(p) = 0 \quad \text{pour } |p| \geq 2.$

Nous ferons la convention $j_\infty(p) = 1, \forall\, p \in R^{n-1}$].

Démonstration. — Pour $l = +\infty$ le résultat est une conséquence des formules

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{p^i}{p^0}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\frac{p^\lambda p^\mu}{(p^0)^2}\frac{p^i}{p_0}; \qquad \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{p^i}{p^0}\right) = -\left[\frac{p^i p_j}{p^0 p_0} + \delta^i_j\right]\frac{1}{p^0}.$$

Pour $0 < l < +\infty$ on a

$$D^\nu\left[j\left(\frac{p}{l}\right)\frac{p^i}{p^0}\right] = \sum_{\beta\leq\nu}\binom{\nu}{\beta}\frac{1}{l^{|\beta|}}(D^\beta j)\left(\frac{p}{l}\right)D^{\nu-\beta}\left(\frac{p^i}{p^0}\right)$$

en écrivant, lorsque $|\beta| > 0$,

$$\left|\frac{1}{l^{|\beta|}}D^\beta j\left(\frac{p}{l}\right)\right| = \left|\left(\frac{p^0}{l}\right)^{|\beta|}(p^0)^{-\beta}Dj\left(\frac{p}{l}\right)\right|,$$

expression nulle pour $|p| \leq l$, et en utilisant la remarque 2.*b* avec $\alpha = 1$, $M_1 = M$, on a

$$\left|\frac{1}{l^{|\beta|}}D^\beta j\left(\frac{p}{l}\right)\right| \leq (2\,M)^{|\beta|}(p^0)^{-|\beta|}\sup_{p\in\mathbf{R}^{n-1}}|D^\beta j(p)|$$

(rappelons que M ne dépend que de $|g|_\sigma$).

Soit ω_0, un ouvert borné de l'hyperplan spatial $x^0 = 0$. On désigne par $D^+(\omega_0)$ [resp. $D^-(\omega_0)$] l'ensemble des points x tels que tout chemin temporel issu de x vers le passé (resp. vers le futur) rencontre ω_0 en un point et un seul). Notons $D(\omega_0)$ la réunion de $D^+(\omega_0)$ et $D^-(\omega_0)$.

L'espace-temps $\left(\widehat{\overset{\circ}{D}(\omega_0)}, g\right)$ est un espace-temps globalement hyperbolique admettant ω_0 comme surface de Cauchy.

Notation 2.2. — On désigne par Ω l'intérieur de $D^+(\omega_0)$ Ω_t l'intersection de Ω avec la bande ouverte $0 < x^0 < t$, T est un nombre positif tel qu'il existe deux ouverts réguliers $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de R^{2n-1} avec $\mathcal{U} \subset \omega_t \subset \mathcal{V}$ pour $0 \leq x^0 \leq T$.

Remarque 2.3. — *a.* Si ω_0 est régulier, c'est-à-dire possède la propriété du cône, alors Ω_t, $t > 0$, est régulier.

b. Désignons par $\partial\Omega_t$ la frontière de Ω_t. Les ensembles ω_0 et ω_t appartiennent à $\partial\Omega_t$ et l'ensemble $\partial\Omega_t - (\overline{\omega}_0 \cup \overline{\omega}_t)$ est engendré par des géodésiques isotropes pour la métrique g qui rencontrent l'hyperplan $x^0 = 0$ suivant $\partial\Omega_0$.

Nous établissons l'inégalité de l'énergie dans le cas purement gravitationnel, c'est-à-dire lorsque $Q^i = -\Gamma^i_{\lambda\mu}\, p^\lambda\, p^\mu$. On obtient un résultat identique dans le cas général en choisissant sur les coefficients Q^i des hypothèses telles que les conclusions du lemme 2.8 subsistent dans le cas $l = +\infty$, il suffit pour cela de choisir les fonctions ψ^α dans une algèbre de Sobolev $\mathcal{H}_\sigma$.

THÉORÈME 2.1. — *Sous les hypothèses* 2.1 *et* 2.2 *avec*

$$\sigma - 1 \geqq s \geqq 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

il existe une constante C *ne dépendant que de* (Ω, g), σ, s *et* T *telle que pour toute fonction* $f \in K_{s+1}(\hat{\Omega}_t)$ *on ait l'inégalité* $0 \leqq t \leqq T$,

$$\| f, t \|_s^2 \leqq C' \left[\| f, 0 \|_s^2 + \int_s^t \{ \| f, \tau \|_s^2\, d\tau + \| \mathcal{L} f, \tau \|_s^2 \}\, d\tau \right].$$

Démonstration. — Désignons par $\hat{\Omega}'_t$ l'image dans les variables (x^α, p^i) d'un sous-ensemble de $P(\Omega_t)$ engendré par les trajectoires du champ X issues de $P(\omega_t)$ et telles que $x^0 > 0$. Le bord de $\hat{\Omega}'_t$ est la réunion de $\hat{\omega}_t$, d'un sous-ensemble de $\hat{\omega}_0$ noté $\hat{\omega}'_0$ et d'un « bord latéral » engendré par les trajectoires du champ X.

Pour toutes fonctions h et φ régulières, on a

$$\int_{\hat{\Omega}'_t} \mathcal{L}_X (h\, \varphi^2\, \theta) = \int_{\hat{\omega}_t} h\, \varphi^2\, i_X\, \theta + \int_{\hat{\omega}'_t} h\, \varphi^2\, i_X\, \theta.$$

D'après le théorème de Liouville (lemme 1.1) :

$$\mathcal{L}_X (h\, \varphi^2\, \theta) = \mathcal{L}_X (h)\, \varphi^2\, \theta + 2\, h\, \varphi\, \mathcal{L}_X (\varphi)\, \theta,$$

ce qui donne en choisissant $h = (p^0)^{h_\mu - 1}\, p_0$, $\varphi = D^\mu f$ et en remarquant que, sur $\hat{\omega}_0$, $-h i_X\, \theta = |\, g\, |\, (p^0)^{h_\mu}\, dx\, dp$,

$$\int_{\hat{\omega}_t} |\, D^\mu f\,|^2\, (p^0)^{h_\mu}\, dx \wedge dp \leqq C \left[\int_{\hat{\omega}_0} |\, D^\mu f\,|^2\, (p^0)^{h_\mu}\, dx \wedge dp \right.$$
$$+ \left[\int_{\hat{\Omega}_t} \frac{1}{p^0} \mathcal{L}_X ((p^0)^{h_\mu - 1}\, p_0)\, |\, D^\mu f\,|^2 \right.$$
$$\left.\left. + (p^0)^{h_\mu} |\, D^\mu f\, \mathcal{L}\, (D^\mu f)\,| \right] dx \wedge dp \right].$$

Le lemme 2.8 permet d'écrire :

$$\left| \frac{1}{p^0} \mathcal{L}_X ((p^0)^{h_\mu - 1} p_0) \right| | D^\mu f |^2 \leq C (p^0)^{h_\mu} | D^\mu f |^2.$$

D'autre part :

$$\mathcal{L} (D^\mu f) = D^\mu \mathcal{L} f - \sum_{\substack{|\nu| > 0 \\ \nu \leq \mu}} \binom{\mu}{\nu} \left[D^\nu \left(\frac{p^i}{p^0} \right) D^{\mu-\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \right.$$
$$\left. + D^\nu \left(\frac{Q^i}{p^0} \right) D^{\mu-\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial p^i} \right) \right].$$

Étudions les termes

$$\int_{\hat{\Omega}_t} (p^0)^{h_\mu} \left| D^\nu \left(\frac{p^i}{p^0} \right) D^{\mu-\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \right| | D^\mu f | \, dx \, dp$$

qui se majorent d'après l'inégalité de Schwartz par

$$\left[\int_{\hat{\Omega}_t} (p^0)^{h_\mu} | D^\mu f |^2 \, dx \, dp \right]^{1/2}$$
$$\times \left[\int_{\hat{\Omega}_t} \left| D^\nu \left(\frac{p^i}{p^0} \right) \right|^2 \left| D^{\mu-\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \right|^2 (p^0)^{h_\mu} \, dx \, dp \right]^{1/2},$$

utilisant le lemme 2.8 nous considérons les termes :

$$\int_{\hat{\Omega}_t} | \Pi \, D^\alpha g_{\lambda\mu} |^2 (p^0)^{-2|\hat{\nu}| + h_\mu} \left| D^{\mu-\nu} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|^2 dx \, dp \qquad \text{avec} \quad \Sigma \, \alpha = \bar{\nu}$$

si $\Sigma \, | \alpha | = | \bar{\nu} | < s - \left[\frac{n}{2} \right]$, on a, en remarquant que

$$h_\mu - 2 | \hat{\nu} | = h_{(\mu - \nu + i)}$$

et en utilisant le lemme 2.6, la majoration par

$$C (| g |_s)^{\Sigma | \alpha |} \| f, t \|_s^2$$

si $| \bar{\nu} | \geq s - \left[\frac{n}{2} \right]$ on peut écrire, lemme 2.7 (i) :

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} (p^0)^{h_\mu - 2|\hat{\nu}|} \left| D^{\mu-\nu} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|^2 dp \leq C \| f, t \|_s^2$$

car on a les inégalités

$$| \nu - \nu | \leq s - \left[\frac{n+1}{2} \right] \qquad \text{si} \quad | \nu | \geq s - \left[\frac{n}{2} \right].$$

Soit la majoration par

$$C \| f, t \|_s^2 \int_{\Omega_t} | \Pi D^\alpha g_{\lambda\mu} |^2 \, dx$$

et en utilisant le lemme 2.6 $\left(\left[\Sigma \mid \alpha \mid - s - 1 + \frac{n}{2}\right] < \frac{n-1}{2}\right)$ par

$$C \| f, t \|_s^2 \left(| g |_\sigma \right)^{\Sigma |\alpha|},$$

ce qui permet d'écrire dans les deux cas :

$$\int_{\hat{\Omega}_t} (p^0)^{h_\mu} \left| D^\nu \left(\frac{p^i}{p^0} \right) D^{\mu-\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \right| | D^\mu f | \, dx \, dp \leq C \int_0^t \| f, \tau \|_s^2 \, d\tau.$$

Pour les expressions

$$\int_{\hat{\Omega}_t} \left| D^\nu \left(\frac{Q^i}{p^0} \right) D^{\mu-\nu} \frac{\partial f}{\partial p^i} \right| | D^\mu f | (p^0)^{h_\mu} \, dx \, dp,$$

les calculs sont identiques, sauf pour les termes de la forme

$$\int_{\hat{\Omega}_t} | \Pi D^\alpha g_{\lambda\mu} |^2 (p^0)^{h_\mu - 2(|\hat{\nu}| - 1)} \left| D^{\mu-\nu} \frac{\partial f}{\partial p^i} \right|^2 dx \, dp$$

pour lesquels $|\hat{\nu}| = s$ et $\Sigma |\alpha| = s + 1$. On utilise alors le lemme 2.7 (ii) qui permet d'écrire la majoration par

$$C \int_0^t \| f, \tau \|_s^2 \, d\tau \int_{\Omega_t} | \Pi D^\alpha g_{\lambda\mu} |^2 \, dx.$$

L'inégalité établie par les fonctions f régulières est ensuite étendue, par troncature en p puis régularisation, aux fonctions $f \in K_{s+1}(\hat{\Omega}_T)$, en remarquant que

$$\lim_{l \to \infty} \| j_l f - f, t \|_s = 0 \qquad \text{si} \quad f \in K_{s+1}(\hat{\Omega}_T),$$

$$\| \mathcal{L} f \|_s \leq L \| f \|_{s+1}.$$

Par des calculs analogues à ceux du théorème 2.1 on a :

THÉORÈME 2.1'. — *Sous les hypothèses* 2.1 *et* 2.2 *avec* $\sigma - \left[\frac{n}{2}\right] > s > \left[\frac{n}{2}\right]$ *on a l'inégalité de l'énergie*

$$\| f, t \|_s^2 \leq C' \left[\| f, 0 \|_s^2 + \int_0^t \{ \| f, \tau \|_s^2 + \| \mathcal{L} f, \tau \|_s^2 \} \, d\tau \right]$$

pour $0 \leq t \leq T$ *et* $f \in K_{s+1}(\hat{\Omega}_T)$.

Le problème de Cauchy pour l'opérateur de Liouville dans l'espace $K_s(\hat{\Omega}_T)$ est le problème de l'existence et l'unicité d'une fonction f vérifiant dans $\hat{\Omega}_T$ la relation $\mathcal{L} f = g$, g étant un élément de $K_s(\hat{\Omega}_T)$ et sur $\hat{\omega}_0$ la donnée de Cauchy $f = h$, h étant un élément de $K_s(\hat{\omega}_0)$.

L'inégalité de l'énergie, théorème 2.1', permet d'énoncer, pour le problème de Cauchy pour l'opérateur Liouville le théorème d'unicité.

THÉORÈME 2.2. — *Sous les hypothèses* 2.1 *et* 2.2 *avec*

$$\sigma - 1 \geqq s \geqq 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

si f est un élément de $K_s(\hat{\Omega}_T)$ satisfaisant à

$$\mathcal{L} f = 0 \quad \textit{dans } \hat{\Omega}_T,$$
$$f = 0 \quad \textit{sur } \hat{\omega}_0,$$

alors $f = 0$ dans $\hat{\Omega}_T$.

En effet, choisissons $s' = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, on a

$$f \in K_{s'+1}(\hat{\Omega}_T), \qquad \mathcal{L} f \in K_{s'}(\hat{\Omega}_T) \qquad \text{et} \qquad \sigma - \left[\frac{n}{2}\right] > s' > \left[\frac{n}{2}\right]$$

d'où le résultat en utilisant l'inégalité de l'énergie du théorème 2.1'.

Le théorème d'existence s'énonce :

THÉORÈME 2.3. — *Sous les hypothèses* 2.1 *et* 2.2 *avec*

$$\sigma - 1 \geqq s \geqq 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

le problème de Cauchy :

$$\mathcal{L} f = g \quad \textit{dans } \hat{\Omega}_T,$$
$$f = h \quad \textit{sur } \hat{\omega}_0$$

admet une solution dans $K_s(\hat{\Omega}_T)$ satisfaisant à l'inégalité de l'énergie :

$$\| f, t \|_s^2 \leqq C \left\{ \| f, 0 \|_s^2 + \int_0^t \| g, \tau \|_s^2 \, d\tau \right\}$$

où C est une constante ne dépendant que de (Ω, g), σ, s et T.

Pour la démonstration on adopte la méthode classique de Leray-Dionne pour les équations hyperboliques linéaires (Dionne [12], chap. IV) en utilisant l'inégalité de l'énergie, théorème 2.1.

2.4. Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann

Dans tout ce paragraphe h désigne un élément de $K_s(\hat{\omega}_0)$ et T un nombre positif, $0 < T < \infty$. On suppose satisfaites les hypothèses 2.1, 2.2

avec $\sigma - 1 \geq s > 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ assurant pour l'opérateur de Liouville les théorèmes d'existence et d'unicité avec l'estimation de la solution donnée par l'intégrale de l'énergie (théorème 2.3).

Sur l'opérateur $\mathcal{J}$ on fait l'hypothèse :

HYPOTHÈSE 2.3. — Il existe une constante I telle que

$$\left\| \frac{1}{p^0} f, t \right\|_s \leq \mathrm{I} \, \| f, t \|_s^2$$

si $0 \leq t \leq \mathrm{T}$ et $f \in \mathrm{K}_s(\hat{\omega}_t)$.

L'hypothèse 2.3 est en fait une hypothèse sur le noyau A ([*cf.* [13]).

NOTATION 2.3. — Soit α un nombre positif vérifiant $\alpha > \mathrm{C} \, \| h \|_s^2$ et soit η un nombre positif vérifiant

$$\begin{cases} \mathrm{C}\,(\| h \|_s^2 + \eta\, \mathrm{I}^2 \alpha^2) \leq \alpha, \\ 4\,\mathrm{CI}^2 \alpha\eta < 1, \\ \eta \leq \mathrm{T}. \end{cases}$$

Un choix possible du couple (α, η) est

$$\alpha = 2\,\mathrm{C}\,\| h \|_s^2 \qquad \text{et} \qquad \eta < \frac{1}{4\,\mathrm{CI}^2 \, \| h \|_s^2}.$$

THÉORÈME 2.4. — *Le problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann :*

$$\mathcal{L} f = \frac{1}{p^0} \mathcal{J} f \quad \textit{dans } \hat{\Omega}_\eta,$$
$$f = h \qquad \textit{sur } \hat{\omega}_0$$

admet une solution unique dans $\mathrm{K}_s(\hat{\Omega}_\eta)$ *satisfaisant de plus à*

$$\sup_{0 \leq t \leq \eta} \| f, t \|_s^2 \leq \alpha.$$

Démonstration. — Les relations de récurrence

$$\mathcal{L} f_1 = 0 \quad \text{dans } \hat{\Omega}_\eta,$$
$$f_1 = h \quad \text{sur } \hat{\omega}_0,$$
$$\mathcal{L} f_n = \frac{1}{p^0} \mathcal{J}(f_{n-1}) \quad \text{dans } \hat{\Omega}_\eta,$$
$$f_n = h$$

définissent une suite d'éléments de $\mathrm{K}_s(\hat{\Omega}_\eta)$, théorème 2.3.

D'autre part, si

$$\sup_{0 \leq t \leq \eta} \| f_{n-1}, t \|_s^2 \leq \alpha,$$

le calcul montre que

$$\sup_{0 \leq t \leq \eta} \| f_n, t \|_s^2 \leq \alpha,$$

$$\| f_{n+1} - f_n, t \|_s^2 \leq 4\, \mathrm{CI}^2\, \alpha \int_0^t \| f_n - f_{n-1}, \tau \|_s^2 \, d\tau,$$

soit

$$\| f_{n+1} - f_n \|_s^2 \leq [4\, \mathrm{CI}^2\, \alpha\eta]\, \| f_n - f_{n-1} \|_s^2.$$

La suite $\{ f_n \}$ admet une limite forte f dans $\mathrm{K}_s\,(\hat{\Omega}_\eta)$ et converge vers f dans $\mathrm{K}_s\,(\hat{\omega}_t)$ uniformément en t, $0 \leq t \leq \eta$.

D'autre part on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{p^0}\, \mathcal{J} f_n = \frac{1}{p^0}\, \mathcal{J} f \quad \text{dans } \mathrm{K}_s\,(\hat{\Omega}_\eta)$$

donc

$$\mathcal{L} f = \frac{1}{p^0}\, \mathcal{J} f.$$

Remarque 2.4. — La solution trouvée vérifie l'estimation

$$\sup_{0 \leq t \leq \eta} \| f, t \|_s^2 \leq \alpha$$

d'où en choisissant

$$(\alpha, \eta) = \left(2\,\mathrm{C}\, \| h \|_s^2,\ \frac{1}{4}\, \mathrm{CI}^2\, \| h \|_s^2 \right)$$

et en itérant l'existence d'une solution dans $\mathrm{K}_s\,(\hat{\Omega}_\mathrm{T})$ avec

$$\mathrm{T} < \frac{1}{2}\, \mathrm{CI}^2\, \| h \|_s^2.$$

Si k est un élément de $\mathrm{K}_s\,(\hat{\Omega}_\mathrm{T})$, satisfaisant à la condition

$$\sup_{0 \leq t \leq \mathrm{T}} \| k, t \|_s < +\infty,$$

si $\mathcal{J}'$ est la dérivée de Fréchet de l'opérateur de collision $\frac{1}{p^0}\, \mathcal{J}$, l'opérateur $\mathcal{J}'\,(k)$ est un élément de

$$\mathcal{L}\,(\mathrm{K}_s\,(\hat{\omega}_t),\ \mathrm{K}_s\,(\hat{\omega}_t))$$

de norme uniformément majorée en t, $t \in [0, \mathrm{T}]$.

Nous appellerons équation de Boltzmann linéarisée l'équation

$$\mathcal{L} f = \mathcal{J}'\,(k) . f.$$

REMARQUE 2.5. — Si λ est un vecteur de Killing, pour la métrique, strictement temporel appartenant à $\mathcal{H}_\sigma(\Omega)$ on peut choisir $k = e^{-\lambda_\alpha p^\alpha}$. On a alors les relations fonctionnelles $\mathcal{L}_X(k) = \mathcal{J}(k) = 0$, dans le cas gravitationnel.

THÉORÈME 2.5. — *Le problème de Cauchy,*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f &= \mathcal{J}'(k) f \quad \textit{dans } \hat{\Omega}_T, \\ f &= h \qquad\quad\ \textit{sur } \hat{\omega}_0 \end{aligned}$$

admet une solution unique dans $K_s(\hat{\Omega}_T)$ *satisfaisant à*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \| f, t \|_s^2 < +\infty.$$

Démonstration. — La méthode et les calculs sont identiques à ceux du théorème 2.4. L'estimation

$$\| f_{n+1} - f_n, t \|_s^2 \leq CK \frac{t^n}{n!},$$

où

$$K = \sup_{0 \leq t \leq T} \| \mathcal{J}'(k) \|_{\mathcal{L}(K_s(\hat{\omega}_t), K_s(\hat{\omega}_t))}$$

donne l'existence et l'unicité dans $\hat{\Omega}_T$.

REMARQUE 2.6. — Cette remarque a pour but de justifier les hypothèses faites dans le chapitre 2. Si nous considérons le problème de Cauchy pour les équations d'Einstein avec un second membre donné par $T = \int f(\otimes^2 p)\, \omega$, la fonction f appartenant à $\mathcal{K}_s$, il existe localement une solution unique appartenant à $(\mathcal{H}_{s+1})^{10}$. Désignons par I l'application ainsi définie $I(f) = g$. La résolution du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann définie une application $J(g) = f \in \mathcal{K}_s$. Sous des hypothèses convenables, l'application $I \circ J$ possède un point fixe, solution du problème d'Einstein-Boltzmann (*cf.* [13]), cette méthode a été utilisée par Y. Choquet-Bruhat [5] pour le système d'Einstein-Liouville.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Dunod, Paris, 1968.

[2] A. LICHNEROWICZ et R. MARROT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 210, 1940, p. 759.

[3] A. N. CHERNIKOV, *The relativistic gas in the gravitational field* (*Acta Physica Polonica*, vol. 23, 1963, p. 269).

[4] L. BEL, *Kinetic theory of cosmology* (*Astrophysical J.*, vol. 55, 1969, p. 83-87).

[5] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Problème de Cauchy pour le système intégrodifférentiel d'Einstein-Liouville* (*Ann. Inst. Fourier*, t. XXI, n° 3, 1971, p. 181-201).

[6] J. Ehlers, *Relativistic Kinetic Theory*, C. I. M. E., Cremonese, Rome, 1970.
[7] C. Marle, *Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. Inst. Poincaré*, t. 10, 1969, p. 67-194).
[8] J. L. Synge, *The relativistic gaz*, North Holland Publishing Company, 1957.
[9] J. Leray, *Uniformisation et développements asymptotiques* (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1962).
[10] Y. Choquet-Bruhat, *Hyperbolic differential equations on a manifold* dans *Battelle Seattle Rencontres*, 1967.
[11] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Norstand Mathematical Studies, 1965.
[12] P. A. Dionne, *Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés* (*J. Anal. Math.*, 1962).
[13] Y. Choquet-Bruhat et D. Bancel, *Existence, uniqueness and local stability for the Einstein-Maxwell-Boltzmann System* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 2 avril 1973.)