ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JAN TARSKI

Mesures généralisées invariantes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 17, nº 4 (1972), p. 313-324
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_4_313_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré
Vol. XVII, n° 4, 1972, p. 313-324.

Section A :
Physique théorique.

Mesures généralisées invariantes

par

Jan TARSKI*

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies,
Faculté des Sciences de Paris; et Faculté des Sciences d'Amiens

RÉSUMÉ. — La construction d'Itô pour l'intégrale de chemin est placée dans un contexte plus général. Les mesures généralisées invariantes qu'on introduit ici sont alors employées pour réinterpréter quelques résultats connus figurant dans les applications physiques des intégrales fonctionnelles.

ABSTRACT. — Itô's construction of the path integral is put into a more general context. The invariant generalized measures here introduced are then used to reinterpret several known results, which are among the physical applications of functional integrals.

1. Introduction

Une des circonstances qui contribuent à la difficulté de l'étude de l'intégration fonctionnelle est la non-existence de mesures invariantes dans les cas usuels. Il s'agit, en particulier, des mesures invariantes par translation dans les espaces linéaires. Or, il y a des théorèmes généraux qui montrent la non-existence de telles mesures ayant les propriétés usuelles, surtout la σ-finitude ([1], [2]). On a, par conséquent, le choix entre l'emploi des mesures non invariantes, et l'emploi d'êtres mathématiques qui ne sont pas de mesures habituelles. Parfois, la seconde alternative semble plus naturelle.

La construction d'un tel être mathématique a été donnée par Itô, dans son étude de l'intégrale de chemin [3]. Nous avons ensuite modifié cette construction pour l'adapter à une intégrale d'histoire pour un

---

*Adresse pendant 1972-1973 : II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg.

champ quantifié [4]. Une méthode tout à fait différente pour aborder ce problème est due à Stone, qui a employé le langage de l'analyse non standard [5].

La construction d'Itô est, en fait, liée à la question de la notation. En physique mathématique, on note souvent l'intégration fonctionnelle avec l'aide de symboles tels que $\mathcal{D}(\eta)\, e^{W\{\eta\}}$. On imagine $\mathcal{D}(\eta)$ heuristiquement comme une quantité analogue à la mesure de Lebesgue, mais pour la dimension infinie, de sorte que l'on ait, en particulier, $\mathcal{D}(\eta) = \mathcal{D}(\eta + \alpha)$ si α est un vecteur fixe. En outre, la fonctionnelle W, qui caractérise l'intégrale, est souvent une forme quadratique, ou peut-être une somme d'une forme quadratique et d'une forme du quatrième degré. Typiquement, cette fonctionnelle a une interprétation physique naturelle.

Donc, bien qu'on puisse parfois identifier un produit $\mathcal{D}(\eta)\, e^{W\{\eta\}}$ avec une mesure $d\mu$, cette factorisation peut suggérer des lois de transformation ainsi que des rapports physiquement intéressants. De telles relations resteraient cachées si l'on écrivait simplement $d\mu(\eta)$.

Dans cette Note, nous placerons la construction d'Itô dans un contexte élargi, afin de fournir une base pour de telles factorisations et pour de telles notations. Dans la section 2, nous définissons les « mesures généralisées invariantes », et nous donnons quelques exemples simples. Quelques propriétés évidentes sont indiquées dans la section 3. La section 4 comprend d'autres exemples, qui suggèrent des interprétations des quantités $\mathcal{D}(\eta)$ et $e^{W\{\eta\}}$ séparément.

Nous devons signaler, que nous n'avons que très peu de résultats nouveaux à offrir. Un développement systématique de telles mesures généralisées serait hors des préoccupations de l'auteur, ainsi que hors de sa compétence. Nous avons, plutôt, rapproché des faits connus. Notre espoir était de souligner ainsi quelques aspects, significatifs mais souvent négligés, des intégrales fonctionnelles.

L'auteur aimerait remercier le professeur R. Rączka pour la référence [5]. Il exprime sa reconnaissance pour l'accueil qu'il a reçu dans les Facultés des Sciences de Paris et d'Amiens. Il apprécie, en outre, une visite à I. C. T. P., Trieste, qui l'a aidé dans ce travail.

2. Définition et exemples

DÉFINITION (1). — *On considère une famille de suites* $\{\mu_n^{(j)}\}_{n=1,2,\ldots}$ *de mesures (de valeurs complexes, en général) sur un espace topologique* $\mathcal{K}$. *Cette famille est classée par l'indice* j : *on pose* $j \in S$. *On suppose que les fonctionnelles*

$$(2.1) \qquad F_n^{(j)}(f) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\mathcal{K}} d\mu_n^{(j)}(\eta)\, f\{\eta\}, \qquad F_\infty(f) \stackrel{\text{df}}{=} \lim_{n\to\infty} F_n^{(j)}(f)$$

sont définies pour f *appartenant à un espace (linéaire)* $\mathcal{F}$, *et que la limite* $F_\infty(f)$ *ne dépend pas de* $j \in S$, *si* $f \in \mathcal{F}$. *Alors, les équations* (2.1) *définissent* $\lim_{n \to \infty} \mu_n^{(j)}$ *comme un élément de l'espace dual* $\mathcal{F}'$. *Cette limite sera appelée une mesure généralisée sur* $\mathcal{K}$. [*On admet aussi le cas modifié où les indices j permis dans* (2.1) *dépendent de f.*] *On notera une mesure généralisée aussi par un symbole* $\mathcal{D}$ *comme suit :*

$$(2.2) \qquad F_\infty(f) = \int_{\mathcal{K}} \mathcal{D}(\eta)\, f\{\eta\}.$$

Si un groupe G *agit sur* $\mathcal{K}$, *alors cette action s'étend à* $\mathcal{F}$ *par* $(T_g f)\{\eta\} = f\{g^{-1}\eta\}$. *Si* F_∞ *vérifie*

$$(2.3) \qquad F_\infty(f) = F_\infty(T_g f), \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall g \in G,$$

on l'appellera une mesure généralisée invariante.

En particulier, si $\mathcal{K}$ est un espace linéaire, $\mathcal{K}_0$ un sous-espace, et si G agit par translation par les éléments de $\mathcal{K}_0$, alors (2.3) peut s'écrire comme

$$(2.4) \qquad \int_{\mathcal{K}} \mathcal{D}(\eta)\, f\{\eta\} = \int_{\mathcal{K}} \mathcal{D}(\eta)\, f\{\eta + \alpha\}, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{H}_0.$$

Ayant défini F_∞, ou $\mathcal{D}(\eta)$, considérons le facteur e^W dont on a parlé dans l'Introduction, et que l'on notera aussi $\mathbf{W}$. En écrivant e^W on suppose, bien entendu, que $\mathbf{W} \neq 0$.

DÉFINITION (2). — *Soit* $\mathcal{D}$ *une mesure généralisée sur l'espace* $\mathcal{K}$, *et ayant la famille* $\mathcal{F}$ *de fonctions* (*ou de fonctionnelles*) *intégrables. Un poids pour* $\mathcal{D}$ *est une fonction* $\mathbf{W} : \mathcal{K} \to C^1$ *telle que*

$$(2.5) \qquad \begin{cases} 0 < |\mathbf{W}\{\eta\}| < \infty \quad \textit{pour } \forall \eta \in \mathcal{K}; \\ \mathbf{W} \in \mathcal{F}; \qquad \displaystyle\int_{\mathcal{K}} \mathcal{D}(\eta)\, \mathbf{W}\{\eta\} = 1. \end{cases}$$

Si $\mathcal{K}$ est un espace linéaire, alors $\mathbf{W}$ satisfera dans les cas typiques à la relation suivante :

$$(2.6) \qquad \mathbf{W}\{.\}\, e^{i\langle \xi, . \rangle} \in \mathcal{F},$$

pour ξ dans un sous-espace dense de $\mathcal{K}'$.

(Nous ajoutons, que ce concept de poids n'a qu'un rapport très limité avec le concept de poids introduit dans [6].)

Exemples. — (*a*) Si $\mathcal{K} = R^n$ et si $\mathcal{F}$ comprend toutes les fonctions continues de support compact, alors $\mathcal{D}(\eta)$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue $d^n\eta$ ([1], [7]).

(*b*) L'exemple suivant est une adaptation des constructions familières des intégrales gaussiennes sur un espace hilbertien $\mathcal{H}$ ([8], [9]).

Soit B un opérateur sur $\mathcal{H}$, borné, symétrique, et strictement positif. Posons

$$(2.7) \qquad \mathrm{W}\{\eta\} = -\frac{\langle \eta, \mathrm{B}\,\eta \rangle}{2}.$$

Pour un sous-espace M de dimension $k < \infty$, on introduit

$$(2.8) \qquad d\mu_{\mathrm{M}}(\eta) = \frac{d\mu^{(\delta, \mathrm{M}^{\perp})}(\eta^{k+1}, \eta^{k+2}, \ldots)\, d\eta^1 \ldots d\eta^k}{\displaystyle\int_{\mathrm{M}} d\eta^1 \ldots d\eta^k\, e^{\mathrm{W}\{\mathrm{P}_{\mathrm{M}}\eta\}}},$$

où P_{M} est le projecteur orthogonal sur M, et $\mu^{(\delta, \mathrm{M}^{\perp})}$ est la mesure δ à l'origine, défini sur $\mathrm{M}^{\perp}$. Pour prendre la limite $\mathrm{M} \to \mathcal{H}$, on suit l'ensemble filtrant des sous-espaces de dimensions finies. Alors le système $\{\mu_{\mathrm{M}}\}$ définit une mesure généralisée sur $\mathcal{H}$, invariante par translation, avec le poids $e^{-(1/2)\langle \eta, \mathrm{B}\eta \rangle}$, et telle que $e^{-(1/2)\langle \cdot, \mathrm{B}\cdot \rangle} e^{i\langle \xi, \cdot \rangle} \in \mathcal{F}$ pour $\forall\, \xi \in \mathrm{D}(\mathrm{B}^{-1/2})$. [En fait, notre procédure définit une mesure ν dénombrablement additive sur un espace $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}$, et les fonctionnelles usuelles dans $\mathrm{L}_1(\mathcal{H}_1, \nu)$ auront leurs restrictions dans $\mathcal{F}$.]

(*c*) Au lieu d'introduire des projecteurs de dimensions finies, on peut parfois employer directement des mesures de probabilité sur l'espace $\mathcal{K}$, par rapport auxquelles le poids e^{W} désiré est intégrable. E. g. pour l'intégration sur un hilbertien $\mathcal{H}$, on peut prendre des mesures gaussiennes $\mathrm{N}(d\eta;\, \alpha, \mathrm{T})$ ayant des vecteurs moyens $\alpha \in \mathcal{H}$ et des opérateurs de covariance T (qui sont à trace, symétriques, et strictement positifs). E. g. on peut poser

$$(2.9) \qquad d\mu_{\alpha, \mathrm{T}}(\eta) = \frac{\mathrm{N}(d\eta;\, \alpha, \mathrm{T})}{\displaystyle\int_{\mathcal{H}} \mathrm{N}(d\eta;\, \alpha, \mathrm{T})\, e^{\mathrm{W}\{\eta\}}},$$

et laisser $\mathrm{T} \to \infty$ d'une manière convenable.

Une telle méthode fut appliquée aux intégrales de type de Feynman (i. e. aux intégrales de chemin et d'histoire), où W est une forme bilinéaire complexe ([3], [4]). La construction de l'exemple (*b*) ne s'applique pas directement au cas $\mathrm{W}\{\eta\} = \dfrac{i\langle \eta, \eta \rangle}{2}$, parce que $e^{\mathrm{W}\{\mathrm{P}_{\mathrm{M}}\cdot\}} \notin \mathrm{L}_1(\mathrm{R}^k)$ (où $k = \dim \mathrm{M}$).

(*d*) Dans les études de la théorie quantique des champs ainsi que de la mécanique statistique, on commence souvent avec une restriction de l'interaction (ou peut-être du système entier) au volume fini $\mathrm{V} \subset \mathrm{R}^n$. On laisse $\mathrm{V} \to \mathrm{R}^n$ ensuite d'une manière adéquate. En termes des intégrales fonctionnelles, la situation usuelle est la suivante. Un système sans interaction correspond à une mesure gaussienne, et une interaction restreinte au volume fini V correspond à une mesure μ_{V} qui est équivalente à la mesure gaussienne. Cependant, cette équivalence est perdue dans la limite $V \to R^n$.

Nous employâmes une telle procédure pour l'étude des théories non relativistes des champs dans [10]. On trouve que des suites $\{ \mu_V \}$ tendent vers certaines mesures quand $V \to R^n$. Ces mesures-ci peuvent s'exprimer comme des mesures généralisées, avec des poids $e^{-2\Lambda}$. Les Λ sont des fonctionnelles polynomiales, en général non quadratiques; et l'on a établi l'invariance des mesures généralisées pour translation par les fonctions dans $\mathcal{C}_0^\infty$. (C'est l'espace $\mathcal{D}$ de Schwartz. Nous notons, en outre, que la procédure de [10] doit être trivialement modifiée pour que nos définitions s'appliquent.)

On peut dire qu'ici il y a des exemples de poids non triviaux.

(*e*) Pour un produit cartésien infini de tores (de rayon 1), T^∞, la mesure-produit $\prod \frac{d\theta_i}{2\pi}$ est invariante par des transformations évidentes. Le poids naturel est l'unité.

(*f*) Des exemples d'intégrales sur des espaces courbés de dimension infinie sont présentés dans [11]. Pour les cas où les espaces analogues de dimension finie sont compacts, on trouve, en effet, des mesures généralisées invariantes, avec le poids 1. D'ailleurs, pour l'intégration sur l'hyperboloïde

$$\{ x \in \mathcal{H} : (x^0)^2 - (x^1)^2 - \ldots - (x^n)^2 - \ldots = 1,\ x^0 > 0 \}, \tag{2.10}$$

il semble exister des mesures généralisées, invariantes par les transformations pseudo-orthogonales.

3. Propriétés élémentaires

(i) Prenons un espace linéaire $\mathcal{K}$. Pour les mesures généralisées invariantes, on a par définition $\mathcal{D}(\eta) = \mathcal{D}(\eta + \alpha)$. L'analogie à la mesure de Lebesgue suggère aussi les propriétés suivantes,

$$\mathcal{D}(T\eta) = (\det T)\, \mathcal{D}(\eta), \tag{3.1}$$

$$\int \mathcal{D}(\eta) \frac{\delta}{\delta \eta(u)} F\{ \eta \} = 0. \tag{3.2}$$

De telles relations ont été établies dans quelques cas.

(ii) La construction d'une mesure généralisée invariante sur $\mathcal{K}$ peut parfois être modifiée, de sorte qu'on obtienne une mesure généralisée invariante sur un sous-espace dense, $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$. E. g., dans l'exemple (*b*), on peut choisir $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ et considérer seulement les sous-espaces $M \subset \mathcal{H}_0$. Alors la même construction donne une mesure généralisée invariante sur $\mathcal{H}_0$. Cette situation est le contraire de celle avec les mesures habituelles. Pour celles-ci, l'extension de l'espace d'intégration est normalement directe, tandis qu'en faisant une restriction, on peut perdre l'additivité dénombrable.

Quand il s'agit d'une mesure généralisée invariante avec un poids **W**, il semble naturel de lui associer un espace maximal, auquel la définition de **W** s'étend par continuité, avec les conditions (2.5) vérifiées.

(iii) Considérons les rapports entre les mesures généralisées invariantes et les mesures habituelles. Dans les exemples (*a*) et (*e*), les mesures généralisées invariantes sont en même temps des mesures. Dans les exemples (*b*) et (*d*), une mesure généralisée invariante correspond à une mesure ν sur un espace élargi dans le sens que

$$(3.3) \qquad \int_{\mathcal{K}_1} d\nu\,(\eta)\, f\{\eta\} = \int_{\mathcal{K}} \mathcal{D}\,(\eta)\, e^{W\{\eta\}}\, f\{\eta\},$$

où ν est dénombrablement additive sur $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}$. Nous ne précisons pas la classe de fonctionnelles f admises dans cette équation.

Dans l'exemple (*c*), une mesure généralisée invariante pour W complexe ne correspond à aucune mesure familière. D'autre part, à certaines mesures il ne semble pas possible d'associer de mesures généralisées invariantes ni de poids d'une manière naturelle [12].

Ces observations se rapportent aussi aux algèbres de probabilité de Segal, où l'on peut exprimer les valeurs moyennes par des intégrales de mesure [13]. Cependant, la notion de poids, et le cas non positif (celui de W complexe), sont hors de ce cadre.

(iv) On peut se demander si une mesure généralisée F_∞ détermine uniquement un poids, et réciproquement. Or, l'équation (4.5 *b*) ci-dessous montre que l'on peut avoir $F_\infty\,(\mathbf{W}_1) = F_\infty\,(\mathbf{W}_2) = 1$, où $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ sont suffisamment différents pour que $F_\infty\,((\mathbf{W}_1\,\mathbf{W}_2)^{1/2}) = 0$. Donc, le poids n'est pas unique.

D'autre part, le problème de l'existence des mesures généralisées invariantes différentes pour un poids donné est analogue à celui de l'existence des transitions de phase. La formule (4.18) et son interprétation montrent que des mesures généralisées invariantes différentes sont parfois possibles.

Nous finirons cette section avec un résultat simple de l'unicité. Ce résultat dépend de l'analyse ([14], [15]) de l'équation (A étant donnée) :

$$(3.4) \qquad \frac{\delta W\{\eta\}}{\delta\eta\,(u)} = A\{\eta;\, u\}.$$

Si l'on fait les hypothèses naturelles venant de la régularité, et de la commutativité des dérivées fonctionnelles aux points différents, on n'a que la solution

$$(3.5)\qquad W\{\eta\} = W\{0\} + \int_0^1 ds \int d^n u\, \eta(u)\, A\{s\eta; u\}.$$

En particulier,

$$(3.6)\qquad \frac{\delta W}{\delta \eta(u)} = 0 \quad\Rightarrow\quad W\{\eta\} = W\{0\} = (\mathrm{Cte}).$$

LEMME (3). — *On considère un espace linéaire* $\mathcal{K}_1$ *des fonctions* $\eta : R^n \to R^1$, ν *une mesure sur* $\mathcal{K}_1$, *et* $\mathcal{D}$ *une mesure généralisée, invariante par translation, et définie sur un sous-espace dense* $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_1$. *Soient* e^{W_1} *et* e^{W_2} *deux poids (réels) pour* $\mathcal{D}$, *tels que* $\dfrac{\delta W_j}{\delta \eta(u)}$, $j = 1, 2$, *soient continues en* u *et en* η (*si* $\eta \in \mathcal{K}$) *et que* $W_j\{\eta + \xi\} - W_j\{\eta\}$ *s'étende à une fonctionnelle continue sur* $\mathcal{K}_1$ *pour* $\forall\, \xi \in \mathcal{K}$. *On suppose que*

$$(3.7)\qquad \int d\nu(\eta)\, f\{\eta\} = \int \mathcal{D}(\eta)\, e^{W_1\{\eta\}} f = \int \mathcal{D}(\eta)\, e^{W_2} f,$$

pour $\forall\, f$ *continue et dans* $L_1(\mathcal{K}_1, \nu)$ *et que* $W_1\{0\} = W_2\{0\}$. *Alors*

$$(3.8)\qquad W_1\{\eta\} = W_2\{\eta\} \qquad \text{pour} \quad \forall\, \eta \in \mathcal{K}.$$

L'hypothèse de ce lemme semble être assez spéciale, mais elle est vérifiée, e. g., par les exemples dans [10].

Démonstration. — A cause de l'invariance par translation, on voit que

$$(3.9)\qquad \int d\nu(\eta)\, [e^{W_1\{\eta+\xi\} - W_1\{\eta\}} - e^{W_2\{\eta+\xi\} - W_2\{\eta\}}]\, f\{\eta + \xi\} = 0,$$

et, f étant arbitraire,

$$(3.10)\qquad e^{W_1\{\eta+\xi\} - W_1\{\eta\}} = e^{W_2\{\eta+\xi\} - W_2\{\eta\}}.$$

Ceci est valable pour $\forall\, \xi \in \mathcal{K}$, et, tenant compte de la continuité supposée, pour $\forall\, \eta \in \mathcal{K}_1$. On prend maintenant $\eta \in \mathcal{K}$, et en appliquant $\left[\dfrac{\delta}{\delta \xi(u)}\right]_{\xi=0}$, il en résulte

$$(3.11)\qquad \frac{\delta(W_1\{\eta\} - W_2\{\eta\})}{\delta \eta(u)} = 0.$$

Donc, par (3.6), $W_1 - W_2 = \mathrm{Cte}$, et, par l'hypothèse, $\mathrm{Cte} = 0$.

4. Interprétation des mesures généralisées invariantes et des facteurs de poids

Nous donnons ici plusieurs exemples, liés à trois genres d'idées : la mesure de Haar, l'espace de phase, et la distribution de probabilité. Il n'est pas surprenant que ces idées se mélangent parfois.

La mesure de Haar. — Si l'on considère un espace linéaire $\mathcal{K}$ comme un groupe abélien, alors une mesure généralisée invariante étend la notion de la mesure de Haar à ce groupe-ci.

Or, la mesure de Haar est étroitement liée à la transformée de Fourier. Nous notons en particulier le rapport $f \leftrightarrow \bar{f}$ défini par les formules suivantes [16] :

$$(4.1\,a) \qquad \int \mathcal{D}(\eta)\, e^{-(1/2)\langle \eta, \eta\rangle} f\{\eta\}\, e^{i\langle \xi, \eta\rangle} = \bar{f}\{\xi\}\, e^{-(1/2)\langle \xi, \xi\rangle},$$

$$(4.1\,b) \qquad \int \mathcal{D}(\xi)\, e^{-(1/2)\langle \xi, \xi\rangle} \bar{f}\{\xi\}\, e^{-i\langle \xi, \eta\rangle} = f\{\eta\}\, e^{-(1/2)\langle \eta, \eta\rangle}.$$

Ici, la situation est tout à fait analogue à celle du cas de dimension finie. Cependant, il semble que les mesures non gaussiennes (pour dimension infinie) n'ont pas été étudiées de ce point de vue (*cf.* [17]).

Nous donnons aussi un exemple d'un groupe G non abélien, à savoir celui engendré par des opérateurs canoniques φ_k, π_j vérifiant

$$(4.2) \qquad e^{-ip\pi_j}\, e^{iq\varphi_k} = e^{iq\varphi_k}\, e^{-ip\pi_j} \exp\left(-\, ipq\, \delta_{jk}\right).$$

Chaque élément g est défini par une suite de paires et par une phase,

$$(4.3) \qquad g \leftrightarrow (\theta\,;\, p_1,\, q_1\,;\, p_2,\, q_2\,;\, \ldots) \leftrightarrow e^{-i\sum p_j \pi_j}\, e^{i\sum q_k \varphi_k}\, e^{i\theta},$$

où $0 \leqq \theta < 2\pi$ et p_j, $q_k \in \mathrm{R}^1$, avec un nombre fini de valeurs non-zéro. On définit la mesure généralisée par une modification de l'exemple (*b*); on peut l'écrire heuristiquement comme

$$(4.4) \qquad \mathcal{D}(g) = \frac{d\theta}{2\pi} \prod_{j=1}^{\infty} (\mathrm{Cte})_j\, dp_j\, dq_j.$$

Cette mesure est invariante, et l'on peut l'appeler la mesure généralisée de Haar.

Or, il existe une représentation naturelle de G sur le produit tensoriel $\prod^{\otimes} \mathcal{H}_j$, où le hilberlien $\mathcal{H}_j$ est associé à π_j et à φ_j. Les sous-représentations irréductibles sont déterminées par les vecteurs-produits. Si Ψ et Φ sont deux vecteurs-produits qui définissent des représentations équivalentes, et U est l'unitaire correspondant, alors, on trouve

$$(4.5\,a) \qquad \lim_{N \to \infty} \int \left[\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{dp_j\, dq_j}{2\pi} \right) \right] \left\langle \Phi,\, e^{-i\sum_1^N p_j \pi_j}\, e^{i\sum_1^N q_j \varphi_j}\, \Phi \right\rangle^* \times \left\langle \Psi,\, e^{-i\sum_1^N p_j \pi_j}\, e^{i\sum_1^N q_j \varphi_j}\, \Psi \right\rangle = |\langle \Phi, \mathrm{U}\,\Psi \rangle|^2.$$

S'il n'y a pas d'équivalence, la limite égale zéro [18].

La dernière intégrale peut s'écrire aussi avec l'aide de $\mathcal{D}(g)$, si l'on choisit $(\mathrm{Cte})_j = (2\pi)^{-1}$ pour $\forall j$ dans (4.4), dans le sens évident. L'intégration par rapport à θ étant triviale, on voit que

$$\int \mathcal{D}(g) \langle \ldots \rangle^* \langle \ldots \rangle = |\langle \Phi, \mathrm{U}\Psi \rangle|^2 \quad \text{ou} \quad 0. \tag{4.5 b}$$

L'espace de phase et le vecteur du vide. — Il y a quelques années, Segal suggéra une nouvelle méthode d'aborder le problème de la quantification des champs ([19], *cf.* aussi [20]). Bien qu'il y ait une différence essentielle entre cette méthode et la méthode usuelle, les deux sont équivalentes en cas des champs libres. Or, considérons le champ libre scalaire. Dans la quantification de Segal, on prend pour les vecteurs d'état Ψ, des fonctionnelles définies sur l'espace des solutions η de l'équation de Klein-Gordon. Parce que η est déterminée par ses valeurs « initiales » au temps quelconque,

$$\eta_t(\mathbf{u}) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta(t, \mathbf{u}) \qquad \text{et} \qquad \xi_t(\mathbf{u}) \overset{\mathrm{df}}{=} \partial_t \eta(t, \mathbf{u}), \tag{4.6}$$

on peut considérer un vecteur comme une fonctionnelle des valeurs η_t et ξ_t.

La fonctionnelle du vide est la suivante :

$$\Psi^{(0)} = e^{\frac{\mathrm{W}}{4}} \qquad \text{où} \quad \mathrm{W}\{\eta_t, \xi_t\} = -\|\mathrm{C}\eta_t\|^2 - \|\mathrm{C}^{-1}\xi_t\|^2; \tag{4.7}$$

l'opérateur C est celui de localisation, $\mathrm{C} = (m^2 - \Delta)^{1/4}$, et les normes sont les normes usuelles dans L_2. Or, prenons maintenant les champs φ, π au temps $t = 0$. Ils sont représentés par

$$\overline{\varphi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\eta_0(\mathbf{u}) - \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi_0(\mathbf{u})}, \qquad \overline{\pi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\xi_0(\mathbf{u}) + \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta_0(\mathbf{u})}, \tag{4.8}$$

et les valeurs moyennes du vide sont exprimées par

$$\langle \mathrm{F}\{\varphi, \pi\}\rangle_0 = \int \mathcal{D}(\eta_0)\,\mathcal{D}(\xi_0)\, e^{\frac{\mathrm{W}\{\eta_0, \xi_0\}}{4}}\, \mathrm{F}\{\overline{\varphi}, \overline{\pi}\}\, e^{\frac{\mathrm{W}}{4}}. \tag{4.9}$$

Le poids pour l'intégrale est $e^{\frac{\mathrm{W}}{2}}$. L'intégration a lieu, en effet, sur l'espace de phase.

Il est intéressant à considérer l'invariance de la dernière intégrale par translation temporelle. Notre assertion est que, pour $\forall t$,

$$\exp\frac{\mathrm{W}\{\eta_t, \xi_t\}}{4} = \exp\frac{\mathrm{W}\{\eta_0, \xi_0\}}{4}, \tag{4.10}$$

$$\mathcal{D}(\eta_t)\,\mathcal{D}(\xi_t) = \mathcal{D}(\eta_0)\,\mathcal{D}(\xi_0). \tag{4.11}$$

La première équation est une conséquence de l'invariance relativiste de la forme W. D'ailleurs, une vérification directe est facile. La deuxième équation est une extension du théorème de Liouville à un système avec le nombre infini de degrés de liberté. Tandis qu'une discussion heuristique de cette extension se trouve dans [19], nous pouvons donner un résultat précis.

LEMME (4). — *On prend des fonctions* $\eta_0, \ldots, \xi_t$ *liées par* (4.6). *On définit les mesures généralisées invariantes de* (4.11) *par des produits des mesures approximatives de* (2.8), *comme suit. L'espace hilbertien pour* η_t *ainsi que pour* ξ_t *(ou bien, pour* η_0 *et pour* ξ_0*) est* $L_2(R^3)$. *Quant aux sous-espaces, on suppose que*

$$\dim M_\eta = \dim M_\xi < \infty, \qquad M_\eta \subset D(C^4). \tag{4.12}$$

(La dernière hypothèse est plus forte que nécessaire.) Les formes bilinéaires sont celles de (4.7). *Alors l'équation* (4.11) *est vérifiée.*

Démonstration. — L'hamiltonien du système a la forme

$$H\{\eta\} = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{u}\,[\xi_t^2 + (C^2\eta_t)^2], \quad \text{pour } \forall\, t. \tag{4.13}$$

Choisissons $M \subset D(C^4)$ avec son projecteur P_M, et avec une base orthonormale $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, et posons

$$q_i^{(t)} = \langle \alpha_i, \eta_t \rangle, \qquad p_j^{(t)} = \langle \alpha_j, \xi_t \rangle. \tag{4.14 a, b}$$

Alors

$$H\{P_M\eta\} = \frac{1}{2}\sum_j (p_j^{(t)})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k} Q_{ik}\, q_i^{(t)} q_k^{(t)}. \tag{4.14c}$$

Les équations du mouvement,

$$\partial_t \eta_t = \xi_t, \qquad \partial_t \xi_t = -C^4\eta_t, \tag{4.15}$$

montrent que les p_j et les q_j sont des variables canoniques, et le théorème de Liouville implique

$$dp_1^{(t)}\,dq_1^{(t)} \ldots dp_n^{(t)}\,dq_n^{(t)} = dp_1^{(0)}\,dq_1^{(0)} \ldots dp_n^{(0)}\,dq_n^{(0)}. \tag{4.16}$$

Ceci et l'équation (2.8) donnent (4.11). [On voit facilement que l'intégrale de (2.8) ne dépend pas de *t*.]

Nous ajoutons deux remarques. Premièrement, si l'on peut éliminer les variables conjuguées p_j par intégration, une équation de la forme (4.11) donnerait

$$\mathcal{D}(\eta_t) = \mathcal{D}(\eta_0), \tag{4.17}$$

pour une intégrale sur l'espace de configuration. Deuxièmement, dans une intégrale de type de Feynman, le poids est e^{iA}, où A est l'action du système. Cependant, la mesure généralisée invariante ne semble pas avoir d'interprétation familière.

La distribution de probabilité. — La distribution gaussienne, ou mesure gaussienne, pour les événements aléatoires dans R^k s'étend à une distribution gaussienne dans un espace fonctionnel, quand les événements correspondent aux fonctions [21]. De tels résultats peuvent donner encore une interprétation des mesures généralisées invariantes, et des poids. Les distributions gaussiennes sont familières aussi en problèmes physiques concernant le bruit, les potentiels aléatoires, etc. ([22], [23]).

Un autre type de problème, qui se rapporte à l'espace de configurations (ou, à l'espace de phase) ainsi qu'aux probabilités, est celui des distributions en mécanique statistique. Or, nous nous rappelons que le facteur de Gibbs $e^{-\beta H}$, H étant l'hamiltonien, donne les poids relatifs pour les distributions différentes. Donc on s'attend à ce que ce facteur soit le poids pour une intégrale qui donne les valeurs moyennes.

Nous voudrions maintenant exprimer les résultats de Dobrushin sur les transitions de phase en termes d'idées introduites ici ([24], [25]). On considère un treillis infini de ν dimensions, dont chaque élément est soit occupé (l'indice 1), soit vide (l'indice 0). Donc, l'ensemble d'états du système est $\{0, 1\}^{Z^\nu}$. Pour l'élément j du treillis on définit la mesure μ_j, avec la masse $\frac{1}{2}$ pour 0 et pour 1.

La mesure-produit $\mu = \prod \mu_j$ fournit la mesure, ou la distribution, pour un système sans interaction. Cette mesure est invariante sous l'action du groupe G engendré par les permutations des éléments du treillis, et par les échanges $0 \leftrightarrow 1$ dans n'importe quels éléments.

Considérons maintenant une interaction U, qui comprend le potentiel chemique, et qui vérifie les conditions de [25]. Alors une procédure semblable à celle de (*d*) de la section 2 conduit à la formule

$$\langle f \rangle = \int \mathcal{D}(\eta)\, e^{-\beta U\{\eta\}} f\{\eta\}, \tag{4.18}$$

où $\eta : Z^\nu \to \{0, 1\}$. La mesure généralisée est invariante sous l'action de G, comme μ.

[On note que le poids $e^{-\beta U}$ vérifie (2.5) trivialement, si l'intégrale est restreinte aux fonctions η qui ne prennent que la valeur zéro hors d'un ensemble borné. Une telle restriction est toujours possible si le potentiel est à portée finie.]

Or, les exemples où l'on trouve les transitions de phase donnent des mesures généralisées invariantes différentes, pour le même poids.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. M. GUELFAND et N. YA. VILENKIN, *Les distributions*, t. IV, Dunod, Paris, 1967, chap. 4.

[2] J. FELDMAN, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 17, 1966, p. 142.

[3] K. ITÔ, *Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, University of California Press, Berkeley, vol. II, 1966, part 1, p. 145.

[4] J. TARSKI, *Ann. Inst. H. Poincaré*, série A, t. 15, 1971, p. 107.

[5] A. L. STONE, *The theory of models*, édité par J. W. Addison, L. Henkin et A. Tarski, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1965, p. 419.

[6] *Séminaire L. Schwartz*, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1969-1970, exposé n° 4.

[7] K. MAURIN, *General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups*, PWN, Warszawa, 1968, p. 302 ff.

[8] I. E. SEGAL, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 81, 1956, p. 106.

[9] K. O. FRIEDRICHS et H. N. SHAPIRO, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (*U. S.*), t. 43, 1957, p. 336; FRIEDRICHS, SHAPIRO et al., *Integration of functionals*, Courant Institute, New York University, Notes de conférences, 1957.

[10] J. TARSKI, *Ann. Inst. H. Poincaré*, série A, t. 11, 1969, p. 131 et t. 17, 1972, p. 171.

[11] D. SHALE et W. F. STINESPRING, *J. Math. Mech.*, t. 16, 1966, p. 135; D. SHALE, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 124, 1966, p. 148.

[12] L. GROSS, *J. Funct. Analysis*, t. 1, 1967, p. 123.

[13] I. SEGAL, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 71, 1965, p. 419.

[14] J. TARSKI, *Conférences de Boulder*, 1967 (*Lectures in theoretical physics*, vol. X A, édité par W. Brittin, Gordon and Breach, New York, 1968, p. 433, section VIII).

[15] A. N. ŠERSTNEV, *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matem.*, 1961, n° 6 (25), p. 155 (en traduction : *Amer. Math. Soc. Translations*, 2nd series, vol. 54, p. 1).

[16] P. KRISTENSEN, L. MEJLBO et E. THUE POULSEN, *Symposium on probability methods in analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1967 (*Lecture notes in mathematics*, n° 31, p. 187).

[17] L. GROSS, *Harmonic analysis on Hilbert space* (*Mem. Amer. Math. Soc.*, n° 46, 1963).

[18] J. R. KLAUDER, J. MC KENNA et E. J. WOODS, *J. Math. Phys.*, t. 7, 1966, p. 822.

[19] I. E. SEGAL, *J. Math. Phys.*, t. 1, 1960, p. 468 et t. 5, 1964, p. 269.

[20] J. TARSKI, *Conférences à l'école de Karpacz*, Acta Universitatis Wratislaviensis n° 88, Wroclaw, t. 1, 1968, p. 42, section 5.

[21] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968, p. 68 ff.

[22] R. P. FEYNMAN et A. R. HIBBS, *Quantum mechanics and path integrals*, Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1965, p. 326 ff.

[23] T. LUKES, *Phil. Mag.*, t. 12, 1965, p. 719.

[24] R. L. DOBRUSHIN, *Teor. Veroyatn. i Primen.*, t. 13, 1968, p. 201 (en traduction : p. 197); *Funkts. Analiz i Prilozh.*, t. 2, 1968, n° 4, p. 31 et 44.

[25] J. GINIBRE, *Systèmes à un nombre infini de degrés de liberté*, édité par L. Michel et D. Ruelle, Éditions du C. N. R. S., Paris, 1970, p. 163.

(*Manuscrit reçu le* 26 *septembre* 1972.)