ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

RENÉ-LOUIS CLERC

Schéma géométrique à tenseur impulsion-énergie asymétrique. Application à l'étude relativiste de la matière à spin

Annales de l'I. H. P., section A, tome 17, nº 3 (1972), p. 259-289

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_3_259_0>

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVII, nº 3, 1972, p. 259-290.

Section A :
Physique théorique.

Schéma géométrique à tenseur impulsion-énergie asymétrique. Application à l'étude relativiste de la matière à spin (*)

par

René-Louis CLERC

Université Paul-Sabatier de Toulouse (**)

RÉSUMÉ. — Il est possible d'adapter la « théorie des espaces variationnels généralisés » de A. Lichnerowicz [9 *b*, *c*] à l'étude des trajectoires faite en [3 *a*]; par utilisation d'une « connexion semi-symétrique C de Schouten », nous écrirons les équations du mouvement sous la forme

$$u^{\alpha} \overset{c}{\nabla}_{\alpha} u_{\beta} = \frac{1}{3} u^{\alpha} S_{\alpha\beta}^{\nu} u_{\nu}$$

qui permettra la généralisation d'un théorème classique pour la matière avec spin.

Nous montrerons aussi que l'on peut améliorer [3 *a*] et établir sur V_4 des équations d'Einstein *asymétriques* avec $T_{\alpha\beta} = \rho\, u_{\alpha}\, w_{\beta}$. Nous définissons, comme F. Hehl [6], T. W. B. Kibble [7], D. W. Sciama [11], la densité de spin $\sigma_{\alpha\beta}^{\nu}$ par

$$S_{\alpha\beta}^{\nu} = \chi \sigma_{\alpha\beta}^{\nu};$$

le vecteur w_{β} possède alors une composante colinéaire au dual de $\sigma_{[\alpha\beta\nu]}$.

Enfin lorsque V_4 est munie d'une « connexion décomposable » (au sens de [3 *a*]), nous obtenons quelques propriétés qui rappellent certains résultats de la théorie de Dirac; nous montrerons, en particulier, qu'alors $T_{[\alpha\beta]}$ est conservatif dans la dérivation relative à la connexion riemannienne de V_4.

(*) Cet article est une suite directe de [3 *a*] dont on utilisera les résultats.

(**) 118, route de Narbonne, 31400 Toulouse, Haute-Garonne.

ABSTRACT. — It is possible to adapt the A. Lichnerowicz's « theory of generalized variational spaces » [9 *b*, *c*] for the study of trajectories made in [3 *a*]; by using a « Schouten's half-symmetric connection » C, we shall write the equations of motion in the form

$$u^\alpha \overset{c}{\nabla}_\alpha u_\beta = \frac{1}{3} u^\alpha S^{\nu}_{\alpha\beta} u_\nu$$

which shall allow the generalization of a classic theorem for matter with spin.

We shall also show that it is possible to improve [3 *a*] and to establish on V_4 Einstein's *asymmetrical* equations with $T_{\alpha\beta} = \rho\, u_\alpha\, w_\beta$.

As in F. Hehl [6], T. W. B. Kibble [7], D. W. Sciama [11], we define the spin density $\sigma^{\nu}_{\alpha\beta}$ by

$$S^{\nu}_{\alpha\beta} = \chi \sigma^{\nu}_{\alpha\beta};$$

the vector w_β then possesses a component collinear with the dual of $\sigma_{[\alpha\beta\nu]}$.

Finally, when V_4 is provided with a « decomposable connection » (in the sense of [3 *a*]), we obtain any properties which remind some results of the Dirac's theory; we shall show, in particular, that $T_{[\alpha\beta]}$ then is conservative in the derivative relative to the riemannian connection of V_4.

1. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT (1) ET ESPACES VARIATIONNELS

1.1. Expression des équations des trajectoires par utilisation d'espaces variationnels généralisés

Rappelons tout d'abord un théorème établi par A. Lichnerowicz [9 *b*] en 1945.

THÉORÈME. — *En dynamique relativiste, les lignes de courant de toute distribution matérielle chargée ou non peuvent être considérées comme* GÉODÉSIQUES D'UN « ESPACE VARIATIONNEL GÉNÉRALISÉ ».

La théorie de ces « espaces variationnels généralisés » (2), qui généralisent les espaces de Finsler, est essentiellement construite sur un problème de « calcul des variations non holonomes » (2) (et peut-être aussi intégrée dans la théorie générale des espaces de Cartan à connexion *euclidienne* qui admettent un élément linéaire de longueur ds^2 — notre variété V_4 est un tel espace —).

(1) *cf.* [3 *a*].

(2) Selon la terminologie de A. Lichnerowicz [9 *b*, *c*].

Démonstration succincte du théorème. — On montre facilement, à partir de

$$T_{(\alpha\beta)} = (\rho + P)\, u_\alpha\, u_\beta - P\, g_{\alpha\beta},$$

sur un espace riemannien R à métrique

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{1.1}$$

que le système différentiel qui définit les lignes de courant est

$$u^\mu\, D_\mu\, u_\lambda = u^\rho\, (\delta^\nu_\lambda\, u_\rho - \delta^\nu_\rho\, u_\lambda)\, K_\nu; \tag{1.2}$$

D_μ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans la métrique d'univers. L'espace-temps est ainsi une variété munie d'une forme différentielle quadratique et d'une forme différentielle linéaire

$$\omega = K_\alpha\, dx^\alpha \tag{1.3}$$

qui n'est pas nécessairement intégrable; si elle l'est, on sait [9 *b*] *que les équations différentielles* (1.2) *définissent les géodésiques de l'espace riemannien conforme à* R, *admettant la métrique*

$$\widetilde{ds}^2 = e^{2U}\, ds^2, \qquad \text{avec} \quad \omega = dU.$$

La forme ω n'étant en général pas intégrable, A. Lichnerowicz introduit alors l'espace variationnel généralisé E. Pour cela, étant donné un voisinage V (M) d'un point M de l'espace-temps, et un faisceau de courbes différentiables issues de M tel que, pour tout *m* de V, il y ait une courbe et une seule joignant M et *m*, on définit en tout point *m* de V la métrique

$$\widetilde{ds}^2 = e^{2F}\, ds^2, \tag{1.4}$$

où

$$F = \int_M^m K_\alpha\, dx^\alpha,$$

l'intégrale étant calculée le long de la courbe unique joignant M au point *m* considéré dans V (contenu dans R).

L'espace E est alors formé par le raccordement des voisinages des différents points M de l'espace-temps, selon la *connexion symétrique de Weyl* :

$$\boxed{W^\alpha_{\nu\mu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} + g^{\alpha\rho}\, (g_{\mu\rho}\, K_\nu + g_{\nu\rho}\, K_\mu - g_{\nu\mu}\, K_\rho),} \tag{1.5}$$

le vecteur unitaire adopté en M étant $\tilde{u}^\alpha$ colinéaire à u^α :

$$\tilde{u}^\alpha = e^{-F}\, u^\alpha.$$

Sur E, si l'on note $\tilde{\nabla}$ la dérivation covariante relative à la connexion de Weyl, le système différentiel aux géodésiques s'écrit

$$(1.6) \qquad \tilde{u}^{\mu} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{u}_{\nu} \equiv u^{\mu} D_{\mu} u_{\nu} - u^{\mu} g^{\alpha\rho} (g_{\mu\rho} K_{\nu} - g_{\nu\mu} K_{\rho}) u_{\alpha} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1.7) \qquad u^{\mu} D_{\mu} u_{\nu} = u^{\mu} (\delta^{\lambda}_{\nu} u_{\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu} u_{\nu}) K_{\lambda}.$$

Ainsi, le système (1.2) est *équivalent sur* E à

$$(1.8) \qquad \tilde{u}^{\mu} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{u}_{\nu} = 0.$$

Cas d'une distribution matérielle douée de spin. — Le théorème précédent a été établi pour une distribution matérielle non douée de spin. Nous nous proposons d'étudier sa généralisation éventuelle à la matière à spin, dans le cadre de notre variété V_4 plongée dans V_8 [3 *a*].

Sur V_4, qui est sensée pouvoir permettre la description de toute distribution matérielle non chargée, douée ou non de spin, nous obtenons le système différentiel suivant pour décrire les lignes de courant :

$$(1.9) \qquad u^{\alpha} D_{\alpha} u_{\beta} = u^{\alpha} [I_{\beta\alpha} + M_{\beta\alpha} + \chi N'_{\beta\alpha}],$$

avec

$$(1.10) \qquad N'_{\beta\alpha} = N_{\beta\alpha} - \frac{a}{3} (\rho + P) s^{\rho}_{\beta\alpha} u_{\rho}.$$

Nous écrirons ensuite, avec des définitions évidentes (*cf.* [3 *a*]) pour les vecteurs i, m, n :

$$\begin{aligned} I_{\beta\alpha} &= (\delta^{\sigma}_{\beta} u_{\alpha} - \delta^{\sigma}_{\alpha} u_{\beta}) i_{\sigma}, \\ M_{\beta\alpha} &= (\delta^{\sigma}_{\beta} u_{\alpha} - \delta^{\sigma}_{\alpha} u_{\beta}) m_{\sigma}, \\ N'_{\beta\alpha} &= (\delta^{\sigma}_{\beta} u_{\alpha} - \delta^{\sigma}_{\alpha} u_{\beta}) n_{\sigma} + \frac{a}{18} (\rho + P) s^{\rho}_{\beta\alpha} u_{\rho}. \end{aligned}$$

On peut alors considérer l'espace variationnel généralisé E_4 de métrique en m [$\in$ V (M)] :

$$(1.11) \qquad \boxed{\tilde{ds}^2 = e^{2F} ds^2,}$$

où

$$(1.12) \qquad \boxed{F = \int_{M}^{m} H_{\beta} \, dx^{\beta},}$$

avec

$$(1.13) \qquad \boxed{H_{\beta} = i_{\beta} + m_{\beta} + \chi n_{\beta};}$$

le vecteur de V_4, H_β, est défini dans les régions balayées par la matière, à l'extérieur $H_\beta = 0$. E_4 est en outre muni de la *connexion symétrique de Weyl* :

$$(1.14) \qquad \boxed{W^{\alpha}_{\nu\mu} = \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} + g^{\alpha\rho}\,(g_{\nu\rho}\,H_\mu + g_{\mu\rho}\,H_\nu - g_{\nu\mu}\,H_\rho).}$$

Le système (1.9) sur V_4 se traduit donc sur E_4 par

$$(1.15) \qquad \boxed{\tilde{u}^\mu\,\tilde{\nabla}_\mu\,\tilde{u}_\nu = \chi\left[\frac{a}{18}\,(\rho + P)\right]\tilde{u}^\mu\,s^{\rho}_{\nu\mu}\,\tilde{u}_\rho.}$$

Ainsi, on peut définir un espace variationnel généralisé E_4, à connexion symétrique de Weyl, sur lequel les lignes de courant de V_4 sont de « type électromagnétique », mais avec un coefficient matériel facteur de la constante universelle χ.

Sous forme plus géométrique, nous écrirons le système (1.15) :

$$(1.16) \qquad \boxed{\tilde{u}^\mu\,\tilde{\nabla}_\mu\,\tilde{u}_\nu = \frac{1}{3}\,\tilde{u}^\mu\,S^{\rho}_{\mu\nu}\,\tilde{u}_\rho.}$$

Conclusion. — Le théorème de A. Lichnerowicz n'est donc pas applicable à *toute* distribution matérielle non chargée douée de spin.

Dans le cas général d'une telle distribution, il y a un certain écart vis-à-vis des géodésiques de E_4; la relation (1.15) nous montre qu'en fait, *les lignes de courant de* V_4 *sont très voisines des géodésiques de l'espace* E_4 : elles n'en diffèrent que par des termes en χ.

Physiquement, *ceci montre que l'effet gravitationnel de spin est de l'ordre de* χ, résultat heuristiquement admis par O. Costa de Beauregard [4 *e*].

On montrera facilement que sur V_4 *munie d'un tenseur de torsion non nul, la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de courant de toute distribution matérielle, non chargée, douée de spin, soient des géodésiques de l'espace* E_4 *est que le tenseur de torsion de la connexion euclidienne de* V_4 *soit totalement antisymétrique* :

$$(1.17) \qquad g_{\gamma\rho}\,S^{\rho}_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta\gamma} = S_{[\alpha\beta\gamma]}.$$

De manière équivalente, pour une variété V_4 munie d'une connexion euclidienne telle que

$$(1.18) \qquad \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} + S^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

nous pourrons affirmer que les trajectoires de toute distribution matérielle non chargée à spin sont identiques aux géodésiques de E_4 :

$$(1.19) \qquad \tilde{u}^\mu\,\tilde{\nabla}_\mu\,\tilde{u}_\nu = 0.$$

DÉFINITION. — *Nous appellerons une telle connexion, qui est* EUCLIDIENNE ET *qui vérifie* (1.17) OU (1.18), *une* CONNEXION DÉCOMPOSABLE [3].

Énonçons donc le théorème qui résume l'étude précédente.

THÉORÈME. — *Sur une variété* V_4 *pseudo-riemannienne, plongée dans une variété* V_8 *hypercomplexe* [4], *munie d'une connexion décomposable, les lignes de courant de toute distribution matérielle non chargée, douée ou non de spin, peuvent être considérées comme géodésiques d'un espace variationnel généralisé* E_4 *défini à partir de la métrique d'univers par* (1.11), (1.12), (1.13) *et muni de la connexion symétrique de Weyl* (1.14).

$$\text{Sur } V_4 \left\{ \begin{array}{c} ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \\ \mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\} + S^\alpha_{\beta\gamma} \\ S_{\alpha\beta\gamma} = S_{[\alpha\beta\gamma]} \\ u^\alpha\, \nabla_\alpha\, u_\beta = u^\alpha\, \Pi_{\beta\alpha} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Sur } E_4 \left\{ \begin{array}{c} \tilde{d}s^2 = e^{2F}\, ds^2 \\ F = \displaystyle\int_M^m H_\beta\, dx^\beta \\ W^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\} + g^{\alpha\rho}\,(g_{\beta\rho}\, H_\gamma - g_{\beta\gamma}\, H_\rho + g_{\gamma\rho}\, H_\beta) \\ \tilde{u}^\alpha\, \tilde{\nabla}_\alpha\, \tilde{u}_\beta = 0 \end{array} \right\}.$$

Remarque. — Nous avons précisé dans le théorème précédent « distribution matérielle non chargée » car nous nous intéressons simplement à la gravitation et aux effets de spin; en fait, le théorème est encore valable pour la matière chargée [3 *b*].

1.2. Précisions sur la construction des espaces variationnels généralisés

En introduisant les espaces variationnels généralisés, A. Lichnerowicz a étendu la notion d'espace conforme à un espace de Riemann (notion qui conduit, dans le cas où la forme ω est intégrable, aux théorèmes de Maupertuis en Mécanique classique et d'Eisenhart en Mécanique relativiste-restreinte), en considérant une variété initiale munie d'une forme différentielle quadratique, l'élément ds^2 d'univers, et d'une forme différentielle linéaire *non intégrable* ω.

---

[3] Dans un article antérieur [3 *c*], nous avions appelé une telle connexion « semi-symétrique », mais c'était au sens de Hachtroudi (*Sur les espaces de Riemann*, WEYL et SCHOUTEN, Téhéran, 1956) et non à celui de Schouten (nous introduirons plus loin les connexions semi-symétriques de Schouten); pour éviter ces confusions, nous préférons donc utiliser cette nouvelle dénomination.

[4] On rappelle en effet que les équations des trajectoires sur V_4 sont obtenues à partir de nos équations de champ et d'identités de conservation de V_8 restreintes à V_4 [3 *a*].

Nous avons déjà dit que la démonstration du théorème de A. Lichnerowicz nécessite la détermination, en chaque point M de la variété, *d'un faisceau de courbes différentiables* tel que dans un voisinage V (M) de M, *pour tout point* $m \in V(M)$, *il existe une courbe unique joignant* M *et* m; *un tel faisceau doit en outre dépendre différentiablement du point origine* M.

Nous nous proposons de déterminer un tel faisceau dans le cadre de notre théorème pour la variété pseudo-riemannienne V_4.

Soit M un point quelconque de V_4. Considérons alors un ouvert U de V_4 contenant M; U peut être muni d'une structure de variété différentiable (U est une sous-variété différentiable ouverte de V_4); en tant que domaine de cartes de V_4, U est paracompact. On peut alors définir classiquement sur U *une structure de variété proprement riemannienne.*

Remarque. — On pourrait d'ailleurs aussi, de manière plus globale, admettre que l'espace-temps est paracompact et ainsi considérer V_4 *munie d'une structure de variété proprement riemannienne.*

Conformément au théorème de Whitehead ([5]), si $(X^1, \ldots, X^4)$ est un système de coordonnées normales relativement à M, U (M, ρ) un voisinage de M homéomorphe à une boule euclidienne définie par $\sum_1^4 (X^i)^2 < \rho^2$, alors il existe un nombre positif a tel que si $0 < \rho < a$, il en résulte que :

1° U (M, ρ) est convexe, au sens que deux points quelconques de U (M, ρ) peuvent être joints par une géodésique et une seule contenue dans U (M, ρ);

2° chaque point de U (M, ρ) a un voisinage normal de coordonnées contenant U (M, ρ).

Prenons alors comme voisinage ouvert U de M un tel U (M, ρ), et comme faisceau de courbes issues de M, le *faisceau d'arcs géodésiques de* U (muni de sa structure de variété proprement riemannienne). Pour tout point m de U, l'intégrale

$$\int_M^m H_\alpha \, dx^\alpha$$

est parfaitement définie de manière unique.

La famille de géodésiques sur U détermine [8] une famille de courbes sur le fibré tangent T (U) : une courbe et une seule joignant deux points quelconques de T (U), de la même façon qu'une géodésique et une seule joint deux points quelconques de U.

([5]) *cf.* par exemple : Kobayashi-Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I, Interscience, 1963.

On sait [1] que Exp applique un certain voisinage Ω de U dans T (U) sur U, biunivoquement, les voisinages correspondants étant difféomorphes. Si p est la projection de T (U) dans U, *l'application* (p, Exp) *est alors un difféomorphisme de* Ω *dans* $\mathrm{U}\times\mathrm{U}$:

$$\Omega \xrightarrow{(p,\,\mathrm{Exp})} \mathrm{U}\times\mathrm{U},$$
$$[p\,(m'), \mathrm{Exp}\,(m')] = (p\,(m'), m),$$

l'arc m' M étant l'arc unique de T (U) associé à l'arc m M de U. Soient x^α et y^α $(\alpha = 1, \ldots, 4)$ les coordonnées respectives de M et m dans U; un point de Ω (difféomorphe à $\mathrm{U}\times\mathrm{U}$) sera donc paramétré par (x^α, y^α).

Nous définirons sur Ω la métrique

$$(ds^2)_\Omega = \frac{1}{2}\,(g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta + \tilde{g}_{\alpha\beta}\,dy^\alpha\,dy^\beta),$$

avec

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\int_{\mathrm{M}}^{m} \mathrm{H}_\sigma\,dx^\sigma}\, g_{\alpha\beta}; \tag{1.20}$$

par restriction à U, on en déduit la métrique sur U en M (on fait $x^\alpha = y^\alpha$) :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta,$$

celle en m étant

$$\widetilde{ds}^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta}\,dy^\alpha\,dy^\beta, \tag{1.21}$$

[on note que $\widetilde{ds}^2\,(\mathrm{M}) = ds^2$].

Lorsque m' tend vers M le long de l'arc unique du faisceau qui les joint, ou encore, sur U lorsque m tend vers M sur l'arc géodésique unique correspondant, les $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ tendent vers les $g_{\alpha\beta}$. Mais en M, leurs dérivées diffèrent :

$$\partial_\rho\,\tilde{g}_{\alpha\beta} = \partial_\rho\,g_{\alpha\beta} + 2\,g_{\alpha\beta}\,\mathrm{H}_\rho,$$

et par suite, si l'on appelle $\widetilde{\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\}}$ la restriction à U de la connexion riemannienne sur Ω associée à la métrique $(ds^2)_\Omega$:

$$\widetilde{\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}}(\mathrm{M}) \neq \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}$$

$\left(\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\}\right.$ étant la connexion riemannienne sur U associée aux $\left.g_{\alpha\beta}\right)$. On est ainsi amené *à faire correspondre à la métrique* $\widetilde{ds}^2$ *de* U, *la connexion de Weyl* dont les coefficients en M sont

$$\mathrm{W}^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} + g^{\alpha\rho}\,[g_{\beta\rho}\,\mathrm{H}_\gamma + g_{\gamma\rho}\,\mathrm{H}_\beta - g_{\beta\gamma}\,\mathrm{H}_\rho]. \tag{1.22}$$

On peut dire que *la connexion de Weyl sur* U *est obtenue par restriction à* U *d'une connexion riemannienne sur un voisinage* Ω *de* U *dans* T (U). En fait, nous avons effectué ici un plongement de U dans un ouvert Ω de son fibré tangent T (U); ce processus est quelque peu analogue au plongement de V_4 dans V_8.

Remarque. — Si l'on suppose que V_4 est paracompact, on peut raisonner sur V_4; on déterminera alors un voisinage de V_4 dans T (V_4) qui sera difféomorphe à un voisinage de la diagonale V_4 de $W_4 \times W_4$. On peut ainsi introduire la connexion de Weyl de manière plus globale.

L'espace variationnel généralisé E_4 *est ainsi formé par le raccordement des voisinages* U *des différents points* M *de* V_4, *selon la connexion de Weyl.*

1.3. **Introduction d'une connexion semi-symétrique de Schouten**

Bien que *l'espace* E_4 *soit la variété* V_4 *munie de la connexion de Weyl* et d'une métrique définie localement par (1.21), pour géométriser le système différentiel (3.11) de [3 *a*] et lui donner la forme équivalente simple (1.16), on doit nécessairement utiliser sur E_4 une nouvelle connexion [9 *b*]. On remarque en effet qu'au point M les dérivées des vecteurs colinéaires $\tilde{u}^\alpha$ et u^α diffèrent :

$$\partial_\mu \tilde{u}^\alpha = \partial_\mu u^\alpha - H_\mu u^\alpha$$

alors qu'en M, on a $\tilde{u}^\alpha = u^\alpha$.

Or

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{u}^\alpha = \partial_\mu u^\alpha - H_\mu \tilde{u}^\alpha + W^\alpha_{\lambda\mu} \tilde{u}^\lambda = \tilde{\nabla}_\mu u^\alpha - H_\mu u^\alpha;$$

on est donc conduit à introduire *la connexion semi-symétrique de Schouten* [9 *b*] :

$$C^\alpha_{\lambda\mu} = W^\alpha_{\lambda\mu} - H_\mu \delta^\alpha_\lambda.$$

Ainsi

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{u}^\alpha = \partial_\mu u^\alpha + C^\alpha_{\lambda\mu} \tilde{u}^\lambda \equiv \overset{c}{\nabla}_\mu u^\lambda;$$

comme, d'après (1.22) :

$$\boxed{C^\alpha_{\lambda\mu} = \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\} + g^{\alpha\rho} (g_{\mu\rho} H_\lambda - g_{\lambda\mu} H_\rho),} \tag{1.23}$$

il vient

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{u}^\alpha = D_\mu u^\alpha + g^{\alpha\rho} (g_{\mu\rho} H_\lambda - g_{\lambda\mu} H_\rho) u^\lambda$$

et donc

$$\tilde{u}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{u}^\alpha = 0 \qquad (\text{ou } u^\mu \overset{c}{\nabla}_\mu u^\alpha = 0) \tag{1.24}$$

est équivalent à

$$u^{\mu} D_{\mu} u_{\alpha} = u^{\lambda} (\delta_{\alpha}^{\rho} u_{\lambda} - \delta_{\lambda}^{\rho} u_{\alpha}) H_{\rho}. \tag{1.25}$$

On voit donc que E_4 est l'espace formé par le raccordement des voisinages U des différents points M de V_4 selon la connexion de Weyl, *le vecteur unitaire adopté au point* M *étant le vecteur* $\tilde{u}^{\alpha}$.

C'est pour écrire le système différentiel aux géodésiques de E_4 *en termes de* u^{α} que l'on introduit la connexion C de Schouten; sur E_4, les courbes autoparallèles relativement à la connexion W, le vecteur tangent étant $\tilde{u}^{\alpha}$, sont identiques aux courbes autoparallèles relativement à la connexion C de Schouten, le vecteur tangent étant u^{α}.

Il est donc possible de considérer que *l'espace* E_4 *est l'espace* V_4 *muni de la connexion semi-symétrique de Schouten, le vecteur unitaire tangent adopté en* M *étant* u^{α}*, le même que sur* V_4 *muni de la connexion* $\mathcal{L}$.

Les trajectoires (1.25) qui représentent les équations (3.18) des courbes décrites par nos particules à spin [3 *a*] *lorsque la connexion* $\mathcal{L}$ *de* V_4 *est décomposable*, sont identiques aux géodésiques de l'espace E_4 muni de sa connexion semi-symétrique, le vecteur unitaire en M étant u^{α}.

On appellera ainsi E_4 indifféremment espace à connexion symétrique de Weyl ou espace à connexion semi-symétrique de Schouten.

Par suite, sur une variété espace-temps V_4, MUNIE D'UNE CONNEXION DÉCOMPOSABLE, *on peut toujours définir, dans les régions balayées par la matière, une connexion asymétrique (de Schouten)* TELLE QUE LES TRAJECTOIRES DES PARTICULES A SPIN SOIENT LES GÉODÉSIQUES DE E_4 RELATIVEMENT A CETTE CONNEXION DE SCHOUTEN.

On peut donc remarquer que si, *pour une distribution matérielle sans spin*, avec éventuellement une contribution électromagnétique dans le tenseur Φ, on peut *toujours* trouver un espace variationnel généralisé tel que les lignes de courant de ce champ matériel en soient des géodésiques [9 *b*], par contre, *pour une distribution matérielle douée de spin, ceci n'est pas toujours possible*, et dans E_4 on a un écart de l'ordre de χ (et de forme qui rappelle le cas électromagnétique) par rapport aux géodésiques (de E_4).

En conclusion, la transposition sur un espace variationnel généralisé (que l'on peut qualifier de « conforme par voisinages » à la variété V_4) est très satisfaisante pour une étude et une interprétation physique comparées. Dans les énoncés des théorèmes de Maupertuis (Mécanique classique) et d'Eisenhart (Mécanique relativiste restreinte) le point représentatif décrit une géodésique d'un espace de Rieman conforme à la variété initiale de configuration; de manière analogue, on introduit ici un espace E_4 (plus général) « conforme par voisinages » à la variété initiale V_4 qui assure une représentation plus simple des trajectoires considérées; pour CERTAINES *distributions matérielles à spin le théorème de A. Lichnerowicz est valable* et l'on aboutit alors à des géodésiques de E_4

comme trajectoires. Du point de vue géométrique l'important est d'associer un cadre *unique* (l'espace E_4) aux deux formes différentielles ds^2 et ω, cette dernière étant non intégrable, et de représenter les équations des trajectoires de *toute distribution matérielle* sur une variété espace-temps V_4 par

$$\boxed{u^\mu \overset{c}{\nabla}_\mu u_\nu = \frac{1}{3} u^\mu S^\rho_{\mu\nu} u_\rho,} \tag{1.26}$$

équations où l'on note, essentiellement, dans le membre de droite, *la présence du tenseur de torsion de la connexion asymétrique utilisée sur* V_4 (ce tenseur étant l'élément caractéristique de notre modèle géométrique si on le compare au cadre habituel de la Relativité générale).

2. DENSITÉ DE SPIN ET ÉQUATIONS D'EINSTEIN ASYMÉTRIQUES

2.1. Densité de spin : Généralités

Introduisons la densité de moment cinétique propre (ou densité de spin) par [comme ([6]) en [6], [7], [11]];

DÉFINITION. — *La densité de spin d'un échantillon de matière est déterminée par la structure géométrique de la portion d'espace qui le contient au moyen de la relation*

$$S^\lambda_{\alpha\beta} = \chi \sigma^\lambda_{\alpha\beta}. \tag{2.1}$$

D'autre part, nous savons que pour une variété pseudo-riemannienne munie d'une connexion asymétrique, le tenseur d'Einstein est asymétrique :

$$S_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} + R_{[\alpha\beta]}; \tag{2.2}$$

il en est donc ainsi pour notre variété V_4 ; nous avons en outre montré que, V_4 étant munie d'un vecteur de torsion nul :

$$R_{[\alpha\beta]} \equiv \nabla_\lambda S^\lambda_{\alpha\beta}. \tag{2.3}$$

Les équations antisymétriques d'Einstein :

$$R_{[\alpha\beta]} = \chi\, T_{[\alpha\beta]} \tag{2.4}$$

([6]) Compte tenu de nos conditions $S_\sigma = O$ [3 *a*].

sont alors équivalentes aux relations

$$T_{[\alpha\beta]} = \nabla_\lambda \sigma^\lambda_{\alpha\beta}. \tag{2.5}$$

Autrement dit, nous obtenons ainsi immédiatement un résultat établi par plusieurs auteurs (*cf.* par exemple : [4], [10], [11], [13]) et aujourd'hui reconnu classique [2] :

L'existence d'une densité de spin IMPLIQUE *une asymétrie du tenseur impulsion-énergie suivant les relations* (2.5).

De nombreux auteurs ([6 *a*], [6 *b*], [7], [11]) aboutissent aux résultats (2.1)-(2.5), ou du moins les utilisent; le fondement de tous ces travaux se trouve dans la thèse [4 *a*] de O. Costa de Beauregard qui précise bien que, le tenseur inertique d'un fluide à spin étant asymétrique, les équations d'Einstein doivent être asymétriques, ce qui impose soit une asymétrie du tenseur métrique, soit une asymétrie du tenseur de Ricci, soit une asymétrie des deux à la fois [11]. Ici c'est l'existence d'un tenseur de torsion qui asymétrise le tenseur de Ricci, cependant que le tenseur métrique reste symétrique; c'est ce procédé qu'utilisent F. Hehl [6], D. W. Sciama [11] et T. W. B. Kibble [7] pour établir et justifier les équations de champ pour un fluide à spin qui ont la forme générale

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}. \tag{2.6}$$

Dans [3 *a*] nous avons essentiellement essayé de géométriser la partie symétrique des équations (2.6) :

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)}; \tag{2.7}$$

par un principe variationnel, avec comme variables de champ les composantes $g_{\alpha\beta}$ (symétriques), nous avons obtenu des équations de champ *qui explicitent* $T_{(\alpha\beta)}$. Il nous reste maintenant à *déterminer explicitement les composantes* $T_{[\alpha\beta]}$.

2.2. Détermination explicite du tenseur impulsion-énergie asymétrique

2.2.1. Introduction

Nous continuons toujours à considérer l'espace-temps V_4 comme la sous-variété diagonale de V_8 munie d'un champ de tenseurs *symétriques* $g_{\alpha\beta}$, d'un champ de tenseurs antisymétriques (en α, β) $\Lambda^\rho_{\alpha\beta}$, d'une connexion asymétrique $\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma}$, mais, pour déterminer les équations d'Einstein asymétriques sur V_4 de notre schéma, nous devons raisonner sur une nouvelle variété M_4; M_4 est, comme V_4, la sous-variété diagonale d'une variété V_8, mais elle est munie d'un champ de tenseurs $g_{\alpha\beta}$ *asymétriques* tels que $g \neq 0$.

Utilisons les notations classiques [9 *a*] :

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}, \qquad h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}, \qquad k_{\alpha\beta} = g_{[\alpha\beta]},$$
$$g^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}, \qquad l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)}, \qquad m^{\alpha\beta} = g^{[\alpha\beta]}.$$

Nous allons écrire sur M_4, un principe semi-variationnel analogue à celui déjà introduit [3 *a*]; nous postulerons encore les conditions supplémentaires

$$S_\rho = 0 \tag{2.8}$$

qui, rappelons-le, sont nécessaires si nous voulons obtenir les classiques équations $R_{\alpha\beta} = 0$ du cas extérieur.

Comme dans le cas symétrique pur, nous utiliserons un lagrangien construit à partir de

$$\sqrt{|g|}\left[\frac{\hat{P} + \hat{\hat{P}}}{2} + \theta\,\frac{\overline{Q} + \hat{\hat{Q}}}{2}\right], \tag{2.9}$$

que nous préciserons plus loin (*cf.* § 2.2.3).

Les équations ainsi obtenues sur M_4 nous fourniront des équations d'Einstein très générales; nous n'écrirons pas explicitement ces dernières, mais nous envisagerons *les équations limites pour $g_{\alpha\beta}$ tendant vers sa partie symétrique.*

Notons bien que, comme dans le cas symétrique pur de V_4, nous utilisons sur M_4 un *principe semi-variationnel* en ce sens que, dans la variation, les coefficients connectifs sont supposés *inconnus* et *invariables*; indépendamment des équations de champ ainsi obtenues, des conditions de Ricci écrites sur V_8 pour tout chemin de V_4 [3 *a*] nous fournissent les équations aux connexions $\nabla_\rho\, g_{\alpha\beta} = 0$. Les équations de la théorie sur V_4 seront les *équations limites* de champ et les équations aux connexions; si dans le cas symétrique les équations $\nabla_\rho\, g_{\alpha\beta} = 0$ ne se combinent pas aux équations de champ pour simplifier ces dernières, dans le cas plus général présenté ici, nous pourrons appeler *équations de champ les équations limites* déduites du principe variationnel et simplifiées ensuite par l'utilisation des équations aux connexions. Ces équations de champ constitueront *les équations d'Einstein asymétriques cherchées* :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}; \tag{2.10}$$

la partie symétrique de celles-ci nous fournira exactement les équations de champ obtenues dans le cas symétrique [3 *a*]; quant à la partie antisymétrique de (2.10), elle nous fournira explicitement les équations d'Einstein antisymétriques sur V_4;

$$R_{[\alpha\beta]} = \chi\, T_{[\alpha\beta]} \tag{2.11}$$

que ne nous donnait pas la théorie symétrique.

En résumé, nous obtiendrons donc ainsi des équations *asymétriques* sur une variété à *tenseur fondamental symétrique*, tout en évitant les calculs inextricables qui apparaissent sur une variété à tenseur fondamental asymétrique ainsi que les difficultés correspondantes pour l'interprétation physique de la « métrique » $g_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)} + g_{[\alpha\beta]}$.

2.2.2. Détermination des $\delta\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho}$

Puisque nous nous proposons de trouver, en utilisant la variété intermédiaire M_4, les équations asymétriques d'Einstein *sur* V_4 *qui correspondent* aux équations de [3 *a*], nous prendrons sur M_4 un champ de tenseurs $\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho}$ *antisymétriques* ($h \neq 0$ puisque $g \neq 0$, donc les $h^{\sigma\gamma}$ sont bien définis) tels que

$$\boxed{\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho} = h^{\sigma\gamma} \sqrt{|\,h\,|}\; \varepsilon_{\gamma\alpha\rho\nu}\, U^{\nu},} \tag{2.12}$$

avec

$$\boxed{U^{\nu} = h^{\nu\gamma}\, U_{\gamma},} \tag{2.13}$$

et

$$\boxed{U_{\gamma} = \sqrt{|h|^{q}}\; p_{\gamma}.} \tag{2.14}$$

On vérifie bien que *les relations* (2.12) *se réduisent sur* V_4 *à*

$$\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho} = g^{\sigma\gamma} \sqrt{|\,g\,|}\; \varepsilon_{\gamma\alpha\rho\nu}\, U^{\nu}.$$

Ainsi avec (2.12), (2.13), (2.14) et [3 *a*] :

$$\delta p_{\gamma} = 0, \qquad \delta q = 0, \tag{2.15}$$

on transpose sur M_4 ce qui était utilisé sur V_4.

On obtiendra donc sur M_4, munie du tenseur g asymétrique, d'une connexion asymétrique quelconque, et du tenseur (2.12), des équations de champ

$$F_{\alpha\beta} = 0; \tag{2.16}$$

nous considérerons alors la *forme limite de ces équations lorsqu'on se restreint à* V_4 :

$$\hat{F}_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.17}$$

Il nous restera enfin à écrire la restriction à V_4 des conditions de Ricci sur V_8 [3 *a*] :

(2.18) $$\nabla_\rho\, g_{\alpha\beta} = 0,$$

(2.19) $$\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho}\, g_{\sigma\beta} + \Lambda^{\sigma}_{\beta\rho}\, g_{\sigma\alpha} = 0;$$

(2.19) étant déjà utilisé par l'expression (2.12) choisie pour les $\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho}$, les équations d'Einstein cherchées seront obtenues par combinaison de (2.17) et (2.18). Ce sont ces équations d'Einstein que nous écrirons directement. Il nous faut maintenant expliciter les variations $\delta\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho}$:

$$\boxed{\delta\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho} = \delta\left(h^{\sigma\gamma}\, h^{\nu\omega}\sqrt{|\,h\,|^{q+1}}\;\varepsilon_{\gamma\alpha\rho\nu}\, p_\omega\right).}$$

D'après un résultat classique [12 *a*], nous savons que

(2.20) $$h^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\rho}\, m^{\beta\sigma}\, l_{\rho\sigma};$$

on peut donc affirmer que pour tout tenseur A fonction des $g^{\alpha\beta}$:

(2.21) $$\lim_{g_{\alpha\beta}\to h_{\alpha\beta}} A^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta\ldots}\,\delta h^{\alpha\beta} = \delta g^{\alpha\beta} \lim_{g_{\alpha\beta}\to h_{\alpha\beta}} A^{\cdot\cdot}_{(\alpha\beta)\ldots}$$

Dans les équations limites cherchées, nous aurons donc pour $\delta\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho}$ la même contribution que dans le cas symétrique et par suite *les termes en* $\delta\Lambda^{\rho}_{\alpha\beta}\, A^{\alpha\beta}_{\rho}$ *s'exprimeront par* $\delta g^{\alpha\beta}\, B_{(\alpha\beta)}$.

2.2.3. Lagrangien sur M_4

Avec $g_{\alpha\beta}$, $\mathcal{L}^{\rho}_{\alpha\beta}$ asymétriques et $\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho}$ antisymétrique, l'invariant scalaire déjà utilisé [3 *a*] :

$$g^{\alpha\beta}\left[\frac{P_{\alpha\beta} + \overline{P}_{\beta\alpha}}{2} + \theta\,\frac{Q_{\alpha\beta} + \overline{Q}_{\beta\alpha}}{2}\right]$$

s'explicitera en

(2.22) $$R + \Lambda + \Gamma + \nabla^{\sigma} S_\sigma + \theta\, g^{\alpha\beta}\, \nabla_\lambda\, \Lambda^{\lambda}_{\alpha\beta}$$
$$+ 2\,\theta\, g^{\alpha\beta}\, S^{\sigma}_{\lambda\beta}\, \Lambda^{\lambda}_{\alpha\sigma} - \theta\, S_\sigma\, \Lambda^{\sigma}_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} - \frac{\theta}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_\beta\, \Lambda^{\lambda}_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha\, \Lambda^{\lambda}_{\lambda\beta}\right),$$

avec

$$\Gamma = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_\beta\, \mathcal{L}^{\lambda}_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha\, \mathcal{L}^{\lambda}_{\beta\lambda}\right).$$

Or, nous écrivons un principe variationnel sur M_4 munie d'un champ tenseurs $\Lambda^{\alpha}_{\beta\sigma}$ donnés par (2.12), en outre nous postulerons que $S_\sigma = 0$

(avec $\delta S_\sigma = 0$), par conséquent les termes suivants de (2.22) :

$$\nabla^\sigma S_\sigma - \theta\, S_\sigma \Lambda^\sigma_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} - \frac{\theta}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\beta \Lambda^\lambda_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha \Lambda^\lambda_{\lambda\beta})$$

ne contribueront pas dans les équations de champ.

Quant à Γ, les équations aux connexions de V_4, nous montrent immédiatement qu'il est nul.

Ainsi, les seuls termes de (2.22) qui contribueront sont

$$\boxed{R + \Lambda + \theta\, g^{\alpha\beta} \nabla_\lambda \Lambda^\lambda_{\alpha\beta} + 2\,\theta\, g^{\alpha\beta} S^\sigma_{\lambda\beta} \Lambda^\lambda_{\alpha\sigma};} \tag{2.23}$$

on retrouve donc que, pour les termes qui contribuent, $\Lambda \left(= g^{\alpha\beta} \Lambda^\lambda_{\alpha\rho} \Lambda^\rho_{\beta\lambda}\right)$ apparaît comme la différence entre la première courbure induite (ou du moins, la partie de cette dernière qui contribue) et la courbure propre de V_4 (7) :

$$\Lambda = \left(\!\left(\frac{\hat{P} + \hat{\hat{P}}}{2}\right)\!\right) - R.$$

De même, la deuxième courbure induite $\dfrac{\hat{Q} + \hat{\hat{Q}}}{2}$ contribue par

$$\left(\!\left(\frac{\hat{Q} + \hat{\hat{Q}}}{2}\right)\!\right) = \theta\, g^{\alpha\beta}\, \nabla_\lambda \Lambda^\lambda_{\alpha\beta} + 2\,\theta\, g^{\alpha\beta}\, S^\sigma_{\lambda\beta} \Lambda^\lambda_{\alpha\sigma},$$

où l'on peut distinguer deux termes tensoriels : l'un dépendant explicitement de $S^\sigma_{\lambda\beta}$, l'autre non.

Nous sommes ainsi assez naturellement conduit à considérer la densité lagrangienne générale sous la forme

$$\boxed{L = \sqrt{|g|}\,[R + \beta\Lambda + \gamma\, g^{\alpha\beta}\, \nabla_\lambda \Lambda^\lambda_{\alpha\beta} + 2\,\theta\, g^{\alpha\beta}\, S^\sigma_{\lambda\beta} \Lambda^\lambda_{\alpha\sigma}]} \tag{2.24}$$

où β, γ, θ sont des fonctions scalaires des coordonnées invariables dans la variation.

LEMME. — *Le lagrangien* (2.24) *de* M_4 *se réduit sur* V_4 EXACTEMENT *au lagrangien utilisé pour obtenir les équations symétriques d'Einstein sur* V_4 [3 *a*].

Ce résultat s'établit immédiatement (*cf.* [3 *b*]).

(7) La double parenthèse signifie que l'on considère la part de $\dfrac{\hat{P} + \hat{\hat{P}}}{2}$ qui contribue dans la variation.

Quelques cas particuliers :

(1) $\beta = \gamma = \theta = 0$: On obtient alors immédiatement les équations du cas extérieur, sur V_4 munie de la connexion asymétrique $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\sigma}$:

$$R_{(\alpha\beta)} = 0, \qquad R_{[\alpha\beta]} = 0.$$

(2) $\beta = \gamma = 0$, $S^{\alpha}_{\beta\sigma} = 0$: On obtient alors les équations du cas extérieur de la Relativité générale :

$$R_{\alpha\beta} \, (\equiv R_{(\alpha\beta)}) = 0.$$

(3) $\gamma = \theta = 0$, $\beta < 0$: On obtient alors les équations suivantes sur V_4 munie de la connexion asymétrique $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\sigma}$:

$$(2.25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} R_{(\alpha\beta)} - \dfrac{1}{2} R \, g_{\alpha\beta} = \chi \, [(\rho + P) \, u_\alpha \, u_\beta - P \, g_{\alpha\beta}], \\ \qquad\qquad R_{[\alpha\beta]} = 0. \end{array} \right.$$

(4) $\gamma = 0$, $\beta < 0$, $S^{\alpha}_{\beta\sigma} = 0$: On obtient les équations du fluide parfait (non nécessairement doué de spin) en Relativité générale :

$$(2.26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} R_{\alpha\beta} - \dfrac{1}{2} R \, g_{\alpha\beta} = \chi \, [(\rho + P) \, u_\alpha \, u_\beta - P \, g_{\alpha\beta}], \\ \qquad\qquad R_{[\alpha\beta]} \equiv 0. \end{array} \right.$$

Nous nous proposons d'étudier maintenant sur V_4 *munie de la connexion asymétrique* le cas

$$\underline{\gamma = 0, \qquad \beta < 0;}$$

nous déterminerons ainsi le tenseur impulsion-énergie asymétrique *le plus simple* [car il y aurait aussi les schémas tels que $\gamma \neq 0$ (8)] correspondant à l'étude du cas symétrique faite en [3 *a*].

2.2.4. Détermination de $T_{\alpha\beta}$

Nous prendrons, pour simplifier les notations, $\beta = -1$ et raisonnerons ainsi sur le lagrangien

$$(2.27) \qquad \boxed{L = \sqrt{|g|} \, [R - \Lambda + 2 \, \theta \, g^{\alpha\beta} \, S^{\sigma}_{\lambda\beta} \, \Lambda^{\lambda}_{\alpha\sigma}].}$$

(8) Nous n'étudierons pas ici de tels schémas, mais ils sont eux aussi associés aux mêmes équations symétriques; quant à leurs équations d'Einstein antisymétriques, elles auront la forme

$$R_{[\alpha\beta]} = -3 \, \lambda^2 \, (u_\alpha \, \overset{*}{s}_\beta - u_\beta \, \overset{*}{s}_\alpha) - \gamma \lim \nabla_\lambda \, \Lambda^{\lambda}_{\alpha\beta};$$

ces schémas pourraient décrire d'autres fluides à spin.

Nous nous proposons d'établir *directement* les équations asymétriques d'Einstein associées au lagrangien (2.27).

Ces équations se décomposent en (sur V_4) [2 *b*] :

$$\boxed{\begin{aligned} &R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = 6\,\lambda^2\, u_\alpha\, u_\beta - 3\,\lambda^2\,(u_\alpha\, \overset{*}{s}_\beta + u_\beta\, \overset{*}{s}_\alpha) \\ &\qquad\qquad - g_{\alpha\beta}\,[(6\,q + 3)\,\lambda^2 - 3\,(3\,q + 2)\,\lambda^2\, b], \\ &\qquad R_{[\alpha\beta]} = -\,3\,\lambda^2\,(u_\alpha\, \overset{*}{s}_\beta - u_\beta\, \overset{*}{s}_\alpha). \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(2.28) \\ \\ &(2.29) \end{aligned}$$

Remarques. — 1° On obtient bien les *mêmes équations symétriques* dans le cas symétrique pur et dans le cas général par passage à la limite $g_{\alpha\beta} \to h_{\alpha\beta}$.

2° $T_{[\alpha\beta]}$ est exactement égal à l'antisymétrisé du tenseur $C_{\alpha\beta}$ (défini en [3 *a*]) et par conséquent le tenseur asymétrique $T_{\alpha\beta}$ a bien la forme proposée heuristiquement par O. Costa de Beauregard; on obtient en effet

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = (\rho + P)\,[u_\alpha\,(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta)] - P\, g_{\alpha\beta} \quad (9).} \tag{2.30}$$

Nous avons vu que

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma} = \lambda^2\, a s^{\alpha}_{\beta\gamma} = \chi \sigma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \tag{2.31}$$

d'où

$$\boxed{\sigma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{a}{6}\,(\rho + P)\, s^{\alpha}_{\beta\gamma};} \tag{2.32}$$

en exprimant *par* σ_α *le vecteur dual de la partie totalement antisymétrique de la densité de spin* $\sigma^{\alpha\beta\gamma}$:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{3\,!}\, \eta_{\pi\tau\rho\alpha}\, \sigma^{[\pi\tau\rho]}, \tag{2.33}$$

on aura aussi

$$\boxed{\sigma_\alpha = \frac{a}{6}\,(\rho + P)\, \overset{*}{s}_\alpha.} \tag{2.34}$$

Les équations d'Einstein s'écrivent donc en fonction de σ :

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi \left[\frac{1}{2} \left\{ u_\alpha \left[(\rho + P)\, u_\beta - \frac{6}{a}\, \sigma_\beta \right] + u_\beta \left[(\rho + P)\, u_\alpha - \frac{6}{a}\, \sigma_\alpha \right] \right\} - P\, g_{\alpha\beta} \right], \tag{2.35}$$

$$R_{[\alpha\beta]} = \chi \left[\frac{3}{a}\, (u_\beta\, \sigma_\alpha - u_\alpha\, \sigma_\beta) \right]. \tag{2.36}$$

---

(9) Rappelons que les $\overset{*}{s}_\beta$ représentent un *vecteur colinéaire au vecteur dual de la partie totalement antisymétrique du tenseur de torsion de la connexion de* V_4.

D'après ce que nous avons vu plus haut, ces équations (2.36) sont équivalentes à

$$\boxed{\nabla_\lambda \sigma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{3}{a}(u_\beta \sigma_\alpha - u_\alpha \sigma_\beta).} \tag{2.37}$$

Les résultats précédents nous permettent d'écrire immédiatement le tenseur impulsion-énergie de notre schéma en « termes physiques » :

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = u_\alpha \left[(\rho + P)\, u_\beta - \frac{6}{a}\sigma_\beta\right] - P\, g_{\alpha\beta};} \tag{2.38}$$

l'expression (2.38) pourrait décrire un certain « *schéma fluide parfait à spin* »; le « *schéma matière pure à spin* » serait décrit alors par

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = u_\alpha \left(\rho\, u_\beta - \frac{6}{a}\sigma_\beta\right).} \tag{2.39}$$

Conséquence immédiate de l'expression (2.38) *de* $T_{\alpha\beta}$. — Il est facile de vérifier que l'expression (2.38) ne fait intervenir que la partie totalement antisymétrique $\sigma_{[\alpha\beta\gamma]}$ de la densité de spin; ainsi $T_{\alpha\beta}$ *s'exprime encore par* (2.38) *si la densité de spin se réduit à sa partie totalement antisymétrique.*

Par suite, si nous avons (avec $\sigma_{\alpha\beta\nu}$ *a priori* non nul) :

$$\sigma_{[\alpha\beta\nu]} = 0,$$

le tenseur impulsion-énergie se réduit à sa partie symétrique classique.

Résumons ce résultat :

$$\boxed{\sigma_{[\alpha\beta\nu]} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\beta\nu} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_{\alpha\beta} = (\rho + P)\, u_\alpha u_\beta - P\, g_{\alpha\beta}, \\ \nabla^\lambda \sigma_{\alpha\beta\lambda} = 0. \end{cases}} \tag{2.40}$$

On distinguera ce dernier point du cas particulier (4) déjà signalé plus haut :

$$\boxed{\sigma_{\alpha\beta\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\alpha\beta} = (\rho + P)\, u_\alpha u_\beta - P\, g_{\alpha\beta}.} \tag{2.41}$$

Par utilisation d'un principe semi-variationnel sur

$$\int_C [R + \beta \Lambda + 2\,\theta\, g^{\alpha\beta} S^\sigma_{\lambda\beta} \Lambda^\lambda_{\alpha\sigma}]\sqrt{|g|}\, d\tau, \tag{2.42}$$

où $(\beta \Lambda + 2\,\theta\, g^{\alpha\beta} S^\sigma_{\lambda\beta} \Lambda^\lambda_{\alpha\sigma})$ *est une « combinaison linéaire » des différents termes* [10] *(qui contribuent dans la variation) qui s'ajoutent natu-*

[10] sauf du terme $\nabla_\sigma \Lambda^\sigma_{\alpha\beta}$ qui « disparaît » puisque nous nous plaçons dans le cas où $\gamma = 0$.

rellement, dans les deux courbures scalaires induites par l'immersion dans V_8, *à la courbure classique* R *de* V_4 (*munie de la connexion asymétrique* $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\sigma}$), *on obtient, pour* β *et* θ *non nuls, les équations d'Einstein asymétriques*

$$(2.43) \qquad R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi \left\{ u_\alpha \left[(\rho + P)\, u_\beta - \frac{6}{a} \sigma_\beta \right] - P\, g_{\alpha\beta} \right\}.$$

Des valeurs particulières de β *et* θ *conduisent, pour un tenseur de torsion nul, aux divers schémas classiques de la Relativité générale.*

2.3. Quelques remarques et considérations heuristiques sur les tenseurs impulsion-énergie et densité de spin

2.3.1. Tenseur impulsion-énergie

Nous venons de voir que le tenseur impulsion-énergie asymétrique de notre schéma avait la forme proposée par O. Costa de Beauregard; c'est ainsi le vecteur $\left[(\rho + P)\, u_\beta - \frac{6}{a} \sigma_\beta \right]$ qui décrit la direction de l'impulsion totale de notre fluide à spin.

Dans notre modèle, le tenseur impulsion-énergie est tel que *la direction de l'impulsion du fluide est liée à celle du vecteur dual de la partie totalement antisymétrique du tenseur densité de spin*; on peut même ajouter que *la direction de l'impulsion ne dépend que de la partie totalement antisymétrique de* $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ et de la vitesse d'univers.

Reprenons l'implication (2.40) signalée plus haut : on constate alors que l'existence d'un tenseur σ non nul n'entraîne pas *nécessairement* une modification de $T_{(\alpha\beta)}$ par rapport à sa forme classique pour le fluide parfait sans spin. On retrouve donc que la présence, dans $T_{(\alpha\beta)}$, de termes supplémentaires ([11]), est *une condition suffisante mais non nécessaire pour prouver que la matière considérée est douée de spin*; on avait, en effet, déjà remarqué ceci [3 *a*] en se plaçant dans le cas d'une antisymétrie totale du tenseur H, et en considérant les équations correspondantes des trajectoires.

En fait, dire que $H_{\alpha\beta\sigma} = H_{[\alpha\beta\sigma]}$ équivaut à dire que le vecteur V_α, ou encore σ_α, est nul; or, la nullité de σ_α est équivalente à celle de $\sigma_{[\alpha\beta\nu]}$. Il y a donc identité entre le cas considéré ici et celui déjà cité en [3 *a*] ([12]).

([11]) Conformément à (2.38).

([12]) Dans un cas plus général où $\gamma \neq 0$ on aurait encore pour $T_{(\alpha\beta)}$ l'expression classique, mais $T_{[\alpha\beta]}$ serait non nul, la conclusion énoncée plus haut étant toujours valable.

2.3.2. Tenseur densité de spin

De la même façon que pour U_α, nous avions posé, avec λ réel :

$$U_\alpha = \lambda\, u_\alpha, \qquad u_\alpha\, u^\alpha = +1,$$

afin que u_α puisse bien représenter le vecteur vitesse unitaire d'univers, nous poserons

$$\overset{*}{s}_\alpha\, \overset{*}{s}{}^\alpha < 0 \tag{2.44}$$

afin de pouvoir assurer (du moins localement pour des ρ et P constants donnés) que σ_α *est orienté dans l'espace*

$$\sigma_\alpha\, \sigma^\alpha = -1, \tag{2.45}$$

résultat physique connu [5]. Ceci revient à imposer une condition supplémentaire sur le tenseur de torsion (ou encore sur la densité de spin) et il nous est loisible de dire que nous nous restreindrons aux cas où cette inéquation est satisfaite.

Nous avons en outre indiqué [3 *a*] que la relation

$$U^\alpha\, V_\alpha = 0$$

était compatible avec les équations de champ de notre principe variationnel. Il est donc possible d'assurer la condition

$$u^\alpha\, \sigma_\alpha = 0 \tag{2.46}$$

sans modifier les résultats précédemment obtenus.

Finalement, moyennant deux conditions scalaires simples sur le tenseur de torsion, il est possible, dans le cadre de notre étude, d'avoir

$$\begin{cases} u_\alpha\, u^\alpha + \sigma_\alpha\, \sigma^\alpha = 0, \\ u^\alpha\, \sigma_\alpha = 0, \end{cases} \tag{2.47}$$

relations classiques en théorie de Dirac.

2.3.3. Quelques considérations heuristiques

Plaçons-nous, pour simplifier les notations, dans la cas d'un *schéma matière pure.*

Appelons *impulsion longitudinale* le vecteur impulsion classique

$$\boxed{p^\alpha = \rho\, u^\alpha,} \tag{2.48}$$

et *impulsion transversale* le vecteur

$$\boxed{\rho^\alpha = \frac{6}{a}\,\sigma^\alpha.} \tag{2.49}$$

Avec ces notations le tenseur impulsion-énergie s'écrit

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = u_\alpha\,(p_\beta - \rho_\beta)} \tag{2.50}$$

et si l'on compare au tenseur $u_\alpha\,p_\beta$ de la matière pure sans spin, on peut dire que le *vecteur impulsion totale* est

$$\boxed{P_\alpha = p_\alpha - \rho_\alpha \quad \left(= \rho\,u_\alpha - \frac{6}{a}\,\sigma_\alpha\right).} \tag{2.51}$$

On pourrait donc ainsi noter

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = u_\alpha\,P_\beta} \quad \left\{ \begin{aligned} T_{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{2}\,(u_\alpha\,P_\beta + u_\beta\,P_\alpha). \\ T_{[\alpha\beta]} &= \frac{1}{2}\,(u_\alpha\,P_\beta - u_\beta\,P_\alpha), \end{aligned} \right. \tag{2.52}$$

Avec ces définitions, l'impulsion transversale serait ainsi colinéaire au dual de la partie complètement antisymétrique de la densité de spin et cette dernière serait donc directement responsable de la non-colinéarité de la vitesse u^α et de l'impulsion totale P^α; quant à la formulation globale (2.52), elle serait valable pour décrire tout schéma matière pure, avec ou sans spin, les vecteurs u_α et P_β n'étant pas toujours nécessairement colinéaires.

Avec la définition (2.1), les équations des trajectoires peuvent s'exprimer par

$$\boxed{u^\alpha\,\overset{c}{\nabla}_\alpha\,u_\beta = \frac{\chi}{3}\,u^\mu\,u^\rho\,\sigma_{\mu\beta\rho};}$$

si l'on pose enfin (comme en [5] et [10]) :

$$\sigma_{\alpha\beta\nu} = \tau_{\alpha\beta}\,u_\nu,$$

où $\tau_{\alpha\beta} = -\tau_{\beta\alpha}$ *est homogène au tenseur moment angulaire interne,* on aboutit aux équations particulières

$$\boxed{u^\alpha\,\overset{c}{\nabla}_\alpha\,u_\beta = \frac{\chi}{3}\,u^\mu\,\tau_{\mu\beta}.}$$

2.4. Quelques remarques sur le tenseur d'Einstein généralisé associé à une connexion euclidienne sur une variété espace-temps pseudo-riemannienne

Considérons la variété espace-temps V_4 munie de la connexion euclidienne la plus générale :

$$\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} + B^{\alpha}_{\beta\gamma}, \tag{2.53}$$

$$B^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\rho} \left(g_{\tau\beta} S^{\tau}_{\rho\gamma} + g_{\tau\gamma} S^{\tau}_{\rho\beta} \right) + S^{\alpha}_{\beta\gamma}; \tag{2.54}$$

on montrera facilement que le tenseur de Ricci correspondant peut s'écrire

$$R_{\alpha\beta} = \mathring{R}_{\alpha\beta} + \nabla_{\rho} B^{\rho}_{\alpha\beta} + B^{\sigma}_{\rho\alpha} B^{\rho}_{\sigma\beta} + 2\, S_{\sigma} B^{\sigma}_{\alpha\beta},$$

où $\mathring{R}_{\alpha\beta}$ *représente le tenseur de Ricci de la connexion riemannienne* $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$.

On peut ainsi exprimer la partie symétrique du tenseur d'Einstein associé à la connexion $\mathcal{L}$:

$$S_{(\alpha\beta)} = \mathring{S}_{\alpha\beta} + B^{\sigma}_{\rho\alpha} B^{\rho}_{\sigma\beta} + \nabla_{\rho} B^{\rho}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} B$$
$$+ 2\, S_{\sigma} B^{\sigma}_{(\alpha\beta)} - 2\, g_{\alpha\beta} S_{\sigma} S^{\sigma} - g_{\alpha\beta} \nabla_{\rho} S^{\rho},$$

$\mathring{S}_{\alpha\beta}$ étant le tenseur d'Einstein de la connexion riemannienne

$$\left(\mathring{S}_{\alpha\beta} = \mathring{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathring{R}\, g_{\alpha\beta} \right)$$

et B le scalaire

$$B = g^{\mu\eta} B^{\sigma}_{\rho\mu} B^{\rho}_{\sigma\eta}.$$

Ainsi, dans le cas où l'on postule $S_{\rho} = 0$, nos équations de champ symétriques se notent

$$\boxed{\mathring{S}_{\alpha\beta} + B^{\sigma}_{\rho\alpha} B^{\rho}_{\sigma\beta} + \nabla_{\rho} B^{\rho}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} B = \chi\, T_{(\alpha\beta)},} \tag{2.55}$$

ou

$$\boxed{\mathring{S}_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)} + \left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} B - B^{\sigma}_{\rho\alpha} B^{\rho}_{\sigma\beta} - \nabla_{\rho} B^{\rho}_{(\alpha\beta)} \right];} \tag{2.56}$$

on établit ainsi une relation entre les termes $\mathring{S}_{\alpha\beta}$, uniquement liés à la métrique, et des expressions symétriques qui contiennent des attributs de la matière.

On peut encore noter (2.56) :

$$\boxed{\mathring{S}_{\alpha\beta} = \chi\left[T_{(\alpha\beta)} - \nabla_\rho \mathcal{B}^\rho_{(\alpha\beta)}\right] + \chi^2\left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\,\mathcal{B} - \mathcal{B}^\sigma_{\rho\alpha}\,\mathcal{B}^\rho_{\sigma\beta}\right],} \tag{2.57}$$

les termes en $\mathcal{B}$ étant adimensionnels en χ.

Ainsi les équations de champ symétriques

$$S_{(\alpha\beta)} = \chi\, T_{(\alpha\beta)} \tag{2.58}$$

peuvent encore s'exprimer par (2.57).

Si nous négligeons les termes en χ^2, ce qui est très raisonnable du point de vue physique, nous aurons les deux systèmes d'équations équivalents suivants :

$$S_{(\alpha\beta)}\left(\equiv \mathring{S}_{\alpha\beta} + \nabla_\rho B^\rho_{(\alpha\beta)}\right) = \chi\, T_{(\alpha\beta)},$$
$$\mathring{S}_{\alpha\beta} = \chi\left[T_{(\alpha\beta)} - \nabla_\rho \mathcal{B}^\rho_{(\alpha\beta)}\right],$$

c'est-à-dire encore, avec la définition (2.1) :

(2.59)(13) $$\boxed{\mathring{S}_{\alpha\beta} = \chi\left[T_{(\alpha\beta)} - \nabla^\rho(\sigma_{\rho\alpha\beta} + \sigma_{\rho\beta\alpha})\right] \qquad (\mathrm{mod}\ \chi^2).}$$

Ces équations approchées sont intéressantes en ce sens qu'elles établissent la liaison entre des termes « physiques » et le tenseur $\mathring{S}_{\alpha\beta}$ qui dépend de la métrique seulement.

Dans le cas où $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ *est totalement antisymétrique*

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma} = \sigma_{[\alpha\beta\gamma]}, \tag{2.60}$$

nous avons, *modulo des termes en* χ^2 :

$$\boxed{\mathring{S}_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)}.} \tag{2.61}$$

Ainsi, lorsque (2.60) est vérifiée et si l'on néglige les termes en χ^2, on « passera » des équations symétriques du schéma fluide parfait sans spin à celles du fluide parfait à spin, en remplaçant simplement dans $T_{(\alpha\beta)}$ l'impulsion longitudinale classique p_α par l'impulsion totale $P_\alpha = P_\alpha - \frac{6}{a}\sigma_\alpha$.

---

(13) F. Hehl aboutit dans sa thèse [8 *d*] à des équations analogues, mais par une méthode différente (il utilise en particulier le formalisme Bellinfante-Rosenfield).

2.5. Quelques propriétés de V_4 munie d'une connexion décomposable

Nous commencerons ce paragraphe en citant quelques résultats dus à M. Lenoir ([14]).

A partir d'un tenseur $S_{\rho\alpha\beta}$ antisymétrique en α, β, il construit le tenseur complètement antisymétrique

$$A_{\rho\alpha\beta} = S_{\rho\alpha\beta} + S_{\alpha\beta\rho} + S_{\beta\rho\alpha}, \tag{2.62}$$

et démontre que $D_\alpha\, A^{\rho\alpha\beta}$ est conservatif relativement à la connexion riemannienne

$$D_\rho\, D_\alpha\, A^{\rho\alpha\beta} = 0. \tag{2.63}$$

En conséquence, M. Lenoir montre que, le tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ associé à une connexion linéaire

$$L^\rho_{\alpha\beta} = \left\{ {\rho \atop \alpha\beta} \right\} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta}$$

étant

$$R_{\alpha\beta} = \mathring{R}_{\alpha\beta} + D_\tau\, \Gamma^\tau_{\alpha\beta} - D_\beta\, \Gamma^\tau_{\alpha\tau} + \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\, \Gamma^\sigma_{\tau\sigma} - \Gamma^\tau_{\alpha\sigma}\, \Gamma^\sigma_{\tau\beta},$$

le tenseur

$$\mathring{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \mathring{R}\, g_{\alpha\beta} + D_\tau\, A^\tau_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} \tag{2.64}$$

est conservatif relativement à la connexion riemannienne :

$$D_\alpha\, E^\alpha{}_\beta = D_\alpha\, E_\beta{}^\alpha = 0.$$

Si la connexion $L^\alpha_{\beta\rho}$ est euclidienne et si $\Gamma^{\alpha(\rho\beta)} = 0$, c'est le tenseur

$$\mathring{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \mathring{R}\, g_{\alpha\beta} + D_\tau\, S^\tau_{\alpha\beta} \tag{2.65}$$

qui est conservatif relativement à $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$.

Ces quelques résultats font partie d'un contexte plus général où l'auteur se propose d'établir les équations de Dirac dans le cadre de la Relativité générale.

Nous allons maintenant reprendre nos résultats obtenus précédemment (§ 2.4) lorsque la variété espace-temps V_4 est munie d'une connexion décomposable :

$$\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} + S^\alpha_{\beta\gamma}, \tag{2.66}$$

([14]) Travaux extraits d'une correspondance (de 1963 à 1965) adressée à O. Costa de Beauregard qui nous les a communiqués. M. Lenoir a publié certains de ces résultats aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 273, série A, 1971, p. 943.

avec

$$g_{\gamma\tau}\, S^{\tau}_{\alpha\beta} + g_{\beta\tau}\, S^{\tau}_{\alpha\gamma} = 0. \tag{2.67}$$

C'est en faisant cette étude que nous avons obtenu quelques propriétés dont certaines avaient déjà été établies par M. Lenoir : il s'agit des résultats (2.62) à (2.65) que nous venons de citer.

Nous remarquerons d'abord que

LEMME 1. — *Sur une variété V_4 pseudo-riemannienne, le vecteur de torsion d'une connexion décomposable est nul.*

A partir des résultats du paragraphe précédent et du lemme 1, on aboutira facilement au lemme 2.

LEMME 2. — *Le tenseur de Ricci attaché, sur une variété V_4 pseudo-riemannienne, à une connexion décomposable s'exprime par*

$$R_{\alpha\beta} = \mathring{R}_{\alpha\beta} + S^{\rho}_{\alpha\lambda}\, S^{\lambda}_{\beta\rho} + \nabla_{\rho}\, S^{\rho}_{\alpha\beta}.$$

En conservant la notation D pour la dérivation covariante sur V_4 relativement à la connexion riemannienne $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$, on montrera un résultat déjà établi par M. Lenoir.

LEMME 3. — *Sur une variété V_4 pseudo-riemannienne munie d'une connexion décomposable, le tenseur $D^{\alpha}\, S_{\alpha\beta\gamma}$ est conservatif dans la dérivation relative à la connexion riemannienne*

$$D^{\beta}\, [D^{\alpha}\, S_{\alpha\beta\gamma}] = 0. \tag{2.68}$$

On a classiquement [12 *b*] $\left(\mathring{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\sigma}\right.$ étant le tenseur de courbure associé sur V_4 à la connexion $\left.\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}\right)$:

$$(D_{\alpha}\, D_{\beta} - D_{\beta}\, D_{\alpha})\, S^{\alpha\beta\gamma} = \mathring{R}^{\alpha}{}_{\sigma\alpha\beta}\, S^{\sigma\beta\gamma} + \mathring{R}^{\beta}{}_{\sigma\alpha\beta}\, S^{\alpha\sigma\gamma} + \mathring{R}^{\gamma}{}_{\sigma\alpha\beta}\, S^{\alpha\beta\sigma};$$

mais, par raison de symétrie, il vient

$$\mathring{R}^{\alpha}{}_{\sigma\alpha\beta}\, S^{\sigma\beta\gamma} = \mathring{R}_{\sigma\beta}\, S^{\sigma\beta\gamma} = 0,$$

$$\mathring{R}^{\beta}{}_{\sigma\alpha\beta}\, S^{\alpha\sigma\gamma} = - \mathring{R}^{\beta}{}_{\sigma\beta\alpha}\, S^{\alpha\sigma\gamma} = - \mathring{R}_{\sigma\alpha} S^{\alpha\sigma\gamma} = 0.$$

En outre, les identités de Bianchi entraînent

$$S^{\alpha\beta\sigma}\, \mathring{R}^{\gamma}{}_{\sigma\alpha\beta} = 0,$$

d'où le lemme 3, puisque

$$D_{\alpha}\, D_{\beta}\, S^{\alpha\beta\gamma} = - D_{\beta}\, D_{\alpha}\, S^{\alpha\beta\gamma}.$$

On remarquera enfin facilement que :

LEMME 4. — *Sur une variété* V_4 *pseudo-riemannienne à connexion décomposable on a*

$$\nabla_\lambda S^{\lambda}_{\alpha\beta} = D_\lambda S^{\lambda}_{\alpha\beta}. \tag{2.69}$$

Ces quatre lemmes établissent alors le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Sur une variété* V_4 *pseudo-riemannienne, la partie antisymétrique du tenseur de Ricci d'une connexion décomposable est conservative dans la dérivation relative à la connexion riemannienne associée au tenseur métrique*

$$D^\alpha R_{[\alpha\beta]} = 0. \tag{2.70}$$

Ce résultat s'écrit encore

$$\nabla^\alpha R_{[\alpha\beta]} + g^{\alpha\sigma} S^{\gamma}_{\sigma\beta} R_{[\alpha\gamma]} = 0;$$

on voit donc que, *modulo des termes en* χ^2, $R_{[\alpha\beta]}$ est conservatif relativement à la connexion décomposable :

$$\boxed{\nabla^\alpha R_{[\alpha\beta]} = 0 \qquad (\text{mod. termes en } \chi^2).}$$

Finalement, *modulo des termes en* χ^2, nous avons

$$\nabla^\alpha\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta}\right) = 0, \qquad \nabla^\alpha\left(R_{\beta\alpha} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{2.71}$$

c'est-à-dire encore, *modulo des termes en* χ :

$$\nabla^\alpha T_{\beta\alpha} = 0, \qquad \nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.72}$$

Ces relations approchées étant précisées, les équations exactes (2.70) montrent que

$$\boxed{D^\alpha T_{[\alpha\beta]} = 0.} \tag{2.73}$$

Ces propriétés de conservation de la partie antisymétrique du tenseur impulsion-énergie ne sont pas sans rappeler celles du tenseur de Tétrode en théorie de Dirac. Jointes aux classiques identités de conservation d'Einstein, les relations (2.70) deviennent

$$D^\alpha\left[\mathring{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathring{R}\, g_{\alpha\beta} + R_{[\alpha\beta]}\right] = 0;$$

nous retrouvons donc les propriétés de conservation du tenseur (2.65) de M. Lenoir.

Mais les équations (2.59) établies plus haut deviennent alors (*modulo des termes en* χ^2) :

$$\mathring{S}_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)}$$

et par conséquent il vient, *modulo des termes en* χ,

$$\boxed{D^\alpha T_{\alpha\beta} = 0, \qquad D^\alpha T_{\beta\alpha} = 0.}$$

2.6. Utilisation d'une connexion décomposable

Notons bien que cette restriction faite sur la connexion $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\sigma}$ consiste à choisir une solution particulière des équations aux connexions sur V_4.

On notera l'analogie entre les équations aux Λ [3 *a*] et (2.67).

Dans le principe semi-variationnel nous pouvons prendre la connexion absolument quelconque, puisque d'après le lemme 1 le choix postérieur d'une connexion décomposable sur V_4 assurera la nullité du vecteur de torsion. Les équations de champ précédemment obtenues sont donc strictement valables ici, les tenseurs $H_{\alpha\beta\sigma}$ et $\overset{*}{S}_\sigma$ (ou V_σ) étant par ailleurs conservés puisqu'ils ne dépendaient que de la partie totalement antisymétrique de $S_{\alpha\beta\sigma}$ (*cf.* [3 *a*]). Nous avons ici

$$\sigma_{\nu\alpha\tau} = \sigma_{[\nu\alpha\tau]}. \tag{2.74}$$

Ainsi, *l'utilisation d'une connexion décomposable sur* V_4 *et la définition* (2.1) *entraînent l'antisymétrie totale de la densité de spin.*

Quant aux *équations de champ, elles ont non seulement la même forme, mais encore le vecteur* σ_α *y est exactement le même.*

Tous ces résultats sont issus des propriétés (2.74) qui sont classiques en théorie de Dirac; mais alors que dans cette dernière [4 *c*], on a

$$\left.\begin{aligned} T_{[\alpha\beta]} &= \partial_\rho\, \sigma^{\rho}_{\alpha\beta} \\ \partial_\alpha T^{\alpha\beta} &= \partial_\alpha T^{\beta\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \partial^2_{\alpha\rho}\, \sigma^{\alpha\beta\rho} = 0 \Rightarrow \sigma^{\alpha\beta\rho} = \sigma^{[\alpha\beta\rho]},$$

il est facile de voir que dans notre étude, les relations (2.5) et les équations de conservation (2.73), ou même (2.72), n'entraînent pas (2.74), qui est uniquement due aux propriétés de la connexion utilisée sur V_4.

Précisons que, d'après le lemme 3 (§ 2.5), la densité de spin vérifie

$$\boxed{D^\alpha D^\beta \sigma_{\alpha\beta\nu} = 0} \tag{2.75}$$

et aussi

$$\mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\alpha\beta}\, \sigma^{\mu\alpha\beta} = 0;$$

on a même de manière approchée

(2.76) $$\nabla_\alpha \nabla_\rho \sigma^{\alpha\beta\rho} = 0 \qquad \text{(mod. des termes en } \chi\text{)};$$

la théorie de Dirac dans le cadre de la Relativité restreinte donne, comme nous venons de le rappeler

(2.77) $$\partial^2_{\alpha\rho} \sigma^{\alpha\beta\rho} = 0.$$

Les équations (2.75) [ou même (2.76)] semblent ainsi assez satisfaisantes (par comparaison avec 2.77) pour décrire certains aspects de la théorie de Dirac dans le cadre élargi de la Relativité générale que nous utilisons.

Reprenons les résultats du paragraphe 2.4 dans le cas où

$$B^\alpha_{\beta\gamma} = S^\alpha_{\beta\gamma}.$$

On obtient ainsi les équations

(2.78) $$\boxed{\mathring{S}_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)} - \chi^2 \left[\sigma^\rho_{\lambda\alpha}\, \sigma^\lambda_{\rho\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, \sigma \right].}$$

Remarque 1. — Si on néglige les termes en χ^2, on aura simplement

$$\mathring{S}_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)} \qquad \text{(mod. des termes en } \chi^2\text{)};$$

par conséquent, à l'ordre d'approximation précédent, sur une variété V_4 munie d'une connexion décomposable, *les équations classiques d'Einstein* (E) ([15]) *ne sont modifiées que par l'apparition de nouveaux termes dans le seul « membre physique » qui décrit l'impulsion-énergie de la matière considérée.* Ainsi, *l'existence d'une densité de spin n'a d'incidence non négligeable que sur le tenseur d'énergie-impulsion.*

Remarque 2. — Sous la forme (2.78), on peut soit conclure que l'existence d'une densité de spin a une incidence dans les deux membres de (E) (en « faisant passer » les termes en χ^2 dans le membre géométrique), soit encore *admettre que les termes en* χ^2 *représentent l'interaction spin-spin.* On note un résultat analogue dans les travaux de F. Hehl [6 *d*].

Nous ne reprendrons pas les divers résultats précédents [3 *a*], dans le cas où V_4 est munie de la connexion euclidienne particulière utilisée ici, mais nous dirons qu'une telle variété V_4 est tout à fait compatible avec la plupart des propriétés que nous avons énoncées : on peut décrire certains fluides à spin avec cette variété.

([15]) (E) : $\mathring{S}_{\alpha\beta} = \chi\, [(\rho + P)\, u_\alpha\, u_\beta - P\, g_{\alpha\beta}]$.

En outre, une telle variété semble être un cadre géométrique assez satisfaisant pour décrire certains aspects de la théorie de Dirac; F. Hehl [6 *c*] fait une remarque analogue lorsqu'il affirme, en partant d'une variété, munie de la connexion euclidienne (2.53), (mais non « immergée » dans une variété plus vaste), que « dans la théorie de Dirac », on a la relation

$$S_{\alpha\beta\sigma} = S_{[\alpha\beta\sigma]}.$$

De même M. Lenoir ([16]) en écrivant un principe variationnel pour décrire l'interaction champ gravifique-champ de Dirac sur une variété V_4 munie d'une connexion euclidienne en déduit la nature décomposable de cette connexion.

Il est important de préciser que l'utilisation de cette connexion particulière sur notre variété V_4 permet de définir un espace E_4, formé par les points de V_4 et muni d'une certaine connexion semi-symétrique de Schouten, qui *est tel que ses géodésiques représentent les trajectoires des particules à spin de notre champ.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Berger, *Lectures on geodesics in riemannian geometry*, Bombay, 1965.

[2] H. C. Corben, *Classical and quantum theories, of spinning particles*, Holden Day. 1968.

[3] R. L. Clerc :
(*a*) *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. XVII, n° 3, 1972, p. 227.
(*b*) Thèse, *Toulouse*, 1972.
(*c*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 272, série A, 1971, p. 1760.

[4] O. Costa de Beauregard :
(*a*) *J. Math. pures et appl.*, t. 22, 1943, p. 85.
(*b*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 2199.
(*c*) *La théorie de la Relativité restreinte*, Paris, 1949.

[5] F. Halbwachs, *Théorie relativiste des fluides à spin*, Gauthier-Villars, Paris, 1960,

[6] F. Hehl :
(*a*) *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, t. 18, 1966, p. 98.
(*b*) et E. Kroner, *Z. Physik*, t. 187, 1965. p. 478.
(*c*) et B. K. Datta, *J. Math. Phys.*, U. S. A., t. 12, n° 7, 1971, p. 1334.
(*d*) *Thèse*, 1970.

[7] T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.*, t. 2, n° 2, 1961, p. 212.

[8] S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds*, Interscience Publishers, 1962.

([16]) *Cf.* référence citée au paragraphe 2.5.

[9] A. Lichnerowicz :
(a) *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme,* Masson, Paris, 1955.
(b) *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,* t. 62, 1945, p. 339.
(c) *C. R. Acad. Sc.,* t. 212, 1941, p. 328.

[10] A. Papapétrou, *Phil. Mag.,* t. 40, 1949, p. 937.

[11] D. W. Sciama :
(a) In : *Recent developments in general Relativity,* 1962, p. 415.
(b) *Proc. Cambridge Phil. Soc.,* t. 54, 1958, p. 72.

[12] M.-A. Tonnelat :
(a) *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements,* Gauthier-Villars, Paris, 1955.
(b) *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation,* Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[13] J. Weyssenhof, *Acta. Phys. Pol.,* t. 9, 1947, p. 7.

(*Manuscrit reçu le* 15 *juin* 1972.)