ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

RENÉ-LOUIS CLERC

Équations de champ symétriques et équations du mouvement sur une variété pseudo-riemannienne à connexion non symétrique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 17, n° 3 (1972), p. 227-257
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_3_227_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
vol. XVII, n° 3, 1972, p. 227-257

Section A :
Physique théorique.

Équations de champ symétriques et équations du mouvement sur une variété pseudo-riemannienne à connexion non symétrique

par

René-Louis CLERC
Université Paul-Sabatier de Toulouse (*)

RÉSUMÉ. — L'espace-temps est assimilé à une variété pseudo-riemannienne, à connexion non symétrique, plongée dans une variété de dimension 8. Par rapport à la Relativité générale, nous notons la présence d'un tenseur de torsion et d'un tenseur (qui caractérisera la matière et définira en particulier le champ des vecteurs vitesse) dû à l'immersion de V_4 dans V_8.

En utilisant un lagrangien géométrique (qui généralise le R du cas extérieur d'Einstein), nous écrirons un principe variationnel qui nous conduira à des équations symétriques

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)},$$

où (dans le cas matière pure) :

$$T_{(\alpha\beta)} = \mathrm{Sym}\left[\rho\, u_\alpha \left(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta\right)\right],$$

$\overset{*}{s}_\beta$ étant le vecteur dual de la partie totalement antisymétrique du tenseur de torsion, et n'étant pas, *a priori*, colinéaire au vecteur vitesse u_β. Dans ce contexte, on observe que $T_{(\alpha\beta)}$ est le symétrisé d'un tenseur $\rho\, u_\alpha\, w_\beta$ que plusieurs auteurs ont utilisé pour décrire la matière pure à spin (O. Costa de Beauregard [4], A. Papapétrou [12], H. C. Corben [3], J. Weyssenhof [15]).

Les trajectoires obtenues :

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = u^\alpha \left[I_{\beta\alpha} + M_{\beta\alpha} + \chi\, N_{\beta\alpha}\right]$$

(*) 118, route de Narbonne, 31400 Toulouse, Haute-Garonne.

ne sont pas des géodésiques de V_4 et en diffèrent, en particulier, par des termes « universels » $I_{\beta\alpha}$ (c'est-à-dire indépendants de la densité de matière ρ) qui sont déterminants dans la théorie ($N_{\beta\alpha}$ pouvant être négligé et $M_{\beta\alpha}$ s'annulant pour ρ constant).

ABSTRACT. — The space-time is assimilated to a pseudo-riemannian manifold, with a non-symmetrical connection, plunged into an eight-dimensional manifold V_8. In comparison with the general Relativity, we note the existence of a torsion tensor and a tensor (which schall characterize the matter and in particular which shall define the four velocity vectors field) due to the immersion of V_4 into V_8.

With a geometric lagrangian (which generalizes the R of the Einstein's exterior case), we shall write a variational principle which shall lead us to symmetrical equations

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)},$$

where (in the pure matter case) :

$$T_{(\alpha\beta)} = \text{Sym}\left[\rho\, u_\alpha \left(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta\right)\right],$$

$\overset{*}{s}_\beta$ being the dual vector of the completly antisymmetrical part of the torsion tensor, and being not, necessarily, collinear with the four velocity u_β. In this context, we observe that $T_{(\alpha\beta)}$ is the symmetrized of a tensor $\rho\, u_\alpha w_\beta$ that many autors have utilized to describe the pure matter with spin (O. Costa de Beauregard [4], A. Papapétrou [12], H. C. Corben [3], J. Weyssenhof [15]).

The trajectories obtained :

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = u^\alpha \left[I_{\beta\alpha} + M_{\beta\alpha} + \chi\, N_{\beta\alpha}\right]$$

are not geodesics of V_4 and differ of them, in particular, with « universal » terms $I_{\beta\alpha}$ (that is independant of the matter density ρ) which are characteristic of the theory ($N_{\beta\alpha}$ may be neglected and $M_{\beta\alpha}$ vanishes for constant ρ).

1. STRUCTURE DE L'ESPACE-TEMPS

1.1. Variété à structure hypercomplexe et espace-temps

On considère une variété V_8 différentiable C^∞ (1), à huit dimensions, de coordonnées réelles (x^α, x^{α^*}) $(\alpha, \alpha^* = 1, 2, 3, 4)$; on suppose en outre

(1) Au sens de A. Lichnerowicz [11 *a*].

que cette variété est le produit de deux variétés réelles identiques de dimension 4 :

$$V_8 = W_4 \times W_4. \tag{1.1}$$

Cette construction confère à V_8 une structure de variété complexe hyperbolique (ou hypercomplexe) au sens de A. Crumeyrolle [5].

Pour montrer ceci, on utilise tout d'abord une extension quadratique ([2]) H de l'anneau R des réels : l'anneau non intègre des éléments de la forme

$$z = x + \varepsilon y, \tag{1.2}$$

avec

$$x, y \in \mathrm{R}, \qquad \varepsilon^2 = +1.$$

On définit ensuite sur V_8 une structure différentiable H-complexe. Une carte locale H-complexe associe à tout point p de V_8 quatre nombres H-complexes (ou hypercomplexes) notés z^α :

$$z^\alpha = x^\alpha + \varepsilon x^{\alpha *}. \tag{1.3}$$

Nous parlerons des *coordonnées diagonales associées* (ou simplement *diagonales*) $(x^\alpha, x^{\alpha *})$.

On interprète l'espace-temps V_4 *comme* LA SOUS-VARIÉTÉ DIAGONALE DE V_8 *d'« équations »*

$$x^{\alpha *} = 0. \tag{1.4}$$

Nous nous proposons ici d'utiliser le plongement défini plus haut de V_4 dans V_8 (à structure hypercomplexe) pour élargir le cadre de la Relativité générale afin d'y inclure géométriquement la matière non chargée ([3]) douée de spin, ou du moins afin de réaliser un modèle permettant de décrire une telle matière.

1.2. Connexion et tenseur métrique de V_8 ; éléments induits sur V_4

Pour définir le type de variété V_8 choisi, il nous faut d'abord déterminer les connexions de V_8.

Plaçons-nous pour cela sur l'*espace fibré des repères naturels de* V_8 et utilisons les coordonnées diagonales. Envisageons alors sur cet espace les connexions de V_8 définies, en repères naturels diagonaux, par les conditions intrinsèques [2 *f*] :

$$\boxed{\begin{aligned} L^r_{st} &= L^r_{s*t*} \quad (1.5)\\ L^r_{st} &= L^{r*}_{s*t} \quad (1.6)\end{aligned}} \qquad (r, s, t = 1, \ldots, 8;\ * = \pm 4).$$

([2]) C'est-à-dire une algèbre associative par rapport à R de base $(1, \varepsilon)$ (*cf.* [1]).

([3]) Il en sera ainsi tout au long de ce travail.

Par restriction à V_4, les relations (1.5)-(1.6) induisent pour tout repère diagonal de V_4 :

$$L^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma} = L^{\alpha^*}_{\beta\gamma^*} = L^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*}, \tag{1.7}$$

$$L^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{\beta^*\gamma} = L^{\alpha}_{\beta\gamma^*} = L^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma^*}. \tag{1.8}$$

Nous remarquons alors que sur V_4, les coefficients connectifs de V_8 à nombre pair d'astérisques se transforment de manière connective, alors que les autres se transforment de manière tensorielle dans tout changement de repère naturel diagonal de V_4.

Ainsi, à partir d'une connexion sur V_8 *vérifiant les propriétés* (1.5)-(1.6), *on peut définir sur* V_4 *une connexion asymétrique* $\mathcal{L}^{\alpha}_{\gamma\beta}$ *et un tenseur asymétrique* $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *par les relations*

$$L^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma} = L^{\alpha^*}_{\beta\gamma^*} = L^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = \mathcal{L}^{\alpha}_{\gamma\beta}, \tag{1.9}$$

$$L^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{\beta^*\gamma} = L^{\alpha}_{\beta\gamma^*} = L^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma^*} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{1.10}$$

Munissons en outre V_8 d'un tenseur métrique symétrique $\mathcal{G}_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, 8)$ dont la forme associée soit non dégénérée; V_8 se trouve donc ainsi pourvue d'une structure de variété pseudo-riemannienne. A partir de $\mathcal{G}_{ij}$, on définira le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, 4)$ de V_4, en posant en repères diagonaux naturels de V_4 (conditions intrinsèques) :

$$\boxed{\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{\alpha^*\beta^*} = 0, \qquad \mathcal{G}_{\alpha\beta^*} = \mathcal{G}_{\beta^*\alpha} = g_{\alpha\beta}.} \tag{1.11}$$

On pourra toujours choisir $g_{\alpha\beta}$ symétrique et non dégénéré.

1.3. Définition géométrique des connexions utilisées sur V_8

Nous avons dit que l'on considérait l'espace fibré $\mathcal{E}$ des repères quelconques de V_8; en fait nous allons voir que les conditions (1.6) signifient que l'on se place sur un sous-espace de ce fibré : *l'espace fibré* $\mathcal{D}$ *des repères diagonaux de* V_8.

Une connexion infinitésimale sur l'espace fibré principal $\mathcal{E}$ est appelée une *connexion complexe hyperbolique*; si M est la forme d'une telle connexion les coefficients de la matrice de connexion (qui sont des formes de Pfaff) se notent :

$$M^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} + \varepsilon\omega^{\alpha}_{\beta^*},$$

où les ω sont des formes à valeurs réelles.

Une connexion complexe hyperbolique sur $\mathcal{O}$ est telle que

$$M^{\alpha}_{\beta} = M^{\alpha^*}_{\beta^*}, \qquad M^{\alpha}_{\beta^*} = M^{\alpha^*}_{\beta};$$

par suite, si nous posons en repères diagonaux naturels

$$M^{i}_{j} = L^{i}_{j\,k}\, dx^{k},$$

nous associons naturellement à la connexion M une connexion linéaire réelle dont les coefficients, en repères diagonaux, vérifient

$$L^{i}_{j\,k} = L^{i^*}_{j^*\,k}.$$

Introduisons sur V_8 *le tenseur presque complexe hyperbolique* Δ défini en repère diagonal par

$$\Delta^{\alpha^*}_{\beta} = \Delta^{\alpha}_{\beta^*} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta \end{cases}, \qquad \Delta^{\alpha^*}_{\beta^*} = \Delta^{\alpha}_{\beta} = 0.$$

Ce tenseur est défini canoniquement par l'*automorphisme* J ($J \neq I$) *de* V_8 telle que $J^2 = I$, J étant canoniquement attaché à la structure complexe hyperbolique de V_8 [5 *e*, *f*].

Le tenseur Δ étant défini, on établit un premier lemme immédiat [2 *f*].

LEMME 1. — *On a l'équivalence suivante sur les connexions de* V_8 :

$$\begin{pmatrix} L^{i}_{j\,k} = L^{i^*}_{j^*\,k} \\ L^{i}_{j\,k} = L^{i}_{j^*\,k^*} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} L^{i}_{j\,k} = L^{i^*}_{j^*\,k} \\ L^{i}_{j\,k} = L^{i^*}_{j\,k^*} \end{pmatrix}$$

Énonçons alors un deuxième lemme.

LEMME 2. — *Pour tout champ de vecteurs* X *de* V_8, *les conditions*, INDÉPENDANTES DU REPÈRE CHOISI SUR V_8,

$$\underset{(+)}{\nabla_X} \Delta = 0$$

sont équivalentes, en repères diagonaux naturels à

$$L^{i}_{j\,k} = L^{i^*}_{j^*\,k}.$$

On peut d'ailleurs remarquer que les conditions intrinsèques (déterminantes ici, *cf.* [2 *e*, *f*]) :

$$\underset{(+)}{\nabla_X} \Delta = 0,$$

avec la définition

$$M^{i}_{j} = L^{i}_{j\,k}\, dx^{k},$$

caractérisent toutes les connexions sur l'espace fibré $\mathcal{O}$.

Démonstration du lemme 2. — On forme

$$\nabla_i \Delta^{\alpha^*}_{\beta^*} = L^{\alpha^*}_{\beta i} - L^{\alpha}_{\beta^* i} = 0, \qquad \nabla_i \Delta^{\alpha^*}_{\beta} = 0, \qquad \ldots,$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé.

De la même façon, on montrera le lemme 3.

Lemme 3. — *Pour tout champ de vecteur* X *de* V_8, *les conditions, indépendantes du repère choisi sur* V_8,

$$\underset{(-)}{\nabla_X} \Delta = 0$$

sont équivalentes, en repères diagonaux naturels à

$$L^{i}_{jk} = L^{i^*}_{jk^*}.$$

Nous pouvons donc conclure :

Sur V_8, *on considère les connexions* RÉELLES *pour lesquelles les dérivées covariantes* (+) *et* (—) *du tenseur complexe* Δ *sont nulles* :

$$\underset{(+)}{\nabla_X} \Delta = \underset{(-)}{\nabla_X} \Delta = 0,$$

$\forall\, X_x \in T_x$ (espace tangent en x à V_8).

1.4. Tenseur de courbure induit sur V_4. Tenseurs de « type Ricci » correspondants

Appelons $R^{i}_{jkl} = - R^{i}_{jlk}$ le tenseur de courbure de la connexion choisie sur V_8, et désignons par Ω^{i}_{j} les éléments de la forme de courbure de cette connexion.

Par l'immersion de V_4 dans V_8, nous obtenons *la forme de courbure induite dans* V_4,

$$\hat{\Omega}^{i}_{j} = \frac{1}{2} \hat{R}^{i}_{j\lambda\mu}\, dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu} \tag{1.12}$$

(le ^ indiquant la restriction à V_4).

Le tenseur de courbure induit sur V_4 par immersion s'explicite en

$$\begin{aligned} \hat{R}^{i}_{j\lambda\mu} = {} & \partial_{\lambda} L^{i}_{j\mu} - \partial_{\mu} L^{i}_{j\lambda} \\ & + L^{i}_{\rho\lambda} L^{\rho}_{j\mu} - L^{i}_{\rho\mu} L^{\rho}_{j\lambda} + L^{\rho^*}_{j\mu} L^{i}_{\rho^*\lambda} - L^{i}_{\rho^*\mu} L^{\rho^*}_{j\lambda}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

On obtiendra sur V_4, par contraction en i, λ de $\hat{R}^{i}_{j\lambda\mu}$, *deux et seulement deux tenseurs* indépendants du second ordre de « type Ricci », qui seront appelés *les deux tenseurs de Ricci induits dans* V_4 :

$$\hat{R}^{\lambda}_{\beta\lambda\alpha} \equiv P_{\alpha\beta}, \qquad \hat{R}^{\lambda}_{\alpha^*\lambda\beta} \equiv Q_{\alpha\beta}.$$

En termes de V_4, d'après (1.9)-(1.10) nous aurons

$$\boxed{\begin{aligned} P_{\alpha\beta} &= \partial_\lambda \mathcal{L}^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \mathcal{L}^\lambda_{\lambda\beta} + \mathcal{L}^\lambda_{\lambda\rho} \mathcal{L}^\rho_{\alpha\beta} \\ &\quad - \mathcal{L}^\lambda_{\alpha\rho} \mathcal{L}^\rho_{\lambda\beta} + \Lambda^\lambda_{\rho\lambda} \Lambda^\rho_{\beta\alpha} - \Lambda^\lambda_{\rho\alpha} \Lambda^\rho_{\beta\lambda}, \quad (1.14) \\ Q_{\alpha\beta} &= \partial_\lambda \Lambda^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Lambda^\lambda_{\alpha\lambda} + \mathcal{L}^\lambda_{\lambda\rho} \Lambda^\rho_{\alpha\beta} \\ &\quad - \mathcal{L}^\lambda_{\beta\rho} \Lambda^\rho_{\alpha\lambda} + \Lambda^\lambda_{\rho\lambda} \mathcal{L}^\rho_{\beta\alpha} - \Lambda^\lambda_{\rho\beta} \mathcal{L}^\rho_{\lambda\alpha}. \quad (1.15) \end{aligned}}$$

D'après le principe de pseudo-hermiticité introduit par A. Einstein [6], les équations de champ doivent rester invariantes quand on remplace $\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma}$, $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$, $g_{\alpha\beta}$ respectivement par

$$\overline{\mathcal{L}}^\alpha_{\beta\gamma} = \mathcal{L}^\alpha_{\gamma\beta}, \qquad \overline{\Lambda}^\alpha_{\beta\gamma} = \Lambda^\alpha_{\gamma\beta}, \qquad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}.$$

Ainsi nous associerons à $P_{\alpha\beta}$ et $Q_{\alpha\beta}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{P}_{\beta\alpha} &= \partial_\lambda \mathcal{L}^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\beta \mathcal{L}^\lambda_{\alpha\lambda} + \mathcal{L}^\lambda_{\rho\lambda} \mathcal{L}^\rho_{\alpha\beta} \\ &\quad - \mathcal{L}^\lambda_{\rho\beta} \mathcal{L}^\rho_{\alpha\lambda} + \Lambda^\lambda_{\lambda\rho} \Lambda^\rho_{\beta\alpha} - \Lambda^\lambda_{\beta\rho} \Lambda^\rho_{\lambda\alpha}, \quad (1.16) \\ \overline{Q}_{\beta\alpha} &= \partial_\lambda \Lambda^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \Lambda^\lambda_{\lambda\beta} + \mathcal{L}^\lambda_{\rho\lambda} \Lambda^\rho_{\alpha\beta} \\ &\quad - \mathcal{L}^\lambda_{\rho\alpha} \Lambda^\rho_{\lambda\beta} + \Lambda^\lambda_{\lambda\rho} \mathcal{L}^\rho_{\beta\alpha} - \Lambda^\lambda_{\alpha\rho} \mathcal{L}^\rho_{\beta\lambda}. \quad (1.17) \end{aligned}}$$

Nous poserons aussi de manière classique

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\gamma} = \delta^\gamma_\beta. \tag{1.18}$$

A côté des tenseurs, $P_{\alpha\beta}$ et $Q_{\alpha\beta}$ induits sur V_4 par immersion dans V_8, on utilisera aussi *le classique tenseur de Ricci de la connexion* $\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ *de* V_4 :

$$\boxed{R_{\alpha\beta} = \partial_\lambda \mathcal{L}^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\beta \mathcal{L}^\lambda_{\alpha\lambda} + \mathcal{L}^\rho_{\alpha\beta} \mathcal{L}^\lambda_{\rho\lambda} - \mathcal{L}^\lambda_{\rho\beta} \mathcal{L}^\rho_{\alpha\lambda};} \tag{1.19}$$

$\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ étant asymétrique, $R_{\alpha\beta}$ se décompose en

$$R_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)} + R_{[\alpha\beta]}, \tag{1.20}$$

$R_{[\alpha\beta]}$ étant *a priori* non nul, puisque le tenseur de torsion de la connexion

$$S^\alpha_{\beta\gamma} \equiv \mathcal{L}^\alpha_{[\beta\gamma]} \tag{1.21}$$

ne se réduit pas à zéro.

1.5. **Conditions de Ricci sur** V_8

Convenons d'utiliser sur V_8 la dérivation $(+)$ que nous noterons simplement avec le symbole ∇.

Une généralisation naturelle du classique théorème de Ricci de la Relativité générale serait de postuler que pour tout chemin de V_8, la dérivée covariante du tenseur métrique $\mathcal{G}_{ij}$ est nulle. En fait, il nous suffira de postuler que *pour tout chemin de* V_4, la dérivée covariante de $\mathcal{G}_{ij}$ est nulle

$$\nabla_\rho \mathcal{G}_{ij} = 0 \; ;$$

compte tenu de (1.11), ces relations se réduisent sur V_4 en repères naturels diagonaux à

$$\nabla_\rho \mathcal{G}_{\alpha\beta^*} = 0, \qquad \nabla_\rho \mathcal{G}_{\alpha\beta} = 0, \qquad \nabla_\rho \mathcal{G}_{\alpha^*\beta^*} = 0; \tag{1.22}$$

(1.22) représentent *les conditions de Ricci imposées au tenseur* $\mathcal{G}_{ij}$ *de* V_8.

Elles se traduisent en termes de V_4 sur tout repère diagonal par

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_\rho g_{\alpha\beta} - \mathcal{L}^{\sigma}_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} - \mathcal{L}^{\sigma}_{\rho\beta} g_{\alpha\sigma} = 0, && (1.23)\\ &\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho} g_{\sigma\beta} + \Lambda^{\sigma}_{\beta\rho} g_{\sigma\alpha} = 0, && (1.24)\\ &\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{\beta\rho} g_{\alpha\sigma} = 0. && (1.25)\end{aligned}}$$

Notons que les équations (1.23) expriment l'annulation de la dérivée covariante (—) de $g_{\alpha\beta}$ sur V_4; nous représenterons cette dernière par le même symbole ∇ que sur V_8.

1.6. Structure de l'espace-temps

Nous avons déjà dit que nous nous proposions d'élargir le cadre de la Relativité générale par l'utilisation d'*une connexion asymétrique* $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, mais en conservant le *tenseur métrique symétrique* et à déterminant non nul. Le système (1.23)-(1.24)-(1.25) se ramène donc alors à

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_\rho g_{\alpha\beta} - \mathcal{L}^{\sigma}_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} - \mathcal{L}^{\sigma}_{\rho\beta} g_{\sigma\alpha} = 0. && (1.23)\\ &\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho} g_{\sigma\beta} + \Lambda^{\sigma}_{\beta\rho} g_{\sigma\alpha} = 0. && (1.26)\end{aligned}}$$

Si l'on pose,

$$\Lambda_{\beta\alpha\rho} = g_{\sigma\rho} \Lambda^{\sigma}_{\beta\alpha}, \tag{1.27}$$

les relations (1.26), qui se notent alors

$$\Lambda_{\alpha\rho\beta} + \Lambda_{\beta\rho\alpha} = 0, \tag{1.28}$$

conduisent à une expression unique d'une solution $\Lambda^{\sigma}_{\beta\alpha}$, *antisymétrique en* $\beta\alpha$,

$$\Lambda_{[\beta\alpha]\rho} = \eta_{\beta\alpha\rho\sigma} U^{\sigma}, \tag{1.29}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\Lambda^{\sigma}_{\beta\alpha} = g^{\sigma\gamma}\, \eta_{\gamma\beta\alpha\nu}\, U^{\nu}.} \tag{1.30}$$

Cette solution s'exprime au moyen d'un vecteur quelconque U^{σ} de V_4 : *il y a donc quatre indéterminées.*

Quant aux équations (1.23), on obtient facilement *leur solution générale* en $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, pour des $g_{\alpha\beta}$ supposés donnés (symétriques) :

$$\boxed{\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} + g^{\alpha\rho}\,(g_{\beta\tau}\, S^{\tau}_{\rho\gamma} + g_{\gamma\tau}\, S^{\tau}_{\rho\beta}) + S^{\alpha}_{\beta\gamma},} \tag{1.31}$$

où $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}$ sont les classiques symboles de Christoffel.

L'espace-temps est donc assimilé à une variété pseudo-riemannienne V_4 *munie d'une connexion euclidienne asymétrique et d'un tenseur antisymétrique*

$$V_4 \quad \left\{ \begin{array}{ll} g_{\alpha\beta} \textit{ symétrique}; & g \neq 0; \\ \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathcal{L}^{\alpha}_{(\beta\gamma)} + S^{\alpha}_{\beta\gamma}\,; & \nabla_{\rho}\, g_{\alpha\beta} = 0\,; \\ \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\nu}\, \eta_{\nu\beta\gamma\sigma}\, U^{\sigma}. & \end{array} \right.$$

Précisons enfin que tout au long de notre travail, nous supposerons que la variété V_4 est différentiable de classe C^2, C^4 par morceaux que le champ de tenseur $g_{\alpha\beta}$ est de classe C^1, C^3 par morceaux, et que les coefficients connectifs $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et tensoriels $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont continus et de classe C^2 par morceaux.

2. PRINCIPE SEMI-VARIATIONNEL ET ÉQUATIONS DE CHAMP SYMÉTRIQUES

2.1. Lagrangien

Le lagrangien le plus « naturel » qui semblerait s'imposer, compte tenu de l'immersion de V_4 dans V_8, serait celui déjà utilisé dans la théorie unitaire hypercomplexe [5 *a* à *g*], [2 *a*, *b*] :

$$\mathcal{H} = \sqrt{|g|}\; g^{\alpha\beta} \left(\frac{P_{\alpha\beta} + \bar{P}_{\beta\alpha}}{2} + \theta\, \frac{Q_{\alpha\beta} + \bar{Q}_{\beta\alpha}}{2} \right), \tag{2.1}$$

où θ est une fonction scalaire des coordonnées de V_4. En fait, nous considérerons le lagrangien suivant [2 *c*] :

$$\boxed{\begin{aligned} L^0 = \sqrt{|g|}\; g^{\alpha\beta} \left(\frac{P_{\alpha\beta} + \bar{P}_{\beta\alpha}}{2} + \theta\, \frac{Q_{\alpha\beta} + \bar{Q}_{\beta\alpha}}{2} \right) \\ - 2\sqrt{|g|}\; g^{\alpha\beta}\, \Lambda^{\lambda}_{\alpha\rho}\, \Lambda^{\rho}_{\beta\lambda}\,; \end{aligned}} \tag{2.2}$$

le terme supplémentaire est comme (2.1) invariant par pseudohermiticité, compte tenu de l'antisymétrie de $\Lambda^{\lambda}_{\alpha\rho}$.

Nous donnerons deux justifications de l' utilisation de ce lagrangien L^0

1. La seule incidence « physique » du terme supplémentaire est de permettre d'avoir une densité de matière ρ positive; en effet, l'utilisation de (2.2) revient à changer le signe de $\left(\sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta}\, \Lambda^{\lambda}_{\alpha\rho}\, \Lambda^{\rho}_{\beta\lambda}\right)$ dans (2.1). Sans cette modification, tous les calculs qui vont suivre sont utilisables, mais on est alors conduit à la définition d'une densité de matière négative...

2. Reprenons la définition de $P_{\alpha\beta}$,

$$P_{\alpha\beta} = \hat{R}^{\lambda}{}_{\beta\lambda\alpha}; \tag{2.3}$$

si l'on calcule *la courbure scalaire induite correspondante*

$$\hat{P} = g^{\alpha\beta}\, P_{\alpha\beta}, \tag{2.4}$$

on obtient

$$\hat{P} = R + g^{\alpha\beta}\, \Lambda^{\lambda}_{\alpha\rho}\, \Lambda^{\rho}_{\beta\lambda} + 2\, \nabla^{\beta}\, S_{\beta}, \tag{2.5}$$

avec

$$R = g^{\alpha\beta}\, R_{\alpha\beta}, \tag{2.6}$$

$$S_{\beta} \equiv S^{\sigma}_{\beta\sigma} \equiv \left(\mathcal{L}^{\sigma}_{[\beta\sigma]}\right), \tag{2.7}$$

$$\nabla^{\beta} \equiv g^{\alpha\beta}\, \nabla_{\alpha}; \tag{2.8}$$

nous poserons en outre

$$\Lambda = g^{\alpha\beta}\, \Lambda^{\lambda}_{\alpha\rho}\, \Lambda^{\rho}_{\beta\lambda}. \tag{2.9}$$

On peut aussi montrer que la courbure scalaire induite correspondant au tenseur $\bar{P}_{\beta\alpha}$ est

$$\hat{\hat{P}} = \Lambda + R. \tag{2.10}$$

Finalement, nous obtenons

$$\frac{\hat{P} + \hat{\hat{P}}}{2} = R + \Lambda + \nabla^{\beta}\, S_{\beta}; \tag{2.11}$$

nous appellerons $\dfrac{\hat{P} + \hat{\hat{P}}}{2}$ la *première courbure scalaire induite.* Ainsi le terme Λ représente la contribution du tenseur $\Lambda^{\lambda}_{\alpha\beta}$ dans la première courbure scalaire induite.

Par suite, si nous appelons

$$R + \nabla^{\beta} S_{\beta} = \mathcal{R} \tag{2.12}$$

la courbure scalaire propre de V_4 [qui se réduira d'ailleurs à la courbure classique R pour $\nabla^{\beta} S_{\beta} = 0$, et *a fortiori* pour $S_{\beta} = 0$] nous constatons que le scalaire Λ est la différence

$$\Lambda = \frac{\hat{P} + \hat{\bar{P}}}{2} - \mathcal{R}. \tag{2.13}$$

Par conséquent, nous pouvons dire que Λ apparaît comme une *correction de courbure due uniquement au nouveau champ de tenseurs* $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *qui intervient sur* V_4 *par plongement dans la variété* V_8; le terme $\nabla^{\beta} S_{\beta}$ est lui aussi dû au plongement, mais il dépend de la connexion de V_4, et en outre nous postulerons toujours par la suite $S_{\beta} = 0$ (conditions essentielles pour retrouver les équations du cas extérieur).

On peut aussi définir une *deuxième courbure scalaire induite*

$$\frac{\hat{Q} + \hat{\bar{Q}}}{2}, \tag{2.14}$$

à partir de

$$Q_{\alpha\beta} = \hat{R}^{\lambda}_{\alpha * \lambda\beta}, \tag{2.15}$$

$$\hat{Q} = Q_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta}, \tag{2.16}$$

$$\hat{\bar{Q}} = \bar{Q}_{\beta\alpha}\, g^{\alpha\beta}. \tag{2.17}$$

On montrera que, dans le cas présent :

$$\hat{Q} = \hat{\bar{Q}} = g^{\alpha\beta} \left(\Lambda^{\rho}_{\beta\lambda} S^{\lambda}_{\rho\alpha} + \Lambda^{\rho}_{\alpha\lambda} S^{\lambda}_{\rho\beta} \right). \tag{2.18}$$

On peut alors constater qu'ici *tous les termes de la deuxième courbure scalaire induite dépendent et du tenseur* $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *et de la connexion* $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Si l'on avait procédé comme en Relativité générale et considéré la variété V_4 douée de « sa propre structure seule », on aurait utilisé la densité $\sqrt{|g|}\, R$; mais ici, V_4 étant plongée dans V_8, lorsqu'on explicite (2.1), c'est-à-dire

$$\mathcal{H} = \sqrt{|g|} \left(\frac{\hat{P} + \hat{\bar{P}}}{2} + \theta\, \hat{Q} \right), \tag{2.19}$$

on constate qu'*il y a des termes de courbure qui s'ajoutent à* R et qui sont

$$\Lambda, \quad \nabla^{\beta} S_{\beta}, \quad \hat{Q}.$$

Ainsi, la densité la plus générale à utiliser dans le cas présent, compte tenu de l'immersion de V_4 dans V_8, est

$$\boxed{\sqrt{|g|}\,(R + \alpha \nabla^\rho S_\rho + \beta \Lambda + \theta \hat{Q}),} \tag{2.20}$$

où α et β sont, comme θ, des fonctions scalaires des coordonnées. Pour α, nous prendrons, pour simplifier les notations, la valeur du coefficient de $\nabla^\rho S_\rho$ dans la première courbure induite, c'est-à-dire 1; de toute façon ce terme ne contribuera pas dans la variation puisque nous postulerons $S_\rho = 0$.

Quant à β, nous devrons le prendre strictement négatif, car nous verrons que

$$\begin{cases} \beta > 0 \iff \rho < 0, \\ \beta < 0 \iff \rho > 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Avec $\beta = -1$, (2.20) représentera alors le lagrangien (2.2) annoncé plus haut :

$$L^0 = \sqrt{|g|}\,(R + \nabla^\rho S_\rho - \Lambda + \theta \hat{Q}). \tag{2.22}$$

2.2. Principe semi-variationnel

Nous allons écrire, *avec les seules composantes du tenseur métrique comme variables indépendantes de champ*, un *principe semi-variationnel*, en ce sens que *la connexion est supposée d'une part quelconque* (elle n'est donc pas euclidienne) et d'autre part *invariable dans la variation* $\left(\delta \mathcal{L}^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0\right)$.

En réalité, nous imposerons quatre conditions sur la connexion :

$$S_\rho = 0; \tag{2.23}$$

avec *ces conditions supplémentaires* (dont nous justifierons la nécessité par la suite), le lagrangien que nous allons faire varier s'écrit

$$L = \sqrt{|g|}\,(R - \Lambda + \theta \hat{Q}). \tag{2.24}$$

On prendra en outre le vecteur arbitraire U_α sous la forme

$$\boxed{U_\alpha = \sqrt{|g|^q}\, p_\alpha,} \tag{2.25}$$

q et p_α étant des fonctions des coordonnées x^ρ de V_4.

Dans la variation, les quantités θ, q, p_α, $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (et donc $S^{\alpha}_{\beta\gamma}$, et S^ρ) seront invariantes (puisque indépendantes des $g_{\alpha\beta}$).

Nous nous proposons donc d'obtenir les 10 conditions nécessaires d'extremum de l'intégrale d'action

$$I = \int_C L(g^{\alpha\beta})\, d\tau,$$

où

$$d\tau = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

est l'élément de volume de V_4, et C une chaîne différentiable de dimension 4 de V_4.

De manière classique, on fera varier arbitrairement les (seules) composantes du tenseur métrique (symétrique), de façon à ce que

$$(\delta g^{\alpha\beta})_{\partial C} = 0.$$

Explicitons le lagrangien (2.24) :

$$L = \sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta}\left[R_{(\alpha\beta)} - \Lambda^{\lambda}_{\alpha\rho}\Lambda^{\rho}_{\beta\lambda} + \theta\left(\Lambda^{\rho}_{\beta\lambda} S^{\lambda}_{\rho\alpha} + \Lambda^{\rho}_{\alpha\lambda} S^{\lambda}_{\rho\beta}\right)\right],$$

et remarquons dès maintenant que, par suite de la symétrie de $g^{\alpha\beta}$, nous n'obtiendrons que des équations entre parties symétriques et en particulier nous n'aurons des informations que sur $R_{(\alpha\beta)}$.

Calcul préliminaire. — Avant de faire varier l'intégrale I dans les conditions précisées plus haut, il est intéressant de calculer le terme $\Lambda^{\lambda}_{\alpha\rho}\Lambda^{\rho}_{\beta\lambda}$.

LEMME [2 *f*]. — *Si l'on pose* (λ *réel*) :

$$U_\alpha = \lambda\, u_\alpha,$$

u_α *étant un* VECTEUR UNITAIRE DU GENRE TEMPS

$$u^\alpha u_\alpha = +1,$$

il vient

$$\Lambda^{\lambda}_{\alpha\rho}\Lambda^{\rho}_{\beta\lambda} = 2\lambda^2 g_{\alpha\beta} - 2\lambda^2 u_\alpha u_\beta.$$

Contribution dans la variation de $\left(-\sqrt{|g|}\,\Lambda\right)$. — On obtient facilement

$$\delta\left(-\sqrt{|g|}\,\Lambda\right) = \sqrt{|g|}\,\delta g^{\alpha\beta}\left[(6q+3)\lambda^2 g_{\alpha\beta} - 6\lambda^2 u_\alpha u_\beta\right].$$

Contribution dans la variation de $(\theta \sqrt{|g|}\, \hat{Q})$. — On obtient

$$\delta (\theta \sqrt{|g|}\, \hat{Q}) = \sqrt{|g|}\, \delta g^{\alpha\beta} [4\, \theta\, g^{\lambda\tau}\, S^{\rho}_{\lambda\alpha}\, \eta_{\tau\beta\rho\gamma}\, U^{\gamma} + 2\, \theta\, V_{\alpha}\, U_{\beta} - \theta\, (q + 2)\, V^{\gamma}\, U_{\gamma}\, g_{\alpha\beta}],$$

en définissant le vecteur V_α par

$$V_{\alpha} = g^{\mu\pi}\, g^{\lambda\tau}\, \eta_{\tau\pi\rho\alpha}\, S^{\rho}_{\lambda\mu},$$

ou encore, si l'on introduit

$$S_{\lambda\mu}{}^{\rho} = g^{\rho\sigma}\, S_{\lambda\mu\sigma},$$

par

$$\boxed{V_{\alpha} = \eta_{\tau\pi\rho\alpha}\, S^{[\tau\pi\rho]}.} \tag{2.26}$$

Remarque. — 1. Le vecteur V_α ne dépend que de la partie totalement antisymétrique du tenseur de torsion et il est proportionnel au *vecteur dual* $\overset{*}{S}{}^{\sigma}$ *de* $S^{[\alpha\beta\gamma]}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \overset{*}{S}_{\sigma} &= \frac{1}{6}\, \eta_{\tau\pi\rho\sigma}\, S^{[\tau\pi\rho]}, \\ V_{\alpha} &= 6\, \overset{*}{S}_{\alpha}. \end{aligned} \right. \tag{2.27}$$

En conséquence :

2. Le vecteur V_α est *le même*, et est *non nul*, si le tenseur de torsion se réduit à un tenseur complètement antisymétrique d'ordre 3.

Contribution dans la variation de $\sqrt{|g|}\,[R]$. — Le premier terme $\sqrt{|g|}\,[R]$ contribue classiquement par

$$\delta[\sqrt{|g|}\, (R)] = \sqrt{|g|}\, \delta g^{\alpha\beta} \left[R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} \right],$$

et nous fournira le « membre géométrique » des équations cherchées.
Nous poserons enfin

$$\boxed{H_{\alpha\beta\gamma} = g^{\lambda\tau}\, S_{\lambda\alpha}{}^{\rho}\, \eta_{\tau\beta\rho\gamma}},$$

tenseur antisymétrique en ses deux derniers indices; avec cette définition, le vecteur V_α se note encore

$$V_\alpha = g^{\mu\pi} H_{\mu\pi\alpha}.$$

Remarquons que, comme V_α, le tenseur H ne dépend que de la partie totalement antisymétrique du tenseur de torsion, et s'exprime simplement en fonction de $\overset{*}{S}_\alpha$:

$$\boxed{H_{\alpha\beta\gamma} = 2\left(g_{\alpha\beta}\,\overset{*}{S}_\gamma - g_{\alpha\gamma}\,\overset{*}{S}_\beta\right).} \tag{2.28}$$

Les équations de champ réalisant un extremum de l'intégrale I sont alors, que θ soit une constante ou pas, et compte tenu des conditions supplémentaires $S_\rho = 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = 6\,\lambda^2\, u_\alpha\, u_\beta - (6\,q + 3)\,\lambda^2\, g_{\alpha\beta} \\ - 2\,\theta\,\lambda\left(\overset{*}{S}_\alpha\, u_\beta + \overset{*}{S}_\beta\, u_\alpha\right) \\ + 2\,\theta\lambda\,(3\,q + 2)\,\overset{*}{S}{}^\sigma\, u_\sigma\, g_{\alpha\beta}. \end{aligned}} \tag{2.29}$$

2.3. Les équations de champ

2.3.1. Généralités

Dans les équations précédemment obtenues, nous distinguerons :

— d'une part les termes « classiques » (u_α représentant le vecteur vitesse unitaire d'univers du fluide) :

$$6\,\lambda^2\, u_\alpha\, u_\beta - (6\,q + 3)\,\lambda^2\, g_{\alpha\beta};$$

— d'autre part des termes « supplémentaires » :

$$- 2\,\theta\lambda\left(\overset{*}{S}_\alpha\, u_\beta + \overset{*}{S}_\beta\, u_\alpha\right) + 2\,\theta\lambda\,(3\,q + 2)\, u_\sigma\,\overset{*}{S}{}^\sigma\, g_{\alpha\beta}. \tag{2.30}$$

Si nous nous plaçons dans un espace à connexion symétrique, les termes (2.30) disparaissent et il suffit de définir la densité de matière ρ et la pression p au moyen de

$$\chi\rho = (3 - 6\,q)\,\lambda^2,$$
$$\chi\,P = (3 + 6\,q)\,\lambda^2 \qquad \left(P = \frac{p}{c^2}\right),$$

(χ étant la constante d'Einstein et c la vitesse de la lumière dans le vide), pour obtenir

$$(2.31) \qquad R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi\, [(\rho + P)\, u_\alpha\, u_\beta - P\, g_{\alpha\beta}].$$

Ainsi, dans le cas d'une connexion $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *symétrique, il suffira de donner diverses formes au vecteur arbitraire* U_α *pour retrouver les équations d'Einstein des schémas matériels classiques de la Relativité générale.*

On voit maintenant pourquoi l'on a choisi le vecteur arbitraire U_α sous la forme (2.25), sachant que l'on se propose de faire apparaître le tenseur impulsion-énergie (ou du moins, pour le moment, sa partie symétrique) d'un fluide parfait doué de spin. Quant au vecteur unitaire u_α, il continuera à représenter le vecteur vitesse unitaire d'univers du fluide; observons dès maintenant que l'on donne ainsi une origine géométrique sur V_8 à la notion de vitesse : u_α est en effet déterminé par un champ de tenseurs déduit par restriction à V_4 de certains coefficients de la connexion utilisée sur V_8.

Reprenons les termes supplémentaires (2.30) pour préciser que c'est seulement

$$-\, 2\, \theta\lambda \left(\overset{*}{S}_\alpha\, u_\beta + \overset{*}{S}_\beta\, u_\alpha\right)$$

qui modifiera la forme classique (2.31).

En général, les vecteurs $\overset{*}{S}_\alpha$ *et* u_α *n'ont absolument aucune raison d'être colinéaires et par conséquent, les équations symétriques d'Einstein que nous obtenons ne se réduisent pas à des relations de la forme* (2.31).

Ces vecteurs $\overset{*}{S}_\alpha$ et u_α étant *a priori* non colinéaires, on peut envisager de reprendre le principe variationnel avec la condition supplémentaire

$$(2.32) \qquad U^\alpha\, \overset{*}{S}_\alpha = 0 \qquad (\text{où } U^\alpha\, V_\alpha = 0).$$

On constate ainsi [2 *f*] que *la condition* (2.32) *est compatible avec la forme de nos équations de champ.*

On peut donc assurer l'orthogonalité des vecteurs $\overset{*}{S}_\alpha$ *et* u_α *dans le cadre de notre théorie sans modifier la forme des résultats obtenus.*

Il nous faut maintenant définir ρ et P et faire apparaître la constante χ dans les équations de champ

$$(2.33) \quad R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = 6\, \lambda^2\, u_\alpha\, u_\beta - 2\, \theta\lambda \left(\overset{*}{S}_\alpha\, u_\beta + \overset{*}{S}_\beta\, u_\alpha\right) - g_{\alpha\beta} \left[(6\, q + 3)\, \lambda^2 - 2\, (3\, q + 2)\, \theta\lambda\, u_\sigma\, \overset{*}{S}{}^\sigma\right].$$

2.3.2. Le tenseur impulsion-énergie symétrique

Nous nous proposons d'exprimer (2.33) sous la forme

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)}$$

en explicitant $T_{(\alpha\beta)}$ *qui représente la partie symétrique du tenseur impulsion-énergie d'un fluide parfait dont la description nécessite un espace à connexion non symétrique*; nous nous proposons de montrer qu'un tel $T_{(\alpha\beta)}$ pourrait ainsi être associé à un fluide parfait doué de spin.

Il nous faut donc déterminer l'ordre de grandeur en λ du tenseur $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$, puis celui du scalaire θ.

Pour le tenseur $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$, nous écrirons les équations obtenues sans postuler la nullité du vecteur de torsion :

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi\, T_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha S_\beta + \nabla_\beta S_\alpha - g_{\alpha\beta} \nabla^\rho S_\rho);$$

le vecteur S_β, et donc le tenseur $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$, seront par suite nécessairement d'ordre 2 en λ.

Quant au scalaire θ, il sera en λ^{-1} pour bien expliciter le membre de droite de (2.33) en $\chi\, T_{(\alpha\beta)}$.

Or, nous définirons ρ et P par un procédé analogue à celui utilisé plus haut pour établir (2.31), c'est-à-dire que nous serons nécessairement conduit à poser

$$\boxed{\lambda^2 = \frac{\chi}{6}(\rho + P).}$$

Du point de vue physique, *c'est l'ordre de grandeur en* χ *qui nous intéresse le plus,* surtout pour les termes en $S^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Nous poserons donc

$$\boxed{S_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \lambda^2\, a s_{\alpha\beta}{}^{\gamma},} \tag{2.34}$$

a et $s_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ étant respectivement un scalaire et un tenseur *sans dimension en* λ; on aura aussi

$$\overset{*}{S}_\alpha = \lambda^2\, a\, \overset{*}{s}_\alpha, \tag{2.35}$$

$\overset{*}{s}_\alpha$ étant un vecteur adimensionnel en λ.

Quant à θ, nous le prendrons égal à

$$\boxed{\theta = \frac{3}{2\, a\, \lambda}.}$$

Nous poserons enfin, b pouvant éventuellement être nul :

$$u_\sigma \overset{*}{s}{}^\sigma = b.$$

On introduit la densité de matière et la pression par

$$\chi\rho = 3\lambda^2 - [6\, q\, \lambda^2 - 3\,(3\, q + 2)\,\lambda^2\, b],$$
$$\chi\, \mathrm{P} = 3\,(2\, q + 1)\,\lambda^2 - 3\,(3\, q + 2)\,\lambda^2\, b;$$

les équations de champ s'expriment alors par

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\, g_{\alpha\beta} \\ &\quad = \chi\left[\frac{1}{2}(\rho + \mathrm{P})\left\{ u_\alpha\,(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta) + u_\beta\,(u_\alpha - \overset{*}{s}_\alpha)\right\} - \mathrm{P}\, g_{\alpha\beta}\right].\end{aligned}} \tag{2.36}$$

La partie symétrique $\mathrm{T}_{(\alpha\beta)}$ du tenseur impulsion-énergie est donc telle que

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{T}_{(\alpha\beta)} &= \mathrm{Sym}\, \mathrm{C}_{\alpha\beta}, &(2.37)\\ \mathrm{C}_{\alpha\beta} &= (\rho + \mathrm{P})\, u_\alpha\,(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta) - \mathrm{P}\, g_{\alpha\beta}. &(2.38)\end{aligned}}$$

Les termes $u_\alpha\,(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta)$ ont la forme indiquée par O. Costa de Beauregard [et aussi A. Papapétrou [12]] *comme caractéristique de la matière doué de spin, dans sa conjecture* [4 *e*] *sur l'effet gravitationnel de spin.*

u_α définit la vitesse du fluide et $(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta)$ pourrait ainsi décrire la direction de son impulsion. On retrouve donc bien, l'orthogonalité $u_\alpha \overset{*}{s}{}^\alpha = 0$ [*cf.* (2.32)] étant assurée, la situation décrite par O. Costa de Beauregard, *du moins en ce qui concerne la partie symétrique du tenseur impulsion-*énergie, dans ses divers travaux [4] basés sur *la non-colinéarité de la vitesse et de l'impulsion* d'un fluide possédant un moment cinétique de spin.

Remarque. — Si nous ne postulons pas la nullité du vecteur de torsion, nous avons

$$\overline{\mathrm{T}}_{(\alpha\beta)} = \mathrm{Sym}\left\{ (\bar\rho + \overline{\mathrm{P}})\left[u_\alpha\,(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta) - f_{\alpha\beta}\right] - \overline{\mathrm{P}}\, g_{\alpha\beta}\right\},$$

le terme $f_{\alpha\beta}$ ne se réduisant pas, *a priori*, à la forme « canonique » $u_\alpha\, w_\beta$.

On montre cependant facilement que les équations de champ « compatibles » avec les conditions supplémentaires

$$\mathrm{U}_\alpha = 0 \qquad (\Leftrightarrow \Lambda^{\alpha}_{\beta\sigma} = 0) \tag{2.39}$$

s'expriment par

$$\mathrm{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\, g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\nabla_\alpha\, \mathrm{S}_\beta + \nabla_\beta\, \mathrm{S}_\alpha - \nabla^\rho\, \mathrm{S}_\rho\, g_{\alpha\beta}).$$

Mais en fait, notre *champ de tenseurs* $\Lambda^{\alpha}_{\beta\sigma}$ *n'est que le support géométrique qui traduit la présence de matière*; les conditions (2.39) caractérisent donc encore l'absence de matière. Or, pour le cas extérieur de tout schéma matériel, il est légitime d'obtenir

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = 0.$$

On peut ainsi conclure (les $g_{\alpha\beta}$ étant quelconques *a priori*), que les *conditions* $S_\sigma = 0$ *doivent être postulées si l'on veut bien toujours trouver à l'extérieur de la matière les classiques équations d'Einstein* $S_{\alpha\beta} = 0$.

On peut donc dire que l'on a considéré (avec $S_\sigma = 0$) le cas le plus général qui soit acceptable.

2.4. Conclusion et interprétation physique

Le tenseur $T_{(\alpha\beta)}$ ainsi obtenu apparaît sous une forme qui semble propice à la description de la distribution d'énergie-impulsion d'un fluide parfait doué de spin; en effet il contient les termes classiques, propres au schéma fluide parfait (non doué de spin), mais aussi de nouvelles quantités qui dépendent directement du tenseur de torsion.

Si l'on retient, avec plusieurs auteurs (citons O. Costa de Beauregard [4], F. Hehl [8 *a*], E. Kröner [8 *b*], D. W. Sciama [13], T. W. B. Kibble [9], etc.), comme caractéristique géométrique d'un fluide doué de spin l'apparition d'un tenseur de torsion, on peut penser que $T_{(\alpha\beta)}$ représente la partie symétrique du tenseur impulsion-énergie d'un fluide parfait doué de spin. Nos équations de champ mettent alors en évidence un résultat admis heuristiquement par quelques auteurs [8 *a*, *b*] :

La matière douée de spin peut donner une contribution spécifique non nulle dans la partie symétrique de son tenseur impulsion-énergie.

Précisons bien que nous affirmons ainsi que la présence d'une telle contribution dans $T_{(\alpha\beta)}$ est *une condition suffisante* pour que la matière soit douée de spin; nous verrons en effet au chapitre 3 que *cette condition n'est pas nécessaire.*

De la même façon qu'en Relativité générale, on obtient les équations

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

du cas extérieur, par application d'un principe variationnel à partir de

$$\int_C R \sqrt{|g|}\, d\tau,$$

on aboutit ici, par utilisation d'un principe semi-variationnel sur

$$\int_C (\mathrm{R} - \Lambda + \theta\,\hat{\mathrm{Q}}) \sqrt{|g|}\, d\tau,$$

où $(-\Lambda + \theta\,\hat{\mathrm{Q}})$ *est une combinaison « linéaire » des termes qui s'ajoutent naturellement, dans les deux courbures induites par plongement dans* V_8, *à la courbure classique* R *de* V_4, *aux équations matérielles symétriques*

$$\mathrm{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\, g_{\alpha\beta} = \chi\, \mathrm{T}_{(\alpha\beta)},$$

$$\mathrm{T}_{(\alpha\beta)} = \mathrm{Sym}\,\{ (\rho + \mathrm{P})\, u_\alpha (u_\beta - \overset{*}{s}_\beta) - \mathrm{P}\, g_{\alpha\beta} \},$$

où $\mathrm{T}_{(\alpha\beta)}$ *décrit la partie symétrique de la distribution d'énergie-impulsion d'un fluide parfait doué de spin.*

Nous verrons dans [2 *g*] qu'il est possible d'améliorer ce résultat et d'obtenir des équations de champ asymétriques sur V_4.

3. ÉQUATIONS DES TRAJECTOIRES

Nous voulons mettre en évidence les équations des lignes de courant de notre schéma. Pour réaliser ceci, nous utilisons les équations d'Einstein symétriques établies au chapitre 2; quant à $\mathrm{R}_{[\alpha\beta]}$ qui s'explicite en $\nabla_\rho \mathrm{S}^\rho_{\alpha\beta}$ (*cf.* plus bas), nous le conserverons sous cette forme. Ainsi, $\mathrm{R}_{(\alpha\beta)}$ est exprimé par des fonctions de u_α et de la torsion, et $\mathrm{R}_{[\alpha\beta]}$ par des fonctions de la torsion.

3.1. Identités de conservation induites par plongement dans V_8

Si nous appelons $\hat{\mathrm{H}}^i_j$ les matrices de connexion induites dans V_4 (plongée dans V_8), les identités de Bianchi [11 *b*] sur V_8 induisent, par restriction à V_4, les relations [5 *d*]

(3.1) $$d\hat{\Omega}^i_j = \hat{\Omega}^i_k \wedge \hat{\mathrm{H}}^k_j - \hat{\mathrm{H}}^i_k \wedge \hat{\Omega}^k_j,$$

$\hat{\Omega}^i_j$ étant la forme de courbure induite dans V_4.

Ces identités s'écrivent encore

(3.2) $$(\partial_\nu \hat{\mathrm{R}}^i_{j\lambda\mu} - \mathrm{L}^k_{j\nu}\, \hat{\mathrm{R}}^i_{k\lambda\mu} + \mathrm{L}^i_{k\nu}\, \hat{\mathrm{R}}^k_{j\lambda\mu})\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0,$$

c'est-à-dire

(3.3) $$\sum_{\lambda,\mu,\nu}^{\text{p.c.}} (\nabla_\nu \hat{\mathrm{R}}^i_{j\lambda\mu} - 2\, \mathrm{S}^\rho_{\lambda\nu}\, \hat{\mathrm{R}}^i_{j\rho\mu}) = 0.$$

En contractant en i, λ, nous pouvons obtenir deux groupes d'identités sur V_4, selon que $j = \beta$ ou $j = \beta^*$. Considérons le premier cas (le deuxième ne nous intéresse que fort peu car il conduit à des relations en $Q_{\alpha\beta}$ et non en $P_{\alpha\beta}$, c'est-à-dire en $R_{\alpha\beta}$).

Remarquons que *les opérateurs de contraction partielle et de dérivation covariante ne commutent pas.*

Utilisons le fait que [2 *f*] :

$$\hat{R}^{\lambda}_{\sigma\rho\nu} = \overline{R}^{\lambda}_{\sigma\rho\nu} + \Lambda^{\lambda}_{\alpha\rho}\,\Lambda^{\alpha}_{\sigma\nu} - \Lambda^{\lambda}_{\alpha\nu}\,\Lambda^{\alpha}_{\sigma\rho},$$

où $\overline{R}^{\lambda}_{\sigma\rho\nu}$ *est le tenseur associé par pseudo-hermiticité au tenseur de courbure de* $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *sur* V_4 :

$$\overline{R}^{\lambda}_{\sigma\rho\nu} = \partial_\rho\,\mathcal{L}^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\,\mathcal{L}^{\lambda}_{\rho\sigma} + \mathcal{L}^{\gamma}_{\nu\sigma}\,\mathcal{L}^{\lambda}_{\rho\gamma} - \mathcal{L}^{\gamma}_{\rho\sigma}\,\mathcal{L}^{\lambda}_{\nu\gamma}. \tag{3.4}$$

Après quelques calculs, on obtient [2 *f*] :

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^{\sigma}\left[R_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}R\,g_{\nu\sigma}\right] - 2\,S^{\rho}_{\nu\mu}\,g^{\beta\mu}\,R_{\rho\beta} \\ &\quad = U^{\alpha}\,[\nabla_\alpha\,U_\nu - \nabla_\nu\,U_\alpha] - 5\,S^{\rho}_{\nu\mu}\,U_\rho\,U^{\mu} \\ &\qquad + \nabla^{\sigma}[2\,U_\nu\,U_\sigma + g_{\nu\sigma}\,\lambda^2] + g^{\mu\sigma}\,S^{\rho}_{\lambda\mu}\,\overline{R}^{\lambda}_{\sigma\rho\nu};\end{aligned}} \tag{3.5}$$

on voit ainsi, sur (3.5), que si le fait d'avoir sur V_4 une connexion quelconque asymétrise le terme classique $S_{\nu\sigma}$, c'est l'immersion de V_4 dans V_8 qui entraîne la présence dans ces identités des termes « matériels » en U_α.

3.2. Équations des trajectoires

Les équations de champ du chapitre 2 s'écrivent (4) :

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}R\,g_{\alpha\beta} = \chi\,T_{(\alpha\beta)},$$

avec

$$T_{(\alpha\beta)} = (\rho + P)\left\{\frac{1}{2}[u_\alpha\,(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta) + u_\beta\,(u_\alpha - \overset{*}{s}_\alpha)]\right\} - P\,g_{\alpha\beta};$$

pour utiliser une méthode classique [11 *a*], nous condenserons $T_{(\alpha\beta)}$ en

$$\boxed{T_{(\alpha\beta)} = (\rho + P)\,u_\alpha\,u_\beta - \Phi_{\alpha\beta},} \tag{3.6}$$

(4) Rappelons qu'indépendamment de ces relations, nous écrivons les équations aux connexions (1.23) obtenues au chapitre 1.

avec une définition évidente pour le tenseur *symétrique* $\Phi_{\alpha\beta}$:

$$\boxed{\Phi_{\alpha\beta} = (\rho + P)\left\{\frac{1}{2}\left(u_\alpha \overset{*}{s}_\beta + u_\beta \overset{*}{s}_\alpha\right)\right\} + P\, g_{\alpha\beta}.} \tag{3.7}$$

En outre, nous introduirons sur V_4, le vecteur K_ν tel que

$$\boxed{(\rho + P)\, K_\nu = \nabla^\alpha \Phi_{\nu\alpha} - 2\, S^\rho_{\nu\mu}\, g^{\alpha\mu}\, \Phi_{\rho\alpha}.} \tag{3.8}$$

Nous poserons aussi

$$A_\nu \equiv \nabla^\sigma R_{[\sigma\nu]} + 2\, S^\rho_{\nu\mu}\, g^{\beta\mu}\, R_{[\rho\beta]} + g^{\mu\sigma}\, S^\rho_{\lambda\mu}\, \overline{R}^\lambda_{\sigma\rho\nu}; \tag{3.9}$$

ce vecteur A_ν sera explicité et étudié par la suite.

Des calculs faciles donnent alors [2 *f*] :

$$\boxed{\begin{aligned} u^\sigma \nabla_\sigma u_\nu = u^\mu \Big\{ \frac{7}{3} S^\rho_{\nu\mu}\, u_\rho + (\delta^\sigma_\nu u_\mu - \delta^\sigma_\mu u_\nu) \\ \times \left(2 K_\sigma + \frac{1}{6}\partial_\sigma \operatorname{Log} |\rho + P| + \frac{A_\sigma}{3\lambda^2}\right)\Big\}. \end{aligned}} \tag{3.10}$$

Ainsi, les équations des lignes de courant de notre champ, c'est-à-dire encore les trajectoires d'une particule d'épreuve pourvue de toutes les caractéristiques de la matière susceptible d'engendrer ce champ (et en particulier conduisant à un vecteur $\overset{*}{s}_\alpha$ non nul) apparaissent sous la forme

$$\boxed{u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = u^\alpha\, \Pi_{\beta\alpha},} \tag{3.11}$$

où $\Pi_{\beta\alpha}$ *est un tenseur antisymétrique d'ordre* 2.

3.3. Étude et interprétation des équations des trajectoires

Il nous faut tout d'abord considérer le vecteur A_ν et calculer $R_{[\alpha\beta]}$. On montre facilement que la connexion euclidienne de V_4 est telle que

$$\mathcal{L}^\alpha_{\beta\alpha} = \mathcal{L}^\alpha_{\alpha\beta}$$

si et seulement si

$$S_\sigma = 0; \tag{3.12}$$

on a alors

$$\mathcal{L}^\alpha_{\beta\alpha} = \mathcal{L}^\alpha_{\alpha\beta} = \gamma_\beta, \tag{3.13}$$

avec

$$\gamma_\beta \equiv \left\{ {\alpha \atop \beta\alpha} \right\} = \frac{\partial_\beta \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\, \partial_\beta\, g_{\alpha\mu}.$$

Les conditions (3.12) ayant été postulées, les relations (3.13) sont donc valables.

A partir de (1.19), nous obtenons

$$R_{[\alpha\beta]} \equiv \nabla_\rho S^\rho_{\alpha\beta} + 2 S_\rho S^\rho_{\alpha\beta},$$

ce qui donne, dans notre cas :

$$(3.14) \qquad \boxed{R_{[\alpha\beta]} \equiv \nabla_\rho S^\rho_{\alpha\beta}.}$$

Ainsi le vecteur A_ν, introduit précédemment, se développe en

$$A_\nu = \nabla^\sigma \nabla_\rho S^\rho_{\sigma\nu} + 2 S^\rho_{\nu\mu} g^{\beta\mu} \nabla_\tau S^\tau_{\rho\beta} + g^{\mu\sigma} S^\rho_{\lambda\mu} \overline{R}^\lambda_{\sigma\rho\nu};$$

si nous utilisons le fait que

$$(3.15) \qquad S^\rho_{\nu\mu} = \lambda^2 a s^\rho_{\nu\mu},$$

où $s^\rho_{\nu\mu}$ est d'ordre 0 en λ (comme u_α, $\overset{*}{s}_\alpha$, $g_{\alpha\beta}$), le vecteur A_ν pourra être développé en λ.

On vérifie en outre, facilement, que le vecteur K_ν défini plus haut s'explicite en

$$(3.16) \quad K_\nu = \nabla_\sigma U^\sigma_\nu - 2 S^\rho_{\nu\mu} U^\mu_\rho + \frac{\partial_\nu P}{\rho + P} + U^\sigma_\nu \partial_\sigma \operatorname{Log} | \rho + P |,$$

avec

$$(3.17) \qquad \boxed{U^\sigma_\nu = \frac{1}{2}(u_\nu \overset{*}{s}{}^\sigma + u^\sigma \overset{*}{s}_\nu),}$$

ou encore

$$U^\sigma_\nu = \frac{1}{\rho + P} g^{\sigma\gamma} (\Phi_{\gamma\nu} - P g_{\gamma\nu}).$$

Par conséquent, le tenseur $\Pi_{\beta\alpha}$ peut se noter

$$\Pi_{\beta\alpha} = \chi^0 \Pi^0_{\beta\alpha} + \chi \Pi^1_{\beta\alpha},$$

avec

$$\begin{aligned}
\Pi^0_{\beta\alpha} = {} & (\delta^\sigma_\beta u_\alpha - \delta^\sigma_\alpha u_\beta) \\
& \times \Big[2 \nabla_\mu U^\mu_\sigma + 2 \frac{\partial_\sigma P}{\rho + P} + \Big(2 U^\mu_\sigma + \frac{1}{6} \delta^\mu_\sigma\Big) \partial_\mu \operatorname{Log} | \rho + P | \\
& \quad + \frac{a}{3} \nabla_\rho s^\rho_{\gamma\sigma} \partial^\gamma \operatorname{Log} | \rho + P | \\
& \quad + \frac{a}{3} \nabla^\rho s^\gamma_{\rho\sigma} \partial_\gamma \operatorname{Log} | \rho + P | + \frac{a}{3} s^\rho_{\gamma\sigma} \frac{1}{\rho + P} \nabla^\gamma \partial_\rho (\rho + P) \\
& \qquad + \frac{a}{3} \nabla^\gamma \nabla_\rho s^\rho_{\gamma\sigma} + \frac{a}{3} g^{\mu\gamma} s^\rho_{\lambda\mu} \overline{R}^\lambda_{\gamma\rho\sigma} \Big]
\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{II}^1_{\beta\alpha} = \frac{7\,a}{18}(\rho + \mathrm{P})\,\overset{\circ}{s}_{\beta\alpha}\,u_\rho + \frac{1}{3}\left(\delta^\sigma_\beta\,u_\alpha - \delta^\sigma_\alpha\,u_\beta\right)$$
$$\times\left[\frac{a^2}{3}(\rho + \mathrm{P})\,g^{\gamma\mu}\,s^\rho_{\sigma\mu}\,\nabla_\tau\,s^\tau_{\rho\gamma}\right.$$
$$\left. + \frac{a^2}{}\,\partial_\tau\,(\rho + \mathrm{P})\,g^{\gamma\mu}\,s^\rho_{\sigma\mu}\,s^\tau_{\rho\gamma} - 2\,a\,(\rho + \mathrm{P})\,s^\rho_{\sigma\mu}\,\mathrm{U}^\mu_\rho\right].$$

Nous distinguons dans $\mathrm{II}_{\beta\alpha}$ des termes « *universels* », c'est-à-dire indépendants de la densité de matière, et dus à la structure de l'espace :

$$\left(\delta^\sigma_\beta\,u_\alpha - \delta^\sigma_\alpha\,u_\beta\right)\left(2\,\nabla_\mu\,\mathrm{U}^\mu_\sigma + \frac{a}{3}\nabla^\gamma\,\nabla_\rho\,s^\rho_{\gamma\sigma} + \frac{a}{3}\,g^{\mu\gamma}\,s^\rho_{\lambda\mu}\,\overline{\mathrm{R}}^\lambda_{\gamma\rho\sigma}\right),$$

et des termes liés à la densité de matière, c'est-à-dire dépendant de l'échantillon de matière qui occupe l'espace considéré.

Pour toute connexion euclidienne *asymétrique* (1.31) de V_4, les équations des trajectoires correspondant au champ défini par le principe semi-variationnel utilisé se développent en

$$\boxed{u^\alpha\,\nabla_\alpha\,u_\beta = u^\alpha\left[\mathrm{I}_{\beta\alpha} + \mathrm{M}_{\beta\alpha} + \chi\,\mathrm{N}_{\beta\alpha}\right],} \tag{3.18}$$

où *les tenseurs* I, M, N *sont antisymétriques et adimensionnels en* χ; M *et* N *dépendent de la matière considérée* (par ρ et P) *au point considéré, alors que* I *n'en dépend pas : il représente la contribution universelle* et contient des termes dus à la seule structure de l'espace (dépendants du champ des vitesses u_α).

Dans le cas général d'une connexion euclidienne (1.31), ces tenseurs ont pour composantes :

$$\mathrm{I}_{\beta\alpha} = \left(\delta^\sigma_\beta\,u_\alpha - \delta^\sigma_\alpha\,u_\beta\right) \tag{3.19}$$
$$\times\left(2\,\nabla_\mu\,\mathrm{U}^\mu_\sigma + \frac{a}{3}\nabla^\gamma\,\nabla_\rho\,s^\rho_{\gamma\sigma} + \frac{a}{3}\,g^{\mu\gamma}\,s^\rho_{\lambda\mu}\,\overline{\mathrm{R}}^\lambda_{\gamma\rho\sigma}\right),$$

$$\mathrm{M}_{\beta\alpha} = \left(\delta^\sigma_\beta\,u_\alpha - \delta^\sigma_\alpha\,u_\beta\right) \tag{3.20}$$
$$\times\left[2\,\frac{\partial_\sigma\,\mathrm{P}}{\rho + \mathrm{P}} + \left(2\,\mathrm{U}^\mu_\sigma + \frac{1}{6}\,\delta^\mu_\sigma\right)\partial_\mu\,\mathrm{Log}\,|\,\rho + \mathrm{P}\,|\right.$$
$$+ \frac{a}{3}\nabla_\rho\,s^\rho_{\gamma\sigma}\,\partial^\gamma\,\mathrm{Log}\,|\,\rho + \mathrm{P}\,|$$
$$+ \frac{a}{3}\nabla^\rho\,s^\gamma_{\rho\sigma}\,\partial_\gamma\,\mathrm{Log}\,|\,\rho + \mathrm{P}\,|$$
$$\left. + \frac{a}{3}\,s^\rho_{\gamma\sigma}\,\frac{1}{\rho + \mathrm{P}}\,\nabla^\gamma\,\partial_\rho\,(\rho + \mathrm{P})\right],$$

$$(3.21)\quad N_{\beta\alpha} = \frac{7\,a}{18}(\rho + P)\, s^{\rho}_{\beta\alpha}\, u_{\rho} + \frac{1}{3}(\delta^{\sigma}_{\beta}\, u_{\alpha} - \delta^{\sigma}_{\alpha}\, u_{\beta}) \times \Big[\frac{a^2}{3}(\rho + P)\, g^{\gamma\mu}\, s^{\rho}_{\sigma\mu}\, \nabla_{\tau}\, s^{\tau}_{\rho\gamma} + \frac{a^2}{3}\partial_{\tau}(\rho + P)\, g^{\gamma\mu}\, s^{\rho}_{\sigma\mu}\, s^{\tau}_{\rho\gamma} - 2\,a\,(\rho + P)\, s^{\rho}_{\sigma\mu}\, U^{\mu}_{\rho}\Big].$$

Cas particulier : $S_{\alpha\beta\gamma} = S_{[\alpha\beta\gamma]}$. — Une totale antisymétrie de $S_{\alpha\beta\gamma}$, c'est-à-dire une connexion euclidienne particulière :

$$(3.22)\qquad \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} + S^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

apporte les changements suivants :

— dans I : le dernier terme se simplifie en

$$\frac{a}{3}\, g^{\mu\gamma}\, g^{\rho\omega}\, s_{\lambda\mu\omega}\, \overline{R}^{\lambda}{}_{[\gamma\rho\sigma]};$$

— dans M : les trois derniers termes se réduisent à

$$-\frac{a}{3}\, s^{\gamma}{}_{\sigma}{}^{\rho}\, s^{\tau}_{\gamma\rho}\, \partial_{\tau} \log|\,\rho + P\,|;$$

— dans N : les termes $\frac{7\,a}{18}(\rho + P)\, s^{\rho}_{\beta\alpha}\, u_{\rho}$ et $-2\,a\,(\rho + P)\, s^{\rho}_{\sigma\mu}\, U^{\mu}_{\rho}$ disparaissent.

On constate donc que les relations (3.18) subsistent avec des tenseurs I, M, N différents, mais cependant non nuls. On peut alors affirmer que *les trajectoires sont encore définies par des équations de la « forme »* (3.18) *lorsque l'espace est muni d'une connexion euclidienne qui se décompose suivant* (3.22).

Remarques : comparaisons avec des résultats classiques.

1. Les équations (3.11) ont, grâce à l'antisymétrie du tenseur Π, la *forme* de celles qui décrivent, en Relativité générale, les trajectoires d'une particule chargée (μ étant la densité de charge) dans un champ électromagnétique pur [11 *a*] :

$$(3.23)\qquad u^{\alpha}\, \nabla_{\alpha}\, u_{\beta} = \frac{\mu}{\rho}\, u^{\alpha}\, F_{\beta\alpha} \qquad (F_{\alpha\beta} \text{ antisymétrique}).$$

Mais, l'expression (3.18) de nos équations de trajectoires, nous montre cependant qu'il existe une différence essentielle : *que l'on se limite ou pas aux termes en* χ^0, *il y a une contribution universelle et non pas seulement,* *comme dans* (3.23), *des termes qui dépendent de l'échantillon de matière considérée* (autrement dit la contribution universelle fait partie des termes prépondérants dans II).

La contribution de I *est universelle au même sens que la gravitation (dite universelle) ou encore au même sens que le champ de forces fictives d'inertie : leur action est la même sur tout élément de matière, quelle que soit sa densité de matière.*

L'effet de I *est donc d'accélérer les masses ponctuelles d'épreuve indépendamment de leurs masses* : on obtient donc ici une des caractéristiques de *l'effet gravitationnel de spin* mis en évidence heuristiquement par O. Costa de Beauregard [4].

2. Sur un espace à connexion riemannienne, on obtient [11 *a*] à partir de

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P)\, u_\alpha\, u_\beta - \Phi_{\alpha\beta},$$

les résultats suivants :

$$u^\alpha\, \nabla_\alpha\, u_\beta = u^\alpha\, (\delta^\sigma_\beta\, u_\alpha - \delta^\sigma_\alpha\, u_\beta)\, K_\sigma, \tag{3.24}$$

où

$$K_\sigma\, (\rho + P) = \nabla^\beta\, \Phi_{\beta\sigma}. \tag{3.25}$$

Comme il semble naturel d'admettre que (3.8) généralise (3.25) pour un espace à connexion non riemannienne, nous voyons donc, en comparant (3.10) et (3.24), que *l'immersion de* V_4 *dans* V_8 *et l'asymétrie de la connexion* font apparaître des termes « supplémentaires ».

En relativité générale, pour le schéma fluide parfait (alors $\Phi_{\alpha\beta} = P\, g_{\alpha\beta}$), l'équation du mouvement est

$$u^\alpha\, \nabla_\alpha\, u_\beta = u^\alpha\, (\delta^\sigma_\beta\, u_\alpha - \delta^\sigma_\alpha\, u_\beta)\, \frac{\partial_\sigma P}{\rho + P}. \tag{3.26}$$

Ici, dans le cadre de l'immersion de V_4, on obtient *en annulant le tenseur de torsion* :

$$u^\alpha\, \nabla_\alpha\, u_\beta = u^\alpha\, (\delta^\sigma_\beta\, u_\alpha - \delta^\sigma_\alpha\, u_\beta) \left(2\, \frac{\partial_\sigma P}{\rho + P} + \frac{1}{6}\, \partial_\sigma \operatorname{Log} |\, \rho + P\, | \right). \tag{3.27}$$

Mais en réalité, il nous faut « *supprimer l'immersion de* V_4 *dans* V_8 », c'est-à-dire prendre nul le champ de tenseurs $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$: (3.27) se réduit bien alors à (3.26).

Cette étude comparative étant achevée, donnons les expressions des tenseurs I, M, N *lorsque les fonctions* ρ et P *sont des constantes* :

$$\mathring{I}_{\beta\alpha} = I_{\beta\alpha},$$
$$\mathring{M}_{\beta\alpha} = 0,$$

$$\mathring{N}_{\beta\alpha} = \frac{7\,a}{18}(\rho + P)\, s^{\rho}_{\beta\alpha}\, u_{\rho} + \frac{1}{3}(\delta^{\sigma}_{\beta}\, u_{\alpha} - \delta^{\sigma}_{\alpha}\, u_{\beta})$$
$$\times \left[\frac{a^2}{3}(\rho + P)\, g^{\gamma\mu}\, s^{\rho}_{\sigma\mu}\, \nabla_{\tau}\, s^{\tau}_{\rho\gamma} - 2\,a\,(\rho + P)\, s^{\rho}_{\sigma\mu}\, U^{\mu}_{\rho}\right];$$

par conséquent les équations (3.18) s'écrivent alors

$$u^{\alpha}\, \nabla_{\alpha}\, u_{\beta} = u^{\alpha}\left[I_{\beta\alpha} + \chi\, \mathring{N}_{\beta\alpha}\right], \tag{3.28}$$

la contribution universelle I étant strictement inchangée.

Dans un champ $(g_{\alpha\beta}, \Pi_{\beta\alpha})$ donné, une masse d'épreuve douée de spin décrira dans V_4 un tube d'univers S, engendré par les courbes solutions du système différentiel (3.18).

Si l'on passe à la limite en négligeant la section du tube, la trajectoire d'un point matériel doué de spin dans un champ $(g_{\alpha\beta}, \Pi_{\beta\alpha})$ *donné satisfait aux équations* (3.28) *où* ρ *est la densité de matière constante de la particule* (P étant nulle sur S).

Par conséquent dans le cas général de notre théorie, *les particules d'épreuve à spin ne décrivent pas* (5) *des géodésiques de l'espace-temps, mais des courbes d'équations du type* (6) :

$$\boxed{\frac{d^2 x^{\beta}}{ds^2} + \mathcal{L}^{\beta}_{(\sigma\alpha)}\, \frac{dx^{\sigma}}{ds}\, \frac{dx^{\alpha}}{ds} = \frac{dx_{\sigma}}{ds}\left[I^{\beta\sigma} + M^{\beta\sigma} + \chi\, N^{\beta\sigma}\right].} \tag{3.29}$$

Précisons que nous appellerons géodésiques sur V_4, les courbes autoparallèles, c'est-à-dire les courbes C telles que leur vecteur tangent u soit transporté par parallélisme le long de C,

$$\nabla_u\, u = 0.$$

Nous distinguerons sur V_4 :

les géodésiques relatives à $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, *appelées simplement géodésiques de* V_4 :

$$u^{\alpha}\, \nabla_{\alpha}\, u_{\beta} = 0,$$

et les géodésiques relatives à $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$:

$$u^{\alpha}\, D_{\alpha}\, u_{\beta} = 0.$$

(5) J. M. Souriau arrive à la même conclusion dans [14].

(6) On rappelle que $\mathcal{L}^{\beta}_{(\sigma\alpha)} = \left\{ {\beta \atop \sigma\alpha} \right\} + g^{\beta\gamma}(g_{\sigma\tau}\, S^{\tau}_{\gamma\alpha} + g_{\alpha\tau}\, S^{\tau}_{\gamma\sigma})$.

Dans les équations (3.29), le terme intéressant est bien sûr le tenseur « universel » I. Si l'on se limite aux termes en χ^0, on obtient les équations approchées

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = u^\sigma [I_{\beta\sigma} + M_{\beta\sigma}];$$

physiquement, ces équations décrivent avec une approximation très raisonnable les trajectoires des particules à spin de notre champ. On remarquera que *le tenseur* I *ne peut jamais être négligé dans notre théorie*; on peut même dire qu'il est *déterminant* pour assurer que les trajectoires ne sont pas des géodésiques de V_4 : en effet, *modulo des termes en* χ, *pour* ρ *et* P *constants* nous avons

$$\boxed{u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = u^\sigma I_{\beta\sigma},}$$

soit

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = u^\alpha \left(\delta^\sigma_\beta u_\alpha - \delta^\sigma_\alpha u_\beta\right)\left(2 \nabla_\mu U^\mu_\sigma + \frac{a}{3} \nabla^\gamma \nabla_\rho s^\rho_{\gamma\sigma} + \frac{a}{3} g^{\mu\gamma} s^{?}_{\lambda\mu} \overline{R}^\lambda_{\gamma\rho\sigma}\right),$$

alors que les équations classiques (3.26) se réduisent dans le même cas aux équations des géodésiques de V_4.

Cas particulier : antisymétrie totale du tenseur H. — Supposons que le tenseur H (introduit au chapitre 2) soit complètement antisymétrique :

$$H_{\alpha\beta\gamma} = g^{\lambda\tau} S^\rho_{\lambda\alpha} \eta_{\tau\beta\rho\gamma} = H_{[\alpha\beta\gamma]};$$

on a alors immédiatement

$$(3.30) \qquad \overset{*}{S}_\alpha = 0$$

ou encore

$$S_{[\alpha\beta\gamma]} = 0.$$

Par conséquent, nous avons aussi

$$(3.31) \qquad \begin{cases} T_{(\alpha\beta)} = (\rho + P)\, u_\alpha u_\beta - P\, g_{\alpha\beta}, \\ U^\sigma_\nu = 0. \end{cases}$$

Dans ces conditions, les composantes des tenseurs I, M, N se simplifient quelque peu, mais on vérifiera facilement que I, M, N *restent tous non nuls*.

On peut donc dire qu'il n'y a pas de changement de forme pour les équations des trajectoires de ce cas particulier :

$$(3.32) \qquad u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = u^\alpha \left[\overset{*}{I}_{\beta\alpha} + \overset{*}{M}_{\beta\alpha} + \chi\, \overset{*}{N}_{\beta\alpha}\right],$$

avec, précisons-le,

$$\overset{*}{\mathrm{I}}_{\beta\alpha} = (\delta_\beta^\sigma\, u_\alpha - \delta_\alpha^\sigma\, u_\beta)\left(\frac{a}{3}\nabla^\gamma\,\nabla_o\, s^\rho_{\gamma\sigma} + \frac{a}{3}\, g^{\mu\gamma}\, s^\rho_{\lambda\mu}\,\overline{\mathrm{R}}^\lambda_{\gamma\rho\sigma}\right).$$

Or, nous avons vu plus haut que la partie symétrique du tenseur impulsion-énergie d'un fluide parfait doué de spin étant exprimée par

$$(3.33)\quad \mathrm{T}_{(\alpha\beta)} = (\rho + \mathrm{P})\left\{\frac{1}{2}\left[u_\alpha\,(u_\beta - \overset{*}{s}_\beta) + u_\beta\,(u_\alpha - \overset{*}{s}_\alpha)\right]\right\} - \mathrm{P}\, g_{\alpha\beta},$$

les relations (3.18) déterminent les trajectoires d'une masse d'épreuve douée de spin plongée dans le fluide précédent.

Si les conditions (3.30) sont réalisées, on peut alors déduire de la forme (3.32) [analogue à (3.18)] des équations de trajectoires correspondantes deux conséquences.

α. Si la forme (3.33) est *suffisante* pour prouver que la matière considérée est douée de spin (toujours dans notre contexte où nous admettons que la présence de spin est étroitement liée à une torsion de l'univers), nous pouvons dire, en outre, *qu'elle n'est pas nécessaire.*

En effet, le tenseur classique (3.31) conduit à des trajectoires (3.32) de forme analogue à celles de (3.18), que nous pouvons considérer comme caractérisant la matière à spin, et ce, essentiellement à cause de la présence du *terme universel non nul* $\overset{*}{\mathrm{I}}_{\beta\alpha}$.

β. Si le vecteur $\overset{*}{\mathrm{S}}_\alpha$ peut être considéré comme caractérisant une particule douée de spin, et si l'on admet ainsi que les conditions (3.30) signifient que la masse d'épreuve n'est pas douée de spin, on pourra dire que les équations (3.32) montrent que la trajectoire d'une particule d'épreuve sans spin, plongée dans le fluide à spin, est tout de même *infléchie* par le champ initial et en particulier indépendamment de sa masse par l'intermédiaire du tenseur universel $\overset{*}{\mathrm{I}}$.

En fait, si c'est cette dernière interprétation que nous avions retenue précédemment [2 *d*], nous pensons maintenant que la conséquence (α) est déduite plus naturellement des résultats précédents. Nous ajouterons cependant que si l'on se place dans l'optique initiale de (β), *on peut facilement retrouver* (α) : $\overset{*}{\mathrm{S}}_\alpha$ caractérisant une particule douée de spin, si nous avons colinéarité entre $\overset{*}{\mathrm{S}}_\alpha$ et U_α, le tenseur $\mathrm{T}_{(\alpha\beta)}$ à la *forme* classique (3.31) et les équations des trajectoires sont de type (3.18), d'où la conclusion énoncée dans (α).

Nous dirons que la conséquence (β) a un aspect plus heuristique que (α).

Remarque : $\mathrm{I}_{\beta\alpha}$ *en l'absence de matière.* — Nous avons vu que tous les termes du tenseur universel I contiennent le tenseur de torsion. Proposons-nous d'étudier I *dans un univers vide de matière, à tenseur métrique de Minkowski.*

Supposons donc que l'univers soit minkowskien et vide de matière, c'est-à-dire que

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Lambda^{\sigma}_{\alpha\beta} = 0;$$

la gravitation étant en quelque sorte représentée par les $g_{\alpha\beta}$ non galiléens, il nous faut calculer le tenseur I lorsque ($\eta_{\alpha\beta}$ = métrique de Minkowski) :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{3.34}$$

Il nous suffit de considérer alors la forme générale (1.31) de la connexion de V_4 pour constater que (3.34) entraîne ici :

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0,$$

et par conséquent tous les termes universels disparaissent.

Ainsi, lorsque l'univers considéré ne contient pas de matière, le tenseur universel disparaît avec la gravitation que représentent les $g_{\alpha\beta}$ non galiléens.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki, *Algèbre linéaire*, chap. II.

[2] R.-L. Clerc :
- (*a*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 265, série A, 1967, p. 122.
- (*b*) *Ann. Inst. H. Poincaré*, sect. A, t. XII, n° 4, 1970, p. 343.
- (*c*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 272, série A, 1971, p. 1145.
- (*d*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 272, série A, 1971, p. 1760.
- (*e*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 274, série A, 1972, p. 525.
- (*f*) *Thèse*, Toulouse, 1972.
- (*g*) *Ann. Inst. H. Poincaré* (à paraître).

[3] H. C. Corben, *Classical and quantum theories of spinning particles*, Holden Day, 1968.

[4] O. Costa de Beauregard :
- (*a*) *J. Math. pures et appl.*, t. 22, 1943, p. 85.
- (*b*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 2199.
- (*c*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 214, 1942, p. 704.
- (*d*) *La théorie de la Relativité restreinte*, Paris, 1949.
- (*e*) *Cah. Phys.*, t. 12, 1958, p. 407.
- (*f*) *Cah. Phys.*, t. 13, 1959, p. 200.
- (*g*) *Cah. Phys.*, t. 105, 1959, p. 209.
- (*h*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 214, 1942, p. 904.
- (*i*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1950, p. 237 et 561.
- (*j*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1958, p. 1092.

[5] A. Crumeyrolle :

(*a*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 262, série A, 1966, p. 315.
(*b*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 263, série A, 1966, p. 523.
(*c*) *Riv. Mat. Univ. Parma*, (2), vol. 3, 1962, p. 331.
(*d*) *Riv. Math. Univ. Parma*, (2), vol. 5. 1964, p. 85.
(*e*) *Ann. Fac. Toulouse*, (4^e série, t. XXVI, 1962), 1964, p. 105.
(*f*) *Ann. Fac. Toulouse* (4^e série, t. XXIX, 1965), 1967, p. 53.
(*g*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 2121.

[6] A. Einstein, *The Meaning of relativity*, Methuen.

[7] F. Halbwachs, *Théorie relativiste des fluides à spin*, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

[8] F. Hehl :

(*a*) *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, vol. 18, 1966, p. 98.
(*b*) et E. Kroner, *Z. Physik*, vol. 187, 1965, p. 478.
(*c*) et B. K. Datta, *J. Math. Phys.*, U. S. A., vol. 12, n° 7, 1971, p. 1334.
(*d*) *Thèse*, 1970.

[9] T. W. B. Kibble, *J. of. Math Phys.*, vol. 2, n° 2, 1961, p. 212.

[10] M. Lenoir, *C. R. Acad. Sc.*, t. 259, 1964, p. 3701.

[11] A. Lichnerowicz :

(*a*) *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
(*b*) *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Rome, 1955.

[12] A. Papapétrou, *Phil. Mag.*, vol. 40, 1949, p. 937.

[13] D. W. Sciama :

(*a*) In : *Recent developments in general Relativity*, 1962, p. 415.
(*b*) *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 54, 1958, p. 72.

[14] J.-M. Souriau :

(*a*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 271, série A, 1970, p. 751.
(*b*) *C. R. Acad. Sc.*, t. 271, série A, 1970, p. 1086.

[15] J. Weyssenhof, *Acta. Phys. Pol.*, vol. 9, 1947, p. 7.

Cette étude constitue une partie de la thèse de Doctorat ès sciences mathématiques de M. René-Louis Clerc, enregistrée au C. N. R. S. sous le n° AO 6545, dont la soutenance est prévue pour octobre 1972 devant la Faculté des Sciences de Toulouse.

(*Manuscrit reçu le* 15 *juin* 1972.)