

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

V. D. LIAKHOVSKI

## **Déformations cobordales des algèbres de Lie et relativisation de la symétrie interne**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 17, n° 2 (1972), p. 119-129

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1972\\_\\_17\\_2\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_2_119_0)

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Déformations cobordales des algèbres de Lie et relativisation de la symétrie interne

par

**V. D. LIAKHOVSKI**

Institut Henri Poincaré, Département de Physique théorique,  
Université d'État de Léningrad.

---

RÉSUMÉ. — Dans ce travail il a été montré que l'utilisation des fonctions cobordales rend possible l'obtention de nouvelles déformations des algèbres de Lie réelles. Les propriétés fondamentales de ces déformations y sont étudiées. Y sont également examinées certaines applications de ces déformations au problème de relativisation de la symétrie interne.

### 1. INTRODUCTION

Les théorèmes ainsi dits « no-go » ([1]-[3]) posent des obstacles sévères à la relativisation de la symétrie interne des particules élémentaires. Les résultats de Roman [4] montrent que l'invariance de Poincaré est incompatible avec le spectre de masse discret. Il a été proposé dans plusieurs travaux ([5]-[7]) de construire une symétrie  $U_c$  proche de la somme directe de l'algèbre de Poincaré  $P$  et celle de la symétrie interne  $A$ . L'algèbre  $P \oplus A$  est considérée comme la contraction de l'algèbre  $U_c$  par rapport au paramètre (ou groupe de paramètres)  $c$ . Dans  $U_c$  la structure de sous-algèbre  $P$  peut être changée pour que les théorèmes ([1]-[4]) ne soient plus valables. M. Lévy-Nahas a étudié [8] les rapports entre les contractions et les déformations des algèbres de Lie. Le problème de construction de l'algèbre  $U_c$  a pris la forme du problème de déformation de l'algèbre initiale  $P \oplus A$  dans une algèbre  $U_c$  avec les propriétés données. Ces déformations ont été étudiées ([9]-[11]) pour l'algèbre  $A$  de la symétrie interne arbitraire dans tous les ordres de déformation. Il a été prouvé

que parmi les déformations de  $P \oplus A$  il n'y avait pas d'algèbres aux propriétés nécessaires. Il existe seulement une forme de lien entre la symétrie interne  $A$  et la symétrie externe  $P$ . Cette relation conserve la structure de la sous-algèbre  $P$  dans  $U_c$  et les résultats de O'Rai feartaigh ([1]-[2]) et de Roman [4] restent valables.

Selon les théorèmes de Gerstenhaber [12] dans les déformations habituelles toutes les fonctions du second groupe des cobords de l'algèbre initiale  $B^2(X, X)$  doivent être exclues. Cet article montre que dans certaines circonstances les cobords peuvent former des déformations qu'on ne peut pas obtenir suivant les règles connues [le premier terme est l'élément du second groupe de cohomologie  $H^2(X, X)$ ]. Dans ce travail les propriétés de ce nouveau type de déformation sont étudiées et les exemples correspondants sont fournis. Dans la dernière partie du travail nous construisons une déformation  $U_c$  de l'algèbre  $P \oplus A$  pour montrer que dans la symétrie  $U_c$  on peut avoir des changements structurels considérables.

Nous n'étudions que les algèbres de Lie sur le corps des nombres réels. On peut étendre ce traitement sur les autres algèbres de Lie et sur les autres anneaux et algèbres.

## 2. DÉFORMATIONS HABITUELLES ET DÉFORMATIONS COBORDALES

Soit  $X = (V, \mu)$  une algèbre de Lie d'espace vectoriel sous-jacent  $V$  d'une dimension finie sur le corps des nombres réels  $R$  avec la loi de composition  $\mu$ . Soit  $R((c))$  le corps des fractions de l'anneau des séries formelles de  $c$  sur  $R$ . L'espace vectoriel obtenu en étendant le corps  $R$  au corps  $R((c))$  est  $V_R = V \otimes_R R((c))$ .

Selon la définition donnée par Gerstenhaber [12] la déformation de l'algèbre de Lie  $X$  est une algèbre de Lie  $X_c = (V_R, f_c)$  où

$$(1) \quad f_c(a, b) = \mu(a, b) + c f_1(a, b) + c^2 f_2(a, b) + \dots$$

sous la condition :

$$(2) \quad \sum_{P(a, b, d)} f_c(f_c(a, b), d) \equiv (f_c \star f_c)(a, b, d) = 0;$$

$a, b, d \in V$ ;  $f_i : V \wedge V \rightarrow V$ ;

$P(a, b, d)$ , la permutation cyclique des variables.

Nous utiliserons aussi les notations de Richardson et Nijenhuis [13] :

$$(3) \quad [f, f'] \equiv f \star f' + f' \star f.$$

La condition (2) donne pour les composants de la série (1) le système des équations dites équations de déformation

$$(4) \quad \delta \bar{f}_c + \frac{1}{2}[\bar{f}_c, \bar{f}_c] = 0,$$

où  $\delta \bar{f}_c \equiv [\bar{f}_c, \mu]$ ;  $\bar{f}_c \equiv f_c - \mu$ .

Pour la première fonction déformatrice  $f_1$  nous avons alors la condition

$$(5) \quad \delta f_1 = 0,$$

c'est-à-dire,  $f_1$  doit être un élément du groupe  $Z^2(X, X)$ . Gerstenhaber a précisé [12] que si une déformation  $f_c$  commence par un cobord  $f_n = b \in B^2(X, X)$ , il est toujours possible de l'éliminer, c'est-à-dire de rendre cette déformation équivalente à une déformation qui commence par l'élément  $f_n = h \in H^2(X, X)$ . Il en résulte qu'il faut toujours commencer à construire une déformation avec une fonction  $h \in H^2(X, X)$ , et que toutes les algèbres semi-simples sont stables. On peut étendre la technique de Gerstenhaber sur les autres termes de la série (1) pour que tous les éléments de  $B^2(X, X)$  soient éliminés de toutes les fonctions déformatrices.

Rappelons qu'une algèbre  $X = (V, \mu)$  n'est équivalente à une autre  $X' = (V, \mu')$  que dans le cas et seulement dans le cas où il existe un homomorphisme  $\Phi : V \rightarrow V$  tel que l'élément  $e^\Phi$  du groupe  $GL(V)$  des applications linéaires et régulières de  $V$  dans  $V$  transforme  $X$  en  $X'$  :

$$(6) \quad \mu'(a, b) = (e^\Phi \mu)(a, b) \equiv e^\Phi \mu(e^{-\Phi} a, e^{-\Phi} b).$$

Soit  $\Phi$  une fonction de  $c$  linéaire

$$\Phi = c \Phi_1.$$

Dans ce cas on peut présenter  $\mu'$  sous forme d'une série

$$(7) \quad \mu' = \mu - c \delta \Phi_1 + \dots$$

La possibilité de trouver toujours une transformation  $e^\Phi$  de  $GL(V)$  telle que la déformation

$$(8) \quad \mu_c = \mu + cb + c^2 f_2 + \dots$$

transformée par  $e^{c \Phi_1}$  ou  $\Phi_1 = \varphi$  prenne la forme

$$(9) \quad \mu'_c = (e^{c \Phi_1} \mu_c) = \mu + c(b - \delta \Phi) + c^2 f'_2 + \dots = \mu + c^2 f'_2 + \dots$$

quelle que soit la fonction  $b \in B^2(X, X)$  est le point essentiel du raisonnement.

Examinons la transformation (6) avec l'élément  $e^{c\Phi_1}$  de  $GL(V)$  en détails :

$$(10) \quad \mu'(a, b) = (e^{c\Phi_1}\mu)(a, b) = \mu(a, b) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(a, b) c^n,$$

où

$$(11) \quad F_n(a, b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)! k!} \Phi_1^k (\delta\Phi_1)^{n-k}(a, b) \\ + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-p-1} \Phi_1^{p-1} \frac{(-1)^{n-p+1}}{(p-1)! (n-p-k)! (k+1)!} \\ \times \mu(\Phi_1^{n-p-k} a, \Phi_1^{k+1} b).$$

Chaque terme de l'expression (8) donne naissance à une série de type (10).  $\mu'_c$  est donc en général une série infinie dont les coefficients  $f'_i$  se forment à partir de termes correspondants des développements (10). Il résulte de l'expression (11) que les fonctions déformatrices transformées  $f'_i$  sont les éléments de  $C^2(V, V)$ .

Soit  $f'_k$  la première fonction qui ne s'annule pas lors de la transformation. Pour  $f'_k$  nous avons la restriction découlant de l'équation de déformation (4) :

$$\delta f'_k = 0; \quad f'_k \in Z^2(X, X).$$

Si la projection de  $f'_k$  sur le sous-espace  $B^2(X, X)$  n'est pas égale à zéro il faut « chasser » cette partie de la fonction à l'aide d'une transformation correspondante de  $GL(V)$ . Après avoir ainsi traité toutes les composantes de (9) nous obtenons une série généralement infinie des homomorphismes

$$(12) \quad \Phi \equiv c\Phi_1 + c^k\Phi_k + \dots + c^m\Phi_m + \dots$$

Il y a deux possibilités suivantes :

1° La série (12) est convergente (ou finie). Alors il existe la transformation  $e^\Phi \in GL(V)$  telle que

$$(13) \quad (e^\Phi \mu_c) = \mu$$

ou

$$(14) \quad (e^\Phi) \mu_c = \mu + 0 + \dots + c^n h_n + \dots$$

Cela signifie que l'algèbre  $\mu_c$  est équivalente à  $\mu$  ou à une déformation usuelle.

2° La série (12) est divergente. Alors il n'existe pas de transformation de  $GL(V)$  telle que les parties cobordales des fonctions déformatrices en (8) puissent être exclues. Autrement dit, la déformation (8) n'est pas équivalente à l'algèbre initiale ni à aucune déformation usuelle. Nous appellerons cette déformation originale déformation cobordale ou  $b$ -déformation pour la distinguer des déformations usuelles ou  $h$ -déformations.

La première conclusion est la nécessité d'utiliser toutes les fonctions de  $Z^2(X, X)$  dans les déformations d'une algèbre de Lie  $X$ . Quand on cherche à se débarrasser d'un élément de  $B^2(X, X)$  on doit apprécier la convergence de la série correspondante (12).

On obtient des résultats pareils en introduisant des cobords dans d'autres termes du développement (8). Il est aussi à noter que dans la série (12) on peut ajouter à chaque  $\Phi_k$  n'importe quelle fonction de  $Z^1(X, X)$ .  $\Phi$  est considérée divergente seulement quand elle est divergente pour toutes les  $\Phi_k$  possibles.

La situation change en fonction des différents types de divergence de  $\Phi$ .

Notamment  $\Phi$  peut être divergente à partir d'une certaine valeur  $c_0$  de  $c$  c'est-à-dire il existe un élément de  $GL(V)$  dépendant de  $c$  qui devient singulier quand  $c$  dépasse la valeur critique  $c_0$ . Alors par définition ce n'est qu'une contraction de l'algèbre de Lie initiale  $\mu$ . Pour  $c > c_0$  on a une transformation de l'algèbre contractée (transformation d'équivalence ou bien une déformation), L'exemple fourni ci-dessous montrera qu'on peut joindre une contraction à une  $h$ -déformation. Les  $b$ -déformations de ce genre sont essentiellement non locales.

Selon le théorème 23.4 de Nijenhuis et Richardson [13] l'ensemble des orbites des  $h$ -déformations d'une algèbre de Lie  $(V, \mu)$  sur un champ algébriquement fermé forme le voisinage du point initial  $\mu$  dans la variété algébrique  $M$  des algèbres de Lie d'espace sous-jacent  $V$ . Ainsi pour les algèbres de Lie complexes on n'a que des  $b$ -déformations non locales.

Avant de passer aux exemples, transformons les expressions

$$(15) \quad (e^{-\Phi} \mu) = \mu_c,$$

$$(16) \quad (e^{-\Phi} \mu) = \mu_c + c^n (e^{-\bar{\Phi}} h_n) + \dots = \mu_c + c^n \tilde{h}_n + \dots,$$

l'élément  $(e^{-\Phi} h_n) \equiv \tilde{h}_n$  doit appartenir à  $Z^2(X, X)$ . L'expansion (12) de  $\Phi$  transfère les égalités (15) et (16) aux systèmes infinis des équations non indépendantes pour les fonctions  $\Phi_i$ . Par exemple, si

$$(17) \quad \mu_c = \mu + c \delta\varphi,$$

nous avons le système suivant :

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = \varphi, \\ \sum_{m_1+m_2+m_3=n} \left\{ \left( \sum_{k=1}^{m_1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{r_1+r_2+\dots+r_k=m_1} \Phi_{r_1} \Phi_{r_2} \dots \Phi_{r_k} \right) \right. \\ \quad \times \mu \left( \left( \sum_{k=1}^{m_2} \frac{1}{k!} \sum_{r_1+r_2+\dots+r_k=m_2} \right. \right. \\ \quad \quad \left. \left. \times \Phi_{r_1} \Phi_{r_2} \dots \Phi_{r_k} \right) a, \right. \\ \quad \left. \left. \times \left( \sum_{k=1}^{m_3} \frac{1}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=m_3} \Phi_{r_1} \dots \Phi_{r_k} \right) b \right) \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Dans les équations

$$\Phi_{r_i} \Big|_{r_i=0} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{r_1+r_2+\dots+r_k=m_i} \Phi_{r_1} \Phi_{r_2} \dots \Phi_{r_k} \Big|_{m_i=0} = 1.$$

Pour étudier une déformation  $\mu_c$  (17) il faut essayer de résoudre successivement les équations du système (18). Selon la relation (16) c'est impossible pour une algèbre  $\mu_c$  équivalente à une  $h$ -déformation de  $\mu$ .

Nous choisissons quelques algèbres  $\mu_i$  de la dimension 3 pour illustrer les propriétés des  $b$ -déformations :

$$\begin{aligned} \mu_1 \{ [e_1, e_2] &= e_3; [e_2, e_3] = e_1; [e_3, e_1] = e_2 \}, \\ \mu_2 \{ [e_1, e_2] &= -e_3; [e_2, e_3] = e_1; [e_3, e_1] = e_2 \}, \\ \mu_3 \{ [e_1, e_2] &= 0; [e_2, e_3] = e_1; [e_3, e_1] = e_2 \}, \\ \mu_4 \{ [e_1, e_2] &= 0; [e_2, e_3] = -e_1; [e_3, e_1] = e_2 \}, \\ \mu_5 \{ [e_1, e_2] &= 0; [e_2, e_3] = 0; [e_3, e_1] = e_2 \}. \end{aligned}$$

Les relations connues entre les algèbres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  peuvent être représentées sous forme d'une  $b$ -déformation

$$\mu_c = \mu + c \delta\varphi$$

ou

$$\begin{aligned} \delta\varphi(e_i, e_k) &= (-\delta_{i1} \delta_{k2} + \delta_{i2} \delta_{k1}) e_3, \\ \varphi &= \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution du système (18) donne la série

$$\Phi = c \varphi + c^2 \frac{1}{2} \varphi + \dots + c^n \frac{1}{n} \varphi + \dots$$

qui n'est divergente que pour  $c \geq 1$ . Donc quand  $c$  tend vers 1 la  $b$ -déformation  $\mu_c$  décrit une contraction de  $\mu_1$  en  $\mu_3$ . A partir de  $c > 1$  l'algèbre  $\mu_c$  est équivalente à  $\mu_2$  qui à son tour est une  $h$ -déformation de  $\mu_3$ .

De la même façon, on peut  $b$ -déformer l'algèbre  $\mu_3$  du groupe euclidien en une algèbre  $\mu_4$  du groupe quasi euclidien du plan par la transformation

$$\mu_3 + cf; \quad f(e_i, e_k) = (-\delta_{i2} \delta_{k3} + \delta_{i3} \delta_{k2}) e_1 + (\delta_{i3} \delta_{k1} - \delta_{i1} \delta_{k3}) e_2.$$

Le point singulier représente ici l'algèbre nilpotente  $\mu_5$ .

Par contre, si on ajoute à une  $h$ -déformation de  $\mu_3$  en  $\mu_1$ ,

$$\mu_3 + cf^h; \quad f^h(e_i, e_k) = (\delta_{i1} \delta_{k2} - \delta_{i2} \delta_{k1}) e_3$$

une fonction  $f^b$  de  $B^2(\mu_3, \mu_3)$  :

$$\mu_3 + c(f^h + f^b); \quad \begin{cases} f^b(e_1, e_2) = e_2; \\ f^b(e_3, e_1) = e_3; \end{cases} \quad f^b(e_2, e_3) = 0;$$

on peut vérifier le système (16) en utilisant une transformation finie  $e^{-\Phi}$  où

$$\Phi = c \Phi_1; \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que la  $b$ -déformation  $\mu_3 + c(f^h + f^b)$  est équivalente à une  $h$ -déformation. En ce cas c'est

$$\mu_3 + cf^h + c^2(-f^h).$$

### 3. $b$ -déformations de $P \oplus A$

Il était établi dans les travaux ([9]-[11]) que les  $h$ -déformations de  $P \oplus A \equiv U$  ne peuvent pas changer la structure de  $U$  suffisamment pour contourner les théorèmes « no-go ».

Les fonctions qui touchent la structure de  $P$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} f_A(t, t) &: T \wedge T \rightarrow A, \\ f_A(t, l) &: T \wedge L \rightarrow A, \\ f_A(l, l) &: L \wedge L \rightarrow A, \end{aligned}$$

où  $P = T \oplus L$ ,  $t \in T$ ,  $l \in L$ .



La fonction  $f_P(P, P)$  ne nous intéresse pas parce qu'elle ne fournit aucune relation entre  $P$  et  $A$ . Il est peu probable que  $f_A(t, l)$  puisse établir une dépendance entre l'opérateur  $M^2 = t_\mu t^\mu$  et les invariants de la symétrie interne  $A$ . Le groupe  $B^2(P, P)$  ne contient pas l'élément  $f_A(t, l)$  [10]. Il ne reste qu'une seule fonction  $f_A(t, l)$ .

Avec la fonction  $\varphi$  la plus simple

$$(19) \quad \varphi : T \rightarrow A; \quad \varphi^2 = 0.$$

On n'obtient que la  $b$ -déformation triviale. Réellement, homomorphisme  $\varphi$  produit un élément de  $B^2(U, U)$  :

$$(20) \quad f = \delta\varphi \begin{cases} f_A(t, l) = -\varphi(\mu(t, l)), \\ f_A(t, a) = \mu(\varphi(t), a), \end{cases}$$

selon l'équation de déformation (4) nous sommes obligés d'introduire un terme de deuxième ordre

$$(21) \quad f_A(t, t) = \mu(\varphi(t), \varphi(t)).$$

La  $b$ -déformation prend la forme suivante :

$$(22) \quad \mu(a, b) + c \delta\varphi(a, b) + c^2 \mu(\varphi(a), \varphi(b))$$

et l'équation (15) peut être vérifiée par  $\Phi = c\varphi$ . Le résultat reste le même pour  $\varphi : P \rightarrow A$  où  $\text{Im } \varphi \in \mathcal{Z}(A)$  [ $\mathcal{Z}(A)$ , le centre de l'algèbre  $A$ ].

Il faut choisir un homomorphisme plus complexe. Soit

$$(23) \quad \varphi \begin{cases} T \rightarrow A; \\ A \rightarrow T; \end{cases} \quad \varphi^2 \neq 0.$$

Pour simplifier les calculs supposons que

$$(24) \quad \text{Im } \varphi \in \mathcal{Z}(A),$$

$$(25) \quad \varphi(A') = 0.$$

Dans ces conditions le cobord prend la forme

$$(26) \quad \delta\varphi = f^I \begin{cases} f_A^I(t, l) = -\varphi(\mu(t, l)), \\ f_T^I(a, l) = \mu(\varphi(a), l). \end{cases}$$

La composition  $[f^I, f^I]$  ne peut être égale à zéro que sous la condition  $\varphi^2 = 0$ . Il en résulte qu'on doit ajouter la fonction  $f^{II}$  tel que

$$\frac{1}{2}[f^I, f^I] = -\delta f^{II}.$$

Les calculs directs donnent

$$(27) \quad \begin{cases} \delta f_{\mathbb{T}}^{\text{II}}(t_a, l_{ik}, l_{pr}) = \varphi_{\delta}^{\gamma} C_a^b{}_{ik} \varphi_{\gamma}^m C_m^s{}_{pr} + C_{pr}^b{}_a \varphi_{\delta}^{\gamma} \varphi_{\gamma}^m C_m^s{}_{ik}, \\ \delta f_{\mathbb{A}}^{\text{II}}(a_{\gamma}, l_{ik}, l_{pr}) = -\varphi_{\gamma}^a C_{ik}^u{}_{pr} C_{ur}^m{}_a \varphi_m^{\gamma}, \end{cases}$$

où les indices latins varient de 0 à 3 et les indices grecs numérotent les générateurs de l'algèbre A; C désigne les constantes de structure de P.

On peut choisir  $f^{\text{II}}$  sous la forme suivante :

$$(28) \quad f^{\text{II}} \begin{cases} f_{\mathbb{T}}^{\text{II}}(t, l) = \varphi^2(\mu(t, l)), \\ f_{\mathbb{A}}^{\text{II}}(a, l) = -\varphi(\mu(\varphi(a), l)). \end{cases}$$

L'équation de déformation (4) détermine pour les termes de troisième ordre :

$$(29) \quad -\delta f^{\text{III}}(a, l, l) = [f^{\text{I}}, f^{\text{II}}](a, l, l) \\ = \sum_{\mathbb{P}(a, l, l)} \{ \mu(\varphi^2(\mu(\varphi(a), l)), l) - \varphi^2(\mu(\mu(\varphi(a), l), l)) \}.$$

Ce qui nous donne directement

$$(30) \quad f_{\mathbb{T}}^{\text{III}}(a, l) = \varphi^2(\mu(\varphi(a), l)).$$

Les compositions suivantes sont égales à zéro :

$$(31) \quad [f_1^{\text{I}}, f_3^{\text{III}}] = [f_2^{\text{II}}, f_2^{\text{II}}] = [f_2^{\text{II}}, f_3^{\text{III}}] = [f_3^{\text{III}}, f_3^{\text{III}}] = 0.$$

Ces résultats ensemble avec l'équation (4) nous donnent la possibilité de ne garder que trois termes dans la  $b$ -déformation

$$(32) \quad \mu_c = \mu + c f^{\text{I}} + c^2 f^{\text{II}} + c^3 f^{\text{III}}.$$

Pour apprécier cette déformation il faut résoudre le système (15). Les calculs simples mais encombrants donnent pour  $\Phi$  l'expansion

$$(33) \quad \Phi = -c\varphi + \frac{1}{2}c^2\varphi^2 - \frac{1}{3}c^3\varphi^3 + c^3 R_A \varphi^3 + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} c^n \varphi^n + (-1)^n c^n R_A \varphi^n + \dots,$$

où  $R_A$  est le projecteur sur le sous-espace A.  $\varphi$  peut être choisie sous forme d'une matrice

$$(34) \quad \varphi = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} & \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{T} \\ \hline \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{A} & \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \end{array} \right)$$

et la série (33) peut être divisée en quatre parties selon les blocs différents de la matrice  $\varphi$  :

$$(35) \quad \Phi_1 : T \rightarrow T; \quad \frac{1}{2} c^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} c^4 \varphi^4 + \dots + \frac{1}{2n} c^{2n} \varphi^{2n};$$

$$(36) \quad \Phi_2 : A \rightarrow T; \quad -c \varphi - \frac{1}{3} c^3 \varphi^3 - \dots - \frac{1}{2n+1} c^{2n+1} \varphi^{2n+1};$$

$$(37) \quad \Phi_3 : A \rightarrow A; \quad \frac{1}{2} c^2 \varphi^2 - \frac{3}{4} c^4 \varphi^4 + \dots + \left( \frac{1}{2n} - 1 \right) c^{2n} \varphi^{2n};$$

$$(38) \quad \Phi_4 : T \rightarrow A; \quad -c \varphi + \frac{2}{3} c^3 \varphi^3 + \dots + \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) c^{2n+1} \varphi^{2n+1}.$$

Supposons que les éléments de la matrice (34) ne soient égaux qu'à 0 ou à 1. Il est facile de voir que toutes les séries (46)-(49) sont divergentes pour  $c \geq 1$ .

Il en résulte que nous avons construit une  $b$ -déformation non triviale  $\mu_c$  de  $P \oplus A$  qui change la structure de  $P$ .

Par exemple :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \equiv G = \{ g_\beta \} \quad (\beta = 0, 1, 2, \dots, 5); \\ [g_i, g_j] = g_0; \quad \{ g_0, g_3, g_2, g_1 \} \in \mathcal{Z}(A); \\ \varphi(t_\beta) = g_\beta \quad (\beta = 0, 1, 2, 3); \quad \varphi(g_i) = t_i \quad (i = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

Dans la  $b$ -déformation  $U_c$  de  $P \oplus G$  les commutateurs de  $P$  changent :

$$[t_i, t_{pq}] = C_{i \ pq}^r (t_r - c g_r + c^2 R t_r),$$

où  $R$  est le projecteur sur le sous-espace des translations spaciales.

Nous avons prouvé l'existence de  $b$ -déformations qui produisent des changements essentiels des relations entre  $P$  et  $A$  dans  $U_c$ . Ce qui est particulièrement important en vue des résultats de Roman [4].

En supprimant les conditions (24) et (25) imposées pour simplifier les calculs, on peut construire les algèbres  $A$  beaucoup plus riches, en mesure de décrire la symétrie physique interne. En outre, on peut essayer de combiner les fonctions de  $H^2$  avec les cobords pour construire des  $b$ -déformations aux propriétés diverses.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M<sup>me</sup> Lévy-Nahas avec qui j'ai eu des discussions fructueuses au Centre de Physique théorique de l'École Polytechnique.

Je voudrais exprimer mes remerciements au Professeur J. P. Vigiér et aux collaborateurs du Laboratoire de Physique théorique de l'Institut Henri Poincaré pour leurs utiles commentaires et suggestions ainsi que pour leur hospitalité qui a facilité l'achèvement de ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. O'RAIFEARTAIGH, *Phys. Rev.*, vol. 139, 1965, p. 1056.
- [2] L. O'RAIFEARTAIGH, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 14, 1965, p. 332.
- [3] R. JOST, *Helv. Phys. Acta*, vol. 39, 1966, p. 369.
- [4] P. ROMAN, *Proceedings of Conference on Non-Compact Groups*, Benj., New York, 1966, p. 89.
- [5] H. D. DOEBNER et O. MELSHEIMER, Preprint 379, Marburg University, 1967.
- [6] M. LÉVY-NAHAS, *J. Math. Phys.*, vol. 2, 1961, p. 1.
- [7] J. LOHMUS, *Otepya II, Summer School on Elementary Particles*, 4, Tartu, 1970, p. 1-131.
- [8] M. LÉVY-NAHAS, *Thèses*, Orsay, 1969.
- [9] V. D. LIAKHOVSKI, *Comm. Math. Phys.*, vol. 11, 1968, p. 131.
- [10] V. D. LIAKHOVSKI, *Comm. Math. Phys.*, vol. 14, 1969, p. 70.
- [11] V. D. LIAKHOVSKI, Preprint F. A. I.-3, Tartu, 1970.
- [12] M. GERSTENHABER, *Ann. Math.*, vol. 79, 1964, p. 59.
- [13] A. NIJENHUIS et R. W. RICHARDSON, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 72, 1966, p. 1.

(Manuscrit reçu le 30 mai 1972.)

---