

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

THÉRÈSE LÉVY

Écoulement magnétohydrodynamique autour d'une sphère creuse

Annales de l'I. H. P., section A, tome 17, n° 1 (1972), p. 1-42

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Écoulement magnétohydrodynamique autour d'une sphère creuse

par

Thérèse LÉVY*

ABSTRACT. — This paper considers the steady flow of an incompressible, viscous and electrically conducting fluid past a hollow sphere in a magnetic field, the flow and the magnetic field at infinity being uniform and parallel. The Hartmann number M , the magnetic Reynolds number R_m and the Reynolds number R are supposed to be small and of the same order of magnitude. The solution requires the matching of two asymptotic expansions for each quantity. The influence of M , R_m , R on this solution is studied up to the order of the square of the small parameters.

INTRODUCTION

Le mouvement stationnaire d'un fluide incompressible, visqueux et électriquement conducteur autour d'une sphère creuse en présence d'un champ magnétique est étudié lorsque la vitesse de l'écoulement et le champ magnétique à l'infini sont uniformes et parallèles. Le problème fait intervenir trois paramètres : le nombre de Reynolds R , le nombre de Hartmann M et le nombre de Reynolds magnétique R_m , qui seront supposés petits et du même ordre de grandeur.

Le premier paragraphe est consacré à la formulation du problème, on écrit les équations qui le régissent, on met en évidence l'existence d'un problème de perturbation singulière et on indique la forme sous laquelle on appliquera dans la suite la méthode des raccordements asymptotiques.

(*) Maître-Assistante, Service de Mécanique théorique, U. E. R. 49, Université Paris VI. Équipe de Recherche de Mécanique théorique des Fluides, associée au C. N. R. S.

Le paragraphe 2 étudie l'influence première de R , M et R_m sur la vitesse et le champ magnétique. On montre en particulier que cette influence est de l'ordre de grandeur des petits paramètres, et qu'à cet ordre, il apparaît aux grandes distances de la sphère deux sillages paraboliques.

Dans le paragraphe 3, on tente par passage à la limite dans les résultats obtenus aux paragraphes précédents de trouver les solutions lorsque deux des paramètres deviennent négligeables devant le troisième.

Enfin le paragraphe 4 étudie les termes d'ordre inférieur, on met ainsi en évidence l'intervention de façon logarithmique des petits paramètres dès les troisièmes termes dans les développements de la vitesse et du champ magnétique près de la sphère. L'influence de la perméabilité et de l'épaisseur de la coque sphérique est étudiée, il apparaît en particulier que loin du corps cette influence est d'ordre inférieur au carré des petits paramètres.

1. FORMULATION DU PROBLÈME

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, visqueux et électriquement conducteur autour d'une sphère creuse en présence d'un champ magnétique. Suivant les notations habituelles, on désigne par \vec{V} la vitesse du fluide, par P sa pression, par ρ sa masse volumique constante, par ν son coefficient cinématique de viscosité, par σ son coefficient de conductivité électrique et par μ_f sa perméabilité magnétique, ces trois grandeurs étant supposées constantes; \vec{B} désigne l'induction magnétique, \vec{H} le champ magnétique, \vec{E} le champ électrique et \vec{J} la densité de courant. Dans le fluide ces grandeurs sont liées par les équations [1] :

$$(1) \quad \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \rho \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{J} \times \vec{B},$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0,$$

$$(3) \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J},$$

$$(4) \quad \nabla \times \vec{E} = 0,$$

$$(5) \quad \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}),$$

$$(6) \quad \vec{B} = \mu_f \vec{H},$$

$$(7) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Le fluide s'écoule autour d'une sphère creuse de rayon extérieur a et de rayon intérieur b . L'écoulement et le champ magnétique à l'infini sont supposés uniformes et parallèles, on note $V_\infty \vec{i}$ et $H_\infty \vec{i}$ la vitesse du fluide et le champ magnétique à l'infini. On désigne par O le centre de la sphère, par $O\vec{x}$ l'axe issu de O et de vecteur unitaire \vec{i} , et par \mathcal{R} , θ , φ les coordonnées polaires de l'espace d'origine O . On cherche une solution du problème ayant la symétrie de révolution autour de l'axe $O\vec{x}$, donc indépendante de l'angle azimuthal φ , dans laquelle de plus \vec{V} et \vec{H} soient en chaque point dans le plan méridien correspondant. Dans ces conditions, les relations (3) et (5) indiquent que le champ électrique \vec{E} dans le fluide est perpendiculaire au plan méridien :

$$\vec{E} = E_\varphi(\mathcal{R}, \theta) \vec{e}_\varphi,$$

\vec{e}_φ désignant le vecteur unitaire perpendiculaire au plan méridien au point considéré, la relation (4) entraîne alors

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\mathcal{R} E_\varphi \sin \theta) = \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}} (\mathcal{R} E_\varphi \sin \theta) = 0,$$

donc

$$E_\varphi = \frac{k}{\mathcal{R} \sin \theta},$$

k étant une constante, et si on impose au champ électrique d'être fini sur l'axe de révolution, on en déduit :

$$\vec{E} = 0 \quad \text{dans le fluide.}$$

On introduit les grandeurs sans dimensions suivantes :

$$r = \frac{\mathcal{R}}{a}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{V}}{V_\infty}, \quad \vec{h} = \frac{\vec{H}}{H_\infty}, \quad p = \frac{P a}{\rho \nu V_\infty};$$

les équations du mouvement du fluide deviennent alors, en tenant compte de la relation $\vec{E} = 0$:

$$(8) \quad \mathbf{R} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \nabla^2 \vec{v} + M^2 (\vec{v} \times \vec{h}) \times \vec{h},$$

$$(9) \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

$$(10) \quad \nabla \times \vec{h} = R_m \vec{v} \times \vec{h},$$

$$(11) \quad \nabla \cdot \vec{h} = 0,$$

où les différentiations sont prises par rapport aux grandeurs sans dimensions, et où

$R = \frac{V_\infty a}{\nu}$ est le nombre de Reynolds;

$R_m = a \sigma \mu_f V_\infty$ le nombre de Reynolds magnétique;

$M = a \mu_f H_\infty \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$ le nombre de Hartmann.

En supposant la conductivité électrique de la coque $\left(\frac{b}{a} \leq r \leq 1\right)$ constante et finie, ainsi que celle de la cavité $\left(0 \leq r \leq \frac{b}{a}\right)$, et constantes également leurs perméabilités magnétiques respectives, le champ électrique étant nul, pour les mêmes raisons que plus haut, dans la coque et la cavité, le champ magnétique qui règne dans la coque $\vec{h}_s(r, \theta)$ et celui qui s'établit dans la cavité $\vec{h}_c(r, \theta)$ obéissent aux équations adimensionnelles suivantes :

$$(12) \quad \nabla \times \vec{h}_{s,c} = 0,$$

$$(13) \quad \nabla \cdot \vec{h}_{s,c} = 0.$$

Dans la suite on supposera que la perméabilité magnétique μ_f du fluide est égale à 1, on notera μ celle de la coque, et on prendra celle de la cavité égale à 1.

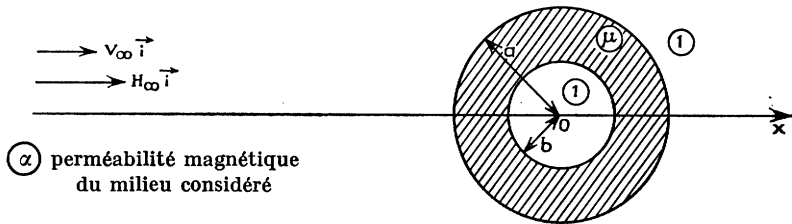


Fig. 1

Les conditions limites pour \vec{v} et \vec{h} sont, en ce qui concerne la vitesse à l'infini :

$$\vec{v}(\infty, \theta) = \vec{i},$$

et sur la sphère :

$$\vec{v}(1, \theta) = 0,$$

qui traduit la condition d'adhérence; en ce qui concerne le champ magnétique, à l'infini :

$$\vec{h}(\infty, \theta) = \vec{i},$$

à la traversée des surfaces $r = 1$ et $r = \frac{b}{a}$, continuité de la composante tangentielle du champ magnétique et de la composante normale de l'induction magnétique :

$$\begin{aligned} h_\theta(1, \theta) &= h_{s,\theta}(1, \theta), \\ h_r(1, \theta) &= \mu h_{s,r}(1, \theta), \\ h_{s,\theta}\left(\frac{b}{a}, \theta\right) &= h_{c,\theta}\left(\frac{b}{a}, \theta\right), \\ \mu h_{s,r}\left(\frac{b}{a}, \theta\right) &= h_{c,r}\left(\frac{b}{a}, \theta\right), \end{aligned}$$

enfin, on impose à $\vec{h}_c(r, \theta)$ de rester borné lorsque r tend vers zéro.

Dans la suite de ce travail on se placera dans le cas où M , R et R_m sont très petits et du même ordre de grandeur. Le point de vue le plus simple est de chercher, lorsque ces paramètres tendent vers zéro, pour \vec{v} et \vec{h} , solutions des équations (8) à (11) et remplissant les conditions limites indiquées ci-dessus, des développements uniformément asymptotiques par la méthode des petites perturbations.

Dans la recherche de développements uniformément asymptotiques à l'extérieur de la sphère $r = 1$, pour \vec{v} et \vec{h} , on voit facilement en tenant compte des conditions limites, que si de tels développements existent, ils commencent par des termes d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \vec{v}(r, \theta, M, R, R_m) &= \vec{v}_0(r, \theta, M, R, R_m) + o(1), \\ \vec{h}(r, \theta, M, R, R_m) &= \vec{h}_0(r, \theta, M, R, R_m) + o(1). \end{aligned}$$

En reportant ces développements dans les équations (8) à (11), où la pression a été éliminée de l'équation (8) en lui appliquant l'opérateur $(\nabla \times)$, on obtient le système d'équations auxquelles doivent satisfaire \vec{v}_0 et \vec{h}_0 :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}_0), \\ \nabla \cdot \vec{v}_0 &= 0, \quad \nabla \times \vec{h}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{h}_0 = 0. \end{aligned}$$

Les conditions limites pour ces deux vecteurs sont celles données pour \vec{v} et \vec{h} . Dans la coque et dans la cavité, le champ magnétique a des dévelop-

pements éventuels analogues à celui qu'on lui cherche dans le fluide :

$$\vec{h}_s(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{h}_{0s}(r, \theta, M, R, R_m) + o(1) \quad \text{dans le solide,}$$

$$\vec{h}_c(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{h}_{0c}(r, \theta, M, R, R_m) + o(1) \quad \text{dans la cavité,}$$

\vec{h}_{0s} et \vec{h}_{0c} étant solutions des équations obtenues à partir de (12) et (13) :

$$\nabla \times \vec{h}_{0s,c} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{h}_{0s,c} = 0.$$

À l'ordre 1, le champ des vitesses et le champ magnétique dans le fluide sont découplés. La vitesse est la même que dans le problème non magnétique, c'est la solution du problème de Stokes classique :

$$\vec{v}_0(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{v}_0(r, \theta)$$

dérivant de la fonction de courant

$$(14) \quad \psi_0(r, \theta) = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3} \right).$$

Les équations satisfaites par \vec{h}_0 sont indépendantes de la vitesse du fluide, comme il en est de même pour \vec{h}_{0s} et \vec{h}_{0c} , les expressions du champ magnétique dans le fluide, dans la coque sphérique et dans la cavité sont les mêmes que dans l'état statique [2].

Le champ magnétique dans le fluide ($r \geq 1$) est donc

$$(15) \quad \vec{h}_0(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{h}_0(r, \theta) = -\nabla \left[\left(-r + \frac{\gamma}{r^2} \right) \cos \theta \right],$$

avec

$$\gamma = \frac{(2\mu + 1)(\mu - 1) \left(1 - \frac{b^3}{a^3} \right)}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2 \frac{b^3}{a^3} (\mu - 1)^2}.$$

Dans l'enveloppe sphérique $\left(\frac{b}{a} \leq r \leq 1 \right)$ règne le champ magnétique

$$(16) \quad \vec{h}_{0s}(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{h}_{0s}(r, \theta) = -\nabla \left[\left(\beta r + \frac{\beta'}{r^2} \right) \cos \theta \right],$$

et dans la cavité $\left(0 \leq r \leq \frac{b}{a} \right)$:

$$(17) \quad \vec{h}_{0c}(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{h}_{0c}(r, \theta) = -\nabla (\delta r \cos \theta),$$

avec

$$\beta = \frac{-3(2\mu + 1)}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2\frac{b^3}{a^3}(\mu - 1)^2},$$

$$\beta' = \frac{3\frac{b^3}{a^3}(1 - \mu)}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2\frac{b^3}{a^3}(\mu - 1)^2},$$

$$\delta = \frac{-9\mu}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2\frac{b^3}{a^3}(\mu - 1)^2}.$$

A l'ordre 1, le champ magnétique en dehors de la sphère creuse correspond à la somme d'un champ uniforme \vec{i} et du champ d'un dipôle situé au centre de la sphère, de moment γ , orienté parallèlement à \vec{i} . Dans la

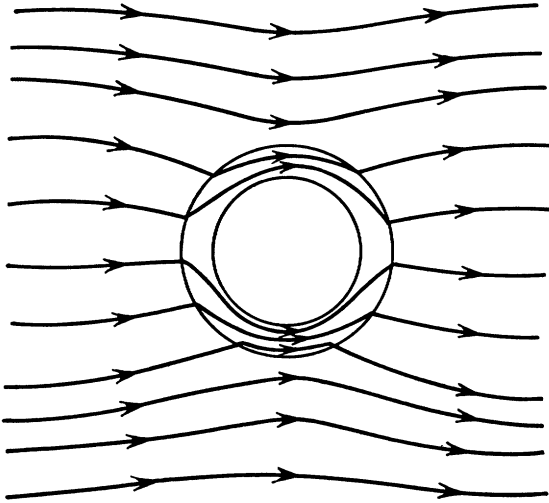


Fig. 2. — Effet d'une coque de grande perméabilité magnétique sur les lignes de champ magnétique.

cavité règne un champ magnétique uniforme, parallèle à \vec{i} et d'intensité $-\delta$. Lorsque μ devient infiniment grand, γ tend vers 1 et $-\delta$ vers $\frac{9}{2\mu\left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right)}$, le champ magnétique intérieur est alors proportionnel

à μ^{-1} . Par suite, une sphère creuse réalisée avec un matériau de grande perméabilité (μ de l'ordre de 10^3 à 10^6) permet d'obtenir une forte diminution du champ dans la cavité même avec une coque relativement mince.

Donc les termes d'ordre 1 de développements asymptotiques uniformes de \vec{v} et \vec{h} ont pu être déterminés directement à l'aide des équations et des conditions limites. Or on sait que dans le cas de l'écoulement lent d'un fluide visqueux, non conducteur de l'électricité et non soumis à un champ magnétique, autour d'une sphère, il est impossible de trouver au-delà de l'ordre 1, par la méthode des petites perturbations, lorsque R tend vers zéro, un développement uniformément asymptotique de la vitesse : le terme d'ordre R satisfaisant aux équations du mouvement et aux conditions limites sur la sphère ne tend pas vers zéro quand r grandit indéfiniment. On dit alors qu'on est en présence d'un problème de perturbation singulière et plus précisément d'un problème de valeurs aux limites singulières, puisqu'on se trouve dans l'impossibilité de remplir les conditions limites à l'infini, aux ordres inférieurs à 1, avec un développement de la vitesse de la forme

$$\vec{v}(r, \theta, R) = \vec{v}_0(r, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{v}_n(r, \theta, R),$$

obtenu directement comme solution des équations remplissant toutes les conditions limites.

Pour en revenir au cas auquel on s'intéresse, il est donc certain qu'il sera impossible d'obtenir, par la méthode des petites perturbations, pour $\vec{v}(r, \theta, M, R, R_m)$ un développement uniformément asymptotique d'ordre inférieur à 1. Pour définir \vec{v} et \vec{h} dans le fluide, il faudra introduire pour chacun des vecteurs au moins deux développements asymptotiques; l'un représentera uniformément la solution au voisinage du corps et devra donc remplir les conditions limites sur la sphère, l'autre représentera uniformément la solution aux grandes distances du corps et devra donc satisfaire aux conditions à l'infini.

Avant d'en venir à une définition plus précise de ces deux développements, on doit rappeler certaines notions [3].

Soit ε une quantité du même ordre de grandeur que les trois paramètres M , R et R_m , et soit $\Gamma(\varepsilon)$ l'ensemble des fonctions réelles $\lambda(\varepsilon)$ ayant les propriétés suivantes :

- $\lambda(\varepsilon)$ est définie et continue pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$;
- $\lambda(\varepsilon)$ est positive;
- $\lambda(\varepsilon)$ a une limite positive ou nulle quand ε tend vers zéro.

On définit sur $\Gamma(\varepsilon)$ une relation \mathcal{R} telle que :

si $\lambda(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon)$ et $\alpha(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon)$,

$$\lambda \mathcal{R} \alpha \iff \begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha} \rightarrow \text{limite finie quand } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \frac{\alpha}{\lambda} \rightarrow \text{limite finie quand } \varepsilon \rightarrow 0, \end{cases}$$

c'est une relation d'équivalence, et on désigne par $\text{ord } \alpha$ la classe d'équivalence de $\alpha(\varepsilon)$,

$$\text{ord } \alpha = \left\{ \lambda(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)} \text{ existe et est non nulle} \right\},$$

ces classes d'ordre sont partiellement ordonnées par la relation

$$\text{ord } \alpha_1 \ll \text{ord } \alpha_2 \iff \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(\varepsilon)}{\alpha_2(\varepsilon)} = 0.$$

Un ensemble S de classes d'ordre sera dit convexe si

$$\text{ord } \alpha_1 \in S, \quad \text{ord } \alpha_2 \in S$$

et

$$\text{ord } \alpha_1 \ll \text{ord } \lambda \ll \text{ord } \alpha_2 \implies \text{ord } \lambda \in S;$$

un ensemble S est ouvert s'il est convexe et si

$$\forall \text{ord } \lambda \in S, \quad \exists \alpha(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \psi(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon)$$

tels que

$$\text{ord } \alpha \in S, \quad \text{ord } \psi \in S \quad \text{et} \quad \text{ord } \alpha \ll \text{ord } \lambda \ll \text{ord } \psi,$$

on parlera d'intervalle ouvert; un ensemble S est un intervalle fermé s'il est convexe et si

$$\exists \text{ord } \alpha_1 \in S \quad \text{et} \quad \text{ord } \alpha_2 \in S$$

tels que

$$\text{ord } \alpha_1 \ll \text{ord } \lambda \ll \text{ord } \alpha_2 \quad \forall \text{ord } \lambda \in S.$$

Tout ceci permet de définir des notions qu'on utilisera dans la suite.

Soit $\alpha(\varepsilon)$ une fonction de $\Gamma(\varepsilon)$, r étant une variable réelle on pose

$r_\alpha = \frac{r}{\alpha(\varepsilon)}$, et soit $F(r, \varepsilon)$ une fonction définie pour $r \neq 0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

on note $F(r, \varepsilon) = G(r_\alpha, \varepsilon)$, si la fonction $G(s, 0^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(s, \varepsilon)$ existe uniformément pour $s \neq 0$ on définit alors

$$\lim_\alpha F(r, \varepsilon) = G(r_\alpha, 0^+)$$

ou encore

$$\lim_{\alpha} F(r, \varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ r_{\alpha} \text{ fixé}}} F(r, \varepsilon).$$

On dira que $H(r, \varepsilon)$ est une approximation uniforme à l'ordre $\eta(\varepsilon)$ de $F(r, \varepsilon)$ sur un ensemble convexe S de classes d'ordre si

$$\lim_{\alpha} \frac{F(r, \varepsilon) - H(r, \varepsilon)}{\eta(\varepsilon)} = 0,$$

$$\forall \alpha(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon) \text{ telle que } \text{ord } \alpha \in S.$$

Enfin, dernier point à rappeler, la relation d'équivalence introduite plus haut entre deux fonctions de $\Gamma(\varepsilon)$:

$\alpha \mathcal{R} \lambda$, se note encore $\alpha(\varepsilon) = O[\lambda(\varepsilon)]$, ce symbole O peut être étendu aux fonctions d'une variable vectorielle et de ε , on dira que $f(P, \varepsilon) = O[\alpha(\varepsilon)]$ dans \mathcal{O} [avec $\alpha(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon)$] s'il existe des constantes $\varepsilon_0 > 0$ et $K > 0$ telles que

$$\|f(P, \varepsilon)\| < K \alpha(\varepsilon) \quad \text{pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

de plus si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|f\|}{\alpha(\varepsilon)}$ existe, nécessairement cette limite est différente de 0; la norme employée ici sera

$$\|f\| = \text{Sup}_{\mathcal{O}} |f(P, \varepsilon)|.$$

Ces définitions étant données, on revient au problème posé ici. Dans les équations (8) à (11) où la pression a été éliminée de l'équation (8) en lui appliquant l'opérateur $(\nabla \times)$, on introduit le changement de variables $r^+ = f(\varepsilon) r$ avec $f(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon)$ et $\text{ord } f$ comparable à $\text{ord } \varepsilon$, on obtient alors

$$R f(\varepsilon) \nabla^+ \times [(\vec{v} \cdot \nabla^+) \vec{v}] = f^2(\varepsilon) \nabla^{+2} (\nabla^+ \times \vec{v}) + M^2 \nabla^+ \times [(\vec{v} \times \vec{h}) \times \vec{h}],$$

$$\nabla^+ \cdot \vec{v} = 0, \quad f(\varepsilon) \nabla^+ \times \vec{h} = R_m \vec{v} \times \vec{h}, \quad \nabla^+ \cdot \vec{h} = 0.$$

Passant à la limite formellement, c'est-à-dire en supposant que \vec{v} et \vec{h} tendent vers des limites non nulles quand ε tend vers zéro, et que les limites des dérivés soient égales aux dérivés des limites, on obtient deux types d'ensembles d'équations suivant l'ordre de grandeur de $f(\varepsilon)$ par rapport à ε (le cas $\text{ord } \varepsilon \geq \text{ord } f$ est à exclure car le système ne conserve pas suffisamment de généralité) :

(a) pour $\text{ord } \varepsilon \ll \text{ord } f \leq \text{ord } 1$,

$$0 = \nabla^{+2} (\nabla^+ \times \vec{v}), \quad \nabla^+ \cdot \vec{v} = 0, \quad \nabla^+ \times \vec{h} = 0, \quad \nabla^+ \cdot \vec{h} = 0;$$

(b) pour $\text{ord } \varepsilon = \text{ord } f$,

$$\begin{aligned} R \varepsilon \nabla^+ \times [(\vec{v} \cdot \nabla^+) \vec{v}] &= \varepsilon^2 \nabla^{+2} (\nabla^+ \times \vec{v}) + M^2 \nabla^+ \times [(\vec{v} \times \vec{h}) \times \vec{h}], \\ \nabla^+ \cdot \vec{v} &= 0, \quad \varepsilon \nabla^+ \times \vec{h} = R_m \vec{v} \times \vec{h}, \quad \nabla^+ \cdot \vec{h} = 0. \end{aligned}$$

Le système

$$0 = \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}), \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \nabla \times \vec{h} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{h} = 0,$$

est la limite formelle du système primitif dans l'intervalle de classes d'ordre $[\text{ord } \varepsilon, \text{ord } 1]$. Si on adopte « l'hypothèse fondamentale », telle qu'elle est formulée par P. A. Lagerstrom [4], il existe une solution de ce système qui représente uniformément la solution du système primitif, à l'ordre 1, sur le même intervalle de classes d'ordre, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $\vec{u}_0(r, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{l}_0(r, \theta, M, R, R_m)$, qu'on appellera solutions intermédiaires [3], telles que

$$\begin{aligned} \lim_f [\vec{v}(r, \theta, M, R, R_m) - \vec{u}_0(r, \theta, M, R, R_m)] &= 0, \\ \lim_f [\vec{h}(r, \theta, M, R, R_m) - \vec{l}_0(r, \theta, M, R, R_m)] &= 0; \\ \forall f(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon) \text{ et telle que } \text{ord } \varepsilon \ll \text{ord } f \ll \text{ord } 1 \\ (\lim_f [\] \text{ signifiant } \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} [\]) & \end{aligned}$$

De plus, on vient de trouver que ces solutions cessent, dans le cas général, d'être uniformément valables lorsque $\text{ord } f = \text{ord } \varepsilon$, c'est-à-dire lorsque $r = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

On doit chercher, *a priori*, pour \vec{v} et \vec{h} au moins deux développements asymptotiques, l'un uniformément valable au voisinage du corps [donc pour $r = O(1)$], l'autre uniformément valable au voisinage de l'infini, et ce qui précède suggère de le chercher uniformément valable pour $r = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ [ou en posant $\bar{r} = \varepsilon r$, pour $\bar{r} = O(1)$]. Selon la terminologie de S. Kaplan, les premiers seront appelés développements intérieurs et les seconds développements extérieurs. Soient

$$\begin{aligned} \vec{v}(r, \theta, M, R, R_m) &= \sum_{i=0}^{\infty} \vec{v}_i(r, \theta, M, R, R_m), \\ \vec{h}(r, \theta, M, R, R_m) &= \sum_{i=0}^{\infty} \vec{h}_i(r, \theta, M, R, R_m), \end{aligned}$$

les développements intérieurs de \vec{v} et \vec{h} , et soient

$$\vec{v}(r, \theta, M, R, R_m) = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{w}_i(\bar{r}, \theta, M, R, R_m),$$

$$\vec{h}(r, \theta, M, R, R_m) = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{k}_i(\bar{r}, \theta, M, R, R_m),$$

leurs développements extérieurs. C'est le développement extérieur de chacune des quantités qui joue le rôle de développement principal, car en variables extérieures la frontière du solide ayant pour équation $\bar{r} = \varepsilon$, il est aisé d'imaginer que cet obstacle va peu perturber l'écoulement et le champ magnétique donnés. Dans le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, l'obstacle se réduisant à un point, la perturbation tend vers zéro, donc \vec{v} tend vers la vitesse de l'écoulement libre \vec{i} et \vec{h} vers le champ donné \vec{l} , par suite les limites extérieures de \vec{v} et \vec{h} à l'ordre 1 sont connues :

$$\vec{w}_0(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) = \vec{i},$$

$$\vec{k}_0(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) = \vec{l}.$$

D'après le théorème d'extension [3] : si $H(P, \varepsilon)$ est une approximation de $F(P, \varepsilon)$ uniformément à l'ordre $\eta(\varepsilon)$ sur un intervalle fermé de classes d'ordre S_0 , alors elle l'est aussi dans un intervalle ouvert S contenant S_0 , il existe un intervalle ouvert I^* de l'ensemble des classes d'ordre contenant l'intervalle fermé $\text{ord } f = \text{ord } \varepsilon$, où $\vec{w}_0(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{k}_0(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ sont à l'ordre 1 des approximations uniformément valables de $\vec{v}(r, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{h}(r, \theta, M, R, R_m)$ respectivement. Or d'après l'hypothèse fondamentale les fonctions $\vec{u}_0(r, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{l}_0(r, \theta, M, R, R_m)$ sont des approximations de \vec{v} et \vec{h} uniformément valables à l'ordre 1 sur l'intervalle de classes d'ordre $[\text{ord } \varepsilon, \text{ord } 1]$. En conséquence $\vec{u}_0(r, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{w}_0(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ d'une part, $\vec{l}_0(r, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{k}_0(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ d'autre part sont des approximations d'une même quantité à l'ordre 1 sur l'intervalle de classes d'ordre

$$I = I^* \cap [\text{ord } \varepsilon, \text{ord } 1],$$

donc

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha} [\vec{u}_0 - \vec{i}] &= 0 \\ \lim_{\alpha} [\vec{l}_0 - \vec{l}] &= 0 \end{aligned} \right\} \forall \alpha(\varepsilon) \in \Gamma(\varepsilon) \text{ telle que } \text{ord } \alpha \in I.$$

$\vec{u}_0(r, \theta, M, R, R_m)$ est une solution des équations de Stokes satisfaisant à la condition d'adhérence sur la sphère, et $\vec{l}_0(r, \theta, M, R, R_m)$ une solution du problème magnétique statique remplissant sur la sphère les conditions limites indiquées précédemment, les conditions limites manquantes sont fournies pour \vec{u}_0 et \vec{l}_0 par les conditions indiquées ci-dessus appelées conditions de raccordement.

En insérant les développements intérieurs et extérieurs de \vec{v} et \vec{h} dans les équations du mouvement écrites dans les variables correspondantes intérieures et extérieures, on obtiendra les équations satisfaites par les quantités $\vec{v}_i, \vec{h}_i, \vec{w}_i, \vec{k}_i$.

Il est clair que les solutions \vec{v}_0 et \vec{h}_0 trouvées précédemment fournissent le premier terme de chacun des développements intérieurs et aussi les solutions intermédiaires à l'ordre 1 :

$$\vec{v}_0(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{u}_0(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{v}_0(r, \theta)$$

dérivant de la fonction de courant (14),

$$\vec{h}_0(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{l}_0(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{h}_0(r, \theta)$$

donné par la formule (15).

A l'ordre 1, $\vec{v}_0(r, \theta)$ et \vec{i} d'une part, $\vec{h}_0(r, \theta)$ et \vec{j} d'autre part, sont identiques en variables intermédiaires $r_\alpha = \alpha(\varepsilon)\tau$ et θ pour toute fonction, $\alpha(\varepsilon)$ de $\Gamma(\varepsilon)$ telle que $\text{ord } \varepsilon \ll \text{ord } \alpha \ll \text{ord } 1$; le domaine de recouvrement I des développements intérieurs et extérieurs est tout l'intervalle ouvert de classes d'ordre $]\text{ord } \varepsilon, \text{ord } 1[$.

Aux ordres suivants, l'hypothèse fondamentale ne peut plus entrer en jeu et on n'a aucune certitude *a priori* sur l'existence d'un domaine de validité commun aux développements intérieurs et extérieurs. La solution intérieure qui satisfait aux conditions limites sur la sphère est la limite uniforme de la solution dans le domaine de classes d'ordre $\text{ord } f = \text{ord } 1$, et la solution extérieure qui satisfait aux conditions limites à l'infini est la limite uniforme de la solution dans le domaine de classes d'ordre $\text{ord } f = \text{ord } \varepsilon$, mais le théorème d'extension ne permet pas de conclure qu'il existe un intervalle de classes d'ordre non vide où les développements intérieurs et extérieurs représentent uniformément \vec{v} et \vec{h} . En fait, on suppose que les développements intérieur et extérieur d'une même quantité sont uniformément valables dans des domaines de classes d'ordre plus grands que leurs domaines primitifs de validité et qui se recouvrent; ce qui entraîne donc l'existence d'un intervalle de classes d'ordre non vide à chaque étape tel que, en variables intermédiaires $r_\alpha = \alpha(\varepsilon)r$ et θ pour toute fonction $\alpha(\varepsilon)$ de $\Gamma(\varepsilon)$ telle que $\text{ord } \alpha$ appartienne à cet intervalle, les développements intérieur et extérieur

de \vec{v} et de \vec{h} soient identiques quand ε tend vers zéro à un ordre d'approximation convenable. La vérification de cette hypothèse devra être faite à chaque détermination d'un nouveau terme. On procédera de la façon suivante, à chaque ordre dès l'ordre 1, les termes non raccordés dans l'écriture des développements en variables intermédiaires quand ε tend vers zéro, et la forme des équations donnent l'ordre de grandeur des termes suivants à calculer dans les développements intérieur et extérieur de chacune des quantités. A chaque stade, pour \vec{v} comme pour \vec{h} , le nouveau terme qu'on doit d'abord calculer doit vérifier, outre les équations du mouvement écrites dans les variables convenables à son ordre d'approximation, soit les conditions limites sur la sphère s'il appartient au développement intérieur, soit les conditions limites à l'infini s'il appartient au développement extérieur, toujours à son ordre d'approximation, et les conditions de raccordement qui remplacent les conditions limites manquantes et doivent le déterminer entièrement. Il se peut que l'identification en variables intermédiaires des développements intérieur et extérieur d'une même quantité pour un domaine non vide de classes d'ordre ait lieu, quand ε tend vers zéro, à un ordre d'approximation qui ne soit pas meilleur qu'à l'étape précédente, ce qui est important c'est que cet ordre ne régresse pas, que tous les éléments qui ne pourront pas, étant donnée leur forme, être raccordés ultérieurement le soient à ce stade, et que le nouveau terme soit totalement déterminé. En suivant ces règles, on sera assuré d'avoir un déroulement normal des développements asymptotiques, c'est-à-dire qu'à aucun moment on ne devra intercaler entre des termes déjà calculés un nouveau terme imposé par des raccordements ultérieurs, les conditions de raccordements indiqueront toujours la présence de termes suivant les termes déjà calculés et non de termes antérieurs. D'autre part, en supposant toujours, bien sûr, que les développements asymptotiques intérieurs et extérieurs qu'on détermine ainsi sont effectivement uniformément asymptotiques dans les domaines de classes d'ordre qui se recouvrent, on peut vérifier que le développement composite d'une quantité, formé de la façon habituelle, est uniformément asymptotique et préciser à quel ordre.

Les développements intérieurs de \vec{v} et \vec{h} doivent satisfaire aux relations obtenues à partir des équations (8) à (11) en éliminant la pression :

$$(18) \quad R\nabla \times [(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] = \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) + M^2 \nabla \times [(\vec{v} \times \vec{h}) \times \vec{h}],$$

$$(19) \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

$$(20) \quad \nabla \times \vec{h} = R_m \vec{v} \times \vec{h},$$

$$(21) \quad \nabla \cdot \vec{h} = 0,$$

et remplir les conditions limites sur la sphère $r = 1$.

Les développements extérieurs doivent satisfaire aux mêmes relations écrites en variables extérieures, soient

$$(22) \quad R \varepsilon \bar{\nabla} \times [(\bar{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}] = \varepsilon^2 \bar{\nabla}^2 (\bar{\nabla} \times \vec{v}) + M^2 \bar{\nabla} \times [(\vec{v} \times \vec{h}) \times \vec{h}],$$

$$(23) \quad \bar{\nabla} \cdot \vec{v} = 0,$$

$$(24) \quad \varepsilon \bar{\nabla} \times \vec{h} = R_m \vec{v} \times \vec{h},$$

$$(25) \quad \bar{\nabla} \cdot \vec{h} = 0$$

et remplir les conditions limites à l'infini. Les conditions limites manquantes pour les deux développements sont remplacées par les conditions de raccordement qu'on a énoncées plus haut.

Au champ magnétique dans le fluide correspond un champ magnétique dans l'enveloppe sphérique et dans la cavité; ces champs ont chacun un développement asymptotique analogue au développement intérieur du champ magnétique, soient

$$\vec{h}_s(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{h}_{0s}(r, \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} \vec{h}_{is}(r, \theta, M, R, R_m)$$

dans l'enveloppe sphérique, et

$$\vec{h}_c(r, \theta, M, R, R_m) = \vec{h}_{0c}(r, \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} \vec{h}_{ic}(r, \theta, M, R, R_m)$$

dans la cavité, \vec{h}_{0s} et \vec{h}_{0c} ayant les expressions (16) et (17) et de plus \vec{h}_{is} et \vec{h}_{ic} étant du même ordre de grandeur en ε que le champ $\vec{h}_i(r, \theta, M, R, R_m)$ correspondant.

Les conditions limites sur la sphère et à l'infini impliquent les relations suivantes pour les vitesses :

$$\vec{v}_j(1, \theta, M, R, R_m) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots),$$

$$\vec{w}_j(\infty, \theta, M, R, R_m) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Pour ce qui est du champ magnétique, les diverses conditions limites entraînent

$$\vec{k}_j(\infty, \theta, M, R, R_m) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots),$$

$$h_{j\theta}(1, \theta, M, R, R_m) = h_{js,\theta}(1, \theta, M, R, R_m),$$

$$h_{jr}(1, \theta, M, R, R_m) = \mu h_{js,r}(1, \theta, M, R, R_m),$$

$$h_{js,\theta}\left(\frac{b}{a}, \theta, M, R, R_m\right) = h_{jc,\theta}\left(\frac{b}{a}, \theta, M, R, R_m\right),$$

$$\mu h_{j_s,r} \left(\frac{b}{a}, \theta, M, R, R_m \right) = h_{j_c,r} \left(\frac{b}{a}, \theta, M, R, R_m \right) \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots,$$

$\vec{h}_{j_c}(r, \theta, M, R, R_m)$ reste borné quand r tend vers zéro, pour $j = 1, 2, \dots$

Dans le paragraphe 2, on va déterminer les premiers termes inconnus du champ des vitesses et du champ magnétique.

2. INFLUENCE DE M, R ET R_m SUR LA VITESSE ET LE CHAMP MAGNÉTIQUE

Les termes non raccordés des développements de \vec{v} impliquent la présence dans son développement extérieur d'un terme d'ordre ε et d'un terme d'ordre ε^3 . De la même façon les conditions de raccordement imposent au développement extérieur de \vec{h} de contenir un terme d'ordre ε^3 . La forme des équations extérieures n'introduisant pas la présence dans le développement extérieur de \vec{v} de termes d'ordre compris entre 1 et ε :

$$\vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) = O(\varepsilon),$$

alors l'équation (24) entraîne

$$\vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) = O(\varepsilon).$$

Le deuxième terme du développement extérieur de \vec{v} , $\vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$, et le deuxième terme du développement extérieur de \vec{h} , $\vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ sont donc d'ordre ε .

2.1. Détermination de \vec{w}_1 et \vec{k}_1

D'après les équations (22) à (25), \vec{w}_1 et \vec{k}_1 sont solutions de

$$R \bar{\nabla} \times [(\bar{\nabla} \times \vec{w}_1) \times \vec{i}] = \varepsilon \bar{\nabla}^2 (\bar{\nabla} \times \vec{w}_1) + \frac{M^2}{R_m} \bar{\nabla} \times [(\bar{\nabla} \times \vec{k}_1) \times \vec{i}],$$

$$\bar{\nabla} \cdot \vec{w}_1 = 0, \quad \varepsilon \bar{\nabla} \times \vec{k}_1 = R_m (\vec{w}_1 - \vec{k}_1) \times \vec{i}, \quad \bar{\nabla} \cdot \vec{k}_1 = 0.$$

Ils doivent en outre satisfaire aux conditions limites

$$\vec{w}_1(\infty, \theta, M, R, R_m) = 0,$$

$$\vec{k}_1(\infty, \theta, M, R, R_m) = 0$$

et être entièrement déterminés par les conditions de raccordement qui s'écrivent ici :

$$\lim_{\alpha} \frac{\vec{v}_0(r, \theta) - \left[\vec{i} + \vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) \right]}{\alpha(\varepsilon)} = 0,$$

$$\lim_{\alpha} \frac{\vec{h}_0(r, \theta) - \left[\vec{i} + \vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) \right]}{\alpha(\varepsilon)} = 0$$

pour ord α dans un intervalle non vide inclus dans]ord ε , ord 1[.

Le système des équations vérifiées par \vec{w}_1 et \vec{k}_1 s'écrit encore

$$R \bar{\nabla} \times \left[\left(\bar{\nabla} \times \left\{ \vec{w}_1 - \frac{M^2}{R R_m} \vec{k}_1 \right\} \right) \times \vec{i} \right] - \varepsilon \bar{\nabla}^2 (\bar{\nabla} \times \vec{w}_1) = 0,$$

$$\bar{\nabla} \cdot \vec{w}_1 = 0, \quad \varepsilon \bar{\nabla} \times \vec{k}_1 - R_m (\vec{w}_1 - \vec{k}_1) \times \vec{i} = 0, \quad \bar{\nabla} \cdot \vec{k}_1 = 0.$$

On note $\Psi_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ la fonction de courant associée à \vec{w}_1 et $\Phi_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ celle associée à \vec{k}_1 [$\Psi_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) = O(\varepsilon)$ et $\Phi_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) = O(\varepsilon)$]. Seule la composante perpendiculaire au plan méridien du membre de gauche de la première équation est différente de zéro, on en tire la relation suivante :

$$(26) \quad \bar{\Delta}' \left[\bar{\Delta}' \Psi_1 - \frac{R}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\Psi_1 - \frac{M^2}{R R_m} \Phi_1 \right) \right] = 0,$$

où

$$\bar{x} = \bar{r} \cos \theta \quad \text{et} \quad \bar{\Delta}' = \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\sin \theta}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

de même, seule la composante perpendiculaire au plan méridien du membre de gauche de la troisième équation est différente de zéro et on en déduit la relation suivante :

$$(27) \quad \bar{\Delta}' \Phi_1 + \frac{R_m}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Psi_1 - \Phi_1) = 0.$$

Ψ_1 et Φ_1 vérifient donc le système des équations (26) et (27); en appliquant à l'équation (27) l'opérateur $\bar{\Delta}' \left(\bar{\Delta}' - \frac{R}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)$ on obtient l'équation satisfaite par $\Phi_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$:

$$\bar{\Delta}' \left[\bar{\Delta}'^2 - \frac{R + R_m}{\varepsilon} \bar{\Delta}' \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{R R_m - M^2}{\varepsilon^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] \Phi_1 = 0$$

ou

$$(28) \quad \bar{\Delta}' \left(\bar{\Delta}' - c \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \left(\bar{\Delta}' - d \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \Phi_1 = 0,$$

avec

$$c = \frac{R + R_m + [(R - R_m)^2 + 4 M^2]^{1/2}}{2 \varepsilon},$$

$$d = \frac{R + R_m - [(R - R_m)^2 + 4 M^2]^{1/2}}{2 \varepsilon},$$

c et d sont des quantités d'ordre 1, c est toujours positive, d est positive si $R R_m > M^2$ (écoulement superalfvénique) et négative si $R R_m < M^2$ (écoulement subalfvénique). On peut obtenir des solutions de l'équation (28) sous la forme

$$\Phi_1 = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2,$$

$\chi_0(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$, $\chi_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ et $\chi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ étant respectivement solutions des équations

$$\bar{\Delta}' \chi_0 = 0, \quad \left(\bar{\Delta}' - c \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \chi_1 = 0, \quad \left(\bar{\Delta}' - d \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \chi_2 = 0.$$

Alors d'après l'équation (27), $\Psi_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ sera donné par

$$\Psi_1 = \chi_0 + \left(1 - \frac{c \varepsilon}{R_m} \right) \chi_1 + \left(1 - \frac{d \varepsilon}{R_m} \right) \chi_2.$$

Tenant compte des conditions que doivent satisfaire \vec{w} , et \vec{k} , à l'infini, on a les solutions suivantes :

$$\chi_0 = F_0 \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\bar{r}^n} \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta),$$

$$\chi_1 = \left(\frac{c \bar{r}}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{c \bar{r}}{2} \cos \theta \right) \left[(G' + G_0 \cos \theta) K_{1/2} \left(\frac{c \bar{r}}{2} \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} G_n K_{n+(1/2)} \left(\frac{c \bar{r}}{2} \right) \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta) \right]$$

$$\chi_2 = \left(\frac{|d| \bar{r}}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{d \bar{r}}{2} \cos \theta \right) \left[(H' + H_0 \cos \theta) K_{1/2} \left(\frac{|d| \bar{r}}{2} \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} H_n K_{n+(1/2)} \left(\frac{|d| \bar{r}}{2} \right) \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta) \right],$$

où F_i , G' , G_i , H' , H_i sont des constantes indéterminées, fonctions de M , R et R_m d'ordre ε .

Les conditions de raccordement de $\vec{v}_0(r, \theta)$ à $\vec{i} + \vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ et de $\vec{h}_0(r, \theta)$ à $\vec{i} + \vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ à l'ordre $\alpha(\varepsilon)$ ont les conséquences suivantes :

(a) dans l'expression en variables intermédiaires, $r_\alpha = \alpha(\varepsilon) r$ et θ , de $\vec{i} + \vec{w}_1$, et après développement suivant les petits paramètres quand ε tend vers zéro : il ne doit pas figurer de termes en $\varepsilon \left(\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon r_\alpha}\right)^n$ pour $n > 1$, le terme en $\frac{\alpha(\varepsilon)}{r_\alpha}$ de $\vec{i} + \vec{w}_1$ est identique à celui de \vec{v}_0 ;

(b) dans l'expression en variables intermédiaires de $\vec{i} + \vec{k}_1$ et après développement suivant les petits paramètres quand ε tend vers zéro : il ne doit pas figurer de termes en $\varepsilon \left(\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon r_\alpha}\right)^n$ pour $n \geq 1$. On en déduit les relations suivantes pour les constantes indéterminées :

$$\begin{aligned} F_n &= G_n = H_n = 0 \quad \text{pour } n \geq 1, \\ F_0 + G_0 \left(1 - \frac{c \varepsilon}{R_m}\right) + H_0 \left(1 - \frac{d \varepsilon}{R_m}\right) &= 0, \\ c \left(1 - \frac{c \varepsilon}{R_m}\right) (G_0 - G') + d \left(1 - \frac{d \varepsilon}{R_m}\right) [(\text{sgn } d) H_0 - H'] &= 0, \\ c \left(1 - \frac{c \varepsilon}{R_m}\right) (G_0 - G') + d \left(1 - \frac{d \varepsilon}{R_m}\right) [H_0 - (\text{sgn } d) H'] &= 0, \\ \frac{3 \varepsilon}{2} &= c \left(1 - \frac{c \varepsilon}{R_m}\right) G_0 + d \left(1 - \frac{d \varepsilon}{R_m}\right) H_0, \end{aligned}$$

d'une part d'après (a), et d'autre part les relations supplémentaires suivantes d'après (b) :

$$F_0 + G_0 + H_0 = 0, \quad c G_0 + d H_0 = 0, \quad c G' + (\text{sgn } d) d H' = 0.$$

Ce qui détermine totalement $\Phi_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ et $\Psi_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$. On trouve ainsi que $\vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ dérive de la fonction de courant

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{3 R_m \cos \theta}{2 c d} - \frac{3 R_m}{2 c (c - d)} (1 + \cos \theta) \exp \left[-\frac{c \bar{r}}{2} (1 - \cos \theta) \right] \\ &+ \frac{3 R_m}{2 d (c - d)} (\text{sgn } d + \cos \theta) \exp \left[-\frac{d \bar{r}}{2} (\text{sgn } d - \cos \theta) \right], \end{aligned}$$

et que $\vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ dérive de la fonction de courant

$$\Psi_1 = -\frac{3 R_m \cos \theta}{2 c d} - \frac{3 (R_m - \varepsilon c)}{2 c (c - d)} (1 + \cos \theta) \exp \left[-\frac{c \bar{r}}{2} (1 - \cos \theta) \right] \\ + \frac{3 (R_m - \varepsilon d)}{2 d (c - d)} (\operatorname{sgn} d + \cos \theta) \exp \left[-\frac{d \bar{r}}{2} (\operatorname{sgn} d - \cos \theta) \right].$$

Le raccordement de \vec{v}_0 à $\vec{i} + \vec{w}_1$ d'une part et de \vec{h}_0 à $\vec{i} + \vec{k}_1$ d'autre part a alors lieu à l'ordre α (ε) sur l'intervalle de classes d'ordre]ord ε , ord 1[.

La considération des termes non raccordés des développements de \vec{v} et \vec{h} , ainsi que la forme des équations, indiquent que les termes qu'on doit calculer ensuite appartiennent aux développements intérieurs de \vec{v} et \vec{h} et sont d'ordre ε ,

$$\vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m) = O(\varepsilon), \quad \vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m) = O(\varepsilon).$$

La détermination de \vec{v}_1 et celle de \vec{h}_1 ne sont pas liées.

2.2. Détermination de \vec{v}_1

$\vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m)$ doit satisfaire aux équations suivantes, tirées de (18) à (21) :

$$R \nabla \times [(\nabla \times \vec{v}_0) \times \vec{v}_0] = \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}_1), \quad \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0,$$

à la condition limite $\vec{v}_1(1, \theta, M, R, R_m) = 0$, et être totalement déterminé par la condition de raccordement

$$\lim_{\alpha} \frac{\vec{v}_0(r, \theta) + \vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m) - [\vec{i} + \vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)]}{\varepsilon} = 0$$

pour ord α dans un intervalle non vide dans]ord ε , ord 1[. On désigne par $\omega_1(r, \theta, M, R, R_m) \vec{e}_\varphi$ la quantité $\nabla \times \vec{v}_1$, où $\omega_1 = O(\varepsilon)$, ω_1 est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\nabla^2 \omega_1 - \frac{\omega_1}{r^2 \sin^2 \theta} = R \vec{e}_\varphi \cdot \{ \nabla \times [(\nabla \times \vec{v}_0) \times \vec{v}_0] \},$$

et notant $\psi_1(r, \theta, M, R, R_m)$, où $\psi_1 = O(\varepsilon)$, la fonction de courant associée à \vec{v}_1 , ψ_1 est telle que

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) = -r \sin \theta \omega_1.$$

De la même façon qu'en [5], on cherche d'abord des solutions à l'équation vérifiée par ω_1 , puis à celle satisfaite par ψ_1 , on trouve ainsi :

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta, M, R, R_m) &= B_0 \cos \theta + \left(A_1 r^2 + \frac{B_1}{r} + C_1 r^4 + D_1 r \right) \sin^2 \theta P'_1(\cos \theta) \\ &+ \left[A_2 r^3 + \frac{B_2}{r^2} + C_2 r^5 + D_2 + R \left(-\frac{r^2}{16} + \frac{3r}{32} + \frac{1}{32r} \right) \right] \\ &\times \sin^2 \theta P'_2(\cos \theta) + \sum_{n=3}^{\infty} \left(A_n r^{n+1} + \frac{B_n}{r^n} + C_n r^{n+3} + \frac{D_n}{r^{n-2}} \right) \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta), \end{aligned}$$

où A_i, B_i, C_i, D_i sont des constantes indéterminées, fonctions de M, R et R_m d'ordre ε .

La condition de raccordement indique qu'il ne doit pas figurer dans l'expression en variables intermédiaires de $\vec{v}_0 + \vec{v}_1$ de termes en $\varepsilon \left(\frac{r_a}{\alpha(\varepsilon)} \right)^n$ pour $n \geq 1$, on en déduit :

$$C_n = 0 \quad \text{pour } n \geq 1, \quad A_n = 0 \quad \text{pour } n \geq 2,$$

et que les termes d'ordre ε de $\vec{v}_0 + \vec{v}_1$ et de $\vec{i} + \vec{w}_1$, écrits en variables intermédiaires pour ε tendant vers zéro, doivent être identiques, on en déduit :

$$A_1 = \frac{3}{16} \left\{ R_m \frac{(\text{sgn } d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\text{sgn } d) d^2}{c - d} \right\}.$$

Le raccordement a alors lieu à l'ordre ε sur l'intervalle de classes d'ordre]ord ε , ord $\varepsilon^{1/3}$ [.

Enfin l'application de la condition limite sur la sphère permet de déterminer totalement $\vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m)$, elle dérive de la fonction de courant.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{3}{16} \left[R_m \frac{(\text{sgn } d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\text{sgn } d) d^2}{c - d} \right] \left[r^2 - \frac{3r}{2} + \frac{1}{2r} \right] \sin^2 \theta \\ &+ R \left[-\frac{r^2}{16} + \frac{3r}{32} - \frac{1}{32} + \frac{1}{32r} - \frac{1}{32r^2} \right] \sin^2 \theta P'_2(\cos \theta). \end{aligned}$$

2.3. Détermination de \vec{h}_1

$\vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m)$ doit satisfaire au système

$$\nabla \times \vec{h}_1 = R_m (\vec{v}_0 \times \vec{h}_0), \quad \nabla \cdot \vec{h}_1 = 0$$

et à la condition de raccordement

$$\lim_{\varepsilon} \frac{\vec{h}_0(r, \theta) + \vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m) - [\vec{i} + \vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)]}{\varepsilon} = 0$$

pour ord α dans un intervalle non vide inclus dans]ord ε , ord 1[; d'autre part, il correspond à \vec{h}_1 un champ magnétique dans la coque $\vec{h}_{1s}(r, \theta, M, R, R_m)$ et un champ magnétique dans la cavité $\vec{h}_{1c}(r, \theta, M, R, R_m)$ solutions de

$$\nabla \times \vec{h}_{1s,c} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{h}_{1s,c} = 0,$$

qui sont comme \vec{h}_1 d'ordre ε et qui lui sont liés par les conditions limites formulées au paragraphe 1, à la traversée des surfaces $r = 1$ et $r = \frac{b}{a}$.

Tenant compte de tout ceci, on trouve une solution pour \vec{h}_1 , dérivant de la fonction de courant

$$\begin{aligned} & \frac{3 R_m}{16} \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{c - d} \left(r^2 + \frac{2 \gamma}{r} \right) \sin^2 \theta \\ & + R_m \left(\frac{r^2}{16} + \frac{\gamma}{6} - \frac{1}{24} - \frac{\gamma}{4 r} + \frac{\beta_2}{r^2} \right) \sin^2 \theta P'_2(\cos \theta), \end{aligned}$$

le raccordement désiré a lieu alors sur l'intervalle]ord ε , ord $\varepsilon^{1/3}$ [. On obtient aussi la fonction de courant dont dérive \vec{h}_{1s} :

$$\begin{aligned} & \frac{3 R_m}{16} \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{(c - d) \left[(2 \mu + 1)(\mu + 2) - 2 \frac{b^3}{a^3} (\mu - 1)^2 \right]} \\ & \times \left[3 (2 \mu + 1) r^2 + 6 (1 - \mu) \frac{b^3}{a^3} \right] \sin^2 \theta \\ & + R_m \left(\gamma_2 r^3 + \frac{\delta_2}{r^2} \right) \sin^2 \theta P'_2(\cos \theta), \end{aligned}$$

et celle dont dérive \vec{h}_{1c} (qui doit rester fini en $r = 0$) :

$$\begin{aligned} & \frac{3 R_m}{16} \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{c - d} \frac{9 \mu}{(2 \mu + 1)(\mu + 2) - 2 \frac{b^3}{a^3} (\mu - 1)^2} r^2 \sin^2 \theta \\ & + R_m \varepsilon_2 r^3 \sin^2 \theta P'_2(\cos \theta), \end{aligned}$$

$\beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2$ étant tels que

$$\begin{aligned} & -\beta_2 \left[\frac{3\mu + 2}{\mu - 1} \frac{a^5}{b^5} \left(1 + \frac{2\mu}{3} \right) + 2(1 - \mu) \right] \\ &= \frac{\mu}{8} + \frac{\gamma\mu}{4} + \frac{1}{24} - \frac{\gamma}{6} + \frac{3\mu + 2}{\mu - 1} \frac{a^5}{b^5} \left(-\frac{\mu}{24} - \frac{\gamma\mu}{12} + \frac{1}{48} - \frac{\gamma}{12} \right), \\ & \quad \mu \delta_2 \left[1 - \frac{a^5}{b^5} \frac{3\mu + 2}{3(\mu - 1)} \right] = \beta_2 + \frac{1}{48} - \frac{\gamma}{12}, \\ & \quad \gamma_2 = -\frac{a^5}{b^5} \frac{3\mu + 2}{3(\mu - 1)} \delta_2, \quad \varepsilon_2 = -\frac{a^5}{b^5} \frac{5\mu}{3(\mu - 1)} \delta_2 \end{aligned}$$

(dans la suite pour distinguer ces quantités des constantes indéterminées qui pourraient intervenir, on les notera $\beta_2^*, \gamma_2^*, \delta_2^*, \varepsilon_2^*$).

2.4. Conclusions et calcul à l'ordre ε de la traînée exercée sur la sphère

De ce qui a été calculé dans ce paragraphe 2, on déduit d'abord que l'influence de M, R et R_m sur la vitesse et le champ magnétique est de l'ordre de grandeur de ces petits paramètres aussi bien sur les développements intérieurs que sur les développements extérieurs.

Dans les développements extérieurs de \vec{v} et \vec{h} apparaissent à l'ordre ε , deux sillages paraboliques au voisinage de l'axe, tous deux dirigés vers l'aval si $M^2 < R R_m$ (écoulement superalfvénique), l'un vers l'aval et l'autre vers l'amont si $M^2 > R R_m$ (écoulement subalfvénique). En dehors de ces sillages, \vec{w}_1 et \vec{k}_1 tendent vers zéro comme $\frac{1}{\bar{r}^2}$ quand \bar{r} tend vers l'infini, \vec{w}_1 se comporte quand \bar{r} vers vers l'infini comme le champ des vitesses de l'écoulement résultant d'un puits situé en O et \vec{k}_1 se comporte alors comme le champ d'un pôle situé en O .

Pour ce qui est des champs intérieurs, on peut remarquer que si $M^2 < R R_m$, le terme d'ordre ε du développement intérieur de $\vec{v}, \vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m)$, ne dépend que du paramètre R , et les termes d'ordre ε du développement intérieur de $\vec{h}, \vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m)$, et des développements de \vec{h} dans la coque et dans la cavité, $\vec{h}_{1,s}(r, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{h}_{1,c}(r, \theta, M, R, R_m)$, ne dépendent que du paramètre R_m .

Enfin l'influence de la perméabilité et de l'épaisseur de la coque, n'intervient à l'ordre ε que sur le développement intérieur du champ magnétique et sur le champ magnétique dans la coque et dans la cavité. A cet ordre, la vitesse dans tout le fluide et le champ magnétique loin

de l'obstacle sont les mêmes que si la sphère était pleine et de même perméabilité magnétique que le fluide.

On peut en dernier lieu chercher quelle est à l'ordre ε l'expression de la traînée exercée sur la sphère. Comme on l'a vu en [5] et [6], la traînée résulte, d'une part d'une partie dynamique D_d et, d'autre part, d'une partie magnétique D_m :

$$D = \rho \nu V_\infty a (D_d + D_m),$$

$$D_d = 2 \pi \int_0^\pi (p_{rx})_{r=1} \sin \theta d\theta,$$

avec [7] :

$$r p_{rx} = -px + \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right\} \left\{ \vec{v} \cdot \vec{i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} (rv_r)$$

et

$$D_m = -M^2 \iiint_{\text{fluide}} [(\vec{v} \times \vec{h}) \times \vec{h}]_x r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Dans le calcul de D_m interviennent des développements uniformément asymptotiques de \vec{v} et \vec{h} , or à l'ordre 1, \vec{v} et \vec{h} ont les développements uniformes suivants :

$$\vec{v} = \vec{v}_0(r, \theta) + o(1), \quad \vec{h} = \vec{h}_0(r, \theta) + o(1),$$

\vec{v} et \vec{h} étant d'ordre 1 dans tout l'écoulement, D_m est de l'ordre de M^2 et à l'ordre ε elle ne contribue donc pas à la traînée exercée sur la sphère.

Le calcul de D_d ne fait intervenir que les développements intérieurs, en utilisant la formule indiquée ci-dessus on obtient

$$D_d = 6 \pi \left\{ 1 + \frac{3}{8} \left[R_m \frac{(\text{sgn } d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\text{sgn } d) d^2}{c - d} \right] + o(\varepsilon) \right\}.$$

Donc la traînée sur la sphère est

$$D = 6 \pi \rho \nu V_\infty a \left\{ 1 + \frac{3}{8} \left[R_m \frac{(\text{sgn } d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\text{sgn } d) d^2}{c - d} \right] + o(\varepsilon) \right\},$$

soit

$$D = 6 \pi \rho \nu V_\infty a \left[1 + \begin{cases} \frac{3}{8} R_m & \text{si } M^2 \leq R R_m \\ \frac{3}{8} \frac{2M^2 + R^2 - R R_m}{[(R - R_m)^2 + 4M^2]^{1/2}} & \text{si } M^2 > R R_m \end{cases} + o(\varepsilon) \right].$$

On remarque en particulier que dans un écoulement superalfvénique la traînée à l'ordre ε ne dépend que de R . Dans tous les cas l'influence des petits paramètres se traduit par une augmentation de la traînée exercée sur la sphère et ne dépend pas de la perméabilité et de l'épaisseur de la coque.

L'expression obtenue pour la traînée à l'ordre ε est identique à celle qu'ont trouvée dans le cas d'une sphère pleine K. Gotoh [8], G. S. S. Ludford [9] et R. Van Blerkom [10] en utilisant une méthode de linéarisation, du même genre que celle employée par Oseen [11], pour résoudre les équations; il a d'ailleurs été déjà prouvé par W. Chester [12] que cette méthode de linéarisation donne à l'ordre ε une expression convenable pour la traînée exercée sur la sphère dans le problème envisagé.

3. COMPARAISON AVEC LES CAS LIMITES

On va, dans ce paragraphe, étudier le comportement des solutions qu'on vient d'obtenir, dans l'hypothèse où deux des trois paramètres deviennent bien plus petits que le troisième. On étudiera d'abord le cas où R et R_m deviendraient négligeables devant M et on comparera les résultats du passage à la limite dans les solutions à ceux qu'on a obtenus en [5] en résolvant les équations dans le cas où $R = R_m = 0$. Ensuite on supposera que M et R_m deviennent négligeables devant R et on comparera les résultats du passage à la limite à ceux trouvés par I. Proudman et J. R. A. Pearson [13] en posant $\sigma = H_\infty = 0$, c'est-à-dire en étudiant le problème purement visqueux. Enfin on étudiera le cas où M et R deviendraient bien plus petits que R_m .

3.1. R et R_m négligeables devant M

On étudie le comportement des solutions obtenues aux paragraphes 1 et 2, quand on effectue le passage à la limite : R tend vers zéro et R_m tend vers zéro. Alors bien sûr, $\varepsilon = M$, les développements intérieurs sont uniformément valables $r = O(1)$ et les développements extérieurs pour $r = O\left(\frac{1}{M}\right)$. On a écrit des développements asymptotiques à l'ordre ε , si ces développements ont des limites quand R et R_m tendent vers zéro, on ne peut en attendre que des développements à l'ordre M .

Les termes d'ordre 1 des développements de \vec{v} et \vec{h} obtenus au paragraphe 1 ne dépendent pas des paramètres et sont identiques à ceux obtenus en [5] lorsqu'on suppose que les termes en R et en R_m ne figurent pas dans les équations de l'écoulement. On effectuera donc le passage à

la limite uniquement sur les termes d'ordre ε : $\vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m)$, $\vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$, $\vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m)$, $\vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ et on comparera ces limites aux termes d'ordre M des développements de \vec{v} et \vec{h} donnés en [5].

Quand R et R_m tendent vers zéro bien plus vite que M , on a $R R_m < M^2$ et d est négatif, c tend vers 1 et d vers -1 .

$\vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m)$ tel qu'on l'a déterminé au paragraphe 2.2 tend vers le vecteur associé à la fonction de courant

$$\frac{3}{16} M \left(r^2 - \frac{3r}{2} + \frac{1}{2r} \right) \sin^2 \theta,$$

soit vers $\frac{3}{8} M \vec{v}_0(r, \theta)$.

De même, la limite du champ magnétique intérieur est immédiate à obtenir, à l'ordre M , $\vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m)$ tend vers zéro ainsi que les champs magnétiques dans la coque et dans la cavité, $\vec{h}_{1s}(r, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{h}_{1c}(r, \theta, M, R, R_m)$.

Il est clair aussi que le champ magnétique extérieur $\vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ tend vers zéro à l'ordre M .

Il reste juste à calculer la limite $\vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ quand R et R_m tendent vers zéro, \vec{w}_1 tend alors vers le vecteur associé à la fonction de courant

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} M (1 + \cos \theta) \exp \left[-\frac{\bar{r}}{2} (1 - \cos \theta) \right] \\ & + \frac{3}{4} M (1 - \cos \theta) \exp \left[-\frac{\bar{r}}{2} (1 + \cos \theta) \right], \end{aligned}$$

avec $\bar{r} = M r$.

Donc à l'ordre M , la limite quand R et R_m tendent vers zéro de la solution obtenue en supposant M, R et R_m du même ordre de grandeur est identique à la solution qu'on obtient en résolvant les équations dans lesquelles on a fait disparaître les termes en R et R_m .

3.2. M et R_m négligeables devant R

On étudie maintenant le comportement des solutions obtenues aux paragraphes 1 et 2, quand on effectue le passage à la limite : M tend vers zéro et R_m tend vers zéro. De la même façon qu'on l'a indiqué précédemment : $\varepsilon = R$, les développements intérieurs, s'ils ont des limites, donneront des développements uniformément valables à l'ordre R

pour $r = O(1)$, et les développements extérieurs des développements uniformément valables à l'ordre R pour $r = O\left(\frac{1}{R}\right)$. Il sera intéressant de comparer ces limites aux résultats obtenus par I. Proudman et J. R. A. Pearson [13] dans le cas purement visqueux, en remarquant toutefois que ces auteurs ont étudié le cas d'un fluide non conducteur et non soumis à un champ magnétique, c'est-à-dire dans lequel ne règne aucun champ magnétique. En fait, on devra faire la comparaison des résultats du passage à la limite avec la solution des équations dans le cas $M = R_m = 0$; cette solution est très simple puisqu'alors la vitesse du fluide et le champ magnétique sont découplés : pour la vitesse la solution est celle de I. Proudman et J. R. A. Pearson, et le champ magnétique qui s'établit est celui de la statique, $\vec{h}_0(r, \theta)$ dans le fluide, $\vec{h}_{0s}(r, \theta)$ dans la coque, $\vec{h}_{0c}(r, \theta)$ dans la cavité [2].

Comme on l'a déjà remarqué les termes d'ordre 1 des développements de \vec{v} et \vec{h} écrits au paragraphe 1 ne dépendent pas des paramètres, ceux des développements de \vec{v} sont identiques à ceux trouvés par I. Proudman et J. R. A. Pearson, ceux des développements de \vec{h} sont identiques à ceux de la solution statique du problème. Il reste donc uniquement à comparer les termes d'ordre R .

Quand M et R_m tendent vers zéro bien plus vite que R , c tend vers 1 et d vers zéro par valeurs positives ou négatives suivant le signe de $R R_m - M^2$.

Certaines limites sont immédiates, ainsi $\vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m)$ tend vers le vecteur dérivant de la fonction de courant

$$\frac{3}{16} R \left(r^2 - \frac{3r}{2} + \frac{1}{2r} \right) \sin^2 \theta + R \left(-\frac{r^2}{16} + \frac{3r}{32} - \frac{1}{32} + \frac{1}{32r} - \frac{1}{32r^2} \right) \sin^2 \theta P_2'(\cos \theta);$$

$\vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m)$, $\vec{h}_{1s}(r, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{h}_{1c}(r, \theta, M, R, R_m)$ tendent vers zéro à l'ordre R .

En remarquant que

$$-\frac{R_m}{cd} + \frac{R_m}{d(c-d)} = \frac{R_m}{c(c-d)}$$

tend vers zéro à l'ordre R quand M et R_m tendent vers zéro bien plus vite que R , on en conclut que $\vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ tend vers zéro à l'ordre R

et $\vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ vers le vecteur dérivant de la fonction de courant

$$\frac{3}{2} R (1 + \cos \theta) \exp \left[-\frac{\bar{r}}{2} (1 - \cos \theta) \right] - \frac{3}{2} R \cos \theta,$$

avec $\bar{r} = R r$.

Donc à l'ordre R , la limite pour M et R_m tendant vers zéro de la solution obtenue en supposant M , R et R_m du même ordre de grandeur donne : pour les champs magnétiques la solution du problème statique et pour le champ des vitesses les mêmes résultats que I. Proudman et J. R. A. Pearson; on obtient donc les mêmes résultats qu'en résolvant les équations dans lesquelles on a fait disparaître les termes en M et R_m .

3.3. M et R négligeables devant R_m

On va voir maintenant s'il existe une limite aux solutions obtenues aux paragraphes 1 et 2, lorsqu'on effectue le passage à la limite : M tend vers zéro et R tend vers zéro. Comme on l'a déjà indiqué les termes d'ordre 1 ne dépendent pas des paramètres et ne font donc pas de difficultés.

ε est alors égal à R_m , c tend vers 1 et d vers zéro par valeurs positives si $R R_m > M^2$ et par valeurs négatives si $R R_m < M^2$. On constate que, contrairement à ce qui se passait au paragraphe 3.2 où la quantité $(\text{sgn } d)$ disparaissait dans le passage à la limite, dans le cas présent cette quantité subsiste dans les expressions à l'ordre R_m de \vec{w}_1 et \vec{k}_1 quand on suppose que M et R tendent vers zéro. En conséquence, il n'y a pas une limite unique aux résultats trouvés au paragraphe 2 lorsqu'on suppose que M et R tendent vers zéro bien plus vite que R_m , mais deux limites différentes suivant que $M^2 - R R_m$ devient nul par valeurs positives ou négatives. D'autre part, en plus du fait que \vec{w}_1 et \vec{k}_1 n'ont pas chacun une limite unique, les limites obtenues n'appartiennent pas à des champs conservatifs et ne peuvent donc représenter les termes d'ordre R_m de développements de \vec{v} et \vec{h} valables au voisinage de l'infini. Ce n'est donc pas par passage à la limite dans les solutions obtenues au début de cet article qu'on obtiendra la solution à l'ordre R_m du problème quand on suppose $R_m = o(1)$,

$$M = o(R_m) \quad \text{et} \quad R = o(R_m).$$

Il ne semble pas que le problème direct : trouver une solution aux équations lorsqu'on y fait disparaître les termes en M et R ait été résolu à ce jour.

4. ÉTUDE DES TERMES D'ORDRE INFÉRIEUR

On examine les termes non raccordés des développements de \vec{v} et \vec{h} . On constate que les termes non raccordés du développement intérieur de \vec{v} impliquent la présence dans son développement extérieur de termes d'ordre ε^2 et d'ordres inférieurs, de même les termes non raccordés du développement extérieur de \vec{v} impliquent la présence dans son développement intérieur de termes d'ordre ε^2 et d'ordres inférieurs. Les mêmes considérations sur le champ magnétique indiquent la nécessité de termes d'ordre ε^2 et d'ordres inférieurs dans son développement extérieur, d'ordre ε^2 et d'ordres inférieurs dans son développement intérieur. La forme des équations intérieures n'impose pas la présence de termes d'ordre compris entre ε et ε^2 dans les développements intérieurs de \vec{v} et \vec{h} , par contre la forme des équations extérieures montre que si le développement extérieur de \vec{v} comporte un terme d'ordre ε^2 , il en est de même du développement extérieur de \vec{h} . Les développements intérieurs et extérieurs de \vec{v} et \vec{h} comportent donc tous des termes d'ordre ε^2 , ceux qu'on devra calculer en premier lieu sont ceux qui seront entièrement déterminés par les équations du mouvement, les conditions limites et les conditions de raccordement telles qu'on les a énoncées au premier paragraphe. Il faut donc essayer de calculer ces termes avant de pouvoir conclure.

Les termes d'ordre ε^2 des développements intérieurs de \vec{v} et \vec{h} , soient $\vec{v}_2(r, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{h}_2(r, \theta, M, R, R_m)$ se calculent séparément, tandis que ceux de leurs développements extérieurs, soient $\vec{w}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{k}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ sont couplés.

4.1. Calcul du terme d'ordre ε^2 du développement intérieur de \vec{v} : $\vec{v}_2(r, \theta, M, R, R_m)$

Ce terme doit vérifier les équations suivantes :

$$\begin{aligned} R\nabla \times [(\nabla \times \vec{v}_1) \times \vec{v}_0 + (\nabla \times \vec{v}_0) \times \vec{v}_1] &= \nabla^2(\nabla \times \vec{v}_2) + M^2 \nabla \times [(\vec{v}_0 \times \vec{h}_0) \times \vec{h}_0], \\ \nabla \cdot \vec{v}_2 &= 0, \end{aligned}$$

la condition limite

$$\vec{v}_2(1, \theta, M, R, R_m) = 0,$$

et permettre le raccordement de $\vec{i} + \vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ à

$$\vec{v}_0(r, \theta) + \vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m) + \vec{v}_2(r, \theta, M, R, R_m).$$

De même qu'au paragraphe 2.2, en notant $\psi_2(r, \theta, M, R, R_m)$, avec $\psi_2 = O(\varepsilon^2)$, la fonction de courant dont dérive \vec{v}_2 , la première des équations écrites ci-dessus donne pour ψ_2 la forme :

$$\psi_2(r, \theta, M, R, R_m)$$

$$\begin{aligned} &= B \cos \theta + \left[A_1 r^2 + \frac{B_1}{r} + C_1 r^4 + D_1 r \right. \\ &\quad + M^2 \left(-\frac{3}{80} r^3 + \frac{3\gamma}{40} + \frac{\gamma}{40 r^2} - \frac{\gamma^2}{10 r^2} + \frac{3\gamma^2}{100 r^3} \right) \\ &\quad - \frac{3R^2}{4} \left(\frac{r^3}{20} - \frac{3r^2 \text{Log } r}{20} - \frac{3}{320} \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + \frac{3 \text{Log } r}{100 r} + \frac{3}{320 r^2} - \frac{1}{800 r^3} \right) \right] \\ &\times \sin^2 \theta P'_1(\cos \theta) + \left[A_2 r^3 + \frac{B_2}{r^2} + C_2 r^5 + D_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3R}{4} \left(R_m \frac{(\text{sgn } d)d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\text{sgn } d)d^2}{c - d} \right) \right. \\ &\quad \quad \left. \times \left(-\frac{r^2}{16} + \frac{3r}{32} + \frac{1}{32 r} \right) \right] \\ &\times \sin^2 \theta P'_2(\cos \theta) + \left[A_3 r^4 + \frac{B_3}{r^3} + C_3 r^6 + \frac{D_3}{r} \right. \\ &\quad + M^2 \left(-\frac{r^3}{240} + \frac{r}{240} - \frac{\gamma r}{60} + \frac{7\gamma}{240} \right. \\ &\quad \quad - \frac{7\gamma}{480 r^2} + \frac{7\gamma^2}{120 r^2} - \frac{\gamma^2 \text{Log } r}{35 r^3} \left. \right) \\ &\quad - \frac{R^2}{20} \left(\frac{r^3}{12} - \frac{43 r^2}{160} + \frac{11 r}{32} - \frac{1}{4} \right. \\ &\quad \quad \left. + \frac{3 \text{Log } r}{35 r} + \frac{1}{64 r^2} + \frac{\text{Log } r}{56 r^3} \right) \left. \right] \\ &\times \sin^2 \theta P'_3(\cos \theta) + \sum_{n=4}^{\infty} \left(A_n r^{n+1} + \frac{B_n}{r^n} + C_n r^{n+3} + \frac{D_n}{r^{n-2}} \right) \\ &\times \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta), \end{aligned}$$

où A_i, B_i, C_i, D_i sont des constantes indéterminées, fonctions de M, R et R_m d'ordre ε^2 .

Les conditions de raccordement entraînent :

(a) il ne doit pas figurer dans l'expression en variables intermédiaires, $r_\alpha = \alpha(\varepsilon) r$ et θ , de $\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ de termes en $\varepsilon^2 \left(\frac{r_\alpha}{\alpha(\varepsilon)} \right)^n$ pour $n \geq 2$, ce qui impose

$$\begin{aligned} C_n &= 0 & \text{pour } n \geq 1, \\ A_n &= 0 & \text{pour } n \geq 3, \end{aligned}$$

(b) les termes en $\varepsilon^2 \frac{r_\alpha}{\alpha(\varepsilon)}$ de cette expression doivent être identiques à ceux de l'expression en variables intermédiaires de $\vec{i} + \vec{w}_1$ quand ε tend vers zéro, ce qui détermine A_2 :

$$A_2 = \frac{\varepsilon}{48} \left[R_m \frac{(\text{sgn } d) d^2 - c^2}{c - d} + \varepsilon \frac{c^3 - (\text{sgn } d) d^3}{c - d} \right].$$

La condition d'adhérence à la sphère $r = 1$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} B_0 &= 0, \\ B_n &= D_n = 0 & \text{pour } n \geq 4, \\ B_3 &= \frac{M^2}{16} \left(-\frac{1}{15} + \frac{\gamma}{12} - \frac{73\gamma^2}{105} \right) - \frac{R^2}{40} \left(\frac{353}{6720} \right), \\ D_3 &= -\frac{M^2}{16} \left(-\frac{1}{15} + \frac{\gamma}{20} + \frac{5\gamma^2}{21} \right) - \frac{R^2}{400} \left(\frac{223}{224} \right), \\ B_2 &= \frac{\varepsilon}{32} \left[R_m \frac{(\text{sgn } d) d^2 - c^2}{c - d} + \varepsilon \frac{c^3 - (\text{sgn } d) d^3}{c - d} \right] \\ &\quad - \frac{3R}{128} \left[R_m \frac{(\text{sgn } d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\text{sgn } d) d^2}{c - d} \right], \\ D_2 &= -\frac{5\varepsilon}{96} \left[R_m \frac{(\text{sgn } d) d^2 - c^2}{c - d} + \varepsilon \frac{c^3 - (\text{sgn } d) d^3}{c - d} \right] \\ &\quad - \frac{3R}{128} \left[R_m \frac{(\text{sgn } d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\text{sgn } d) d^2}{c - d} \right], \end{aligned}$$

et deux relations entre les trois constantes A_1 , B_1 et C_1 .

La fonction de courant $\psi_2(r, \theta, M, R, R_m)$ associée à \vec{v}_2 n'est donc pas totalement déterminée par les équations, les conditions limites et les conditions de raccordement. Il est d'ailleurs immédiat de remarquer que la connaissance de $\vec{w}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ et en particulier de son terme d'ordre ε^2 après écriture en variables intermédiaires et développement pour ε petit, déterminerait A_1 , d'où à l'aide des deux relations indiquées plus haut B_1 et D_1 . Dans les développements de \vec{v} , le terme d'ordre ε^2 qu'il convient de calculer d'abord n'est donc pas celui du développement intérieur.

4.2. Calcul du terme d'ordre ε^2 du développement intérieur

de $\vec{h} : \vec{h}_2(r, \theta, M, R, R_m)$

Ce terme doit vérifier les équations suivantes :

$$\nabla \times \vec{h}_2 = R_m (\vec{v}_1 \times \vec{h}_0 + \vec{v}_0 \times \vec{h}_1), \quad \nabla \cdot \vec{h}_2 = 0$$

et permettre le raccordement de $\vec{i} + \vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ à $\vec{h}_0(r, \theta) + \vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m) + \vec{h}_2(r, \theta, M, R, R_m)$. De plus, il correspond à \vec{h}_2 , un champ magnétique \vec{h}_{2s} dans la coque et un champ magnétique \vec{h}_{2c} dans la cavité (fini au centre O), tous deux d'ordre ε^2 , solutions de

$$\nabla \times \vec{h}_{2s,c} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{h}_{2s,c} = 0$$

et ces trois champs sont liés par les conditions limites formulées au paragraphe 1, à la traversée des surfaces $r = 1$ et $r = \frac{b}{a}$.

Les deux équations indiquées au début de ce paragraphe entraînent pour \vec{h}_2 l'existence d'une fonction de courant $\varphi_2(r, \theta, M, R, R_m)$, [avec $\varphi_2 = 0$ (ε^2)], de la forme

$\varphi_2(r, \theta, M, R, R_m)$

$$\begin{aligned} &= \beta_0 \cos \theta + \left[\alpha_1 r^2 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{3 R R_m}{80} \left(r^3 - \frac{3 r^2 \text{Log } r}{2} - \frac{r}{2} + \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad + \frac{3 R R_m \gamma}{80} \left(-1 - \frac{1}{4 r^2} + \frac{1}{5 r^3} - \frac{1}{9 r^4} \right) \\ &\quad + \frac{3 R_m^2}{20} \left(\frac{r^3}{4} - \frac{3 r^2 \text{Log } r}{8} + \frac{r}{6} - \frac{2 \gamma r}{3} - \frac{3}{16} + \gamma \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{48 r^2} - \frac{\gamma}{12 r^2} + \frac{3 \beta_2^*}{2 r^2} + \frac{\gamma}{10 r^3} - \frac{\beta_2^*}{3 r^4} \right) \right] \\ &\times \sin^2 \theta P'_1(\cos \theta) + \left[\alpha_2 r^3 + \frac{\beta_2}{r^3} + \frac{3 R_m}{8} \right. \\ &\quad \left. \times \left(2 R_m \frac{(\text{sgn } d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\text{sgn } d) d^2}{c - d} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{r^2}{16} - \frac{1}{24} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\gamma}{4 r} \right) \right] \\ &\times \sin^2 \theta P'_2(\cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\alpha_3 r^4 + \frac{\beta_3}{r^3} - \frac{R R_m}{80} \left(-\frac{r^3}{3} + \frac{3r^2}{5} - \frac{r}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2r} \right) \right. \\
& \quad - \frac{R R_m \gamma}{80} \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^2} - \frac{\text{Log } r}{7r^3} - \frac{1}{8r^4} \right) \\
& \quad + \frac{R_m^2}{20} \left(\frac{r^3}{12} + \frac{3r^2}{80} - \frac{r}{12} + \frac{\gamma r}{3} - \frac{11\gamma}{12} + \frac{1}{96} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{4\beta_2^*}{r} + \frac{3\gamma}{4r} - \frac{7\beta_2^*}{r^2} - \frac{\gamma}{6r^2} + \frac{1}{24r^2} + \frac{\gamma \text{Log } r}{14r^3} - \frac{\beta_2^*}{4r^4} \right) \right] \\
& \times \sin^2 \theta P'_3(\cos \theta) + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\alpha_n r^{n+1} + \frac{\beta_n}{r^n} \right) \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta),
\end{aligned}$$

où α_i, β_i sont des constantes indéterminées, fonctions de M, R et R_m d'ordre ε^2 .

L'application des conditions de raccordement entraîne :

(a) il ne doit pas figurer dans l'expression en variables intermédiaires de $\vec{h}_0 + \vec{h}_1 + \vec{h}_2$ de termes en $\varepsilon^2 \left(\frac{r\alpha}{\alpha(\varepsilon)} \right)^n$ pour $n \geq 2$, ce qui impose

$$\alpha_n = 0 \quad \text{pour } n \geq 3;$$

(b) les termes en $\varepsilon^2 \frac{r\alpha}{\alpha(\varepsilon)}$ de cette expression doivent être identiques à ceux de l'expression en variables intermédiaires de $\vec{h}_0 + \vec{h}_1$ quand ε tend vers zéro, ce qui détermine α_2 :

$$\alpha_2 = \left(\frac{R_m \varepsilon}{48} \right) \left(\frac{(\text{sgn } d) d^2 - c^2}{c - d} \right).$$

Dans l'enveloppe sphérique le champ \vec{h}_{2s} dérive de la fonction de courant

$$\varphi_{2s}(r, \theta, M, R, R_m) = \delta_0 \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_n r^{n+1} + \frac{\delta_n}{r^n} \right) \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta),$$

et le champ \vec{h}_{2c} dans la cavité dérive de la fonction de courant

$$\varphi_{2c}(r, \theta, M, R, R_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n r^{n+1} \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta).$$

Les conditions limites à la traversée des surfaces $r = 1$ et $r = \frac{b}{a}$ permettent d'écrire :

$$\beta_0 = \delta_0 = 0, \quad \beta_n = \gamma_n = \delta_n = \varepsilon_n = 0 \quad \text{pour } n \geq 4,$$

les valeurs en fonction de M, R, R_m, γ et $\frac{b}{a}$ des constantes d'ordre ε^2 :
 $\beta_3, \gamma_3, \delta_3, \varepsilon_3, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2$ et quatre relations entre les cinq constantes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$.

La fonction de courant $\varphi_2(r, \theta, M, R, R_m)$ associée à \vec{h}_2 n'est donc pas totalement déterminée par les équations, les conditions limites et les conditions de raccordement. Comme dans la partie qui précède, il est immédiat de constater que la connaissance de $\vec{k}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ permettrait de déterminer α_1 , d'où à l'aide des quatre relations indiquées plus haut $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$ et ε_1 .

Dans les développements de \vec{h} , le terme d'ordre ε^2 qu'il convient de calculer d'abord n'est donc pas celui du développement intérieur.

4.3. Calcul des termes d'ordre ε^2 des développements extérieurs de \vec{v} et \vec{h}

$\vec{w}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ et $\vec{k}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ doivent vérifier les équations suivantes, obtenues à partir des relations (22) à (25) :

$$\begin{aligned} R \bar{\nabla} \times \left[\left(\bar{\nabla} \times \left\{ \vec{w}_2 - \frac{M^2}{R R_m} \vec{k}_2 \right\} \right) \times \vec{i} \right] - \varepsilon \bar{\nabla}^2 (\bar{\nabla} \times \vec{w}_2) \\ = - R \bar{\nabla} \times \left[(\bar{\nabla} \times \vec{w}_1) \times \vec{w}_1 - \frac{M^2}{R R_m} (\bar{\nabla} \times \vec{k}_1) \times \vec{k}_1 \right], \end{aligned}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \vec{w}_2 = 0, \quad \varepsilon \bar{\nabla} \times \vec{k}_2 - R_m (\vec{w}_2 - \vec{k}_2) \times \vec{i} = R_m \vec{w}_1 \times \vec{k}_1, \quad \bar{\nabla} \cdot \vec{k}_2 = 0;$$

ils doivent satisfaire aux conditions limites

$$\vec{w}_2(\infty, \theta, M, R, R_m) = 0, \quad \vec{k}_2(\infty, \theta, M, R, R_m) = 0$$

et permettre le raccordement de $\vec{v}_0(r, \theta) + \vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m)$ à

$$\vec{i} + \vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) + \vec{w}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$$

et de $\vec{h}_0(r, \theta) + \vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m)$ à

$$\vec{i} + \vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) + \vec{k}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m).$$

On note $\Psi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ la fonction de courant associée à \vec{w}_2 et $\Phi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ celle associée à \vec{k}_2 (Ψ_2 et Φ_2 d'ordre ε^2). Comme au

paragraphe 2.1, on trouve que Ψ_2 et Φ_2 vérifient le système

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{\bar{r} \sin \theta} \bar{\Delta}' \left[\bar{\Delta}' \Psi_2 - \frac{R}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\Psi_2 - \frac{M^2}{R R_m} \Phi_2 \right) \right] \\ & = -R \check{e}_z \cdot \left\{ \bar{\nabla} \times \left[(\bar{\nabla} \times \check{w}_1) \times \check{w}_1 - \frac{M^2}{R R_m} (\bar{\nabla} \times \check{k}_1) \times \check{k}_1 \right] \right\}, \\ & - \frac{\varepsilon}{\bar{r} \sin \theta} \left[\bar{\Delta}' \Phi_2 - \frac{R_m}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Phi_2 - \Psi_2) \right] = R_m \check{e}_z \cdot (\check{w}_1 \times \check{k}_1); \end{aligned}$$

ou encore

$$(29) \quad \bar{\Delta}' \left[\bar{\Delta}' \Psi_2 - \frac{R}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\Psi_2 - \frac{M^2}{R R_m} \Phi_2 \right) \right] = -\frac{R}{\varepsilon} \mathcal{F},$$

$$(30) \quad \bar{\Delta}' \Phi_2 - \frac{R_m}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Phi_2 - \Psi_2) = \frac{R_m}{\varepsilon} \mathcal{G},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \bar{\rho} \left[\frac{D(\bar{\rho}^{-2} \bar{\Delta}' \Psi_1, \Psi_1)}{D(\bar{\rho}, \bar{x})} - \frac{M^2}{R R_m} \frac{D(\bar{\rho}^{-2} \bar{\Delta}' \Phi_1, \Phi_1)}{D(\bar{\rho}, \bar{x})} \right], \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{D(\Psi_1, \Phi_1)}{D(\bar{\rho}, \bar{x})}, \end{aligned}$$

et les notations suivantes $\bar{\rho} = \bar{r} \sin \theta$,

$$\frac{D(f, g)}{D(\bar{\rho}, \bar{x})} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial g}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}.$$

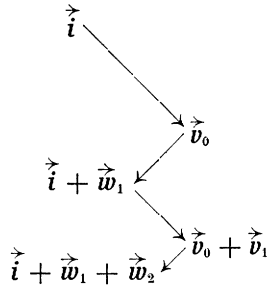
On pourrait, comme au paragraphe 2, en déduire l'équation vérifiée par Φ_2 ,

$$\bar{\Delta}' \left(\bar{\Delta}' - c \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \left(\bar{\Delta}' - d \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \Phi_2 = \frac{R R_m}{\varepsilon^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{x}} + \frac{R_m}{\varepsilon} \bar{\Delta}' \left(\bar{\Delta}' - \frac{R}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \mathcal{G},$$

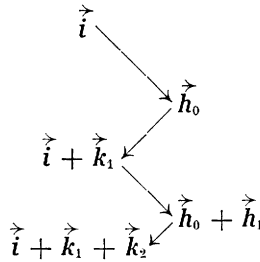
en fait on n'utilisera pas cette équation, car étant donnée la forme des seconds membres des équations (29) et (30) on n'écrira pas sous forme explicite les solutions pour Ψ_2 et Φ_2 .

Pour pouvoir continuer on supposera que les équations (29) et (30) admettent en Ψ_2 et Φ_2 une solution unique, telle que les vecteurs correspondants \check{w}_2 et \check{k}_2 tendent vers zéro quand \bar{r} tend vers l'infini et satisfassent aux conditions de raccordement indiquées au début de ce paragraphe. Dans les cas limites $R = R_m = 0$, $M = 0$ (1) et $M = R_m = 0$, $R = 0$ (1), l'existence et la détermination des vecteurs \check{w}_2 et \check{k}_2 sont connues (voir [5] pour le premier cas et [14] pour le second).

Le processus de raccordement est donc le suivant :



pour la vitesse, et



pour le champ magnétique, avec

$$\vec{w}_1 = O(\varepsilon), \quad \vec{v}_1 = O(\varepsilon), \quad \vec{w}_2 = O(\varepsilon^2)$$

et

$$\vec{k}_1 = O(\varepsilon), \quad \vec{h}_1 = O(\varepsilon), \quad \vec{k}_2 = O(\varepsilon^2)$$

dans leurs domaines de définition respectifs.

Pour savoir quel est l'ordre des termes qu'on devrait calculer ensuite il faut connaître la forme des premiers termes qui ne sont pas raccordés, donc le comportement de \vec{w}_2 et \vec{k}_2 quand \bar{r} tend vers zéro. On va étudier le comportement de Ψ_2 et de Φ_2 quand \bar{r} tend vers zéro à l'aide des équations (29) et (30); on a admis que ces équations avaient une solution unique répondant au problème posé, cette solution satisfaisant aux conditions de raccordement, le comportement de Ψ_2 quand \bar{r} tend vers zéro est $O(\bar{r})$ et celui de Φ_2 est $o(\bar{r})$. La condition de raccordement de $\vec{v}_0 + \vec{v}_1$ à $\vec{i} + \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ montre que lorsque \bar{r} tend vers zéro, Ψ_2 s'écrit

$$\begin{aligned} & \Psi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) \\ &= \bar{r} \sin^2 \theta \left\{ -\frac{9\varepsilon}{32} \left[R_m \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\operatorname{sgn} d) d^2}{c - d} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{3R\varepsilon}{32} P'_2(\cos \theta) \right\} + o(\bar{r}), \end{aligned}$$

tandis que

$$\Phi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) = o(\bar{r}).$$

Le comportement quand \bar{r} tend vers zéro du membre de droite de l'équation (29) s'obtient facilement, tous calculs faits, on peut écrire

$$\begin{aligned} -\frac{R}{\varepsilon} \mathcal{F} = & -\frac{R}{\varepsilon} \left\{ -\frac{27}{4} \frac{\varepsilon^2}{\bar{r}^3} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{\varepsilon \sin^2 \theta}{\bar{r}^2} \right. \\ & \times \left[\frac{27}{16} \left(R_m \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\operatorname{sgn} d) d^2}{c - d} \right) \right. \\ & \left. \left. \times \cos \theta - \frac{9 \varepsilon R}{32} (19 \cos^2 \theta - 5) \right] \right\} + o\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right). \end{aligned}$$

Dans le membre de gauche de l'équation (29), si on se borne à écrire le comportement quand \bar{r} tend vers zéro jusqu'à $O\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right)$, Φ_2 n'apporte aucune contribution; par contre, le développement de Ψ_2 doit contenir des termes apportant dans ce membre de gauche des comportements en $\frac{1}{\bar{r}^2}$, donc Ψ_2 s'écrit au voisinage de $\bar{r} = 0$;

$$\begin{aligned} \Psi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) \\ = & \bar{r} \sin^2 \theta \left\{ -\frac{9 \varepsilon}{32} \left[R_m \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\operatorname{sgn} d) d^2}{c - d} \right] + \frac{3R}{32} P'_2(\cos \theta) \right\} \\ & + \bar{r}^2 \operatorname{Log} \bar{r} \mathcal{R}(\cos \theta) + \bar{r}^2 \mathcal{S}(\cos \theta) + o(\bar{r}^2). \end{aligned}$$

Et la forme du développement intérieur de \vec{v} suggère d'écrire $\mathcal{R}(\cos \theta)$ et $\mathcal{S}(\cos \theta)$ sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\cos \theta) &= \sin^2 \theta \sum_{n=1}^{\infty} R_n(M, R, R_m) P'_n(\cos \theta), \\ \mathcal{S}(\cos \theta) &= \sin^2 \theta \sum_{n=1}^{\infty} S_n(M, R, R_m) P'_n(\cos \theta). \end{aligned}$$

Alors l'identification des termes en $\frac{1}{\bar{r}^3}$ dans les membres de droite et de gauche de l'équation (29) se fait automatiquement, celle des termes en $\frac{\operatorname{Log} \bar{r}}{\bar{r}^2}$ entraîne

$$R_n = 0 \quad \text{sauf pour} \quad n = 1,$$

enfin celle des termes en $\frac{1}{\bar{r}^2}$ entraîne

$$\begin{aligned} S_n &= 0 \quad \text{pour } n \geq 4, \\ R_1 &= \frac{9 R^2}{80}, \quad S_3 = \frac{43 R^2}{3 \cdot 200}, \\ S_2 &= -\frac{3 R}{64} \left[R_m \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\operatorname{sgn} d) d^2}{c - d} \right]. \end{aligned}$$

Le comportement de $\Psi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ quand \bar{r} tend vers zéro est donc $\Psi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$

$$\begin{aligned} &= \bar{r} \sin^2 \theta \left\{ -\frac{9 \varepsilon}{32} \left[R_m \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\operatorname{sgn} d) d^2}{c - d} \right] + \frac{3 R \varepsilon}{32} P_2(\cos \theta) \right\} \\ &\quad + \frac{9 R^2}{80} \bar{r}^2 \operatorname{Log} \bar{r} \sin^2 \theta + \bar{r}^2 \sin^2 \theta \\ &\quad \times \left\{ S_1 - \frac{3 R}{64} \left[R_m \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\operatorname{sgn} d) d^2}{c - d} \right] \right. \\ &\quad \left. \times P_2(\cos \theta) + \frac{43 R^2}{3 \cdot 200} P_3(\cos \theta) \right\} + o(\bar{r}^2). \end{aligned}$$

Des considérations analogues sur l'équation (30) permettent d'obtenir le comportement de $\Phi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$ quand \bar{r} tend vers zéro :

$$\begin{aligned} \Phi_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) &= -\frac{9}{160} (R R_m + R_m^2) \bar{r}^2 \operatorname{Log} \bar{r} \sin^2 \theta + \bar{r}^2 \sin^2 \theta \\ &\quad \times \left\{ T_1 + \frac{3 R_m}{128} \left[2 R_m \frac{(\operatorname{sgn} d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\operatorname{sgn} d) d^2}{c - d} \right] \right. \\ &\quad \left. \times P_2(\cos \theta) - \frac{3 R_m}{400} \left[R - \frac{R_m}{4} \right] P_3(\cos \theta) \right\} + o(\bar{r}^2). \end{aligned}$$

Les équations (29) et (30) ne permettent pas de déterminer complètement le comportement de Ψ_2 et Φ_2 quand \bar{r} tend vers zéro à l'ordre $O(\bar{r}^2)$ puisque les constantes S_1 et T_1 ne sont pas connues. Bien sûr, si l'on avait pu écrire les solutions en Ψ_2 et Φ_2 , leur développement pour \bar{r} petit n'aurait pas laissé subsister cette indétermination, celle-ci n'est due qu'à la méthode de calcul employée ici. Malgré cela on peut quand même en tirer une conclusion importante : les conditions de raccordement imposent que les termes suivants les termes d'ordre ε qu'on doit calculer dans les développements intérieurs de \vec{v} et \vec{h} ne soient pas d'ordre ε^2 mais d'ordre $\varepsilon^2 \operatorname{Log} \varepsilon$.

4.4. Calcul des termes d'ordre $\varepsilon^2 \text{Log } \varepsilon$ des développements intérieurs de \vec{v} et \vec{h}

Terme d'ordre $\varepsilon^2 \text{Log } \varepsilon$ du développement intérieur de \vec{v} . — Soit $\vec{\vartheta}_2(r, \theta, M, R, R_m)$ ce terme, il doit vérifier les équations

$$\nabla^2 (\nabla \times \vec{\vartheta}_2) = 0, \quad \nabla \cdot \vec{\vartheta}_2 = 0,$$

la condition limite $\vec{\vartheta}_2(1, \theta, M, R, R_m) = 0$ et permettre le raccordement de

$$\vec{i} + \vec{w}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) + \vec{w}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$$

à

$$\vec{v}_0(r, \theta) + \vec{v}_1(r, \theta, M, R, R_m) + \vec{\vartheta}_2(r, \theta, M, R, R_m).$$

Les calculs sont très simples, $\vec{\vartheta}_2$ admet une fonction de courant de la forme

$$B_0 \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^{n+1} + \frac{B_n}{r^n} + C_n r^{n+3} + \frac{D_n}{r^{n-2}} \right) \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta)$$

et l'application des conditions de raccordement, puis des conditions limites, montre que $\vec{\vartheta}_2$ dérive de la fonction de courant

$$\frac{9}{80} R^2 \text{Log } \varepsilon \left[r^2 - \frac{3r}{2} + \frac{1}{2r} \right] \sin^2 \theta;$$

donc

$$\vec{\vartheta}_2 = \frac{9}{40} R^2 \text{Log } \varepsilon \vec{v}_0(r, \theta).$$

Terme d'ordre $\varepsilon^2 \text{Log } \varepsilon$ du développement intérieur de \vec{h} . — Soit $\vec{\mathcal{E}}_2(r, \theta, M, R, R_m)$ ce terme, il doit satisfaire aux équations

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}_2 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}_2 = 0$$

et permettre le raccordement de

$$\vec{i} + \vec{k}_1(\bar{r}, \theta, M, R, R_m) + \vec{k}_2(\bar{r}, \theta, M, R, R_m)$$

à

$$\vec{h}_0(r, \theta) + \vec{h}_1(r, \theta, M, R, R_m) + \vec{\mathcal{E}}_2(r, \theta, M, R, R_m).$$

De plus, il lui correspond dans l'enveloppe sphérique et dans la cavité des termes du même ordre $\vec{\mathcal{H}}_{2s}$ et $\vec{\mathcal{H}}_{2c}$, solutions de

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}}_{2s,c} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{H}}_{2s,c} = 0;$$

et ces trois champs sont liés par les conditions limites formulées au paragraphe 1 à la traversée des surfaces $r = 1$ et $r = \frac{b}{a}$, et en $r = 0$. Les calculs sont immédiats, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_2 &= -\frac{9}{80} (\mathbf{R} \mathbf{R}_m + \mathbf{R}_m^2) \text{Log } \varepsilon \vec{h}_0(r, \theta), \\ \vec{\mathcal{H}}_{2s} &= -\frac{9}{80} (\mathbf{R} \mathbf{R}_m + \mathbf{R}_m^2) \text{Log } \varepsilon \vec{h}_{0s}(r, \theta), \\ \vec{\mathcal{H}}_{2c} &= -\frac{9}{80} (\mathbf{R} \mathbf{R}_m + \mathbf{R}_m^2) \text{Log } \varepsilon \vec{h}_{0c}(r, \theta). \end{aligned}$$

5. CONCLUSION

Dans ce qui précède on a donc trouvé les développements extérieurs de \vec{v} et \vec{h} à l'ordre ε^2 et leurs développements intérieurs à l'ordre $\varepsilon^2 \text{Log } \varepsilon$. De plus, les termes non raccordés de ces développements indiquent que les termes qu'on doit calculer ensuite sont les termes d'ordre ε^2 des développements intérieurs; ce sont donc $\vec{v}_2(r, \theta, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{R}_m)$ et $\vec{h}_2(r, \theta, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{R}_m)$, termes qu'on a déjà étudiés aux paragraphes 4.1 et 4.2. Il est alors immédiat de constater que par l'intermédiaire des conditions de raccordement, la connaissance de \vec{w}_2 et \vec{k}_2 , et en particulier de leur comportement pour \bar{r} petit, permet d'achever la détermination de \vec{v}_2 et \vec{h}_2 : avec les notations du paragraphe 4.1 :

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{S}_1(\mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{R}_m) \text{ connu,}$$

et avec les notations du paragraphe 4.2 :

$$\alpha_1 = \mathbf{T}_1(\mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{R}_m) \text{ connu;}$$

le calcul n'a pas été terminé ici à cause des difficultés analytiques rencontrées dans la recherche de \vec{w}_2 et \vec{k}_2 .

Le processus de raccordement a donc été le suivant :

$$\begin{array}{c}
 \vec{i} \\
 \searrow \\
 \vec{v}_0 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \vec{i} + \vec{w}_1 \quad \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \vec{i} + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \quad \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \frac{9}{40} R^2 \text{Log } \varepsilon \vec{v}_0 \\
 \downarrow \\
 \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \frac{9}{40} R^2 \text{Log } \varepsilon \vec{v}_0 + \vec{v}_2
 \end{array}$$

pour la vitesse, et

$$\begin{array}{c}
 \vec{i} \\
 \searrow \\
 \vec{h}_0 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \vec{i} + \vec{k}_1 \quad \vec{h}_0 + \vec{h}_1 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \vec{i} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad \vec{h}_0 + \vec{h}_1 - \frac{9}{80} (R R_m + R_m^2) \text{Log } \varepsilon \vec{h}_0 \\
 \downarrow \\
 \vec{h}_0 + \vec{h}_1 - \frac{9}{80} (R R_m + R_m^2) \text{Log } \varepsilon \vec{h}_0 + \vec{h}_2
 \end{array}$$

pour le champ magnétique, avec

$$\vec{v}_2 = O(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad \vec{h}_2 = O(\varepsilon^2).$$

Les raccordements se font alors à l'ordre $\varepsilon\alpha$ (ε) sur l'intervalle de classes d'ordre]ord $\varepsilon^{2/3}$, ord $\varepsilon^{1/2}$ [.

On voit en particulier apparaître des termes d'ordre $\varepsilon^2 \text{Log } \varepsilon$ non seulement dans le développement intérieur de \vec{v} , comme on pouvait le soupçonner à cause des résultats [14] dans le cas limite $M = R_m = 0$ et $R = o(1)$, mais encore dans le développement intérieur de \vec{h} ainsi que dans les expressions de \vec{h} dans la coque et dans la cavité.

A l'ordre $\varepsilon^2 \text{Log } \varepsilon$, les résultats obtenus à partir de la résolution des équations quand $M = R_m = 0$ et $R = o(1)$ ou quand $R = R_m = 0$ et $M = o(1)$ sont encore identiques aux limites des résultats obtenus dans cet article quand on suppose que M et R_m tendent vers zéro dans le premier cas ou R et R_m dans le second cas.

L'influence de la perméabilité et de l'épaisseur de la coque se manifeste dès l'ordre 1 sur le champ magnétique près de la sphère, dans la coque et dans la cavité, elle apparaît à l'ordre ε^2 dans le développement intérieur de la vitesse; par contre, dans les développements extérieurs aussi bien de la vitesse que du champ magnétique cette influence est d'ordre inférieur à ε^2 , puisque les équations, les conditions limites et les conditions de raccordement qui déterminent \vec{w}_2 et \vec{k}_2 sont les mêmes que si la sphère était pleine et de même perméabilité magnétique que le fluide.

On peut enfin à partir des résultats précédents calculer la traînée exercée sur la sphère :

$$D = 6 \pi \rho \nu V_\infty a \left\{ 1 + \frac{3}{8} \left[R_m \frac{(\text{sgn } d) d - c}{c - d} + \varepsilon \frac{c^2 - (\text{sgn } d) d^2}{c - d} \right] + \frac{9}{40} R^2 \text{Log } \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. CABANNES, *Magnétodynamique des Fluides*, C. D. U., 1969.
- [2] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, 1962.
- [3] S. KAPLUN, *Fluid Mechanics and Singular Perturbations*, Academic Press, 1967.
- [4] P. A. LAGERSTROM, *Méthodes asymptotiques pour l'étude des équations de Navier-Stokes*, Cours polycopié, I. H. P., Paris, 1961.
- [5] T. LÉVY, *Journal de Mécanique*, t. 6, n° 4, 1967, p. 529.
- [6] T. LÉVY, *Journal de Mécanique*, t. 9, n° 2, 1970, p. 189.
- [7] H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge University Press, 1963.
- [8] K. GOTOH, *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 15, n° 1, 1960.
- [9] G. S. S. LUDFORD, Tech. Report Univ. Maryland, 1959.
- [10] R. VAN BLERKOM, *J. Fluid Mech.*, vol. 8, 1960, p. 433.
- [11] C. W. OSEEN, *Ark. f. Mat. Astr. og. Fys.*, vol. 6, n° 29, 1910.
- [12] W. CHESTER, *J. Fluid Mech.*, vol. 13, n° 4, 1962, p. 557.
- [13] I. PROUDMAN et J. R. A. PEARSON, *J. Fluid Mech.*, vol. 2, 1957, p. 237.
- [14] W. CHESTER et D. R. BREACH, *J. Fluid Mech.*, vol. 37, n° 4, 1969, p. 751.

(Manuscrit reçu le 15 mars 1972.)