ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARIO CASTAGNINO

Champs spinoriels en relativité générale : le cas particulier de l'espace-temps de De Sitter et les équations d'onde pour les spins élevés

Annales de l'I. H. P., section A, tome 16, nº 4 (1972), p. 293-341
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__16_4_293_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVI, n° 4, 1972, p. 293-341.

Section A :
Physique théorique.

Champs spinoriels en Relativité générale : le cas particulier de l'espace-temps de De Sitter et les équations d'onde pour les spins élevés

par

Mario CASTAGNINO

Facultad de Ciéncias Exactas e Ingenieria,
Av. Pellegrini 250,
Rosario, Argentina

RÉSUMÉ. — On démontre que la théorie tensorielle et la théorie de Rarita-Schwinger sont les « bonnes » théories dans l'espace-temps courbe puisque ses fonctions d'onde, dans l'espace-temps de De Sitter, engendrent des représentations irréductibles du groupe SO (1, 4), qui joue le rôle du groupe de Poincaré. Les conditions nécessaires d'intégrabilité sont établies; elles sont nulles pour les spins 0, 1/2, 1, dans tous les cas, et pour les spins 3/2, 2, dans le vide.

INTRODUCTION

Diverses théories ont été proposées pour les champs de spin élevé dans Relativité restreinte, parmi lesquelles plusieurs sont généralisables, d'une manière naturelle, dans la Relativité générale, par exemple : la théorie des champs tensoriels pour les spins entiers et la théorie de Rarita-Schwinger [21] pour les spins demi-entiers, d'une part, ou les équations de Bargmann-Wigner [2] pour un spin quelconque, d'une autre. Ces théories ne sont pas en général équivalentes dans l'espace-temps courbe, et on peut se demander laquelle est la plus proche aux phénomènes physiques. Étant donné qu'à l'état actuel des techniques expérimentales il est impossible de répondre aux questions posées, par des expériences physiques, on peut se borner à chercher quelles sont les théories qui, dans certains espace-temps simples, ont des équations avec des propriétés particulières.

D'abord on peut remarquer que si l'on considère la constante cosmologique $\lambda \neq 0$ [17] et on veut formuler une théorie de champs libres (puisque cette théorie doit être formulée dans un espace-temps vide), on doit chercher l'espace-temps vide le plus simple : les espaces à courbure constante parmi lesquels on peut choisir l'espace de De Sitter (l'espace plan a un tenseur $T_{ij} \neq 0$ pour $\lambda \neq 0$).

D'ailleurs, toutes les théories mentionnées ont comme limite les théories correspondantes dans l'espace plan, mais dans l'espace-temps de De Sitter on peut penser que vraisemblablement les solutions des équations doivent engendrer des représentations irréductibles du groupe SO (1, 4) de telle façon que la masse et le spin soient fonctions des valeurs propres des opérateurs de Casimir qui caractérisent chaque représentation. Le groupe SO (1, 4) doit jouer un rôle analogue au groupe de Poincaré dans le cas plan.

Dans l'article [5] nous avons démontré que la théorie tensorielle satisfait cette condition et nous allons démontrer, dans le chapitre II de ce travail, que la théorie de Rarita-Schwinger a la même propriété. Ce n'est pas le cas pour les équations de Bargmann-Wigner, fait qui peut nous induire à penser que ces premières théories sont les « bonnes » théories dans *Relativité générale.*

Nous étudions ensuite, dans le chapitre III, quelles sont les conditions nécessaires d'intégrabilité pour les théories tensorielles et de Rarita-Schwinger, puisque depuis longtemps on croit que ces conditions peuvent jouer un rôle important dans l'existence et la stabilité des particules élémentaires. Nous allons démontrer que pour les spins des particules stables 0, 1/2, 1, ces conditions sont identiquement nulles, dans un espace-temps quelconque; tandis que pour les spins 3/2, 2, elles sont nulles seulement dans un espace-temps vide; et pour les spins ≥ 2 elles sont nulles uniquement dans les espaces à courbure constante.

Dans le premier chapitre les principaux résultats relatifs aux spineurs dans un repère quelconque (non orthonormal) sont déduits; il s'agit d'une généralisation évidente des travaux ([1], [6], [8], [13], [14], [15], [18], [19]); la base des semi-spineurs et la décomposition d'un spineur symétrique dans les composantes de Poincaré sont introduits pour établir une notation adaptée â la suite du travail.

I. — PRÉCIS ET REMARQUES SUR LA THÉORIE DES SPINEURS DANS V_4 ET E_5

1. Algèbre des spineurs dans V_4

a. Considérons l'espace-temps V_4, de classe C_∞, muni d'une métrique hyperbolique normale, tel que dans un repère orthonormal le tenseur métrique soit le tenseur avec diagonal principal (1, — 1, — 1, — 1). Nous notons τ_x l'espace tangent à V_4 en le point x et $\{ \mathbf{e}^i \}$ une base de

τ_x. Supposons que V_4 admet une structure spinorielle, on peut donc définir dans chaque point $x \in V_4$ et dans chaque repère un système de matrices complexes de Dirac $\gamma_i = (\gamma_i{}^a{}_b)$. ($a, b, \ldots, h = 1, 2, 3, 4$ sont les indices spinoriels et $i, j, \ldots, n$ les indices vectoriels) tel qu'on a l'identité

$$(1.1) \qquad (V^i \gamma_i)^2 = -(V^i V^j g_{ij})\, e,$$

quel que soit le vecteur V^i (e est la matrice unité). C'est-à-dire que γ_i se transforme comme un vecteur si on change de repère et que

$$(1.2) \qquad \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = -2\, g_{ij}\, e.$$

Nous rappelons les propriétés suivantes :

1° Toute matrice 4×4 qui commute avec les γ_i est de la forme ae, où $a \in \mathbf{C}$;

2° Si $\{ \overset{,}{\gamma}_i \}$ est un second système de matrices de Dirac vérifiant (1.2) il existe une matrice régulière S sur $\mathbf{C}$ telle que

$$(1.3) \qquad \overset{,}{\gamma}_i = S\, \gamma_i\, S^{-1},$$

S est univoquement défini sauf une constante multiplicative;

3°

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \det(\gamma_i) = 1, \quad \operatorname{Tr}(\gamma_i) = 0, \quad \operatorname{Tr}(\gamma_i \gamma_j) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j, \\ \qquad \operatorname{Tr}(\gamma_i \gamma_j \gamma_k) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \neq k, \ldots; \end{cases}$$

4° Les matrices e, γ_i, $\gamma_i \gamma_j$, $\gamma_i \gamma_j \gamma_k$, $\gamma_i \gamma_j \gamma_k \gamma_l$ sont indépendantes sur le corps complexe et engendrent l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des matrices 4×4 [1].

On peut considérer les matrices $\gamma_i{}^a{}_b$ comme des matrices 4×4 d'un espace vectoriel complexe S_x (de base $\{ \varepsilon_a \}$). Si on pose $S = (S^{a'}{}_a)$ et $S^{-1} = (S^a{}_{a'})$ on peut écrire (1.3) comme

$$(1.5) \qquad \overset{,}{\gamma}_i{}^{a'}{}_{b'} = S^{a'}{}_a\, \gamma_i{}^a{}_b\, S^b{}_{b'}.$$

Si, d'ailleurs, on considère $S^{a'}{}_a$ comme une matrice de changement de base,

$$\{ \varepsilon_a \} \to \{ \varepsilon_{a'} \} = \{ \varepsilon_a S^a{}_{a'} \},$$

les matrices de Dirac sont seulement des coordonnées dans différentes bases d'un même « 2-tenseur » de l'espace S_x. En conséquence, nous appellerons S_x espace spinoriel dans $x \in V_4$, $\{ \varepsilon_a \}$ base spinorielle et $S^{a'}{}_a$ matrice de changement de base spinorielle. Les vecteurs contravariants de S_x : $\psi = (\psi^a)$ [resp. covariants de l'espace dual S'_x : $\varphi = (\varphi_a)$] sont

[1] $i < j < k < l$.

appelés spineurs contravariants (resp. covariants). C'est-à-dire qu'ils changent d'une base à une autre d'accord aux formules

$$(1.6) \qquad \overset{,}{\psi} = S\,\psi; \qquad \psi^{a'} = S^{a'}{}_{a}\,\psi^{a};$$

$$(1.7) \qquad \overset{,}{\varphi} = \varphi\,S^{-1}; \qquad \varphi_{a'} = \varphi_{a}\,S^{a}{}_{a'}.$$

On peut dire que $\gamma_i{}^a{}_b$ est un « vecteur-2-spineur » de type (1, 1).

b. Il est possible de définir une métrique dans l'espace des spineurs S_x. L'équation (1.2) donne, par transposition :

$$(1.8) \qquad (-\overset{T}{\gamma}_j)(-\overset{T}{\gamma}_i) + (-\overset{T}{\gamma}_i)(-\overset{T}{\gamma}_j) = -2\,g_{ij}\,e.$$

Donc il existe une matrice Γ tel que

$$(1.9) \qquad -\overset{T}{\gamma}_i = \Gamma\,\gamma_i\,\Gamma^{-1}.$$

Si on transpose et applique encore la formule (1.9), à l'aide de la propriété *a*, 1° on obtient $\Gamma^2 = ae$. Puisque Γ est déterminé seulement à un facteur près, on peut adopter $\Gamma^2 = -1$. D'ailleurs, si on transpose la formule (1.9), on trouve

$$(1.10) \qquad \Gamma = b\,\overset{T}{\Gamma},$$

mais $\Gamma^2 = -1$ et on a $b = \pm 1$. Dans un repère particulaire, par exemple le repère de Majorana, on peut constater que $b = -1$ (*voir* [20]) et la métrique Γ résulte antisymétrique. Nous appelons Γ_{ab} les coordonnées de Γ et $-\Gamma^{ab}$ celles de Γ^{-1}, soit $\Gamma_{ab}\,\Gamma^{bc} = -\delta^c_a$, on peut écrire (1.9) comme

$$(1.11) \qquad \overset{T}{\gamma}_i{}^a{}_b = \Gamma_{ac}\,\gamma_i{}^c{}_d\,\Gamma^{db} = \gamma_i{}^b{}_a.$$

A l'aide de Γ on peut identifier les spineurs contravariants et covariants de la façon suivante :

$$(1.12) \qquad \psi_a = \Gamma_{ab}\,\psi^b, \qquad \psi^a = \psi_b\,\Gamma^{ba}.$$

Maintenant nous pouvons, avec les règles (1.12), faire monter ou descendre les indices spinoriels, mais on doit faire attention avec les composants mixtes du spineur Γ. En effet, on a

$$(1.13) \qquad \begin{cases} \Gamma^a{}_b = \Gamma_{ab}\,\Gamma^{ca} = \delta^a_b, \\ \Gamma_b{}^a = \Gamma_{bc}\,\Gamma^{ca} = -\delta^a_b. \end{cases}$$

Ainsi de l'équation (1.11) nous avons

$$(1.14) \qquad \gamma_{ia}{}^b = \gamma_i{}^b{}_a \qquad \text{ou} \qquad \gamma_{iab} = \gamma_{iba},$$

c'est-à-dire que les γ_{iab} sont symétriques.

c. On peut définir une application $\mathfrak{S}$ de l'espace de p-formes dans l'espace de 2-spineurs de la manière suivante : A toute p-forme $\alpha^{(p)}$ à valeurs complexes faisons correspondre le spineur

(1.15) $$\mathfrak{S}\,\alpha^{(p)} = \frac{1}{p\,!}\gamma^{i_1}\dots\gamma^{i_p}\,\alpha^{(p)}_{i_1\dots i_p}.$$

Si α est une forme non homogène à valeur complexe on fait correspondre le spineur :

(1.16) $$\mathfrak{S}\,\alpha = \sum_p \mathfrak{S}\,\alpha^{(p)} \qquad \text{si} \quad \alpha = \sum_p \alpha^{(p)}.$$

A la forme élément de volume η, par exemple, correspond le spineur :

(1.17) $$\xi = i\,\mathfrak{S}\,\eta = \frac{i}{4\,!}\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^l\,\eta_{ijkl}.$$

Avec (1.2) on peut démontrer que

(1.18) $$\xi\gamma^i + \gamma^i\xi = 0, \qquad \xi^2 = 1.$$

A l'aide de ξ nous pouvons trouver une autre métrique $\Gamma' = \Gamma\,\xi$, avec des propriétés quelque peu différentes; en effet,

(1.19) $$\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_i = \Gamma'\,\gamma_i\,\Gamma'^{-1}.$$

Avec cette métrique les γ_{iab} sont donc antisymétriques.

d. Nous définissons l'anticommutateur

(1.20) $$[\gamma_i\,\gamma_j] = \gamma_i\,\gamma_j - \gamma_j\,\gamma_i.$$

De l'équation (1.14), on a

(1.21) $$(\Gamma\,\gamma_i)^{\mathrm{T}} = \Gamma\,\gamma_i;$$

de (1.21) et (1.17),

(1.22) $$(\Gamma\,\xi)^{\mathrm{T}} = -\,\Gamma\,\xi;$$

de (1.20) et (1.21),

(1.23) $$(\Gamma\,[\gamma_i\,\gamma_j])^{\mathrm{T}} = \Gamma\,[\gamma_i\,\gamma_j];$$

de (1.22) et (1.23),

(1.24) $$(\Gamma\,[\gamma_i\,\gamma_j]\,\xi)^{\mathrm{T}} = -\,\Gamma\,[\gamma_i\,\gamma_j]\,\xi,$$

et enfin,

(1.25) $$\Gamma^{\mathrm{T}} = -\,\Gamma.$$

D'après la propriété a, 4°, on peut dire qu'un 2-spineur quelconque peut s'écrire, d'une manière et d'une seule, comme

$$(1.26)\qquad \begin{aligned}\psi &= \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!}\gamma^{i_1}\dots\gamma^{i_p}\,\alpha^{(p)}_{i_1\dots i_p} = \sum_{p=0}^{4} \mathcal{S}\,\alpha^{(p)}\\ &= \alpha^{(0)}\,e + \gamma^i\,\alpha^{(1)}_i + \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j\,\alpha^{(2)}_{ij}\\ &\quad + \frac{1}{3!}\gamma^i\gamma^j\gamma^k\,\alpha^{(3)}_{ijk} + \frac{1}{4!}\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^l\,\alpha^{(4)}_{ijkl},\end{aligned}$$

mais :

$$(1.27)\qquad \begin{cases}\alpha^{(3)}_{ijk} = \eta_{ijkl}\,\overset{*}{\alpha}{}^{(3)l},\\ \alpha^{(4)}_{ijkl} = \eta_{ijkl}\,\overset{*}{\alpha}{}^{(4)},\end{cases}$$

donc

$$(1.28)\qquad \begin{aligned}\Gamma\psi &= \alpha^{(0)}\,\Gamma + \Gamma\,\gamma^i\,\alpha^{(1)}_i + \frac{1}{4}\Gamma\,[\gamma^i\gamma^j]\,\alpha^{(2)}_{ij}\\ &\quad + i\,\Gamma\,\xi\,\gamma_i\,\overset{*}{\alpha}{}^{(3)i} - i\,\Gamma\,\xi\,\overset{*}{\alpha}{}^{(4)}.\end{aligned}$$

On trouve ainsi une décomposition, dite décomposition en composantes de Poincaré, de la matrice générique 4×4 $\Gamma\psi$ (16 paramètres) dans une partie antisymétrique $\left(\alpha^{(0)}\,\Gamma\right.$ avec 1 paramètre, $-i\,\overset{*}{\alpha}{}^{(4)}\,\Gamma\,\xi$ avec 1 paramètre et $i\,\Gamma\,\xi\,\gamma_i\,\overset{*}{\alpha}{}^{(3)i}$ avec 4 paramètres$\left.\right)$ et une partie symétrique $\left(\Gamma\,\gamma^i\,\alpha^{(1)}_i\right.$ avec 4 paramètres et $\frac{1}{4}\Gamma\,[\gamma^i\gamma^j]\,\alpha^{(2)}_{ij}$ avec 6 paramètres$\left.\right)$. On peut calculer les $\alpha^{(p)}$ à l'aide de la propriété a, 3°, (1.4) et on trouve :

$$(1.29)\qquad \begin{cases}\alpha^{(0)} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\psi,\\ \alpha^{(1)}_i = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\gamma_i\,\psi),\\ \alpha^{(2)}_{ij} = -\frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}\,([\gamma_i\,\gamma_j]\,\psi),\\ \overset{*}{\alpha}{}^{(3)}_i = \frac{i}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\xi\,\gamma_i\,\psi),\\ \overset{*}{\alpha}{}^{(4)}_i = -\frac{i}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\Gamma\,\xi\,\psi).\end{cases}$$

2. Algèbre des semi-spineurs dans V_4

a. Soit B (resp. $\overline{\mathrm{B}}$) l'automorphisme de S_x (resp. S'_x) défini par

$$(2.1)\qquad \mathrm{B}:\ \psi \to \xi\psi;\qquad \overline{\mathrm{B}}:\ \varphi \to \varphi\xi.$$

D'après (1.18), $B^2 = e$, B admet les valeurs propres ± 1 et S_x peut être décomposée en somme directe $S_x^+ \oplus S_x^-$ de sous-espaces propres de B. Un élément $\psi^+ \in S_x^+$ (resp. $\psi^- \in S_x^-$) est appelé un semi-spineur positif (resp. négatif), c'est-à-dire que

$$(2.2) \qquad B\,\psi^+ = \psi^+, \qquad B\,\psi^- = -\,\psi^-.$$

On peut définir en conséquence les projecteurs

$$(2.3) \qquad B_+ = \frac{1}{2}(e + B); \qquad B_- = \frac{1}{2}(e - B),$$

d'où

$$(2.4) \qquad \psi_+ = B_+\,\psi, \qquad \psi_- = B_-\,\psi, \qquad \psi = \psi_+ + \psi_-.$$

On trouve des résultats analogues pour $\bar{B}$, soit $S'_x = S'^+_x \oplus S'^-_x$.

Considérons maintenant une base de $S_x\,\{\,\varepsilon_a\,\}$, dite base des semi-spineurs. telle que : ε_1, $\varepsilon_2 \in S_x^+$ et ε_3, $\varepsilon_4 \in S_x^-$, et notons les indices 3, 4, avec la nouvelle notation $\dot{1}$, $\dot{2}$ $(3 = \dot{1},\ 4 = \dot{2})$.

A, B, ..., H = 1, 2 sont dits indices semi-spinoriels positifs et $\dot{A}, \dot{B}, \ldots, \dot{H} = \dot{1}, \dot{2}$, indices semi-spinoriels négatifs. On a

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \psi_+^a = (\psi_+^1, \psi_+^2, 0, 0) = (\psi_+^A, 0), \\ \psi_-^a = (0, 0, \psi_-^{\dot{1}}, \psi_-^{\dot{2}}) = (0, \psi_-^{\dot{A}}). \end{cases}$$

A l'aide des projecteurs (2.4) un spineur arbitraire peut être décomposé, d'une manière et d'une seule, en somme de spineurs de type pur, c'est-à-dire d'éléments des produits tensoriels des espaces S_x^+, S_x^-, S'^+_x, S'^-_x. Étudions le problème seulement pour les spineurs contravariants, car la métrique spinorielle permet de transformer un spineur quelconque dans un spineur de ce type. Soit ψ le 2 S-spineur :

$$(2.6) \qquad \psi = \psi^{a_1 \ldots a_{2S}}.$$

A toute application $\mu : \psi^a \rightarrow \mu^a{}_b\,\psi^b$ on associe les applications

$$(2.7) \qquad \mu_{\rm I}\left(\psi^{a_1 \ldots a_{2S}}\right) = \delta^{a_1}_{b_1} \ldots \delta^{a_{\rm I-1}}_{b_{\rm I-1}}\,\mu^{a_{\rm I}}{}_{b_{\rm I}}\,\delta^{a_{\rm I+1}}_{b_{\rm I+1}} \ldots \delta^{a_{2S}}_{b_{2S}}\,\psi^{b_1 \ldots b_{2S}},$$

où $\mathrm{I} = 1, 2, \ldots, 2\,\mathrm{S}$. En conséquence, puisque $B_+ + B_- = e$, on a

$$(2.8) \qquad \psi^{a_1 \ldots a_{2S}} = \prod_{\rm I=1}^{2S} (B_{+\rm I} + B_{-\rm I})\,\psi^{a_1 \ldots a_{2S}},$$

chaque composant de la décomposition cherchée se trouve dans le développement du deuxième membre. Par exemple, le spineur

$$\psi^{(s;\,s')} = \prod_{\mathrm{I}=1}^{2s} \mathrm{B}_{+\mathrm{I}} \prod_{\mathrm{J}=2s+1}^{2\mathrm{S}} \mathrm{B}_{-\mathrm{J}}\,\psi, \tag{2.9}$$

où $0 \leqq s \leqq \mathrm{S}$ et $s' = \mathrm{S} - s$, appartient aux espace $(\mathrm{S}_x^+)^{2s} \otimes (\mathrm{S}_x^-)^{2s'}$.

Pour la définition même de base des semi-spineurs, dans telle base les coordonnées de ξ sont :

$$\xi^a{}_b = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

donc $\psi^{(s,s')}$ a les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi_{\mathrm{I}}\,\psi^{(s;\,s')} = \quad \psi^{(s;\,s')}, & \mathrm{I} = 1, \ldots, 2s, \\ \xi_{\mathrm{J}}\,\psi^{(s;\,s')} = -\psi^{(s;\,s')}, & \mathrm{J} = 2s+1, \ldots, 2\mathrm{S}, \\ \displaystyle\prod_{\mathrm{I}=1}^{2s} \mathrm{B}_{+\mathrm{I}} \prod_{\mathrm{J}=2s+1}^{2\mathrm{S}} \mathrm{B}_{-\mathrm{J}}\,\psi^{(s;\,'s)} = \psi^{(s;\,s')}, & \end{array}\right. \tag{2.11}$$

et toute autre combinaison de $2\,\mathrm{S}$, B_+ et B_- appliquée à $\psi^{(s;\,s')}$ donne zéro.

On trouve ainsi que γ^{iab} appartient à l'espace $(\mathrm{S}_x^+ \otimes \mathrm{S}_x^-) \oplus (\mathrm{S}_x^- \otimes \mathrm{S}_x^+)$:

$$\gamma^{iab} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{i\mathrm{A}\dot{\mathrm{B}}} \\ \sigma^{i\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

d'ailleurs γ^{iab} est symétrique, donc

$$\sigma^{i\mathrm{A}\dot{\mathrm{B}}} = \sigma^{i\dot{\mathrm{B}}\mathrm{A}}. \tag{2.13}$$

On appelle les $\sigma^{i\mathrm{A}\dot{\mathrm{B}}}$ matrices de Pauli. On trouve aussi que la métrique Γ^{ab} appartient à l'espace $(\mathrm{S}_x^+ \otimes \mathrm{S}_x^+) \oplus (\mathrm{S}_x^- \otimes \mathrm{S}_x^-)$ et puisque $\Gamma^{ab} = -\Gamma^{ba}$ dans les coordonnées des semi-spineurs Γ^{ab} a la forme

$$\Gamma^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

mais avec la condition $\Gamma^2 = -1$ on trouve $a^2 = b^2 = 1$ et avec un changement de base $\varepsilon^1 \to -\varepsilon^1$ ou $\varepsilon^{\dot{1}} \to -\varepsilon^{1\cdot}$ on peut toujours écrire la métrique sous la forme :

$$(2.15) \qquad \Gamma^{ab} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{AB} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} \end{pmatrix}; \qquad \Gamma_{ab} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{AB} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} \end{pmatrix},$$

avec

$$(2.16) \qquad (\varepsilon^{AB}) = (\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}) = -(\varepsilon_{AB}) = -(\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ε_{AB} (resp. $\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}$) est la métrique dans l'espace des semi-spineurs positifs (resp. négatifs) et elle sert à identifier les semi-spineurs covariants et contravariants avec des règles analogues aux équations (1.12). On a, par exemple, $\varepsilon^{A}{}_{B} = \delta^{A}_{B} = -\varepsilon_{B}{}^{A}$; $\varepsilon^{\dot{A}}{}_{\dot{B}} = \delta^{\dot{A}}_{\dot{B}} = -\varepsilon_{\dot{B}}{}^{\dot{A}}$.

b. On peut maintenant trouver les formules les plus importantes de la théorie des semi-spineurs. De l'équation (1.2) sous la forme :

$$(2.17) \qquad \gamma_i{}^{ab}\,\gamma_{jbc} + \gamma_j{}^{ab}\,\gamma_{ibc} = 2\, g_{ij}\, \delta^a_c,$$

on a

$$(2.18) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sigma_i^{\ A\dot{B}}\,\sigma_{j\dot{B}C} + \sigma_j^{\ A\dot{B}}\,\sigma_{i\dot{B}C} = 2\, g_{ij}\, \delta^{A}_{C}, \\ &\sigma_i^{\ \dot{A}B}\,\sigma_{jB\dot{C}} + \sigma_{.}^{\ \dot{A}B}\,\sigma_{iB\dot{C}} = 2\, g_{ij}\, \delta^{\dot{A}}_{\dot{C}}, \end{aligned} \right.$$

d'où, par contraction :

$$(2.19) \qquad \sigma_i^{\ A\dot{B}}\,\sigma_{j\dot{B}A} = \sigma_i^{\ \dot{A}B}\,\sigma_{jB\dot{A}} = 2\, g_{ij}.$$

c. Les matrices σ_i sont indépendantes sur le corps complexe et engendrent l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des matrices 2×2. En effet, on peut définir un isomorphisme $\mathcal{S}$ de l'espace des vecteurs complexes sur l'espace des 2-semi-spineur : A tout vecteur α^i, à valeur complexe, faisons correspondre le 2-semi-spineur $\psi_{\dot{A}B}$:

$$(2.20) \qquad \psi = \mathcal{S}\,\alpha = \sigma^i\,\alpha_i \qquad \text{ou} \qquad \psi_{\dot{A}B} = \sigma^i_{\ \dot{A}B}\,\alpha_i,$$

d'après la relation (2.18) on trouve l'application inverse :

$$(2.21) \qquad \alpha_i = \frac{1}{2}\,\sigma_i^{\ \dot{A}B}\,\psi_{\dot{A}B}.$$

De (2.13) et (2.19) il résulte aussi

$$(2.22) \qquad \varepsilon^{\dot{A}\dot{C}}\,\varepsilon^{BD}\,\psi_{\dot{A}B}\,\psi_{\dot{C}D} = 2\, g^{ij}\,\alpha_i\,\alpha_j,$$

soit en substitution l'équation (2.20) dans (2.21),

$$(2.23) \qquad g^{ij}\,\sigma_i{}^{\dot{A}B}\,\sigma_j{}^{\dot{C}D} = 2\,\varepsilon^{\dot{A}\dot{C}}\,\varepsilon^{BD},$$

formule que nous utiliserons.

d. Nous avons aussi que $\gamma^{ia}{}_b\,\gamma^{jbc}$ appartient à $(S_x^+ \otimes S_x^+) \oplus (S_x^- \otimes S_x^-)$ et précisément

$$(2.24) \qquad \left\{ \gamma^{ia}{}_b\,\gamma^{jbc} = \begin{pmatrix} \sigma^{iA}{}_{\dot{B}}\,\sigma^{j\,\dot{B}C} & 0 \\ 0 & \sigma^{i\dot{A}}{}_{B}\,\sigma^{j\,B\dot{C}} \end{pmatrix}. \right.$$

3. Représentation spinorielle du groupe de Lorentz homogène complet

Si on prend la partie symétrique du spineur $\Gamma\,\psi$, de l'équation (1.28), on a

$$(3.1) \qquad \Gamma\varphi = \Gamma\gamma^i\,\alpha_i^{(1)} + \frac{1}{4}\Gamma\,[\gamma^i\,\gamma^j]\,\alpha_{ij}^{(2)}.$$

Avec les équations (2.12) et (2.24) on vérifie aisément que chaque composant du spineur $\Gamma\,\varphi$ engendre, à chaque point de V_4, les représentations du groupe de Lorentz homogène complet [9],

$$\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}\,(1,\ 0) \oplus \mathcal{D}\,(0,\ 1).$$

Nous allons généraliser cette décomposition. Soit φ un 2 S-spineur symétrique

$$(3.2) \qquad \varphi = \varphi^{a_1 \ldots a_{2S}}.$$

Les $2\,S\,!/2\,s\,!\ 2\,s'\,!$ opérateurs qu'on peut obtenir par multiplication de $2\,s$ B_+ et $2\,s'$ B_- dans un ordre quelconque, appliqués aux φ donnent le même résultat à cause de la symétrie de φ. Notons $(B_+)^{2s}\,(B_-)^{2s'}$ la somme de ces $2\,S\,!/2\,s\,!\ 2\,s'\,!$ opérateurs. Dans ce cas, la décomposition unique (2.8) devient

$$(3.3) \qquad \varphi^{a_1 \ldots a_{2S}} = \sum_{2s=0}^{2S} (B_+)^{2s}\,(B_-)^{2(S-s)}\,\varphi^{a_1 \ldots a_{2S}}.$$

Il est évident que le spineur $(B_+)^{2s}\,(B_-)^{2s'}\,\varphi^{a_1 \ldots a_{2S}}$ a seulement les composantes avec $2\,s$ indices positifs et $2\,s'$ négatifs non nulles, toutes les autres composantes sont nulles. Alors le spineur symétrique $(B_+)^{2s}\,(B_-)^{2s'}\,\varphi$ engendre la représentation irréductible $\mathcal{D}\,(s,\ s')$ du groupe de Lorentz propre. La décomposition (3.3) est la décomposition en somme de spineurs qui engendrent des représentations irréductibles du groupe de Lorentz propre. Si on appelle *composante de Poincaré* (²) :

$$\varphi^{(s;s')} = [(B_+)^{2s}(B_-)^{2s'} + (B_+)^{2s'}(B_-)^{2s}]\,\varphi, \tag{3.4}$$

où $S = s + s'$ et $s \leq s'$, on trouve la décomposition :

$$\varphi = \sum_{s=0}^{\sigma} \varphi^{(s;S-s)} \tag{3.5}$$

$\left(\text{si } S = n^{\text{ième}} \text{ entier } \sigma = \frac{1}{2}S, \text{ si } S = n^{\text{ième}} \text{ demi-entier } \sigma = \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}\right)$.

Chaque composante de Poincaré $\varphi^{(s;s')}$ appartient à un espace vectoriel que nous notons $\mathcal{E}(s;\ s')$ et engendre la représentation du groupe de Lorentz complet $\mathcal{D}(s;\ s') \oplus \mathcal{D}(s';\ s)$. (3.5) est la décomposition d'un spineur symétrique quelconque en composants qui engendrent représentations irréductibles du groupe de Lorentz complet, et la généralisation de (3.1). La décomposition (2.7) est unique et, par suite, la (3.3) et la (3.5) sont des décompositions uniques.

4. Connexion spinorielle

a. Si Γ^i_{jk} est la connexion riemannienne de l'espace-temps V_4, les dérivées covariantes des champs des vecteurs sont

$$\left\{\begin{aligned} \nabla_i v^j &= \partial_i v^j + \Gamma^j_{ik} v^k, \\ \nabla_i v_j &= \partial_i v_j - \Gamma^k_{ij} v_k. \end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

Nous avons défini aussi, en chaque point de V_4 et dans chaque repère un système de matrices de Dirac. Supposons d'ailleurs que ce champ de matrices de Dirac est de classe C_∞. En chaque point de V_4 on peut définir des spineurs, nous avons donc la possibilité de définir des champs de spineurs dans V_4, que nous supposons toujours de classe C_∞. On peut maintenant définir les dérivées covariantes des champs des 1-spineurs, contravariants et covariants :

$$\left\{\begin{aligned} \nabla_i \psi &= \partial_i \psi + C_i \psi, \\ \nabla_i \varphi &= \partial_i \varphi - \varphi C_i, \end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

où C_i est une matrice 4×4 dite connexion spinorielle. Les dérivées des

(²) Dans le cas $s = s'$ on pose simplement

$$\varphi^{\left(\frac{S}{2};\frac{S}{2}\right)} = (B_+)^{\frac{S}{2}}(B_-)^{\frac{S}{2}}\varphi \tag{3.4'}$$

et la représentation correspondante peut être irréductible

n-spineurs, et des tenseurs-spineurs sont définies avec la généralisation naturelle des équations (4.1) et (4.2)

b. La connexion riemannienne est univoquement définie par la condition $\nabla_i g_{jk} = 0$. De la même façon nous allons voir qu'on peut définir la connexion spinorielle par les deux équations :

$$(4.3) \qquad \nabla_i \gamma_j = 0; \qquad \nabla_i \Gamma = 0.$$

Soit $S_{ik\ldots}$ un tenseur-spineur, nous notons $S_{ik\ldots//j}$ sa dérivée covariante calculée comme si $S_{ik\ldots}$ fût seulement un tenseur, par exemple :

$$(4.4) \qquad \gamma_{i//j} = \partial_j \gamma_i - \Gamma^k_{ij} \gamma_k.$$

Avec cette notation, l'équation (4.3_1) est :

$$(4.5) \qquad \gamma_{j//i} + C_i \gamma_j - \gamma_j C_i = 0.$$

Selon Loos [16] cette équation admet comme solution :

$$(4.6) \quad C_i = \frac{1}{4}\left(I - \frac{7}{6}A + \frac{4}{3}A^2 - \frac{2}{3}A^3\right)\gamma_{j//i}\gamma^j + a_i e = \hat{C}_i + a_i e,$$

où A, est l'opérateur linéaire sur les matrices 4×4, M :

$$(4.7) \qquad AM = \frac{1}{4}\gamma_i M \gamma^i,$$

et où a_i est un vecteur arbitraire qui peut être déterminé par l'équation (4.3_2) [12]. (Remarquons que la première composante de C_i, que nous appelons $\hat{C}_i$, a une trace nulle, de telle façon que $\operatorname{Tr} C_i = 4\,a_i$.) Définissons la dérivée $\hat{\nabla}_i$ comme la dérivée obtenue avec la connexion $\hat{C}_i$. On doit satisfaire

$$(4.8) \qquad \nabla_i \Gamma = \partial_i \Gamma - \overset{T}{C}_i \Gamma - \Gamma C_i = 0.$$

Dérivons l'équation (1.9), mais puisque, $\left(\hat{\nabla}_i \overset{T}{\gamma}_j\right) = (\hat{\nabla}_i \gamma_j)^T = 0$, on déduit

$$(4.9) \qquad \overset{T}{\gamma}_i \hat{\nabla}_j \Gamma = -\hat{\nabla}_j \Gamma \gamma_i = -(\Gamma \gamma_i \Gamma^{-1})\hat{\nabla}_j \Gamma,$$

d'où

$$(4.10) \qquad \Gamma^{-1}(\hat{\nabla}_j \Gamma)\gamma_i = \gamma_i \Gamma^{-1}(\hat{\nabla}_j \Gamma).$$

D'après la propriété $1.a$, 1° on a

$$(4.11) \qquad \hat{\nabla}_j \Gamma = k_j \Gamma,$$

de (4.6), (4.8) et (4.11)

$$\nabla_j \Gamma = \hat{\nabla}_j \Gamma - 2\, a_j \Gamma = (k_j - 2\, a_j)\, \Gamma = 0. \tag{4.12}$$

L'équation (4.3_2) est satisfaite si l'on pose

$$a_i = \frac{1}{2} k_i, \tag{4.13}$$

et la connexion C_i est complètement déterminée.

c. De (4.3) et de sa définition on a aussi

$$\nabla_i \xi = 0. \tag{4.14}$$

d. On peut trouver aussi ([13] ou [14]) :

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)\, \psi^{a_1 \dots a_{2S}} = \sum_{I=1}^{2S} P^{a_I}{}_{h,ij}\, \psi^{a_1 \dots a_{I-1} h a_{I+1} \dots a_{2S}}, \tag{4.15}$$

où

$$P^a{}_{b,ij} = -\frac{1}{4} R^k{}_{l,ij} (\gamma_k \gamma^l)^a{}_b.$$

e. Un certain changement de base de l'espace spinoriel S_x détermine, si on impose la condition que les γ_i restent invariantes un changement de base orthonormal dans τ_x. On trouve ainsi les isomorphismes de l'algèbre de Lie SO (1, 3) avec l'algèbre de Lie spin (4) ou l'algèbre de Lie sl (2) (si on utilise les changements de base de l'espace des semi-spineurs). Ce fait a conduit quelques auteurs (Cap [6], Ogievetsky et Polubarinov [18], etc.) à essayer de trouver une correspondance entre un changement de base quelconque de τ_x et un type particulier de changement de base dans S_x. Nous adoptons, au contraire (comme Dowker [8] et Pagels [19]) un point de vue différent : les changements de base de S_x et τ_x sont, en général indépendants. On peut donc parler de changement de base vectoriel $\{ \mathbf{e}_i \} \rightarrow \{ A^i{}_{i'} \mathbf{e}_i \}$, produit ou non par un changement du système de coordonnées, $\{ x^i \} \rightarrow \{ x^{i'} \}$, $A^i{}_{i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, et indépendamment du changement de base spinoriel $\{ \varepsilon_a \} \rightarrow \{ \varepsilon_a S^a{}_{a'} \}$. Les spineurs purs restent invariants dans un changement de base vectoriel, on peut donc aisément trouver, d'après les équations (4.1) et (4.2), les changements de coordonnées des connexions Γ et C :

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma^{i'}_{j'k'} &= A^{i'}{}_i A^j{}_{j'} A^k{}_{k'} \Gamma^i_{jk} + (\partial_{j'} A^l{}_{k'}) A^{i'}{}_l, \\ C_{i'} &= A^i{}_{i'} C_i. \end{aligned} \right. \tag{4.16}$$

Dans les changements de coordonnées spinorielles les vecteurs restent invariants et on trouve

$$(4.17)\qquad \begin{cases} \overset{,}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = \mathrm{Cte}, \\ \overset{,}{C}_i = S\, C_i\, S^{-1} + S\,(\partial_i\, S^{-1}). \end{cases}$$

Les formules pour un changement des deux bases sont (4.15_1) et

$$(4.18)\qquad \overset{,}{C}_{i'} = A^{i}{}_{i'}\,[S C_i\, S^{-1} + S\,(\partial_i\, S^{-1})].$$

5. Algèbre des spineurs dans E_5

Considérons un espace pseudo-euclidien E_5. Nous rapporterons, pour le moment, E_5 à un repère orthonormé $\{ \mathbf{e}_{\alpha'} \}$, les coordonnées cartésiennes de ce repère seront indiquées $\{ x^{\alpha'} \}$ (où α', β', $\ldots = 0', \ldots, 4'$) et le tenseur métrique $\eta_{\alpha'\beta'}$ est le tenseur diagonal, avec diagonal principal $(1, -1, -1, -1, -1)$. Introduisons un système $\{ \gamma_{\alpha'} \}$ de cinq matrices 4×4 de Dirac, à des éléments complexes, telles qu'on a :

$$(5.1)\qquad \gamma_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'} + \gamma_{\beta'}\,\gamma_{\alpha'} = -\,2\,\eta_{\alpha'\beta'}\,e,$$

où e est la matrice unité. Ainsi $\gamma_{\alpha'}$ et $\gamma_{\beta'}$ anticommutent pour $\alpha' \neq \beta'$ et $\gamma^2_{\alpha'} = -\,\eta_{\alpha'\alpha'}\,e$. On peut rapporter l'étude de ces matrices aux cas précédents, car si on ajoute aux matrices $\gamma_{i'}$ de l'équation (1.2) (dans le cas orthonormal $g_{i'j'} = \eta_{i'j'}$; i', j', $\ldots = 0'$, $1'$, $2'$, $3'$) la matrice :

$$(5.2)\qquad \gamma_{4'} = -\,\xi,$$

à l'aide des équations (1.18) on trouve un système de cinq matrices satisfaisant (5.1). D'après (1.17), on a

$$(5.3)\qquad \begin{cases} \gamma_{4'} = -\,i\,\gamma^{0'}\,\gamma^{1'}\,\gamma^{2'}\,\gamma^{3'} = i\,\gamma_{0'}\,\gamma_{1'}\,\gamma_{2'}\,\gamma_{3'} \\ \qquad\text{et}\qquad \gamma^{4'} = i\,\gamma^{0'}\,\gamma^{1'}\,\gamma^{2'}\,\gamma^{3'}, \end{cases}$$

d'où

$$(5.4)\qquad i\,\gamma_{0'}\,\gamma_{1'}\,\gamma_{2'}\,\gamma_{3'}\,\gamma_{4'} = e, \qquad i\,\gamma^{0'}\,\gamma^{1'}\,\gamma^{2'}\,\gamma^{3'}\,\gamma^{4'} = e.$$

Ou bien introduisant la 5-forme élément de volume $\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'}$:

$$(5.5)\qquad \begin{cases} \gamma^{\alpha'} = -\,\dfrac{i}{4\,!}\,\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'}\,\gamma_{\beta'}\,\gamma_{\gamma'}\,\gamma_{\delta'}\,\gamma_{\varepsilon'}, \\ e = \dfrac{i}{5\,!}\,\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'}\,\gamma_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'}\,\gamma_{\gamma'}\,\gamma_{\delta'}\,\gamma_{\varepsilon'}. \end{cases}$$

De la même façon que dans le paragraphe 1, on peut définir des spineurs covariants et contravariants avec des lois de transformation (1.6) et (1.7) et dire que $\gamma_{\alpha'}{}^{a}{}_{b}$ est un vecteur-2-spineur de l'espace E_5. On peut enfin identifier les spineurs covariants et contravariants à l'aide d'une métrique $\dot{\Gamma}$, la matrice antisymétrique $\Gamma' = \Gamma\,\xi$ de l'équation (1.19) car de cette équation et de la définition (5.3) on peut déduire

$$\overset{T}{\gamma}_{4'} = \dot{\Gamma}\,\gamma_{4'}\,\dot{\Gamma}^{-1}, \tag{5.6}$$

d'où

$$\overset{T}{\gamma}_{\alpha'} = \dot{\Gamma}\,\gamma_{\alpha'}\,\dot{\Gamma}^{-1}. \tag{5.7}$$

Au contraire, on ne peut pas trouver une métrique avec la propriété (1.10), Avec Γ' on peut faire monter et descendre les indices spinoriels selon les équations (1.12).

Nous n'avons pas besoin d'introduire une connexion spinorielle dans E_5, car E_5 est un espace plan. Dans les coordonnées cartésiennes la dérivée covariante est la dérivée ordinaire et $\Gamma^{i}_{jk} = 0$. En général, on choisit les $\gamma_{\alpha'}$ constantes, par simplicité, alors on a aussi $\partial_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'} = 0$ et $C_{\alpha'} = 0$. On peut obtenir une équation analogue à (4.18) dans cinq dimensions. D'après cette équation, on trouve que si on change le système des coordonnées cartésiennes $\{ x^{\alpha'} \}$ dans un autre système quelconque $\{ x^{\alpha} \}$, et la base ε_a dans une autre base $\varepsilon_{a'} = \varepsilon_a\, S^{a}{}_{a'}$ avec la matrice $S = \text{Cte}$ on a aussi $C_\alpha = 0$ et la dérivée covariante est simplement $\nabla_\alpha\,\Phi = \Phi_{//\alpha}$. Ceci est le changement le plus général que nous utiliserons et en conséquence dans E_5 nous avons toujours $C_\alpha = 0$.

II. — CHAMPS SPINORIELS DANS L'ESPACE-TEMPS DE DE SITTER

6. Espace-temps de De Sitter. Systèmes de coordonnées

a. Dans l'espace pseudo-euclidien E_5 est défini l'espace-temps de De Sitter V_4 comme l'ensemble de points « $\mathring{x}$ » de E_5 satisfaisant :

$$\eta_{\alpha'\beta'}\,\mathring{x}^{\alpha'}\,\mathring{x}^{\beta'} = -\,r^2. \tag{6.1}$$

Dans les voisinages ouverts de V_4 on peut introduire des systèmes de coordonnées quelconques $\{ x^i \}$ $(i, j, \ldots, n = 0, 1, 2, 3)$. Nous ajoutons à $\{ x^i \}$ une nouvelle coordonnée « radiale » x^4, telle que les formules de passage au système des coordonnées $\{ x^\alpha \}$ sont

$$x^{\alpha'} = x^4\,\mathring{x}^{\alpha'}\,(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{6.2}$$

$\{ x^\alpha \}$ $(\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3, 4)$ est un système de coordonnées, dans E_5, que nous appellerons « coordonnées polaires ». $\xi^{\beta'} = (x^4 r)^{-1} x^{\beta'}$ est le vecteur radial unitaire, pour les points de V_4 on a $x^4 = 1$, pour ces points le vecteur $\xi^{\beta'}$ est orthogonal à V_4, et $\delta^{\beta'}_{\alpha'} + \xi_{\alpha'} \xi^{\beta'}$ est le projecteur $\mathcal{P}_\tau$ sur l'espace τ_x tangent à V_4 en x. On appelle ψ tenseur-spineur « physique » quand la projection sous tous les indices tensoriels est $\mathcal{P}_\tau \psi = \psi$, c'est-à-dire toutes les coordonnées de ψ avec un indice tensoriel $\alpha = 4$ sont nulles. Logiquement tous les champs à étudier sont « physiques ».

b. Nous désignons avec un super-indice « 0 » tous les objets de V_4 : $\mathring{x}$, $\mathring{g}_{ij}$, $\mathring{\nabla}_i$, $\mathring{\Delta}$, $\mathring{\Gamma}^i_{jk}$, $\mathring{\gamma}^i$, $\mathring{R}_{ijkl}$, $\mathring{R}_{ij}$, $\mathring{R}$, etc.

Nous avons ainsi pour le tenseur métrique de E_4, reporté en coordonnées « polaires » :

$$(6.3) \qquad \begin{cases} g_{ij} = (x^4)^2\, \mathring{g}_{ij}; & g_{i4} = 0, \\ g_{4i} = 0; & g_{44} = -\, r^2, \end{cases}$$

et pour les symboles de Christoffel des coordonnées « polaires » de E_5

$$(6.4) \qquad \begin{cases} \Gamma^k_{ij} = \mathring{\Gamma}^k_{ij}; & \Gamma^k_{4j} = \Gamma^k_{j4} = \dfrac{1}{x^4}\, \delta^k_j; \\ \Gamma^4_{ij} = \dfrac{x^4}{r^2}\, \mathring{g}_{ij}; & \Gamma^4_{4j} = \Gamma^4_{j4} = \Gamma^k_{44} = \Gamma^4_{44} = 0, \end{cases}$$

où $\mathring{\Gamma}^i_{jk}$ sont les coefficients de la connexion riemannienne de V_4. Finalement, pour les tenseurs de courbure de V_4 nous avons :

$$(6.5) \qquad \begin{cases} \mathring{R}^i{}_{j,kl} = \dfrac{1}{r^2}\,(\delta^i_l\, \mathring{g}_{jk} - \delta^i_k\, \mathring{g}_{jl}), \\ \mathring{R}_{ij} = -\, \dfrac{3}{r^2}\, \mathring{g}_{ij}, \\ \mathring{R} = -\, \dfrac{12}{r^2}. \end{cases}$$

c. La dérivée covariante dans V_4 est, pour les tenseurs :

$$(6.6) \qquad \mathring{\nabla}_\alpha T = \mathcal{P}_\tau \nabla_\alpha T.$$

Si on considère des champs de tenseurs « physiques » avec des coordonnées $T_{\beta'_1 \ldots \beta'_p}{}^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_q}$ fonctions homogènes, de degré n, des coordonnées

$\{ x^{\alpha'} \}$, la formule inverse est

$$(6.7)\quad \nabla_\alpha T_{\beta_1 \dots \beta_p}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_q} = \mathring{\nabla}_\alpha T_{\beta_1 \dots \beta_p}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_q} + \frac{1}{rx^4}\left\{ - n\, \xi_\alpha T_{\beta_1 \dots \beta_p}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_q} + \sum_{I=1}^{p} \xi_{\beta_I} T_{\beta_1 \dots \beta_{I-1}\alpha\beta_{I+1} \dots \beta_p}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_q} + \sum^{q} \xi^{\gamma_J} T_{\beta_1 \dots \beta_p}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_{J-1}}{}_{\alpha}{}^{\gamma_{J+1} \dots \gamma_q} \right\}.$$

La dérivée du champ ξ^β est

$$(6.8)\qquad \nabla_\alpha \xi^\beta = \frac{1}{rx^4}(\delta^\beta_\alpha + \xi_\alpha \xi^\beta).$$

7. Le système des $\mathring{\gamma}^i$ et la connexion spinorielle $\mathring{C}^i$ dans l'espace-temps de De Sitter

a. Le changement de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires $\{ x^{\alpha'} \} \to \{ x^\alpha \}$, induit dans chaque point de V_4 un changement de base « vectoriel ». Alors dans les coordonnées $\{ x^\alpha \}$ nous avons un autre système de cinq matrices de Dirac γ_α :

$$(7.1)\qquad \gamma_\alpha = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\gamma_{\alpha'}.$$

où $\gamma_{\alpha'}$ sont les cinq matrices de Dirac définies par (5.1). Les $\gamma_{\alpha'}$ sont constantes mais les γ_α sont variables à cause du changement de coordonnées. Les γ_i satisfont à la relation (1.2) et pourtant on peut les prendre comme un système des quatre matrices de Dirac en chaque point x de V_4. La matrice γ_4 joue, à peu près, le rôle de ξ [*voir* (5.2)]. De (5.5) et (1.17) on a

$$(7.2)\qquad \gamma^4 = -\frac{i}{4!}\eta^{4\beta\gamma\delta\varepsilon}\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta\gamma_\varepsilon = -\frac{i}{4!}\sqrt{\frac{|\mathring{g}|}{|g|}}\,\eta^{ijkl}\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l = -\frac{1}{r}\xi,$$

et

$$\gamma_4 = r\,\xi.$$

De (6.2) et (1.17) on obtient

$$(7.3)\qquad \partial_i \gamma_4 = \frac{1}{x^4}\gamma_i, \qquad \partial_4 \gamma_4 = 0.$$

Nous avons maintenant à notre disposition des champs spinoriels de E_5, la restriction de ces champs à V_4, et un système de matrices de Dirac $\{\gamma_i\}$, en chaque point de V_4. En général, si d'une façon indépendante un champ spinoriel et un système de matrices de Dirac se sont présentés dans un espace quelconque on peut se demander si tous les deux sont reportés à un même système de coordonnées spinorielles. Ce n'est pas le cas pour les restrictions à V_4 des champs de spineurs de E_5 et les $\{\gamma_i\}$. Si l'on veut que les équations d'onde issues des méthodes générales de la théorie des groupes aient comme limite pour $r \to \infty$, les équations ordinaires de Dirac et Rarita-Schwinger, nous devons correspondre aux spineurs de E_5 (considérés aussi comme spineurs de V_4) le système de matrices de Dirac [7]

$$\text{(7.4)} \qquad \mathring{\gamma}_i = \frac{i}{r}\gamma_4\,\gamma_i.$$

Les $\mathring{\gamma}_i$ sont, en effet, un système de matrices de Dirac car les équations (1.2) sont satisfaites par eux. Nous postulons que les $\mathring{\gamma}^i$ et les champs de E_5 sont rapportés à la même base spinorielle.

b. On peut calculer $\mathring{\xi}$:

$$\text{(7.5)} \qquad \begin{aligned} \mathring{\xi} &= \frac{i}{4!}\eta^{ijkl}\,\mathring{\gamma}_i\,\mathring{\gamma}_j\,\mathring{\gamma}_k\,\mathring{\gamma}_l \\ &= \frac{i}{4!}\eta^{ijkl}\frac{1}{r^4}\,\gamma_4\,\gamma_i\,\gamma_4\,\gamma_j\,\gamma_4\,\gamma_k\,\gamma_4\,\gamma_l = \xi = -\,r\,\gamma^4 = \frac{1}{r}\gamma_4. \end{aligned}$$

c. On peut calculer aussi la connexion spinorielle $\mathring{C}^i$ correspondante aux $\{\mathring{\gamma}^i\}$. D'abord nous avons déjà remarqué que dans E_5 :

$$\text{(7.6)} \qquad \partial_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'} = 0,$$

et aussi que la connexion spinorielle dans E_5 est nulle. On a donc

$$\text{(7.7)} \qquad \nabla_\alpha\,\gamma_\beta = 0,$$

soit

$$\text{(7.8)} \qquad \nabla_i\,\gamma_j = \partial_i\,\gamma_j - \Gamma^k_{ij}\,\gamma_k - \Gamma^4_{ij}\,\gamma_4 = 0,$$

d'où pour le système des γ_i considéré comme un vecteur-2-spineur de V_4, on a

$$\text{(7.9)} \qquad \gamma_{j\,//\,i} = \Gamma^4_{ij}\,\gamma_4 = \frac{x^4}{r^2}\,\mathring{g}_{ij}\,\gamma_4.$$

On peut écrire les $\mathring{\gamma}^i$ comme

$$\text{(7.10)} \qquad \mathring{\gamma}_i = \frac{i}{2\,r}(\gamma_4\,\gamma_i - \gamma_i\,\gamma_4),$$

puis on peut dériver et, à l'aide de (7.9) et (7.3), il vient

(7.11) $$\mathring{\gamma}_{i//j} = \frac{i}{2r}(\gamma_j \gamma_i - \gamma_i \gamma_j),$$

ou bien :

(7.12) $$\mathring{\gamma}_{i//j} = \frac{i}{2r}(\mathring{\gamma}_j \mathring{\gamma}_i - \mathring{\gamma}_i \mathring{\gamma}_j).$$

On doit résoudre l'équation

(7.13) $$\mathring{\gamma}_{i//j} + \mathring{C}_j \mathring{\gamma}_i - \mathring{\gamma}_i \mathring{C}_j = \frac{i}{2r}(\mathring{\gamma}_j \mathring{\gamma}_i - \mathring{\gamma}_i \mathring{\gamma}_j) + \mathring{C}_j \mathring{\gamma}_i - \mathring{\gamma}_i \mathring{C}_j = 0,$$

et on peut appliquer la formule de Loos (4.6), mais dans ce cas une solution est évidente :

(7.14) $$\mathring{C}_j = -\frac{i}{2r}\mathring{\gamma}_j.$$

Nous allons démontrer que ceux-ci sont les coefficients cherchés, car la dérivée covariante de $\mathring{\Gamma}$ est nulle avec cette connexion. La métrique $\mathring{\Gamma}$ est définie par

(7.15) $$\mathring{\gamma}_i^{\mathrm{T}} = -\mathring{\Gamma}\mathring{\gamma}_i \mathring{\Gamma}^{-1}; \qquad \mathring{\Gamma}^2 = -1,$$

la métrique spinorielle dans E_5 est Γ' et elle satisfait à

(7.16) $$\gamma_i^{\mathrm{T}} = \Gamma' \gamma_i \Gamma'^{-1}, \qquad \gamma_4^{\mathrm{T}} = \Gamma' \gamma_4 \Gamma'^{-1}, \qquad \Gamma'^2 = -1;$$

d'après la définition (7.4), on a $\mathring{\Gamma} = \Gamma'$, puisque Γ' satisfait (7.15). Mais remarquons que $\mathring{\Gamma}$ est une matrice constante, car Γ' est constante, alors d'après (7.14) :

(7.17) $$\mathring{\nabla}_j \mathring{\Gamma} = \partial_j \mathring{\Gamma} - \mathring{\Gamma}\mathring{C}_j - \mathring{C}_j^{\mathrm{T}} \mathring{\Gamma} = \frac{i}{2r}(\mathring{\Gamma}\mathring{\gamma}_j + \mathring{\gamma}_j^{\mathrm{T}} \mathring{\Gamma}) = 0,$$

ce qui démontre que $\mathring{C}_j$ est la connexion spinorielle correspondante aux $\mathring{\gamma}^i$.

8. Champs de spin 1/2

a. D'une façon analogue aux méthodes développées dans l'article [5] pour les représentations de spin entier du groupe SO (1, 4), nous allons trouver les représentations de spin 1/2 et masse μ. Soit $A^{\alpha'}{}_{\beta'}$ la matrice de la représentation de spin 1, dite représentation naturelle :

(8.1) $$g \in \mathrm{SO}(1,\ 4) \ \rightarrow \ \mathbf{e}_{\alpha'} = A^{\beta'}{}_{\alpha'}(g)\, \mathbf{e}_{\beta'}.$$

La matrice $\Lambda(g)$ qui satisfait l'équation

$$\Lambda(g)\,\gamma_{\alpha'}\,\Lambda(g)^{-1} = A^{\beta'}{}_{\alpha'}(g)\,\gamma_{\beta'}, \tag{8.2}$$

appartient à une représentation particulière de spin 1/2. Soit $\mu^{\alpha'}{}_{\beta'}$ un générateur de la représentation $A(g)$ et soit λ le générateur correspondant de la représentation $\Lambda(g)$, ils sont liés par la relation :

$$\lambda\gamma^{\alpha'} - \gamma^{\alpha'}\lambda = \mu^{\beta'\alpha'}\,\gamma_{\beta'}, \tag{8.3}$$

qu'on peut déduire aisément de (8.2) (*voir* [13], [14] ou [15]). Cherchons à résoudre l'équation (8.3) avec une solution de la forme (*voir* [15]) :

$$\lambda = k\,\mu^{\gamma'}{}_{\beta'}\,\gamma_{\gamma'}\,\gamma^{\beta'}, \tag{8.4}$$

il vient

$$\lambda\gamma^{\alpha'} - \gamma^{\alpha'}\lambda = k\,\mu^{\gamma'}{}_{\beta'}\,(\gamma_{\gamma'}\,\gamma^{\beta'}\,\gamma^{\alpha'} - \gamma^{\alpha'}\,\gamma_{\gamma'}\,\gamma^{\beta'}); \tag{8.5}$$

or, à l'aide de (5.1),

$$\gamma_{\gamma'}\,\gamma^{\beta'}\,\gamma^{\alpha'} - \gamma^{\alpha'}\,\gamma_{\gamma'}\,\gamma^{\beta'} = -2\,\gamma_{\gamma'}\,g^{\alpha'\beta'} + 2\,\gamma^{\beta'}\,\delta^{\alpha'}_{\beta'}, \tag{8.6}$$

il en résulte que (8.3) est satisfaite si $k = -1/4$. Les dix générateurs de la représentation $A(g)$ sont

$$(S_{\alpha'\beta'})^{\lambda'}{}_{\mu'} = \delta^{\lambda'}{}_{\alpha'}\,\eta_{\beta'\mu'} - \delta^{\lambda'}{}_{\beta'}\,\eta_{\alpha'\mu'}, \tag{8.7}$$

alors les dix générateurs de la représentation $\Lambda(g)$ sont

$$\lambda_{\alpha'\beta'} = -\frac{1}{4}[\gamma_{\alpha'}\gamma_{\beta'}]. \tag{8.8}$$

Soit $\varphi^a(x)$ un champ spinoriel de E_5, nous allons démontrer que la transformation :

$$\varphi^a(x) \to \overset{,}{\varphi}{}^a(x) = \Lambda^a{}_b(\overset{-1}{g})\,\varphi^a[g(x)], \tag{8.9}$$

engendre toutes les représentations de spin 1/2 et des différentes masses. Les générateurs de la représentation sont

$$X_{\alpha'\beta'} = L_{\alpha'\beta'} - \lambda_{\alpha'\beta'}, \tag{8.10}$$

où

$$L_{\alpha'\beta'} = -x_{\alpha'}\,\partial_{\beta'} + x_{\beta'}\,\partial_{\alpha'}.$$

On trouve immédiatement que les $X_{\alpha'\beta'}$ commutent avec l'opérateur d'Euler $x^{\alpha'}\partial_{\alpha'}$, alors les représentations irréductibles doivent être engendrées par des fonctions homogénées des $x^{\alpha'}$ du degré n, désormais nous considérons seulement une de telles représentations. Les $X_{\alpha'\beta'}$

commutent aussi avec l'opérateur de Klein-Gordon $r^2 \mathring{I}_1 = \frac{1}{2} L^{\alpha'\beta'} L_{\alpha'\beta'}$ (c'est-à-dire l'opérateur de Casimir pour les champs de spin 0), on peut aisément calculer que cet opérateur a comme valeur propre :

$$r^2 \mathring{I}_1 = r^2 \Delta - n(n+3), \tag{8.11}$$

pour les représentations irréductibles avec fonctions homogènes du degré n. On peut calculer aussi l'opérateur de Casimir de second degré :

$$r^2 I_1 = \frac{1}{2} X^{\alpha'\beta'} X_{\alpha'\beta'} = r^2 \Delta - n(n+3) + Q - \frac{5}{2}, \tag{8.12}$$

où

$$Q = \frac{1}{2} [\gamma^{\alpha'} \gamma^{\beta'}] L_{\alpha'\beta'}. \tag{8.13}$$

D'après (8.12), on déduit que Q doit être aussi un multiple de l'unité dans une représentation irréductible. Dirac, dans l'article [7], démontre que :

$$Q(Q-3) = -r^2 \Delta + n(n+3). \tag{8.14}$$

Par suite, (8.12) peut s'écrire :

$$r^2 I_1 = -(Q-2)^2 + \frac{3}{2}. \tag{8.15}$$

On peut calculer aussi l'opérateur de Casimir de quatrième degré

$$r^2 I_2 = -V^{\alpha'} V_{\alpha'} = -\frac{3}{4}\left(Q - \frac{3}{2}\right)\left(Q - \frac{5}{2}\right), \tag{8.16}$$

où

$$V^{\alpha'} = \frac{1}{8} \varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'} X_{\beta'\gamma'} X_{\delta'\varepsilon'}.$$

b. Tous les calculs précédents ont été faits en E_5, envisageons maintenant l'espace physique V_4. Dans les coordonnées polaires et pour $x^4 = 1$, $L_{\alpha\beta}$ est

$$L_{ij} = 0, \qquad L_{4i} = r^2 \partial_i, \tag{8.17}$$

et l'opérateur Q devient :

$$Q = r^2 \gamma^4 \gamma^i \partial_i = ir \mathring{\gamma}^i \partial_i. \tag{8.16}$$

Pour avoir la dérivée covariante on peut introduire la connexion $\mathring{C}^i$:

$$Q = ir \mathring{\gamma}^i (\mathring{\nabla}_i - \mathring{C}_i) = ir \mathring{\gamma}^i \left(\mathring{\nabla}_i + \frac{i}{2r} \mathring{\gamma}_i\right) = ir P + 2, \tag{8.19}$$

où $P = \mathring{\gamma}^i \mathring{\nabla}_i$ est l'opérateur de Dirac. Mais Q est un multiple de la matrice unité dans les représentations irréductibles, alors P a la même propriété :

$$P\varphi = \mathring{\gamma}^i \nabla_i \varphi = m\varphi. \tag{8.20}$$

Le spineur φ doit satisfaire l'équation de Dirac dans les représentations irréductibles. D'après les équations (8.12) et (8.19) on peut écrire l'opérateur de Casimir I_1 comme

$$I_1 = P^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{r^2}. \tag{8.21}$$

L'opérateur de Casimir n'est pas égal à P^2, nous avons donc deux possibilités pour la masse : *la masse de Dirac m* ou *la masse de Casimir* μ ($I_1 = \mu^2$) liée par la formule (*voir* aussi [3]) :

$$\mu^2 = m^2 + \frac{3}{2r^2}. \tag{8.22}$$

D'après la formule (4.15) (*voir* [13] ou [14]), on a

$$P^2 = \bar{\Delta} + \frac{1}{4}\mathring{R}, \tag{8.23}$$

où

$$\bar{\Delta} = -\,\mathring{g}^{ij}\,\mathring{\nabla}_i\,\mathring{\nabla}_j,$$

d'où, à l'aide de (6.5_3),

$$I_1 = \bar{\Delta} - \frac{3}{2r^2} = \bar{\Delta} + \frac{1}{8}\mathring{R}. \tag{8.24}$$

Dans l'article [5] nous avons démontré l'identité de l'opérateur de Casimir I_1 et le laplacien de De Rham-Lichnerowicz pour les tenseurs; si l'on étend ce critérium pour les spineurs φ on doit poser qu'en général dans tous espace-temps courbe le laplacien pour les spineurs est

$$\mathring{\Delta} = \bar{\Delta} + \frac{1}{8}R. \tag{8.25}$$

c. Si l'on prend les valeurs des opérateurs de Casimir I_1 et I_2 pour les représentations irréductibles unitaires de l'article [11] pour $e = S = \frac{1}{2}$, on a [*voir* aussi [10]) :

$$\left\{\begin{aligned} I_1 &= \mu^2 = m^2 + \frac{3}{2r^2} = -\frac{1}{r^2}\left[\frac{3}{4} + f(f-1) - 2\right], \\ I_2 &= -\frac{3}{4r^2}\left(Q - \frac{3}{2}\right)\left(Q - \frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{4r^2}f(f-1), \end{aligned}\right. \tag{8.26}$$

de ces équations et de (8.19) nous obtenons

$$rm = \mp i\left(f - \frac{1}{2}\right). \tag{8.27}$$

Toutes les représentations de la série $C^{(1/2)}{}_{1/2},\ \rho$ sont trouvées. Dans cette série nous avons d'ailleurs

$$f = \frac{1}{2} + i\,\rho, \qquad 0 < \rho < \infty. \tag{8.28}$$

On doit prendre le signe « — » dans (8.27) pour avoir des masses positives, et on trouve :

$$rm = \rho, \qquad r\,\mu = \sqrt{\frac{3}{2} + \rho^2}. \tag{8.29}$$

9. Champs de spin demi-entier

Il est facile de généraliser la théorie du paragraphe précédent à tous les spins demi-entiers. Soit $\varphi = \varphi^{a\lambda'_1 \dots \lambda'_{S'}}(x)$ un champ spineur-S′-tenseur de l'espace E_5, nous allons démontrer que les transformations de ce champ engendrent toutes les représentations irréductibles unitaires pour le spin demi-entier $S = S' + \frac{1}{2}$. Considérons la transformation :

$$\begin{aligned} \varphi^{a\lambda'_1 \dots \lambda'_{S'}}(x) &\to \overset{,}{\varphi}{}^{a\lambda'_1 \dots \lambda'_{S'}}(x) \\ &= \Lambda^a{}_b(\overset{-1}{g})\, A^{\lambda'_1}{}_{\mu'_1}(\overset{-1}{g}) \dots A^{\lambda'_{S'}}{}_{\mu'_{S'}}(\overset{-1}{g})\, \varphi^{b\mu'_1 \dots \mu'_{S'}}[g(x)]. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Si à toute application $\mu : v^{\alpha'} \to \mu^{\alpha'}{}_{\beta'}\, v^{\beta'}$ on associe les applications

$$\mu_I\left(\varphi^{a\alpha'_1 \dots \alpha'_{S'}}\right) = \delta^a_b\, \delta^{\alpha'_1}_{\beta'_1} \dots \delta^{\alpha'_{I-1}}_{\beta'_{I-1}}\, \mu^{\alpha'_I}{}_{\beta'_I}\, \delta^{\alpha'_{I+1}}_{\beta'_{I+1}} \dots \delta^{\alpha'_{S'}}_{\beta'_{S'}}\, \varphi^{b\beta'_1 \dots \beta'_{S'}}, \tag{9.2}$$

et à l'application $\mu : v^{\alpha'\beta'} \to \mu^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\, v^{\gamma'\delta'}$ les applications :

$$\begin{aligned} &\mu_{IJ}\left(\varphi^{a\alpha'_1 \dots \alpha'_{S'}}\right) \\ &= \delta^a_b\, \delta^{\alpha'_1}_{\beta'_1} \dots \delta^{\alpha'_{I-1}}_{\beta'_{I-1}}\, \delta^{\alpha'_{I+1}}_{\beta'_{I+1}} \dots \delta^{\alpha'_{J-1}}_{\beta'_{J-1}}\, \delta^{\alpha'_{J+1}}_{\beta'_{J+1}} \dots \delta^{\alpha'_{S'}}_{\beta'_{S'}}\, \mu^{\alpha'_I \alpha'_J}{}_{\beta'_I \beta'_J}\, \varphi^{a\beta'_1 \dots \beta'_{S'}} \end{aligned} \tag{9.3}$$

(où I, J, ... = 1, ..., S′) les générateurs de la représentation (9.1) sont :

$$X_{\alpha'\beta'} = L_{\alpha'\beta'} - \lambda_{\alpha'\beta'} - \sum_{I=1}^{S'} S_{\alpha'\beta' I}, \tag{9.4}$$

où $L_{\alpha'\beta'}$, $\lambda_{\alpha'\beta'}$ et $S_{\alpha'\beta'}$ sont définies dans les équations (8.10₂), (8.9) et (8.7). Pour les mêmes raisons que dans le paragraphe précédent dans une représentation irréductible le champ φ doit être une fonction homogène des $x^{\alpha'}$. On peut calculer l'opérateur de Casimir I_1 :

$$(9.5)\quad r^2 I_1 = \frac{1}{2} X^{\alpha'\beta'} X_{\alpha'\beta'} = r^2 \Delta - n(n+3) - 2S' + 2\sum_{I=1}^{S'} \left(x^{\lambda'_I} \partial\mu'_I\right)_I$$

$$+\sum_{I\neq J} \left(g^{\lambda'_I \lambda'_J} g_{\mu'_I \mu'_J} - \delta^{\lambda'_I}_{\mu'} \delta^{\lambda'_J}_{\mu'_I}\right)_{IJ} + Q - \frac{5}{2} - \sum_{I=1}^{S'} \left(\gamma^{\lambda'_I} \gamma_{\mu'_I} + \delta^{\lambda'_I}_{\mu'_I}\right)_I,$$

où

$$Q = \frac{1}{2} [\gamma^{\alpha'} \gamma^{\beta'}] L_{\alpha'\beta'}.$$

Soit maintenant φ un spineur-S'-tenseur « physique », si l'on veut que la représentation soit irréductible dans le sous-groupe SO (1, 3), φ doit être aussi symétrique dans ses indices tensoriels, et avec trace nulle dans chaque couple d'indices tensoriels. En conséquence, on trouve :

$$\sum_{I\neq J} g^{\lambda'_I \lambda'_J} g_{\mu'_I \mu'_J} = 0,$$

$$\sum_{I\neq J} \delta^{\lambda'_I}_{\mu'_J} \delta^{\lambda'_J}_{\mu'_I} = S'(S'-1); \qquad \sum_{I=1}^{S'} \delta^{\lambda'_I}_{\mu'_I} = S'.$$

D'ailleurs on peut constater que l'opérateur

$$r^2 \Delta - n(n+3) - 2S' + 2\sum_{I=1}^{S'} \left(x^{\lambda'_I} \partial\mu'_I\right)_I - S'(S'-1),$$

c'est-à-dire la partie tensorielle de l'opérateur de Casimir commute avec tous les générateurs et, par suite, dans une représentation irréductible, on a

$$(9.6)\qquad \sum_{I=1}^{S'} \left(x^{\lambda'_I} \partial\mu'_I\right)_I \varphi^{a\lambda'_1 \dots \lambda'_{S'}} = H\, \varphi^{a\lambda'_1 \dots \lambda'_{S'}}.$$

Par contraction avec $x^{\lambda'_J}$ on obtient

$$(9.7)\qquad x_{\lambda'_J} x^{\lambda'_J} \partial\mu'_J\, \varphi^{a\mu'_1 \dots \mu'_J \dots \mu'_{S'}} = 0,$$

d'où

$$(9.8)\qquad \partial\mu'_J\, \varphi^{a\mu'_1 \dots \mu'_J \dots \mu'_{S'}} = 0.$$

Il est évident aussi que la part spinorielle de l'opérateur de Casimir :

$$r^2 \Delta - n(n+3) + Q - \frac{5}{2},$$

commute avec tous les $X_{\alpha'\beta'}$, on voit ainsi que l'opérateur Q est un multiple de l'unité dans toutes les représentations irréductibles. En conséquence, toutes les parties de (9.5) sont multiples de l'unité dans de telles représentations, d'où

(9.9) $$\sum_{I=1}^{S'} \left(\gamma^{\lambda'_I} \gamma_{\mu'_I}\right)_I \varphi^{\mu'_1 \dots \mu'_{S'}} = K \varphi^{\lambda'_1 \dots \lambda'_{S'}}.$$

Par contraction avec $x^{\lambda'_J}$, on obtient

(9.10) $$x_{\lambda'_J} \gamma^{\lambda'_J} \gamma_{\mu'_J} \varphi^{\mu'_1 \dots \mu'_J \dots \mu'_{S'}} = 0,$$

mais $x_{\lambda'_J} \gamma'^{J} = x_{\lambda_J} \gamma^{\lambda_J} = - r^2 \gamma^4$. Si on multiplie par γ_4, puisque $\gamma_4 \gamma^4 = 1$, il vient

(9.11) $$\gamma_{\mu'_J} \varphi^{\mu'_1 \dots \mu'_J \dots \mu_{S'}} = 0.$$

Résumant : on a

(9.12) $$r^2 I_1 = r^2 \Delta - n(n+3) - S'(S'+2) + Q - \frac{5}{2},$$

soit, à l'aide de l'équation (8.14),

(9.13) $$r^2 I_1 = -(Q-2)^2 + \frac{3}{2} - S'(S'+2).$$

Mais d'une façon entièrement analogue au paragraphe précédent, on trouve

(9.14) $$Q - 2 = ir P,$$

d'où

(9.15) $$r^2 I_1 = r^2 P^2 + \frac{3}{2} - S'(S'+2).$$

On peut trouver les auto-valeurs de l'opérateur de Casimir I_1 dans l'article [11]

(9.16) $$r^2 I_1 = -[e(e+1) + f(f-1) - 2],$$

si l'on pose $e = S' + \frac{1}{2}$ de (9.15) et (9.16) on trouve l'autovaleur de P; en effet, d'après (9.14), P est un multiple de l'unité dans les représentations irréductibles, nous appellerons sa valeur propre, m « *masse de Dirac* »

(9.17) $$r P = -i\left(f - \frac{1}{2}\right) = rm.$$

L'opérateur de Casimir I_2 conduit aux mêmes résultats. Les champs envisagés donnent toutes les représentations irréductibles unitaires de la série $C_{e,\rho}^{(1/2)}$ où $e = S' + \frac{1}{2}$ doit être un nombre demi-entier et $f = \frac{1}{2} + i\rho$, $0 \leqq \rho < \infty$, d'où $rm = \rho$. Les champs doivent satisfaire les équations (9.7), (9.11) et (9.17); que dans le système de coordonnées polaires sont

$$(9.18) \qquad \begin{cases} \mathring{\nabla}_{i_J} \varphi^{i_1 \cdots i_J \cdots i_{S'}} = 0, \\ \mathring{\gamma}_{i_J} \varphi^{i_1 \cdots i_J \cdots i_{S'}} = 0, \\ \mathring{\gamma}^j \mathring{\nabla}_j \varphi^{i_1 \cdots i_J \cdots i_{S'}} = m \varphi^{i_1 \cdots i_J \cdots i_{S'}}, \end{cases}$$

c'est-à-dire, les équations de Rarita-Schwinger (*voir*, par exemple, [20]) généralisées aux espace-temps courbe. Si l'on appelle l'autovaleur, racine carrée positive de l'opérateur de Casimir I_1, *masse de Casimir* μ, d'après (9.15), on a

$$(9.19) \qquad \mu^2 = m^2 + \left(\frac{3}{2r}\right)^2 - \frac{S(S+2)}{r^2},$$

et en conséquence les deux masses sont différentes et elles sont liées par cette équation.

Nous avons maintenant un champ tensoriel ou spinoriel pour chaque représentation irréductible unitaire du groupe SO (1, 4) de spin entier [5] ou demi-entier (c'est-à-dire, sauf pour la série $D_{e,f}^{+-}$, où $e \geqq f \geqq \frac{1}{2}$, $e - f = n^{\text{ième}}$ entier, ou série des spins continus). Il reste à étudier seulement les représentations équivalentes qu'on peut obtenir avec des spineurs « purs ».

Il sera utile de calculer aussi l'opérateur de Casimir I_1 en fonction du laplacien ordinaire $\overline{\Delta}$. D'après l'équation (6.7), on a

$$(9.20) \qquad \nabla_\alpha \varphi^{a\gamma_1 \cdots \gamma_{S'}} = \mathring{\nabla}_\alpha \varphi^{a\gamma_1 \cdots \gamma_{S'}} + \frac{1}{rx^4} \left\{ - n\,\xi_\alpha \varphi^{a\gamma_1 \cdots \gamma_{S'}} + \sum_{I=1}^{S'} \xi^{\gamma_I} \varphi^{a\gamma_1 \cdots \gamma_{I-1}\,\alpha\,\gamma_{I+1} \cdots \gamma_{S'}} + \frac{i}{2r} \mathring{\gamma}_\alpha{}^a{}_b\, \varphi^{b\gamma_1 \cdots \gamma_{S'}} \right\},$$

avec une nouvelle dérivation et contraction on trouve :

$$r^2\,\Delta\varphi = r^2\,\bar{\Delta}\,\varphi + n\,(n-3)\,\varphi - ir\,\mathrm{P}\,\varphi - (\mathrm{S}'+1)\,\varphi, \tag{9.21}$$

et à l'aide de (9.5) on a

$$r^2\,\mathrm{I}_1 = r^2\,\bar{\Delta} - \mathrm{S}'\,(\mathrm{S}'+3) - \frac{3}{2}. \tag{9.22}$$

10. Champs de spin 1

Pour avoir une théorie alternative à celle de l'article [5], pour le spin 1, considérons un champs de 2-spineurs

$$\psi = \psi^a{}_b, \tag{10.1}$$

qui se transforme selon les équations

$$\psi\,(x) \to \overset{,}{\psi}\,(x) = \Lambda\,(\overset{-1}{g})\,\psi\,[g\,(x)]\,\overset{-1}{\Lambda}\,(\overset{-1}{g}), \tag{10.2}$$

soit

$$\psi^a{}_b\,(x) \to \overset{,}{\psi}{}^c{}_d\,(x) = \Lambda^c{}_a\,(\overset{-1}{g})\,\Lambda^b{}_d\,(\overset{-1}{g})\,\psi^a{}_b\,[g\,(x)].$$

Les générateurs de la représentation sont

$$\mathrm{X}_{\alpha'\beta'} = \mathrm{L}_{\alpha'\beta'} - \lambda_{\alpha'\beta'} - \bar{\lambda}_{\alpha'\beta'}, \tag{10.3}$$

où (8.10) définit les $\mathrm{L}_{\alpha'\beta'}$ et où

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_{\alpha'\beta'}\,\psi &= -\frac{1}{4}[\gamma_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'}]\,\psi, \\ \bar{\lambda}_{\alpha'\beta'}\,\psi &= \frac{1}{4}\psi\,[\gamma_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'}]. \end{aligned}\right. \tag{10.4}$$

ψ doit être, comme toujours, une fonction homogène de degré n et l'opérateur de Casimir I_1 devient

$$\begin{aligned} r^2\,\mathrm{I}_1\,\psi &= \mathrm{X}^{\alpha'\beta'}\,\mathrm{X}_{\alpha'\beta'}\,\psi \\ &= r^2\,\Delta\psi - n\,(n+3)\,\psi + \mathrm{Q}\,\psi + \bar{\mathrm{Q}}\,\psi \\ &\quad + \frac{1}{32}\{[\gamma^{\alpha'}\,\gamma^{\beta'}]\,[\gamma_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'}]\,\psi - 2\,[\gamma^{\alpha'}\,\gamma^{\beta'}]\,\psi\,[\gamma_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'}] \\ &\qquad + \psi\,[\gamma^{\alpha'}\,\gamma^{\beta'}]\,[\gamma_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'}]\}, \end{aligned} \tag{10.5}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{Q}\,\psi &= \frac{1}{4}[\gamma^{\alpha'}\,\gamma^{\beta'}]\,\mathrm{L}_{\alpha'\beta'}\,\psi, \\ \bar{\mathrm{Q}}\,\psi &= -\frac{1}{4}(\mathrm{L}_{\alpha'\beta'}\,\psi)\,[\gamma^{\alpha'}\,\gamma^{\beta'}]. \end{aligned}\right. \tag{10.6}$$

Il est facile de voir que Q et $\overline{Q}$ commutent avec tous les générateurs $X_{\alpha'\beta'}$, d'ailleurs nous ferons la démonstration au paragraphe 11 pour un cas plus général. En conséquence dans une représentation irréductible, on a

$$(10.7)\qquad Q\,\psi = q\,\psi; \qquad \overline{Q}\,\psi = \bar{q}\,\psi.$$

D'après (8.17), il en résulte

$$(10.8)\qquad Q\,\psi = r^2\,\gamma^4\,\gamma^i\,\partial_i\,\psi = ir\,\mathring{\gamma}^i\,\partial_i\,\psi.$$

Nous définissons, d'après l'article [13] les deux opérateurs :

$$(10.9)\qquad P\,\psi = \mathring{\gamma}^i\,\mathring{\nabla}_i\,\psi; \qquad \overline{P}\,\psi = -\,\mathring{\nabla}_i\,\psi\,\mathring{\gamma}^i,$$

il en résulte :

$$(10.10)\qquad ir\,\mathring{\gamma}^i\,(\mathring{\nabla}_i\,\psi - C_i\,\psi + \psi\,C_i) = q\,\psi,$$

soit, d'après (7.14),

$$(10.11)\qquad ir\,P\,\psi = (q-2)\,\psi - \mathring{\gamma}^i\,\psi\,\mathring{\gamma}_i,$$

et d'une manière analogue,

$$(10.12)\qquad ir\,\overline{P}\,\psi = (\bar{q}-2)\,\psi - \mathring{\gamma}^i\,\psi\,\mathring{\gamma}_i.$$

Selon l'article [13] on peut définir les opérateurs :

$$(10.13)\qquad M = \frac{1}{2}(P + \overline{P}), \qquad M' = \frac{1}{2}(P - P'),$$

nous avons alors

$$(10.14)\qquad \begin{cases} M\,\psi = m\,\psi + \dfrac{i}{r}\,\mathring{\gamma}^i\,\psi\,\mathring{\gamma}_i, \\ M'\,\psi = m'\,\psi, \end{cases}$$

où

$$m = -\,\frac{i}{2\,r}(q + \bar{q} - 4); \qquad m' = -\,\frac{i}{2\,r}(q - \bar{q}).$$

Mais, d'accord toujours au même travail [13], on a

$$(10.15)\qquad MM' = M'\,M = 0.$$

Si l'on multiplie (10.14_2) par M, on a : $m' = 0$, $q = \bar{q}$, $Q\,\psi = \overline{Q}\,\psi$ et

$$(10.16)\qquad M'\,\psi = 0.$$

Dans le cas plan $r \to \infty$ (10.14_1) et (10.16) sont les équations de Petiau-Duffin-Kemmer pour le spin maximal 1, mais on voit que ces équations ne sont pas valables, dans la généralisation naturelle, en Relativité générale à cause du terme $\mathring{\gamma}^i \psi \mathring{\gamma}_i$ de l'équation (10.14_1). Calculons ce terme pour chaque composante de Poincaré de ψ :

$$(10.17)\quad \left\{\begin{aligned} \mathring{\gamma}^i \psi^{(0)} \mathring{\gamma}_i &= -4\,\alpha^{(0)} e = -4\,\psi^{(0)},\\ \mathring{\gamma}^i \psi^{(1)} \mathring{\gamma}_i &= -\alpha^{(1)}_j (\mathring{\gamma}_i \mathring{\gamma}^j + 2\,\delta^j_i) = 2\,\psi^{(1)},\\ \mathring{\gamma}^i \psi^{(2)} \mathring{\gamma}_i &= \quad \alpha^{(2)}_{jk} (\mathring{\gamma}^j \mathring{\gamma}^i + 2\,g^{ji}) (\mathring{\gamma}_i \mathring{\gamma}^k + 2\,\delta^k_i) = 0,\\ \mathring{\gamma}^i \psi^{(3)} \mathring{\gamma}_i &= -i\,\mathring{\xi}\,\mathring{\gamma}^i \mathring{\gamma}_j \mathring{\gamma}_i \dot{\alpha}^{(3)j} = -2\,\psi^{(3)},\\ \mathring{\gamma}^i \psi^{(4)} \mathring{\gamma}_i &= -4\,i\,\mathring{\xi}\,\dot{\alpha}^{(4)} = 4\,\psi^{(4)} \end{aligned}\right.$$

soit, en général,

$$(10.18)\qquad \frac{1}{2}\mathring{\gamma}^i \psi^{(p)} \mathring{\gamma}_i = (-1)^p (p-2)\,\psi^{(p)}.$$

Nous avons aussi que (*voir* [13]) :

$$(10.19)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}\ \psi^{(p)} &= \frac{1}{2}\mathcal{S}\sum_{p=0}^{4}[(1-(-1)^p)\,d + (1+(-1)^p)\,\delta]\,\alpha^{(p)}\\ \mathrm{M}'\ \psi^{(p)} &= \frac{1}{2}\mathcal{S}\sum_{p=0}^{4}[(1+(-1)^p)\,d + (1-(-1)^p)\,\delta]\,\alpha^{(p)}. \end{aligned}\right.$$

D'après (10.14_1) :

$$(10.20)\qquad \mathrm{M}\sum_{p=0}^{4}\psi^{(p)} = m\,\mathcal{S}\sum_{p=0}^{4}\alpha^{(p)} + \frac{i}{r}\mathring{\gamma}^i\,\mathcal{S}\sum_{p=0}^{4}\alpha^{(p)}\mathring{\gamma}_i,$$

de cette équation et de (10.19_1), il vient :

$$(10.21)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \left(m - \frac{2\,i}{r}\right)\alpha^{(0)},\\ \delta\alpha^{(2)} &= \left(m + \frac{i}{r}\right)\alpha^{(1)},\\ d\alpha^{(1)} &= m\,\alpha^{(2)},\\ \delta\alpha^{(4)} &= \left(m - \frac{i}{r}\right)\alpha^{(3)},\\ d\alpha^{(3)} &= \left(m + \frac{2\,i}{r}\right)\alpha^{(4)}, \end{aligned}\right.$$

car la décomposition en composantes de Poincaré est unique. Analoguement, d'après (10.16),

$$(10.22)\quad \left\{\begin{aligned} &d\alpha^{(0)} = 0, \qquad \delta\alpha^{(1)} = 0, \qquad d\alpha^{(2)} = 0,\\ &\qquad\qquad\qquad\ \ \delta\alpha^{(3)} = 0, \qquad d\alpha^{(4)} = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit qu'en général $\psi^{(0)} = 0$, et que les parties symétriques $\psi^{(1)}$ et $\psi^{(2)}$ et les parties antisymétriques $\psi^{(3)}$ et $\psi^{(4)}$ ont des systèmes d'équations indépendantes et, en conséquence, la représentation est réductible. Puisque nous nous bornerons à obtenir pour chaque valeur de e et f une représentation spinorielle pure, nous nous limiterons désormais aux spineurs symétriques.

En conclusion, les équations très simples $P\,\psi = \overline{P}\,\psi = m\,\psi$ de Kemmer-Petiau-Duffin ne sont pas valables dans l'espace-temps de De Sitter et doivent être substituées par le système (10.21). Par suite, les équations de Bargmann-Wigner ne sont pas valables et nous allons voir, au paragraphe 12, comment les corriger.

11. Champs de spin quelconque

a. Soit maintenant un champ d'un 2 s-spineur symétrique :

$$\varphi(x) = \varphi^{a_1 \dots a_{2s}}(x), \tag{11.1}$$

avec la loi de transformation :

$$\begin{aligned} \varphi^{a_1 \dots a_{2s}}(x) &\to \overset{,}{\varphi}{}^{b_1 \dots b_{2s}}(x) \\ &= \Lambda^{b_1}{}_{a_1}(\overset{-1}{g}) \dots \Lambda^{b_{2s}}{}_{a_{2s}}(\overset{-1}{g})\, \varphi^{a_1 \dots a_{2s}}[g(x)]. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Nous adoptons une notation analogue à (9.2) et (9.3) pour les indices spinoriels. Les générateurs de la représentation sont

$$X_{\alpha'\beta'} = L_{\alpha'\beta'} - \sum_{I=1}^{2S} \lambda_{\alpha'\beta' I}, \tag{11.3}$$

où

$$L_{\alpha'\beta'} = -x_{\alpha'}\,\partial_{\beta'} + x_{\beta'}\,\partial_{\alpha'},$$

et

$$\lambda_{\alpha'\beta' I} = -\frac{1}{4}[\gamma_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'}]_I.$$

Les représentations irréductibles sont engendrées par des champs homogènes de degré n, et l'opérateur de Casimir I_1, il vient

$$\begin{aligned} r^2 I_1 &= \frac{1}{2} X^{\alpha'\beta'} X_{\alpha'\beta'} \\ &= r^2\Delta - n(n+3) + \sum_{I=1}^{2S} Q + \frac{1}{32}\sum_{I;J} [\gamma^{\alpha'}\,\gamma^{\beta'}]_I\,[\gamma_{\alpha'}\,\gamma_{\beta'}]_J, \end{aligned} \tag{11.4}$$

où

$$Q_I = \frac{1}{4}[\gamma^{\alpha'}\,\gamma^{\beta'}]_I\, L_{\alpha'\beta'}. \tag{11.5}$$

Nous allons étudier chaque terme de (11.4).

b. Q commute avec tous les $X_{\alpha'\beta'}$. En effet, le commutateur des $X_{\alpha'\beta'}$ $\left(\text{et aussi des } L_{\alpha'\beta'} \text{ et des } -\frac{1}{4}[\gamma_{\alpha'}\gamma_{\beta'}]\right)$ est

$$(11.6)\quad [X_{\alpha'\beta'}, X_{\gamma'\delta'}] = \eta_{\alpha'\delta'} X_{\beta'\gamma'} + \eta_{\beta'\gamma'} X_{\alpha'\delta'} - \eta_{\alpha'\gamma'} X_{\beta'\delta'} - \eta_{\beta'\delta'} X_{\alpha'\gamma'}$$

et alors

$$(11.7)\quad Q_I L_{\gamma'\delta'} - L_{\gamma'\delta'} Q_I = \frac{1}{2}([\gamma_{\delta'}\gamma^{\alpha'}]_I L_{\alpha'\gamma'} - [\gamma_{\gamma'}\gamma^{\alpha'}]_I L_{\alpha'\delta'})$$
$$= -Q_I \frac{1}{4}[\gamma_{\gamma'\delta'}]_I + \frac{1}{4}[\gamma_{\gamma'}\gamma_{\delta'}]_I Q_I,$$

d'où

$$(11.8)\quad Q_I\left(L_{\gamma'\delta'} + \frac{1}{4}[\gamma_{\gamma'}\gamma_{\delta'}]_I\right) = \left(L_{\gamma'\delta'} + \frac{1}{4}[\gamma_{\gamma'}\gamma_{\delta'}]_I\right) Q_I.$$

Mais, évidemment :

$$(11.9)\quad Q_I \sum_{I \neq J} \frac{1}{4}[\gamma_{\gamma'}\gamma_{\delta'}]_J = \left(\sum_{I \neq J} \frac{1}{4}[\gamma_{\gamma'}\gamma_{\delta'}]_J\right) Q_I$$

et, par suite,

$$(11.10)\quad Q_I X_{\gamma'\delta'} = X_{\gamma'\delta'} Q_I.$$

On en déduit que pour les représentations irréductibles, on a

$$(11.11)\quad Q_I \varphi = q_I \varphi,$$

mais dans ce cas φ est symétrique et alors $Q_1 = \ldots = Q_{2S} = Q$ et $q_1 = \ldots = q_{2S} = q$, et nous avons :

$$(11.12)\quad Q\varphi = q\varphi.$$

c. Le dernier terme de (11.4) est

$$(11.13)\quad \sum_{I;J} [\gamma^{\alpha'}\gamma^{\beta'}]_I [\gamma_{\alpha'}\gamma_{\beta'}]_J = \sum_{I;J} [\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}]_I [\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}]_J$$
$$= \sum_{I;J} \{ [\mathring{\gamma}^i \mathring{\gamma}^j]_I [\mathring{\gamma}_i \mathring{\gamma}_j]_J + 8\, \mathring{\gamma}^i_I \mathring{\gamma}_{iJ} \}.$$

Notons :

$$(11.14)\quad \left(\mathring{\gamma}^{ia_I}{}_{b_I}\right)_I \left(\mathring{\gamma}_i{}^{a_J}{}_{b_J}\right)_J \varphi^{\cdots b_I \cdots b_J \cdots} = \Phi^{\cdots a_I \cdots a_J \cdots}.$$

Dans le système de coordonnées des semi-spineurs, nous avons :

$$
(11.15)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\left(\mathring{\sigma}^{i\,A_I}{}_{\dot{B}_I}\right)_I \left(\mathring{\sigma}_i{}^{A_J}{}_{\dot{B}_J}\right)_J \varphi^{\cdots \dot{B}_I \cdots \dot{B}_J \cdots} = \Phi^{\cdots A_I \cdots A_J},\\
&\left(\mathring{\sigma}^{i\,\dot{A}_I}{}_{B_I}\right)_I \left(\mathring{\sigma}_i{}^{A_J}{}_{\dot{B}_J}\right)_J \varphi^{\cdots B_I \cdots \dot{B}_J \cdots} = \Phi^{\cdots \dot{A}_I \cdots A_J},\\
&\left(\mathring{\sigma}^{i\,A_I}{}_{\dot{B}_I}\right)_I \left(\mathring{\sigma}_i{}^{\dot{A}_J}{}_{B_J}\right)_J \varphi^{\cdots \dot{B}_I \cdots B_J \cdots} = \Phi^{\cdots A_I \cdots \dot{A}_J},\\
&\left(\mathring{\sigma}^{i\,\dot{A}_I}{}_{\dot{B}_I}\right)^I \left(\mathring{\sigma}_i{}^{\dot{A}_J}{}_{\dot{B}_J}\right)_J \varphi^{\cdots \dot{B}_I \cdots \dot{B}_J \cdots} = \Phi^{\cdots \dot{A}_I \cdots \dot{A}_J},
\end{aligned}\right.
$$

soit, d'après (2.21) :

$$
(11.16)\qquad \Phi^{\cdots A_I \cdots A_J} = 2\,\varepsilon^{A_I A_J}\,\varepsilon_{\dot{B}_I \dot{B}_J}\,\varphi^{\cdots \dot{B}_I \cdots \dot{B}_J} = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\cdots \dot{A}_I \cdots A_J} &= 2\,\varepsilon^{\dot{A}_I}{}_{\dot{B}_J}\,\varepsilon_{B_I}{}^{A_J}\,\varphi^{\cdots B_I \cdots \dot{B}_J \cdots}\\
&= -2\,\varphi^{\cdots A_J \cdots \dot{A}_I \cdots} = -2\,\varphi^{\cdots \dot{A}_I \cdots A_J \cdots},
\end{aligned}
$$

et analoguement

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\cdots A_I \cdots \dot{A}_J \cdots} &= -2\,\varphi^{\cdots A_I \cdots \dot{A}_J \cdots},\\
\Phi^{\cdots \dot{A}_I \cdots \dot{A}_J \cdots} &= 0.
\end{aligned}
$$

Soit maintenant $\varphi\,(s,\ s')$ une composante de Poincaré engendrant la représentation $\mathcal{D}\,(s, s') \otimes \mathcal{D}\,(s', s)$, $S = s + s'$, on a d'après les équations précédentes :

$$
(11.17)\qquad \sum_{I \neq J} \mathring{\gamma}^i_I\,\mathring{\gamma}_{iJ}\,\varphi^{(s\,;\,s')} = -16\,ss'\,\varphi^{(s\,;\,s')};
$$

$$
\sum_{I=1}^{2S} (\mathring{\gamma}^i\,\mathring{\gamma}_i)_I\,\varphi^{(s\,;\,s')} = -8\,(s + s')\,\varphi^{(s\,;\,s')},
$$

et, par suite,

$$
(11.18)\qquad \sum_{I;\,J} \mathring{\gamma}^i_I\,\mathring{\gamma}_{iJ}\,\varphi^{(s\,;\,s')} = -8\,(s + s' + 2\,ss')\,\varphi^{(s\,;\,s')}.
$$

Les formules ($10.17_{2,3}$) sont des cas particuliers de (11.12_1) pour $s = \frac{1}{2}$, $s' = \frac{1}{2}$ et $s = 0$, $s' = 1$, respectivement. La même méthode conduit aussi à l'équation bien connue :

$$
(11.19)\qquad \sum_{I;\,J} [\mathring{\gamma}^i\,\mathring{\gamma}^j]_I\,[\mathring{\gamma}_i\,\mathring{\gamma}_j]_J\,\varphi^{(s\,;\,s')} = -64\,[s\,(s+1) + s'\,(s'+1)]\,\varphi^{(s\,;\,s')}.
$$

L'équation (11.13) à l'aide de (11.18) et (11.19) devient;

$$(11.20) \qquad \sum_{\mathrm{I};\,\mathrm{J}} [\gamma^{\alpha'}\gamma^{\beta'}]_{\mathrm{I}} [\gamma_{\alpha'}\gamma_{\beta'}]_{\mathrm{J}}\, \varphi^{(s\,;\,s')} = -64\,(\mathrm{S}^2 + 2\,\mathrm{S})\,\varphi^{(s\,;\,s')},$$

et en conséquence le spineur φ somme des composantes de Poincaré $\varphi^{(s\,;\,s')}$ telles que $s + s' = \mathrm{S}$ satisfait la même équation.

d. Retournons aux opérateurs de Casimir (11.4) et, d'après (8.11), (11.12) et (11.20), on a

$$(11.21) \qquad r^2\,\mathrm{I}_1 = -\left(\mathrm{Q} - \frac{3}{2} - \mathrm{S}\right)^2 + \frac{9}{4} - \mathrm{S}\,(\mathrm{S}+1),$$

identifions cette valeur propre avec celles calculées dans l'article [11] et faisons $e = \mathrm{S}$ [formule (9.16)], on trouve aisément

$$(11.22) \qquad \mathrm{Q}\,\varphi = \left(\mathrm{S} + \frac{3}{2} \pm f \mp \frac{1}{2}\right)\varphi = q\,\varphi.$$

Ainsi les champs des spineurs symétriques satisfaisant aux équations d'onde linéaires (11.22) engendrent toutes les séries des représentations unitaires (sauf toujours la D^{+-}_{ef}); cette équation est l'équation la plus générale et simple, d'ailleurs elle est applicable à un spineur symétrique générique, mais elle fait intervenir l'espace E_5. Nous allons voir que si l'on veut écrire (11.22) dans l'espace-temps physique V_4 on trouve un système d'équations, puisque chaque composant de Poincaré de φ satisfait une équation linéaire différente. Ce système est la généralisation des équations de Bargmann-Wigner.

e. D'après (8.17), on a

$$(11.23) \qquad \mathrm{Q}\,\varphi = r^2\,\gamma_{\mathrm{I}}^{5}\,\gamma_{\mathrm{I}}^{i}\,\gamma_i\,\varphi = ir\,\mathring{\gamma}_{\mathrm{I}}^{i}\,\partial_i\,\varphi,$$

et, d'après (7.14), on pose

$$(11.24) \qquad ir\,\mathrm{P}_{\mathrm{I}}\,\varphi = ir\,\mathring{\gamma}_{\mathrm{I}}^{i}\,\mathring{\nabla}_i\,\varphi = ir\,\mathring{\gamma}_{\mathrm{I}}^{i}\left(\partial_i - \frac{i}{2\,r}\sum_{\mathrm{J}=1}^{2\,\mathrm{S}}\mathring{\gamma}_i\right)\varphi,$$

d'où

$$(11.25) \qquad \mathrm{Q}\,\varphi = ir\,\mathrm{P}_{\mathrm{I}}\,\varphi - \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{J}=1}^{2\,\mathrm{S}}\mathring{\gamma}_{\mathrm{I}}^{i}\,\mathring{\gamma}_{i\,\mathrm{J}}\,\varphi$$

(pour $r \to \infty$, $q = irm$, on trouve les équations de Bargmann-Wigner $\mathrm{P}_{\mathrm{I}}\,\varphi = m\,\varphi$).

Si l'on additionne sur les I

$$(11.26) \qquad 2\,\mathrm{SQ}\,\varphi = ir\,\mathrm{M}\,\varphi - \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{I};\,\mathrm{J}}\mathring{\gamma}_{\mathrm{I}}^{i}\,\mathring{\gamma}_{i\,\mathrm{J}}\,\varphi,$$

où

$$\text{(11.27)} \qquad M\,\varphi = \sum_{I=1}^{2S} P_I\,\varphi.$$

On peut décomposer le spineur symétrique φ en composantes de Poincaré selon (3.5), nous allons voir quel est le résultat d'appliquer M sur chaque composant. Nous avons.

$$\text{(11.28)} \qquad \mathring{\xi}_I\,P_I = -\,P_I\,\mathring{\xi}_I,$$

d'où

$$\text{(11.29)} \qquad B_I^+\,P_I = P_I\,B_I^-; \qquad B_I^-\,P_I = P_I\,B_I^+,$$

et alors de l'équation (3.4) on a

$$\text{(11.30)} \qquad M\,\varphi^{(s\,;\,s')} \in \mathcal{E}\left(s-\frac{1}{2};\ s'+\frac{1}{2}\right) \oplus \mathcal{E}\left(s+\frac{1}{2},\ s'-\frac{1}{2}\right).$$

Nous décomposons $M\,\varphi^{(s\,;\,s')}$ en

$$\text{(11.31)} \qquad M_-\,\varphi^{(s\,;\,s')} + M_+\,\varphi^{(s\,;\,s')} = M\,\varphi^{(s\,;\,s')},$$

où

$$M_-\,\varphi^{(s\,;\,s')} \in \mathcal{E}\left(s-\frac{1}{2},\ s'+\frac{1}{2}\right),$$

$$M_+\,\varphi^{(s\,;\,s')} \in \mathcal{E}\left(s+\frac{1}{2};\ s'-\frac{1}{2}\right).$$

De (11.25) et (11.22) on déduit

$$\text{(11.32)} \qquad M\,\varphi = -\,\frac{i}{r}\left(2\,S\,q + \frac{1}{2}\sum_{I;\,J} \mathring{\gamma}_I^{\,i}\,\mathring{\gamma}_{i\,J}\right)\varphi.$$

D'après la décomposition unique (3.5) et l'équation (11.18), on a

$$\text{(11.33)} \qquad M_+\,\varphi^{\left(s-\frac{1}{2};\,s'+\frac{1}{2}\right)} + M_-\,\varphi^{\left(s+\frac{1}{2};\,s'-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\,i}{r}\left[(2-q)\,(s+s') + 4\,ss'\right]\varphi^{(s\,;\,s')}.$$

Mais remarquons que $s \leq s'$ et que

$$\text{(11.34)} \qquad M\,\varphi^{(0;\,S)} = M_+\,\varphi^{(0;\,S)} \in \mathcal{E}\left(\frac{1}{2};\ S-\frac{1}{2}\right)$$

et, par suite,

$$(11.35) \qquad \mathrm{M}_{-}\,\varphi^{(0;\,\mathrm{S})} = 0.$$

Si $\mathrm{S} = n$ entier,

$$(11.36) \qquad \mathrm{M}\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2};\frac{\mathrm{S}}{2}\right)} = \mathrm{M}_{-}\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2};\frac{\mathrm{S}}{2}\right)} \in \mathcal{E}\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{1}{2};\, \frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

et, en conséquence,

$$(11.37) \qquad \mathrm{M}_{+}\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2};\frac{\mathrm{S}}{2}\right)} = 0.$$

Si $\mathrm{S} = n^{\text{ième}}$ demi-entier,

$$(11.38) \qquad \mathrm{M}\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{1}{4};\frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{1}{4}\right)} \in \mathcal{E}\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{3}{4};\, \frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{3}{4}\right) \oplus \mathcal{E}\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{1}{4};\, \frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

et, en conséquence,

$$(11.39) \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_{-}\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{1}{4};\frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{1}{4}\right)} \in \mathcal{E}\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{3}{4};\, \frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{3}{4}\right), \\ \mathrm{M}_{+}\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{1}{4};\frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{1}{4}\right)} \in \mathcal{E}\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{1}{4};\, \frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{1}{4}\right). \end{cases}$$

On trouve ainsi les systèmes des équations :

$\mathrm{S} = n$ entier,

$$(11.40) \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_{-}\,\varphi^{\left(\frac{1}{2};\mathrm{S}-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{2\,i}{r}(2-q)\,\mathrm{S}\,\varphi^{(0;\,\mathrm{S})}, \\ \mathrm{M}_{-}\,\varphi^{(1;\,\mathrm{S}-1)} + \mathrm{M}_{+}\,\varphi^{(0;\,\mathrm{S})} \\ \quad = \dfrac{2\,i}{r}\left[(2-q)\,\mathrm{S} + 2\left(\mathrm{S}-\dfrac{1}{2}\right)\right]\varphi^{\left(\frac{1}{2};\mathrm{S}-\frac{1}{2}\right)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \mathrm{M}_{-}\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2};\frac{\mathrm{S}}{2}\right)} + \mathrm{M}_{+}\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-1;\frac{\mathrm{S}}{2}+1\right)} \\ \quad = \dfrac{2\,i}{r}\left[(2-q)\,\mathrm{S} + 4\left(\dfrac{\mathrm{S}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{S}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\right]\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{1}{2};\frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{1}{2}\right)}, \\ \mathrm{M}_{+}\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\frac{1}{2};\frac{\mathrm{S}}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{2\,i}{r}[(2-q)+\mathrm{S}^2]\,\varphi^{\left(\frac{\mathrm{S}}{2};\frac{\mathrm{S}}{2}\right)} \end{cases}$$

et $S = n^{\text{ième}}$ demi-entier :

$$
(11.41)\quad \left\{
\begin{aligned}
& M_- \varphi^{\left(\frac{1}{2};S-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2i}{r}(2-q)\,S\,\varphi^{(0;S)}, \\
& M_- \varphi^{(1;S-1} + M_+ \varphi^{(0;S)} \\
& \quad = \frac{2i}{r}\left[(2-q)\,S + 2\left(S-\frac{1}{2}\right)\right]\varphi^{\left(\frac{1}{2};S-\frac{1}{2}\right)}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
& M_- \varphi^{\left(\frac{S}{2}-\frac{1}{4};\frac{S}{2}+\frac{1}{4}\right)} + M_+ \varphi^{\left(\frac{S}{2}-\frac{5}{4};\frac{S}{2}+\frac{5}{4}\right)} \\
& \quad = \frac{2i}{r}\left[(2-q) + 4\left(\frac{S}{2}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{S}{2}+\frac{3}{4}\right)\right]\varphi^{\left(\frac{S}{2}-\frac{3}{4};\frac{S}{2}+\frac{3}{4}\right)}, \\
& M_+ \varphi^{\left(\frac{S}{2}-\frac{1}{4};\frac{S}{2}-\frac{1}{4}\right)} + M_+ \varphi^{\left(\frac{S}{2}-\frac{3}{4};\frac{S}{2}+\frac{3}{4}\right)} \\
& \quad = \frac{2i}{r}\left[(2-q) + 4\left(\frac{S}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{S}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]\varphi^{\left(\frac{S}{2}-\frac{1}{4};\frac{S}{2}+\frac{1}{4}\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces systèmes sont la généralisation des équations de Bargmann-Wigner pour l'espace-temps de De Sitter.

12. Équivalence entre les différentes théories

Nous allons maintenant montrer l'équivalence de la théorie développée dans le paragraphe précédent, pour les spineurs purs, et la théorie de Rarita-Schwinger [éq. (9.18)], pour les spins demi-entiers, et la théorie S-tensorielle pour les spins entiers. Les équations de cette dernière théorie se trouvent dans le travail [5] et elles sont :

$$
(12.1)\quad \left\{
\begin{aligned}
r^2 \mathring{\Delta}\, T^{i_1\cdots i_S} &= -\,[e\,(e+1) + f\,(f-1) - 2]\, T^{i_1\cdots i_S}, \\
\mathring{\nabla}_j\, T^{j i_2\cdots i_S} &= 0, \\
T_j{}^{j i_3\cdots i_S} &= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

où $T^{i_1\cdots i_S}$ est un tenseur symétrique et où

$$
\begin{aligned}
(12.2)\quad \mathring{\Delta} T^{i_1\cdots i_S} &= -\,\mathring{g}^{jk}\,\mathring{\nabla}_j\,\mathring{\nabla}_k\, T^{i_1\cdots i_S} \\
&\quad + \sum_{I=1}^{S} \mathring{R}^{i_I}{}_r\, T^{i_1\cdots i_{I-1}\, r\, i_{I+1}\cdots i_S} \\
&\quad - \sum_{I\neq J} \mathring{R}^{i_I}{}_r{}^{i_J}{}_l\, T^{i_1\cdots i_{I-1}\, r\, i_{I+1}\cdots\, i_{J-1}\, l\, i_{J+1}\cdots i_S} \\
&= I_1\, T^{i_1\cdots i_S} = \left[\bar{\Delta} - \frac{1}{r^2}\, S\,(S+2)\right] T^{i_1\cdots i_S}
\end{aligned}
$$

est le laplacien de De Rham-Lichnerowicz.

a. Nous commençons à calculer quelques formules : Soit φ le spineur du paragraphe 11 d'après (4.15) et (6.5) :

$$(12.3)\quad P_I^2\,\varphi = \mathring{\gamma}_I^i\,\mathring{\gamma}_J^j\,\mathring{\nabla}_i\,\mathring{\nabla}_j\,\varphi = \frac{1}{2}(\mathring{\gamma}_I^i\,\mathring{\gamma}_I^j + \mathring{\gamma}_I^j\,\mathring{\gamma}_I^i)\,\mathring{\nabla}_i\,\mathring{\nabla}_j\,\varphi$$
$$+ \frac{1}{2}\mathring{\gamma}_I^i\,\mathring{\gamma}_I^j\,(\mathring{\nabla}_i\mathring{\nabla}_j - \mathring{\nabla}_j\mathring{\nabla}_i)\,\varphi = \bar{\Delta}\varphi + \frac{1}{4\,r^2}[\mathring{\gamma}_I^i\,\mathring{\gamma}_I^j]\sum_{J=1}^{2S}\frac{1}{4}[\mathring{\gamma}_{i_J}\,\mathring{\gamma}_{j_J}]\,\varphi.$$

On peut calculer aussi $\Delta\varphi$, le laplacien dans E_5. On a

$$(12.4)\qquad \partial_\alpha\,\varphi = \bar{\partial}_\alpha\,\varphi - \frac{\xi_\alpha}{r}\,\partial_4\,\varphi = \mathring{\nabla}_\alpha\,\varphi - \frac{\xi_\alpha}{r}\,\frac{n\,\varphi}{x^4} + \frac{i}{2\,r}\sum_{I=1}^{2S}\mathring{\gamma}_{\alpha I}\,\varphi,$$

de la même façon on peut calculer $\nabla_\beta\,\partial_\alpha\,\varphi$ et trouver

$$(12.5)\quad r^2\,\Delta\varphi = r^2\,\bar{\Delta}\varphi + n\,(n+3)\,\varphi - ir\sum_{I=1}^{2S}P_I\,\varphi + \frac{1}{4}\sum_{I;\,J}\mathring{\gamma}_{i_I}\,\mathring{\gamma}_{i_J}\,\varphi.$$

Si l'on substitue dans l'opérateur de Casimir (11.4), les équations (11.13), (11.25), (12.3) et (12.5), on obtient

$$(12.6)\qquad I_1\,\varphi = (1-S)\,\bar{\Delta}\varphi + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{2S}P_I^2\,\varphi.$$

Avec des petites modifications on peut démontrer que cette formule est aussi valable pour les spineurs antisymétriques et que c'est la seule formule qui permet de trouver l'opérateur de Casimir I_1, en fonction d'opérateurs valables dans l'espace-temps V_4, pour un spineur pur quelconque.

b. On voit, tout de suite, que dans le cas $S = 1$, (12.6) prend une forme très simple :

$$(12.7)\qquad I_1\,\varphi = \frac{1}{2}(P^2\,\varphi + \bar{P}^2\,\varphi) = P^2\,\varphi,$$

car dans ce cas $P^2 = \bar{P}^2$ [13], et en conséquence $S = 1$ est l'unique spin où $I_1 = P^2$. Du système (10.21) et (10.22) on trouve d'ailleurs que l'opérateur de De Rham sur la forme $\alpha^{(1)}$ est

$$(12.8)\quad \mathring{\Delta}\alpha^{(1)} = (\delta d + d\delta)\,\alpha^{(1)} = \delta d\,\alpha^{(1)} = \delta m\,\alpha^{(1)} = m\left(m + \frac{i}{r}\right)\alpha^{(1)},$$

mais de (10.14_3) et (10.16) :

$$(12.9)\qquad m = -\frac{i}{r}(q-2),$$

d'où

$$r^2\,\mathring{\Delta}\alpha^{(1)} = (-\,q^2 + 5\,q - 6)\,\alpha^{(1)}.$$

Avec la théorie purement spinorielle on peut calculer q à l'aide de l'équation (11.22) pour $S = e = 1$ et on trouve

$$r^2\,\mathring{\Delta}\alpha^{(1)} = -\,f\,(f-1)\,\alpha^{(1)}, \tag{12.10}$$

c'est-à-dire la valeur obtenue de (12.1) pour $S = e = 1$. D'autre part, dans l'article [13] on trouve que si $\psi = \mathcal{S}\,\alpha$, il vient

$$P^2\,\psi = \mathcal{S}\,\mathring{\Delta}\alpha. \tag{12.11}$$

Résumant : on a les équations équivalentes suivantes :

$$I_1\,\psi^{(1)} = P^2\,\psi^{(1)} = \mathcal{S}\,\Delta\alpha^{(1)} = -\,f\,(f-1)\,\psi^{(1)}, \tag{12.12}$$

qui lient les deux théories pour le spin 1,

c. La dernière équation est, en effet, une conséquence du fait que les champs $\psi^{(1)}$ et $\alpha^{(1)}$ engendrent des représentations équivalentes du groupe SO (1, 4). D'après l'équation (1.28), on a

$$\psi^{(1)} = \mathring{\gamma}_i\,\alpha^{(1)i}. \tag{12.13}$$

Nous allons démontrer que

$$X_{\alpha'\beta'}\,\psi^{(1)} = \mathring{\gamma}_i\,X_{\alpha'\beta'}\,\alpha^{(1)i}, \tag{12.14}$$

soit

$$\left\{\begin{aligned} X_{ij}\,\psi^{(1)} &= \mathring{\gamma}_k\,X_{ij}\,\alpha^{(1)k},\\ X_{4i}\,\psi^{(1)} &= \mathring{\gamma}_k\,X_{4i}\,\alpha^{(1)k}.\end{aligned}\right. \tag{12.15}$$

Les générateurs du groupe SO (1, 4) pour les tenseurs sont

$$X_{\alpha'\beta'} = L_{\alpha'\beta'} - \sum_{I=1}^{S} S_{I\,\alpha'\beta'}, \tag{12.16}$$

où

$$L_{\alpha'\beta'} = -\,x_{\alpha'}\,\partial_{\beta'} + x_{\beta'}\,\partial_{\alpha'},$$

$$(S_{I\,\alpha'\beta'})^{\lambda'_I}_{\mu'_I} = \delta^{\lambda'_I}_{\alpha'}\,\eta_{\beta'\mu'_I} - \delta^{\lambda'_I}_{\beta'}\,\eta_{\alpha'\mu'_I}.$$

Dans le système de coordonnées $\{ x^\alpha \}$, ces générateurs sont (*voir* [5]) :

$$\left\{\begin{aligned} &L_{ij} = 0; \qquad L_{4\,i} = r^2\,x^4\,\mathring{\nabla}_i\,;\\ &(S_{ij})^h{}_k \neq 0; \qquad (S_{4i})^h{}_k = 0.\end{aligned}\right. \tag{12.17}$$

Le générateur L_{4i} pour ψ est [*voir* (8.17)] :

$$L_{4i}\,\psi^{(1)} = r^2\partial_i\,\psi^{(1)} = r^2\,(\mathring{\gamma}_{k//i}\,\alpha^{(1)k} + \mathring{\gamma}_k\,\mathring{\nabla}_i\alpha^{(1)k}). \tag{12.18}$$

A l'aide de (7.12), on a

$$\begin{aligned} X_{4i}\,\psi^{(1)} &= L_{4i}\,\psi^{(1)} + \frac{1}{4}[\gamma_4\,\gamma_i]\,\psi^{(1)} - \frac{1}{4}\psi^{(1)}\,[\gamma_4\,\gamma_i] \\ &= \mathring{\gamma}_k\,L_{4i}\,\alpha^{(1)k} + \frac{ir}{2}(\mathring{\gamma}_i\,\mathring{\gamma}_k - \mathring{\gamma}_k\,\mathring{\gamma}_i)\,\alpha^{(1)k} \\ &\quad + \frac{1}{2}\gamma_4\,\gamma_i\,\psi^{(1)} - \frac{1}{2}\psi^{(1)}\,\gamma_4\,\gamma_i = \mathring{\gamma}_k\,X_{4i}\,\alpha^{(1)k}. \end{aligned} \tag{12.19}$$

En plus, puisque $L_{ij}\,\psi^{(1)} = 0$,

$$\begin{aligned} X_{ij}\,\psi^{(1)} &= \frac{1}{4}[\gamma_i\,\gamma_j]\,\psi^{(1)} - \frac{1}{2}\psi^{(1)}\,[\gamma_i\,\gamma_j] \\ &= \mathring{\gamma}_h\,[\delta^h_j\,\mathring{g}_{ik} - \delta^h_i\,\mathring{g}_{jk}]\,\alpha^{(1)k} \\ &= -\,\mathring{\gamma}_h\,(S^i{}_j)^h{}_k\,\alpha^{(1)k} = \mathring{\gamma}_h\,(X_{ij})^h{}_k\,\alpha^{(1)k}. \end{aligned} \tag{12.20}$$

(12.14) est démontrée, c'est-à-dire que les représentations $\psi^{(1)}$ et $\alpha^{(1)}$ sont équivalentes, et par suite :

$$I_1\,\psi^{(1)} = \mathcal{S}\,I_1\,\alpha^{(1)} = \mathcal{S}\mathring{\Delta}\alpha^{(1)}, \tag{12.21}$$

c'est-à-dire l'équation (12.12).

d. On peut, tout de suite, démontrer que les représentations correspondantes aux S-tenseurs sont équivalentes aux représentations engendrées par les composantes de Poincaré $\varphi^{\left(\frac{S}{2};\frac{S}{2}\right)}$. Soit $a^{i_1\dots i_S}$ un tenseur symétrique sans traces. On peut définir une application $\mathcal{S}$ de l'espace des S-tenseurs dans l'espace de 2 S-spineurs de la manière suivante :

$$\varphi = \underset{a,\,b}{\mathbf{S}}\,\mathring{\gamma}_{i_1}^{a_1 b_1}\dots\mathring{\gamma}_{i_S}^{a_S b_S}\,a^{i_1\dots i_S} = \mathcal{S}\,a, \tag{12.22}$$

où le symbole $\underset{a,\,b}{\mathbf{S}}$ signifie la symétrisation totale sur les indices a et b.
Avec la même méthode on peut obtenir

$$X_{\alpha'\beta'}\,\varphi = \mathcal{S}\,X_{\alpha'\beta'}\,a, \tag{12.23}$$

les deux représentations sont donc équivalentes et on a aussi :

$$I_1\,\varphi = \mathcal{S}\,I_1\,a = \mathcal{S}\,\mathring{\Delta}\,a. \tag{12.24}$$

Cette dernière équation peut être aussi démontrée directement à partir des équations (11.18), (12.2), (12.3) et (12.6).

e. De même les représentations engendrées pour les spineur-S′-tenseurs sont équivalentes aux représentations correspondantes aux composantes de Poincaré. $\varphi^{\left(\frac{S}{2}-\frac{1}{4};\frac{S}{2}+\frac{1}{4}\right)}$. Soit $a^{ai_1\dots i_{S'}}$ un spineur-S′-tenseur symétrique sans traces vérifiant l'équation (9.13_2). On peut définir une application $\mathcal{S}$ de l'espace des spineur-S′-tenseurs dans l'espace des S-spineurs de la façon suivante :

$$\varphi = \underset{a,b}{\mathrm{S}}\, \mathring{\gamma}^{a_1 b_1}_{i_1} \dots \mathring{\gamma}^{a_{S'} b_{S'}}_{i_{S'}}\, a^{a_{S'+1} i_1 \dots i_{S'}} = \mathcal{S}\, a, \tag{12.25}$$

$\underset{a,b}{\mathrm{S}}$ est la symétrisation totale. Nous avons aussi

$$X_{\alpha'\beta'}\, \varphi = \mathcal{S}\, X_{\alpha'\beta'}\, a, \tag{12.26}$$

et

$$I_1\, \varphi = \mathcal{S}\, I_1\, a. \tag{12.27}$$

Cette dernière équation peut être aussi déduite directement de (9.22), (11.10), (12.3) et (12.6).

III. — ÉQUATIONS D'ONDE POUR LES SPINS ÉLEVÉS ET CONDITIONS NÉCESSAIRES D'INTÉGRABILITÉ

Nous avons établi que les équations de Bargmann-Wigner ne sont pas valables en Relativité générale. L'élection plus simple et générale pour les équations de champ est : les équations de la théorie S-tensoriel (12.1) pour les spins entiers, et les équations de la théorie spineur-$\left(S - \frac{1}{2}\right)$-tensoriel de Rarita-Schwinger (9.18) pour les spins demi-entiers. Cela posé nous allons étudier les conditions nécessaires d'intégration de ces équations, car la non-commutativité des dérivées covariantes secondes impose des *conditions supplémentaires* (ou *conditions nécessaires d'intégrabilité*).

13. Conditions supplémentaires dans la théorie de Rarita-Schwinger et dans la théorie S-tensoriel

a. Soit d'abord les équarions (9.18), nous avons tout de suite :

$$\gamma^i \left(\nabla_i \nabla_{i_J} - \nabla_{i_J} \nabla_i\right) \varphi^{i_1 \dots i_J \dots i_{S'}} = 0, \tag{13.1}$$

qui, avec l'équation (4.15), devient

$$(13.2)\qquad \gamma^i \left[\sum_{J=1}^{S'} R^{i_J}{}_{j,ii_1}\, \varphi^{i_1\cdots i_{J-1} j i_{J+1}\cdots i_{S'}} - \frac{1}{4} R^j{}_{k,ii_1} (\gamma_j \gamma^k)\, \varphi^{i_1\cdots i_{S'}} \right] = 0.$$

Mais selon l'article [13] :

$$(13.3)\qquad \gamma^i \gamma^j \gamma^k R_{jk,ii_1} = -2 R_{i_1 j} \gamma^j,$$

d'où

$$(13.4)\qquad \gamma^i \left(\sum_{J=2}^{S'} R^{i_J}{}_{j,ii_1}\, \varphi^{i_1\cdots i_{J-1} j i_{J+1}\cdots i_{S'}} - \frac{1}{2} R_{ii_1}\, \varphi^{i_1\cdots i_{S'}} \right) = 0,$$

(13.4) sont les conditions supplémentaires.

b. A partir des équations pour les spins entiers (12.1), on a

$$(13.5)\qquad (\delta\Delta - \Delta\delta)\, a = 0,$$

soit

$$(13.6)\qquad \left(\nabla_{i_J} \Delta - \Delta \nabla_{i_J}\right) a^{i_1\cdots i_J\cdots i_S} = 0,$$

d'où avec l'équation

$$(13.7)\qquad (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)\, a^{i_1\cdots i_S} = \sum_{J=1}^{S} R^{i_J}{}_{k,ij}\, a^{i_1\cdots i_{J-1} k i_{J+1}\cdots i_S},$$

il vient

$$(13.8)\qquad \sum_{J=2}^{S} \left(\nabla_{i_1} R^{i_J}{}_j\right) a^{i_1\cdots i_{J-1} j i_{J+1}\cdots i_S} - \sum_{J=2}^{S} \left(\nabla_k R^{i_J}{}_j{}^k{}_{i_1}\right) a^{i_1\cdots i_{J-1} j i_{J+1}\cdots i_S}$$
$$- \sum_{\substack{I\neq J\\ I;\,J=2}}^{S} \left(\nabla_{i_1} R^{i_I}{}_j{}^{i_J}{}_k\right) a^{i_1\cdots i_{I-1} j i_{I+1}\cdots i_{J-1} k i_{J+1}\cdots i_S} = 0.$$

Mais à l'aide de l'identité de Bianchi on trouve

$$(13.9)\qquad \nabla_k R^{i_J}{}_j{}^k{}_{i_1} = \nabla^{i_J} R_{i_1 j} - \nabla_j R^{i_J}{}_{i_1},$$

d'où (13.8), il vient

$$(13.10)\qquad \sum_{J=2}^{S} \left(\nabla_{i_1} R^{i_J}{}_j + \nabla_j R^{i_J}{}_{i_1} - \nabla^{i_J} R_{i_1 j}\right) a^{i_1\cdots i_{J-1} j i_{J+1}\cdots i_S}$$
$$- \sum_{\substack{I\neq J\\ I;\,J=2}}^{S} \left(\nabla_{i_1} R^{i_I}{}_j{}^{i_J}{}_k\right) a^{i_1\cdots i_{I-1} j i_{I+1}\cdots i_{J-1} k i_{J+1}\cdots i_S} = 0,$$

c'est la condition supplémentaire pour les spins entiers.

14. Les conditions supplémentaires dans le vide et dans les espaces à courbure constante

a. Le tenseur de courbure peut être décomposé en somme de trois parties qui engendrent des représentations irréductibles du groupe de Lorentz complet [4] :

$$R^{ij}{}_{kl} = A^{ij}{}_{kl} + B^{ij}{}_{kl} + C^{ij}{}_{kl}, \tag{14.1}$$

où

$$A^{ij}{}_{kl} = \frac{1}{6}\,\delta^{[i}_{[k}\,\delta^{j]}_{l]}\,R, \tag{14.2}$$

est (si $R = \text{Cte}$) un tenseur égal au tenseur de courbure d'un espace à courbure constante, en particulier l'espace-temps de De Sitter;

$$B^{ij}{}_{kl} = 2\,\delta^{[i}_{[k}\,B^{j]}_{l]}, \tag{14.3}$$

où $B^j{}_l$ est le tenseur de Ricci de trace nulle :

$$B_{jl} = R_{jl} - \frac{1}{4} R\, g_{jl}; \tag{14.4}$$

et $C^{ij}{}_{kl}$ est le tenseur conforme de Weyl. La décomposition (14.1) a les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} A^j{}_l = A^{ij}{}_{il} = \frac{1}{4} R\,\delta^j{}_l; & & A = A^j{}_j = R; \\ B^j{}_l = B^{ij}{}_{il} = R^j{}_l - \frac{1}{4} R\,\delta^j_l; & & B = B^j{}_j = 0; \\ C^j{}_l = C^{ij}{}_{il} = 0; & & C = C^j{}_j = 0. \end{array}\right. \tag{14.5}$$

Dans le vide où le tenseur d'énergie-impulsion est nulle on a

$$R_{ij} = \left(\frac{1}{2} R - \lambda\right) g_{ij}, \tag{14.6}$$

d'où

$$R = -4\,\lambda \qquad \text{et} \qquad B_{ij} = 0, \tag{14.7}$$

où λ est la constante cosmologique. Dans un espace-temps de courbure constante, l'espace de De Sitter ou l'espace

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = -\,r^2$$

on a

$$R = -\,4\,\lambda, \qquad B_{ij} = 0, \qquad C^{ij}{}_{kl} = 0. \tag{14.8}$$

b. On peut substituer dans (13.4) $R^{ij}{}_{kl}$ par sa valeur selon (14.1), et on a

$$(14.9)\qquad \gamma^i\Bigg[\sum_{J=2}^{S'}\left(C^{i_J}{}_{j,ii_1}+\frac{1}{2}\delta^{i_J}_i B_{ji_1}-\frac{1}{2}\delta^{i_J}_{i_1}B_{ji}\right)\times\varphi^{i_1\cdots i_{J-1}ji_{J+1}\cdots i_{S'}}-\frac{1}{2}B_{ii_1}\varphi^{i_1\cdots i_{S'}}\Bigg]=0,$$

car ψ a toutes ces traces nulles. On peut substituer aussi $R^{ij}{}_{kl}$ dans (13.10) et il vient

$$(14.10)\qquad \sum_{J=2}^{S}\left(\nabla_{i_1}B^{i_J}{}_j+\nabla_j B^{i_J}{}_{i_1}-\nabla^{i_J}B_{ji_1}+\frac{1}{4}\delta^{i_J}_j\partial_{i_1}R+\frac{1}{4}\delta^{i_J}_i\partial_j R\right)\times a^{i_1\cdots i_{J-1}ji_{J+1}\cdots i_S}-\sum_{\substack{I\neq J\\ I;\,J=2}}\left(\nabla_{i_1}C^{i_I}{}_j{}^{i_J}{}_k\right)a^{i_1\cdots i_{I-1}ji_{I+1}\cdots i_{J-1}ki_{J+1}\cdots i_S}=0.$$

Par suite on a que dans les espaces à courbure constante les conditions supplémentaires sont identiquement nulles, et dans le vide sont simplement :

$$(14.11)\qquad \gamma^i\, C^{(j|}{}_{i_2 ii_1}\,\varphi^{i_1 i_2|i_3\cdots i_{S'})}=0,$$

$$(14.12)\qquad \left(\nabla_{i_1}C^{(j}{}_{i_2}{}^{k|}{}_{i_1}\right)a^{i_1 i_2 i_3|i_4\cdots i_S)}=0.$$

On trouve ainsi que les conditions d'intégrabilité sont identiquement nulles, dans un espace-temps quelconque pour les spins

$$S=0,\quad 1/2,\quad 1,$$

car on doit avoir au moins un indice tensoriel pour écrire (14.9) et deux indices tensoriels pour écrire (14.10). D'ailleurs, les conditions supplémentaires dans le vide pour les spins

$$S=3/2,\quad 2$$

sont identiquement nulles, car on a besoin au moins de deux indices tensoriels pour écrire (14.11), et trois indices tensoriels pour écrire (14.12).

Les conditions supplémentaires pour les équations de Bargmann-Wigner sont établies dans le travail [12], où l'on arrive à la conclusion que, pour un espace-temps générique (y compris les espaces à courbure constante), seulement les champs de spin ≤ 2 peuvent exister, puisque les champs de spin > 2, qui satisfassent les conditions supplémentaires sont identiquement nulles. On peut penser que ce résultat est trop restrictif.

15. **Nombre des équations indépendantes**

Nous allons calculer maintenant le nombre des équations indépendantes de chaque condition supplémentaire.

a. Tout S-tenseur symétrique a $\frac{1}{6}(S + 1)(S + 2)(S + 3)$ composantes, l'annulation de toutes ses traces implique l'annulation d'un (S — 1)-tenseur symétrique, c'est-à-dire, $\frac{1}{6}(S - 1)\, S\, (S + 1)$ équations indépendantes. Par suite, un S-tenseur symétrique avec toute ses traces nulles a

$$(15.1) \qquad \frac{1}{6}(S + 1)(S + 2)(S + 3) - \frac{1}{6}(S - 1)\, S\, (S + 1) = (S + 1)^2,$$

composantes indépendantes.

Un spineur-$\left(S - \frac{1}{2}\right)$-tenseur de la théorie de Rarita-Schwinger, $\varphi^{a i_1 \cdots i_{S'}}$ est symétrique par rapport à son indice tensoriel, sans traces et en plus il satisfait aux équations (9.18₂). $\gamma_{i_1} \psi^{i_1 \cdots i_{S'}} = 0$. Cette dernière équation implique l'annulation des traces puisque

$$(15.2) \qquad \gamma_{i_2} \gamma_{i_1} \varphi^{i_1 i_2 \cdots i_{S'}} = - g_{i_1 i_2} \varphi^{i_1 i_2 \cdots i_{S'}} = 0.$$

Les composantes de φ sont :

$$\frac{4}{6}(S' + 1)(S' + 2)(S' + 3).$$

La condition (9.18_2) implique l'annulation d'un spineur-$(S' - 1)$-tenseur symétrique, c'est-à-dire $\frac{4}{6} S' (S' + 1)(S' + 2)$ équations indépendantes. Le φ de Rarita-Schwinger a par conséquence :

$$(15.3) \qquad \frac{2}{3}(S' + 1)(S' + 2)(S' + 3) - \frac{2}{3} S' (S' + 1)(S' + 2)$$
$$= 2(S' + 1)(S' + 2),$$

composantes indépendantes.

b. La condition supplémentaire (13.4) implique l'annulation d'un spineur-$(S' - 1)$-tenseur; nous allons voir que ce spineur-$(S' - 1)$-tenseur est un spineur-tenseur de Rarita-Schwinger, c'est-à-dire, il est symétrique et satisfait (9.18₂), donc toutes ses traces sont nulles. D'abord la symétrie est bien évidente, et on peut vérifier aisément que

$$\gamma_{i_2}\gamma^{i}\left(\sum_{\mathrm{J}=2}^{\mathrm{S}'} \mathrm{R}^{i_{\mathrm{J}}}{}_{j,ii_1}\,\varphi^{i_1 i_2 \cdots i_{\mathrm{J}-1} j\, i_{\mathrm{J}+1}\cdots i_{\mathrm{S}'}} - \frac{1}{2}\mathrm{R}_{ii_1}\,\varphi^{i_1 i_2 \cdots i_{\mathrm{S}'}}\right) \equiv 0. \tag{15.4}$$

On voit que le nombre maximal des équations indépendantes dans la condition supplémentaire (13.4) est $2\,\mathrm{S}'(\mathrm{S}'+1)$.

Pour les spins entiers la condition (13.10) implique l'annulation d'un $(\mathrm{S}-1)$-tenseur, évidemment symétrique, et puisque :

$$g_{i_2 i_3}\left[\sum_{\mathrm{J}=2}\left(2\,\nabla_{i_1}\mathrm{R}^{i_{\mathrm{J}}}{}_{j} - \nabla^{i_{\mathrm{J}}}\mathrm{R}_{i_1 j}\right)a^{i_1\cdots i_{\mathrm{J}-1} j\, i_{\mathrm{J}+1}\cdots i_{\mathrm{S}}} - \sum_{\substack{\mathrm{I}\neq\mathrm{J}\\ \mathrm{I};\,\mathrm{J}=2}}^{\mathrm{S}}\left(\nabla_{i_1}\mathrm{R}^{i_{\mathrm{I}}}{}_{j}{}^{i_{\mathrm{J}}}{}_{k}\right)a^{i_1\cdots i_{\mathrm{I}-1} j\, i_{\mathrm{I}+1}\cdots i_{\mathrm{J}-1} k\, i_{\mathrm{J}+1}\ldots \mathrm{S}}\right] \equiv 0. \tag{15.5}$$

On déduit que le nombre maximal des équations indépendantes est S^2.

c. Enfin, nous allons voir que dans certains cas le nombre des équations indépendantes atteint le nombre maximal $2\,\mathrm{S}'(\mathrm{S}'+1)$ [resp. S^2] pour les spins demi-entiers [resp. entiers] (3). Choisissons une base de semi-spineurs où les matrices de Pauli soient hermétiques [1],

$$\left(\sigma^{i}{}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\right)^{*} = \sigma^{i}{}_{\dot{\mathrm{B}}\mathrm{A}}. \tag{15.6}$$

On peut écrire le tenseur de Weyl générique [4]

$$\mathrm{C}^{ijkl} = \sigma^{i\dot{\mathrm{A}}\mathrm{E}}\sigma^{j\dot{\mathrm{B}}\mathrm{F}}\sigma^{k\dot{\mathrm{C}}\mathrm{G}}\sigma^{l\dot{\mathrm{D}}\mathrm{H}} \times \left(\varepsilon_{\dot{\mathrm{A}}\dot{\mathrm{B}}}\,\varepsilon_{\dot{\mathrm{C}}\dot{\mathrm{D}}}\,\mathrm{T}_{\mathrm{EFGH}} + \varepsilon_{\mathrm{EF}}\,\varepsilon_{\mathrm{GH}}\,\mathrm{T}_{\dot{\mathrm{A}}\dot{\mathrm{B}}\dot{\mathrm{C}}\dot{\mathrm{D}}}\right), \tag{15.7}$$

où $\mathrm{T}_{\mathrm{EFGH}}$ est un 4-semi-spineur symétrique arbitraire et $\mathrm{T}_{\dot{\mathrm{A}}\dot{\mathrm{B}}\dot{\mathrm{C}}\dot{\mathrm{D}}} = \left(\mathrm{T}_{\mathrm{ABCD}}\right)^{*}$. On peut aussi écrire le spineur-$\left(\mathrm{S}-\frac{1}{2}\right)$-tenseur de Rarita-Schwinger générique :

$$\varphi^{a i_1\cdots i_{\mathrm{S}'}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{S}'}\sigma^{i_1}{}_{\dot{\mathrm{A}}_1\mathrm{B}_1}\cdots\sigma^{i_{\mathrm{S}'}}{}_{\dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}'}\mathrm{B}_{\mathrm{S}'}}\,\varphi^{a\dot{\mathrm{A}}_1\ldots\dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}'}\mathrm{B}_1\ldots\mathrm{B}_{\mathrm{S}}}. \tag{15.8}$$

---

(3) Pour le spin $\mathrm{S}=1$ les conditions supplémentaires sont toujours identiquement nulles (*voir* § 14.*b*).

La condition (9.18_2) est équivalente à dire que $\varphi^{\mathrm{A}\dot{\mathrm{A}}_1 \dots \dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}'} \mathrm{B}_1 \dots \mathrm{B}_{\mathrm{S}'}}$ et $\varphi^{\dot{\mathrm{A}}\dot{\mathrm{A}}_1 \dots \dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}'} \mathrm{B}_1 \dots \mathrm{B}_{\mathrm{S}'}}$ sont symétriques dans tous ses indices. (15.8) est la transformation inverse de (12.25).

Nous considérons d'abord le cas du vide ($s > 2$). Des équations (14.11), à l'aide de (15.7) et (15.8), résulte :

$$(15.9) \qquad \begin{cases} \mathrm{T}_{\mathrm{B}\mathrm{B}_0 \mathrm{B}_1 \mathrm{B}_2}\, \varepsilon^{\mathrm{B}\left(\mathrm{C}\right|} \varphi^{\dot{\mathrm{A}}_1 \dots \dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}'} \mathrm{B}_0 \mathrm{B}_1 \mathrm{B}_2 \left| \mathrm{B}_3 \dots \mathrm{B}_{\mathrm{S}'}\right)} = 0, \\ \mathrm{T}_{\dot{\mathrm{B}}\dot{\mathrm{B}}_0 \dot{\mathrm{B}}_1 \dot{\mathrm{B}}_2}\, \varepsilon^{\dot{\mathrm{B}}\left(\dot{\mathrm{C}}\right|} \varphi^{\mathrm{A}_1 \dots \mathrm{A}_{\mathrm{S}'} \dot{\mathrm{B}}_0 \dot{\mathrm{B}}_1 \dot{\mathrm{B}}_2 \left| \dot{\mathrm{B}}_3 \dots \dot{\mathrm{B}}_{\mathrm{S}}\right)} = 0. \end{cases}$$

On peut prendre, par exemple, $\mathrm{T}_{1111} = 1$; $\mathrm{T}_{2222} = 1$ et toutes les autres composantes de T nulles. Envisageons une équation particulière du système (15.9) avec p indices positifs 1 et q indices positifs 2 ($p + q = \mathrm{S}' - 1$). La symétrisation comporte une somme de $(p + q)\,!$ termes, chaque terme correspond à une permutation des indices $\mathrm{CB}_3 \dots \mathrm{B}_{\mathrm{S}'}$, il y a, $p\,[(p + q - 1)\,!]$ permutations qui commencent par 1 et $q\,[(p + q - 1)\,!]$ qui commencent par 2. En conséquence, (15.9_1) devient :

$$(15.10) \qquad p\, \varphi^{\dot{\mathrm{A}}_1 \dots \dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}} \overbrace{11 \dots\dots 1}^{p+2} \overbrace{22 \dots\dots 2}^{q}} - q\, \varphi^{\dot{\mathrm{A}}_1 \dots \dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}} \overbrace{11 \dots\dots 1}^{p} \overbrace{22 \dots\dots 2}^{q+2}} = 0,$$

et analoguement pour les équations de (15.9_2). Si l'on écrit maintenant la matrice du système (15.9) on voit immédiatement que la caractéristique de cette matrice est $2\,(\mathrm{S}' + 1)\,\mathrm{S}'$.

Pour les spins entiers on doit trouver une expression pour la dérivée du tenseur de Weyl. A l'aide de la méthode de l'article [4] on peut écrire :

$$(15.11) \qquad \nabla_{i_1} \mathrm{C}_{i_2 i_3 i_4 i_5} = \sigma_{i_1}{}^{\dot{\mathrm{A}}_1 \mathrm{B}_1} \dots \sigma_{i_5}{}^{\dot{\mathrm{A}}_5 \mathrm{B}_5} \big(\varepsilon_{\dot{\mathrm{A}}_2 \dot{\mathrm{A}}_3}\, \varepsilon_{\dot{\mathrm{A}}_4 \dot{\mathrm{A}}_5}\, \mathrm{T}_{\dot{\mathrm{A}}_1 \mathrm{B}_1 \mathrm{B}_2 \mathrm{B}_3 \mathrm{B}_4 \mathrm{B}_5} + \mathrm{T}_{\mathrm{B}_1 \dot{\mathrm{A}}_1 \dot{\mathrm{A}}_2 \dot{\mathrm{A}}_3 \dot{\mathrm{A}}_4 \dot{\mathrm{A}}_5}\, \varepsilon_{\mathrm{B}_2 \mathrm{B}_3}\, \varepsilon_{\mathrm{B}_4 \mathrm{B}_5}\big),$$

où T est un 6-semi-spineur arbitraire mais symétrique dans les indices positifs et $\mathrm{T}_{\mathrm{B}_1 \dot{\mathrm{A}}_1 \dot{\mathrm{A}}_2 \dot{\mathrm{A}}_3 \dot{\mathrm{A}}_4 \dot{\mathrm{A}}_5} = (\mathrm{T}_{\dot{\mathrm{B}}_1 \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 \mathrm{A}_4 \mathrm{A}_5})^*$. Puisque le deuxième membre de (15.11) a toutes les symétries du premier, il a les propriétés de symétrie de C, il satisfait l'identité de Bianchi et il n'a pas de traces. On peut écrire aussi tout tenseur symétrique sans trace comme :

$$(15.12) \qquad \varphi^{i_1 \dots i_{\mathrm{S}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{S}} \sigma^{i_1 \dot{\mathrm{A}}_1 \mathrm{B}_1} \dots \sigma^{i_{\mathrm{S}} \dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}} \mathrm{B}_{\mathrm{S}}}\, \varphi_{\dot{\mathrm{A}}_1 \dots \dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}} \mathrm{B}_1 \dots \mathrm{B}_{\mathrm{S}}}.$$

où φ est symétrique dans ses indices positifs et négatifs. (15.12) est l'application inverse de (12.22). A l'aide de (15.11) et (15.12) l'équation (14.12) devient

$$
\begin{aligned}
(15.13) \qquad & \varepsilon^{B_1 D_1}\, \varepsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1}\, \varepsilon^{\dot{A}_3 \dot{C}_2}\, \varepsilon^{\dot{A}_5 \dot{C}_3}\, T_{B_1 \dot{A}_1 (\dot{A}_2 | \dot{A}_3 | \dot{A}_4 | \dot{A}_5} \\
& \quad \times \varphi_{\dot{C}_1 \dot{C}_2 \dot{C}_3 | \dot{C}_4 \dots \dot{C}_S) D_1 B_2 B_4 D_4 \dots D_5} \\
& \quad + \varepsilon^{\dot{A}_1 \dot{C}_1}\, \varepsilon^{B_1 D_1}\, \varepsilon^{B_3 D_2}\, \varepsilon^{B_5 D_3}\, T_{\dot{A}_1 B_1 (B_2 | B_3 | B_4 | B_5} \\
& \quad \times \varphi_{\dot{C}_1 \dot{A}_2 \dot{A}_4 \dot{C}_4 \dots \dot{C}_5 D_1 D_2 | D_4 \dots D_5)} = 0,
\end{aligned}
$$

où les symétrisations indiquées sont faites sous les indices positifs et négatifs libres, c'est-à-dire non contractes. On peut prendre

$$T_{1\dot{1}\dots\dot{1}} = T_{1\dot{2}\dots\dot{2}} = T_{2\dot{1}\dots\dot{1}} = T_{2\dot{2}\dots\dot{2}} = 1$$

et toutes les autres composantes de T nulles. De même que dans le cas précédent, l'équation avec p indices positifs 1, q indices positifs 2, $\dot{p}$ indices négatifs $\dot{1}$ et $\dot{q}$ indices négatifs $\dot{2}$ devient

$$
\begin{aligned}
(15.14) \qquad & \dot{p}(\dot{p}-1)\,\varphi(\dot{p}-2, \dot{q}+3, p, q+1) \\
& - \dot{q}(\dot{q}-1)\,\varphi(\dot{p}+3, \dot{q}-2, p, q+1) \\
& - \dot{p}(\dot{p}-1)\,\varphi(\dot{p}-2, \dot{q}+3, p+1, q) \\
& + \dot{q}(\dot{q}-1)\,\varphi(\dot{p}+3, \dot{q}-2, p+1, q) \\
& + p(p-1)\,\varphi(\dot{p}, \dot{q}+1, p+3, q-2) \\
& - q(q-1)\,\varphi(\dot{p}, \dot{q}+1, p+3, q-2) \\
& - p(p-1)\,\varphi(\dot{p}+1, \dot{q}, p-2, q+3) \\
& + q(q-1)\,\varphi(\dot{p}+1, \dot{q}, p+3, q-2) = 0,
\end{aligned}
$$

où

$$\varphi(\dot{p}, \dot{q}, p, q) = \varphi_{\overset{\dot{p}}{\overbrace{\dot{1}\dots\dot{1}}}\,\overset{\dot{q}}{\overbrace{\dot{2}\dots\dot{2}}}\,\overset{p}{\overbrace{1\dots1}}\,\overset{q}{\overbrace{2\dots2}}}$$

et où

$$p + q = \dot{p} + \dot{q} = S - 1.$$

Nous pouvons maintenant écrire la matrice du système (15.13) et voir que la caractéristique est S^2.

d. Nous allons considérer maintenant les spins $S = \frac{3}{2}$, 2, hors du vide puisque les équations (14.9) et (14.10) sont nulles dans ce cas. Pour $S = \frac{3}{2}$ l'équation (14.9) devient

$$(15.15) \qquad \gamma^i B_{ij}\, \varphi^j = 0.$$

On peut écrire :

$$(15.16)\qquad \begin{cases} B_{ij} = \sigma_i^{\ A\dot{C}}\,\sigma_j^{\ C\dot{D}}\,T_{AB\dot{C}\dot{D}}, \\ \varphi^{aj} = \sigma^j_{\ E\dot{F}}\,\varphi^{a\dot{E}\dot{F}}, \end{cases}$$

et l'équation (15.15) devient

$$(15.17)\qquad T_{AC\dot{B}\dot{D}}\,\varphi^{AC\dot{D}} = 0, \qquad T_{\dot{A}\dot{C}BD}\,\varphi^{\dot{A}\dot{C}D} = 0,$$

qui est un système de quatre équations indépendantes. Pour $S = 2$, l'équation (14.10) devient :

$$(15.18)\qquad \left(\nabla_i B_{kj} + \nabla_j B_{ki} - \nabla_k B_{ij} + \frac{1}{4} g_{kj}\,\partial_i R + \frac{1}{4} g_{ki}\,\partial_j R\right) a^{ij} = 0,$$

qui, dans le cas $R_{ij} = f(x)\,g_{ij}$ devient

$$(15.19)\qquad (\partial_i R)\,a^{ij} = 0.$$

On peut écrire :

$$(15.20)\qquad \begin{cases} \partial_i R = \sigma_i^{\ A\dot{B}}\,T_{A\dot{B}}, \\ a^{ij} \;= \sigma^{iA\dot{C}}\,\sigma^{jB\dot{D}}\,a_{AB\dot{C}\dot{D}}, \end{cases}$$

et l'équation (15.19) devient

$$T^{C\dot{D}}\,a_{AC\dot{B}\dot{D}} = 0,$$

qui est un système de quatre équations indépendantes.

e. En résumé : pour les spins entiers $S\ (\neq 1)$ nous avons un champ avec $(S+1)^2$ composantes et S^2 équations supplémentaires indépendantes.

Le champ n'est pas déterminé par les conditions supplémentaires et nous avons $(2S+1)$ composantes du champ indépendantes. Pour les spins demi-entiers $S = S' + \frac{1}{2}$ nous avons un champ de

$$2(S'+1)(S'+2) = 2\left(S + \frac{1}{2}\right)\left(S + \frac{3}{2}\right) \quad \text{composantes}$$

et

$$2S'(S'+1) = 2\left(S - \frac{1}{2}\right)\left(S + \frac{1}{2}\right) \quad \text{équations}$$

supplémentaires indépendantes. Le champ n'est pas déterminé et il y a $4(S'+1) = 2(2S+1)$ composantes de champ indépendantes. Mais tandis que les équations de Rarita-Schwinger sont un système d'équations de premier ordre, les équations de la théorie tensorielle sont de second ordre. Il est donc raisonnable d'avoir le double de variables dans le premier système. Plus précisément ,le spineur-$\left(S - \frac{1}{2}\right)$-tenseur (9.1) peut être décomposé comme simple spineur en φ^+ et φ^- d'accord aux formules (2.4). Puisque ξ anti-commute avec γ^i, l'équation (9.18_3) devient :

$$(15.21) \qquad \begin{cases} P\,\varphi^+ = m\,\varphi^-, \\ P\,\varphi^- = m\,\varphi^+. \end{cases}$$

Par conséquent, on peut prendre les φ^+ comme variables indépendantes et déduire les φ^- avec les équations (15.15). Les φ^+ indépendantes sont $(2\,S + 1)$, d'ailleurs elles doivent satisfaire un système de second ordre.

Nous avons $(2\,S + 1)$ variables indépendantes dans les deux cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. L. Bade et H. Jehle, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 25, (3), 1953, p. 714.
[2] V. Bargmann et L. P. Wigner, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 34, 1948, p. 211.
[3] G. Börner et H. P. Dürr, *Nuovo Cimento*, t. 44, (3), 1969, p. 669.
[4] M. Castagnino, *Math. Notae.*, vol. 21, (3-4), 1968-1969, p. 177.
[5] M. Castagnino, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 13, (3), 1970, p. 263.
[6] F. Cap et coll., *Fortschr. Phys.*, vol. 14, 1966, p. 205.
[7] P. A. M. Dirac, *Ann. Math.*, vol. 36, (3), 1935, p. 657.
[8] J. S. Dowker et Y. P. Dowker, *Proc. Phys. Soc.*, vol. 87, 1966, p. 65.
[9] I. M. Gel'fand, R. A. Minlos et Z. Ya. Shapiro, *Representation of the rotation and Lorentz Groups*, Mac Millan, New York, 1963.
[10] K. C. Hannabus, *J. Phys.* A (Gen. Phys.), vol. 2, 1969, p. 274.
[11] J. G. Kurigan et coll., *Commun. Math. Phys.*, vol. 8, 1968, p. 204.
[12] C. Latrémolière, *Thèse*, Paris, 2 mars 1970.
[13] A. Lichnerowicz, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 92, 1964, p. 11.
[14] A. Lichnerowicz, *Ann Inst. H. Poincaré*, t. 3, 1964, p. 233.
[15] A. Lichnerowicz, *Le groupe spinoriel*, Cours au Collège de France.
[16] G. Loos, *Nuovo Cimento*, t. 30, 1963, p. 901.
[17] W. H. Mc Crea, *Q. Jl. R. Astr. Soc.*, vol. 12, 1971, p. 140.
[18] V. I. Ogievetsky et I. V. Polubarinov, *Soviet Phys. J. E. T. P.*, t. 21, 1965, p. 1093 et t. 48, 1965, p. 1625.
[19] H. Pagels, *Ann. Phys.*, vol. 31, 1965, p. 64.
[20] P. Roman, *Theory of elementary Particles*, North Holland, Amsterdam, 1964.
[21] H. Umezawa, *Quantum field theory*, North Holland, Amsterdam, 1956.

(*Manuscrit reçu le* 28 *février* 1972.)