ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels des variétés différentiables de dimension paire

Annales de l'I. H. P., section A, tome 16, nº 3 (1972), p. 171-201
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__16_3_171_0>

Ann. Inst. H. Poincaré,
Vol. XVI, n° 3, 1972, p. 171-201.

Section A :
Physique théorique.

Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels des variétés différentiables de dimension paire

par

A. CRUMEYROLLE

Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne, Toulouse

RÉSUMÉ. — I. Cet article fait suite à [4, *a*] et [4, *b*]. Le but poursuivi est d'introduire les notions de dérivation covariante et de dérivation de Lie pour les champs de spineurs et de tenseurs-spineurs, en évitant le lourd formalisme matriciel presque exclusivement utilisé jusqu'ici dans la littérature.

Nous montrons d'abord comment l'impossibilité signalée par E. Cartan [1] d'étendre naturellement aux spineurs les techniques classiques riemanniennes se rattache à celle de réduire en général le groupe structural du fibré des repères orthonormés à l'un des groupes que nous avons appelés dans [4, *b*] « groupes de spinorialité ». Cette difficulté disparaît sur une variété à structure spinorielle. Nous retrouvons « naturellement » sur une telle variété tout le formulaire classique par un procédé qui, à nos yeux, présente l'avantage d'être direct, concret et intrinsèque.

II et III. Dans le même esprit les deuxième et troisième parties sont consacrées au développement de certaines notions bien connues dans le cas particulier de l'espace de Minkowski de la Mécanique quantique où elles sont traditionnellement exposées par le biais des représentations matricielles, dans un cadre local et purement algébrique. Ici nous avons surtout cherché à expliciter une nouvelle méthode d'approche qui nous paraît plus simple, plus générale et mieux structurée que la méthode classique, et que nous appliquons à la définition et à l'étude de formes et d'opérateurs sur une variété réelle de dimension paire, munie d'une structure spinorelle.

Rappelons que dans I, II et III il s'agit de structures spinorielles au sens de [4, *a*] et [4, *b*]. La projection p de Pin Q sur 0 (Q) étant la projection usuelle, non « tordue » $p(\gamma)(x) = \gamma\, x\, \gamma^{-1}$.

1. DÉRIVATIONS DES CHAMPS DE SPINEURS

1.1. Dérivations dans l'algèbre de Clifford d'une variété pseudoriemannienne

V est une variété paracompacte connexe de dimension $n = 2r$ sur R, munie d'une structure pseudoriemannienne (ou, en particulier, riemannienne). Q est la forme quadratique fondamentale, g la forme bilinéaire associée, $g(X, X) = Q(X)$ pour tout champ de vecteurs X. ∇ est une connexion sur V. Nous rappelons d'abord deux résultats énoncés et établis dans [4, *a*].

Proposition 1. — *Pour que la dérivation covariante « passe au quotient », c'est-à-dire de l'algèbre tensorielle de la variété à son algèbre de Clifford, il faut et il suff t que la connexion soit euclidienne.*

Proposition 2. — *Pour que la dérivation de Lie* L_X *attachée à un champ de vecteurs* X *de* V *« passe au quotient » il faut et il suffit que* $L_X(Q) = 0$, *c'est-à-dire que* X *soit un champ de Killing.*

Si la variété V est pseudoriemannienne quelconque, on sait que la dérivation covariante euclidienne ne s'étend pas naturellement aux champs locaux de spineurs : si les ψ^a, $a = 1, 2, \ldots, 2^r$, sont les composantes locales d'un tel champ, il est en général impossible d'écrire

$$\nabla_\alpha \psi^a = \partial_\alpha \psi^a + \Lambda^a_{b\alpha} \psi^b, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

à partir de la connexion euclidienne ∇ par passage au quotient dans l'algèbre de Clifford et restriction aux spineurs, étant entendu qu'un spineur en $x \in V$ est un élément d'un idéal à gauche minimal de l'algèbre de Clifford en x. Ce résultat signalé et établi par E. Cartan [1] se démontre facilement dans notre approche [4, *a*]. On pourrait faire des remarques analogues pour la dérivée de Lie des champs de spineurs quand $L_X(Q) = 0$. Nous allons précisément expliquer de manière détaillée l'origine de cette difficulté et essayer de la surmonter sans recours à la technique des revêtements utilisée par exemple par Lichnerowicz dans [7, *b*] et [7, *c*].

1.2. Connexions « spin-euclidiennes » propres

Sur la variété V soit $\mathcal{U}$ un ouvert, domaine de définition d'un champ de repères de Witt $(x_\alpha, x_{\alpha*})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, pour le fibré pseudoriemannien complexifié. Désignons par ω^i_j, $i, j = 1, \ldots, n$, les composantes locales de la forme de connexion ∇, ∇ est dans tout ce qui suit, et sauf spécification contraire, euclidienne réelle. Un calcul facile montre que

$$
(1) \qquad \begin{cases} \omega^{\alpha*}_{\beta} + \omega^{\beta*}_{\alpha} = 0, \\ \omega^{\alpha}_{\beta} + \omega^{\beta*}_{\alpha*} = 0, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r \\ \omega^{\alpha}_{\beta*} + \omega^{\beta}_{\alpha*} = 0, \end{cases}
$$

et on peut résumer (1) en

$$
\omega^{i}_{j} + \omega^{j*}_{i*} = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, n; \quad * = \pm r.
$$

Supposons que V admette une structure Pin Q-spinorielle, elle admet alors *a fortiori* une structure Pin Q′-spinorielle, où Q′ est le complexifié de Q [4, *b*]. Localement un champ de repères Pin Q′-spinoriels, au-dessus d'un ouvert $\mathcal{U}$ de V sur lequel est défini le champ $(x_\alpha, x_{\alpha*})$ précédent et un champ de r-vecteurs isotropes $f = \eta_{1*}\,\eta_{2*}\ldots\eta_{r*}$ est représenté au point x appartenant à $\mathcal{U}$ par l'ensemble

$$
\{ x_{\alpha_1}\ldots x_{\alpha_n}\,\gamma\, f \}_x, \qquad 1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_h \leqq r,
$$

où γ_x est l'élément, choisi continûment dans Pin Q′, qui se projette sur la transformation orthogonale envoyant un repère de Witt $(\xi_\alpha, \eta_{\beta*})_x$ sur $(x_\alpha, x_{\alpha*})_x$. (On se rapportera à [4, *a*] et [4, *b*] pour les détails.) Mais si on se restreint à un groupe de spinorialité de 0 (Q′), celui-là même qui correspond à f, on a

$$
\gamma f = \pm f = \pm\, x_{1*}\, x_{2*}\ldots x_{r*} \quad [4, b],
$$

et le champ local de repères Pin Q′-spinoriels peut être choisi comme l'ensemble $\{ x_{\alpha_1}\ldots x_{\alpha_h}\, x_{1*}\ldots x_{r*} \}$. Ces repères seront utilisés également pour la structure Pin Q-spinorielle de V, ils pourront être qualifiés de « canoniques ». Dans ce qui suit, nous définissons localement f par $f = x_{1*}\, x_{2*}\ldots x_{r*}$, à partir du champ également local de repères de Witt $(x_\alpha, x_{\beta*})$.

Rappelons que nous avons défini dans [4, *b*] un groupe $\mathfrak{S}$ de spinorialité comme l'image, par la projection p de Pin Q sur 0 (Q), du sous-groupe H de Pin Q dont les éléments γ satisfont à $\gamma f = \pm f$. On voit immédiatement que $H \subset C^+(Q)$ et que V est orientable.

L'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ (H) de H est constituée par les éléments u de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ (Pin Q) de Pin Q tels que $uf = 0$; u peut s'exprimer, avec un léger abus de notation par

$$
u = a^{\alpha\beta*}\, x_\alpha\, x_{\beta*} + \frac{1}{2}\, b^{\alpha*\beta*}\, x_{\alpha*}\, x_{\beta*}, \qquad b^{\alpha*\beta*} = -\, b^{\beta*\alpha*},
$$

α et β variant librement de 1 à r. Notons que la condition $\beta(u) + u = 0$ [3] entraîne que $\sum_{1}^{r} a^{\alpha\alpha*} = 0$.

Selon un processus classique pour calculer les formes de connexion, il faut considérer ad u et former $ux_\gamma - x_\gamma u$ et $ux_{\gamma*} - x_{\gamma*} u$. Il vient, après un calcul facile :

$$\begin{aligned} ux_\gamma - x_\gamma u &= 2\, a^{\alpha\gamma*} x_\alpha + 2\, b^{\alpha*\gamma*} x_{\alpha*}, \\ ux_{\gamma*} - x_{\gamma*} u &= -\, 2\, a^{\gamma\alpha*} x_{\alpha*}. \end{aligned}$$

Écrivant ici ω^i_j pour ω^i_j (X), où X est un champ de vecteurs de V, on a donc

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \omega^\alpha_\beta = 2\, a^{\alpha\beta*}, \\ \omega^{\beta*}_{\alpha*} = -\, 2\, a^{\alpha\beta*}, \\ \omega^{\alpha*}_\beta = 2\, b^{\alpha*\beta*}, \\ \omega^\alpha_{\beta*} = 0 \end{cases}$$

et on obtient, pour exprimer que les formes de connexion sont à valeurs dans l'algèbre de Lie de $\mathscr{L}(\mathfrak{S})$ le système de conditions :

$$\text{(3)} \qquad \sum_{1}^{r} \omega^\alpha_\alpha = 0;$$

$$\text{(4)} \qquad \omega^\alpha_{\beta*} = 0.$$

Observons que nous pouvons écrire

$$\text{(5)} \qquad u = \frac{1}{4}\, \omega^\alpha_\beta\, x_\alpha\, x^\beta + \frac{1}{4}\, \omega^{\alpha*}_{\beta*} x_{\alpha*}\, x^{\beta*} + \frac{1}{4}\, \omega^{\alpha*}_\beta\, x_{\alpha*}\, x^\beta = \frac{1}{4}\, \omega^i_j\, x_i\, x^j,$$

où nous avons élevé certains indices.

Ainsi, en résumé, si le groupe structural du fibré pseudoriemannien est réductible à un groupe de spinorialité on peut affirmer selon [4, *b*] que V admet une structure Pin Q-spinorielle. Il existe alors selon un résultat classique une connexion euclidienne dont les formes satisfont aux conditions (3) et (4). Une telle connexion sera appelée *connexion spin-euclidienne propre.*

1.3. Dérivation covariante des champs de spineurs relativement à une connexion spin-euclidienne

Soit $\pm f$ le champ de r-vecteurs isotropes défini au signe près sur V, nous prendrons localement

$$f = x_{1*}\, x_{2*} \ldots x_{r*}.$$

PROPOSITION 3. — *∇ étant une connexion euclidienne, on a $\nabla f = 0$ si et seulement si ∇ est spin-euclidienne propre.*

En effet, d'après la proposition 1,

$$\nabla f = \sum_{\alpha^*} \omega^{\lambda}_{\alpha^*} \underbrace{x_{1^*} \dots x_{\lambda} \dots x_{r^*}}_{\hat{x}_{\alpha^*}} + \sum_{\alpha^*} \omega^{\lambda^*}_{\alpha^*} \underbrace{x_{1^*} \dots x_{\lambda^*} \dots x_{r^*}}_{\hat{x}_{\alpha^*}},$$

où on a mis en évidence le facteur manquant x_{α^*}.

Ainsi

$$\nabla f = \sum_{\alpha^*} \omega^{\lambda}_{\alpha^*} \underbrace{x_{1^*} \dots x_{\lambda} \dots x_{r^*}}_{\hat{x}_{\alpha^*}} + \sum_{\alpha^*} \omega^{\alpha^*}_{\alpha^*} f.$$

Pour que ∇f soit nulle, il faut et il suffit que $\omega^{\alpha}_{\beta^*} = 0$ et $\sum_{\alpha} \omega^{\alpha}_{\alpha} = 0$, donc que ∇ soit spin-euclidienne propre.

COROLLAIRE 1. — *Si la connexion est spin-euclidienne propre, elle induit naturellement une dérivation covariante des champs de spineurs.*

En effet, $\Delta_X\, wf = sf$, $w, s \in C_V(Q')$, puisque $\nabla f = 0$. Étudions comment opère ∇ sur les éléments d'un repère spinoriel. Nous écrivons encore par abus ω^i_j pour $\omega^i_j(X)$, X étant un champ de vecteurs de V, et ∇ pour ∇_X,

$$\nabla (x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_h} f) = \sum_{\alpha \in I} \omega^i_{\alpha} \underbrace{x_{\alpha_1} \dots x_i \dots x_{\alpha_h}}_{\hat{x}_{\alpha}} f$$

où $I = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h)$.

Montrons que

$$\sum_{\alpha \in I} \omega^{\beta}_{\alpha} \underbrace{x_{\alpha_1} \dots x_{\beta} \dots x_{\alpha_h}}_{\hat{x}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{1}{2} \omega^{\beta}_{\alpha} x_{\beta} x_{\alpha^*} \dots (x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_h}) f.$$

En effet : Si $\alpha \notin I$, x_{α^*} anticommute avec $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_h}$ et traverse le produit $x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_h}$, multiplié par f, il donne 0.

Si $\alpha \in I$, $\alpha = \alpha_i$, $1 \leq i \leq h$, dans le produit $x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_i} \dots x_{\alpha_h}$, x_{α^*} anticommute avec les éléments précédents x_{α_i}, par produit par x_{α_i} comme

$$x_{\alpha_i^*} x_{\alpha_i} = - x_{\alpha_i} x_{\alpha_i^*} + 2$$

on obtient deux termes, dont l'un contenant $x_{\alpha_i^*}$ donnera 0 avec f. Faisant ensuite glisser x_{β} à la place de x_{α_i} on obtient le premier membre de l'égalité considérée. De même, nous montrons que :

$$\sum_{\alpha \in I} \omega_{\alpha}^{\beta *} x_{\alpha_1} \ldots \underset{\hat{x}_\alpha}{x_{\beta *}} \ldots x_{\alpha_h} = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{1}{4} \omega_{\alpha}^{\beta *} x_{\beta *} x_{\alpha *} (x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_h}) f.$$

Si $\alpha \notin I$, c'est comme précédemment.

Il reste donc, compte tenu de $\omega_{\alpha}^{\beta *} = - \omega_{\beta}^{\alpha *}$,

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha < \beta}} \omega_{\alpha}^{\beta *} x_{\beta *} x_{\alpha *} (x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_h}) f.$$

Si $\alpha = \alpha_i$, $1 \leqq i \leqq h$, $x_{\alpha *}$ anticommute d'abord comme précédemment et donne encore deux termes, $x_{\beta *}$ est alors amené à la place de x_{α_i}. Donc le deuxième membre est

$$\sum_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha < \beta}} \omega_{\alpha}^{\beta *} x_{\alpha_1} \ldots \underset{\hat{x}_\alpha}{x_{\beta *}} \ldots x_{\alpha_h} f.$$

Quant au premier membre, si $\beta \leqq \alpha$, $x_{\beta *}$ anticommute avec les facteurs à sa droite et donne 0 par produit avec f.

Finalement, posant $\psi = (x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_h} f)$, on a

$$\nabla \psi = \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\frac{1}{2} \omega_{\alpha}^{\beta} x_{\beta} x_{\alpha *} \right) \psi + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{r} \omega_{\alpha}^{\beta *} x_{\beta *} x_{\alpha *} \psi$$

$$= \left(a^{\beta \alpha *} x_{\beta} x_{\alpha *} + \frac{1}{2} b^{\alpha * \beta *} x_{\alpha *} x_{\beta *} \right) \psi = u \psi,$$

où u est l'élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ (H) qui est associé naturellement par p à l'élément de l'algèbre de Lie de 0 (Q), défini par les formes de connexion ω^i_j [u est plus précisément une forme à valeur dans $\mathcal{L}$ (H)]. Ainsi nous avons obtenu :

Proposition 4. — *Si la connexion ∇ de forme ω est spin-euclidienne propre, et si $u = \frac{1}{4} \omega^i_j \, x_i . x^j$, alors pour tout élément ψ de la base spinorielle locale, $x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_h} f$, $\nabla \psi = u \psi$.*

Groupe de spinorialité élargi et connexion spin-euclidienne au sens large. — Nous avons déjà observé que l'élément général de l'algèbre de Lie de Pin Q s'écrit (en laissant ici de côté les conditions de « réalité ») sous la forme :

$$v = a^{\alpha\beta^*} x_\alpha x_{\beta^*} + \frac{1}{2} b^{\alpha^*\beta^*} x_{\alpha^*} x_{\beta^*} + \frac{1}{2} c^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + d,$$

avec

$$b^{\alpha^*\beta^*} = b^{-\beta^*\alpha^*} \quad \text{et} \quad c^{\alpha\beta} = - c^{\beta\alpha} \qquad \text{et} \qquad \beta(v) + v = 0,$$

condition qui implique

$$\sum a^{\alpha\alpha^*} + d = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum \omega_\alpha^\alpha = -2d.$$

Le sous-groupe de Lie K de Spin Q, constitué par les éléments γ tels que $\gamma f = \lambda f$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$ (λ variable) est intéressant, son algèbre de Lie $\mathcal{L}$ (K) est constituée par les éléments v de Pin Q tels que $vf = kf$, k variable appartenant à $\mathbf{C}$. p (K) *sera appelé groupe de spinorialité élargi.*

Examinons maintenant une réciproque possible du corollaire 1. Pour que la connexion ∇ induise naturellement une dérivation covariante des champs de spineurs, il faut et il suffit que $\nabla_X f$ soit de la forme sf, $s \in C_V(Q')$. On aura alors nécessairement

$$\nabla f = \sum_\alpha \omega_\alpha^\alpha f \qquad \text{et} \qquad \omega_{\beta^*}^\alpha = 0.$$

Revenant aux considérations du paragraphe précédent, il vient donc $c^{\alpha\beta} = 0$ et la proposition suivante :

PROPOSITION 5. — *Pour qu'une connexion euclidienne induise naturellement une dérivation des champs de spineurs il faut et il suffit que ses formes soient à valeurs dans l'algèbre de Lie d'un groupe de spinorialité élargi.*

Une telle connexion sera appelée *spin-euclidienne au sens large. On a alors* $\nabla f = \sum \omega_\alpha^\alpha f$. On observera que $\sum_\alpha \omega_\alpha^\alpha$ définit une 1-forme à valeurs scalaires sur V, ce qui peut aisément se vérifier par un calcul local, utilisant évidemment uniquement des repères Pin Q'-spinoriels canoniques.

1.4. Dérivation covariante des champs de spineurs sur une variété à structure spinorielle associée à une connexion euclidienne quelconque

Soit ω la forme de connexion euclidienne. Il lui correspond par isomorphisme des algèbres de Lie une forme u à valeurs dans $\mathcal{L}$ (Pin Q). Si u (X) est la valeur de cette forme pour un champ de vecteurs X de V, *nous définissons une dérivation covariante* $\hat{D}$ *en posant* : $\hat{D}_X \psi = u(X) \psi$, pour $\psi = x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_h} f$, *ce qui est loisible.*

Si la connexion de forme ω est spin-euclidienne on a donc $\hat{D} = \nabla$. Dans le cas général, $\hat{D}$ est l'unique connexion qui étend la connexion spin-euclidienne, selon un résultat classique exposé en détails par exemple dans ([5], p. 79). $\hat{D}$ *n'est plus alors obtenue par passage au quotient dans l'algèbre de Clifford,* cependant l'existence des repères canoniques sur V nous permet d'assurer l'existence globale d'une telle connexion. La connexion $\hat{D}$ sera encore appelée spinorielle, mais sans autre qualificatif. On observera que $\hat{D}_X f = \sum \omega^\alpha_\alpha (X) f$.

Remarque. — Si φ est un spineur de la forme $x_{i_1} \ldots x_{i_k} \psi$, où ψ est un élément d'une base, comme précédemment, on aura encore

$$\hat{D}_X (x_{i_1} \ldots x_{i_k} \psi) = u(X) (x_{i_1} \ldots x_{i_k} \psi),$$

car, par réduction, on obtiendra une combinaison linéaire d'éléments ψ^a de la base canonique avec des coefficients constants. On aura l'occasion d'utiliser cette remarque plus bas.

Pour illustrer notre méthode, nous l'appliquons à la détermination du tenseur de courbure de la connexion spinorielle.

Le tenseur de courbure. — ψ étant élément d'une base spinorielle canonique

$$\nabla_X \psi = u(X) \psi, \qquad u(X) \in \mathcal{L}(\text{Pin } Q);$$

$$\nabla_X \nabla_Y \psi = \frac{1}{4} \nabla_X (\omega^i_j (Y) x_i x^j \psi), \qquad \text{avec} \quad X, Y \in D^1(V),$$

$$= \frac{1}{4} X (\omega^i_j (Y)) x_i x^j \psi + u(X) u(Y) \psi.$$

Introduisant comme plus haut la projection $\tilde{p}$

$$\tilde{p} : \quad \mathcal{L}(\text{Pin } Q) \to \mathcal{L}(0(Q)),$$

il vient

$$4 (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) \psi = \{ \tilde{p}^{-1} [X \omega(Y) - Y \omega(X)] + \tilde{p}^{-1} [\omega(X), \omega(Y)] \} \psi,$$

$$\begin{aligned} 4 (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}) \psi &= \tilde{p}^{-1} (X \omega(Y) - Y \omega(X) \\ &\quad + [\omega(X), \omega(Y)] - \omega[X, Y] \psi \\ &= \tilde{p}^{-1} (R(X, Y)) \psi \\ &= R^i_j (X, Y) x_i x^j \psi, \end{aligned}$$

où R est le tenseur de courbure de la connexion ∇. Si on pose

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} = P(X, Y),$$

où P (X, Y) est considéré comme opérant linéairement sur les champs de spineurs, il vient

$$(6) \quad \begin{cases} P(X, Y)(\psi) = \frac{1}{4} R^i_j (X, Y)\, x_i\, x^j (\psi), \\ P(X, Y) = \frac{1}{4} R^i_j (X, Y)\, x_i\, x^j, \end{cases}$$

formule que l'on trouve dans ([7, *b*], p. 43) (le changement de signe est dû à des conventions de définitions différentes pour l'algèbre de Clifford).

1.5. Dérivation covariante des cospineurs et des tenseurs-spineurs de tout type

Nous avons considéré jusqu'ici des champs de spineurs « contravariants ».

$C_x(Q') f_x$, écrit par abus $C(Q') f$, admet pour dual $f C(Q')$ selon une propriété que nous allons rappeler ici.

β étant l'antiautomorphisme principal de l'algèbre de Clifford, on peut poser

$$\beta(vf)(wf) = B(vf, wf) . f,$$

écrit encore parfois

$$B(v, w) . f, \qquad \text{où} \quad B(v, w) \in \mathbf{C}.$$

B est une forme bilinéaire non dégénérée qui nous permet d'identifier $f C(Q')$ au dual de $C(Q') f$, puisque $\beta(C(Q') f) = f C(Q')$. On se reportera à [3] pour tous les détails concernant la forme bilinéaire B. On y trouvera ce résultat, que l'on peut d'ailleurs établir immédiatement sans aucune difficulté, que B est invariante par l'action du sous-groupe G_0 des éléments de Pin Q de norme spinorielle 1 [$\beta(\gamma)\gamma = 1$, si $\gamma \in G_0$] (1).

B est défini globalement sans ambiguïté de signe s'il existe sur V un champ f de r-vecteurs isotropes, on supposera donc ici que V est munie d'une orientation temporelle, c'est-à-dire que le groupe structural du fibré pseudo-riemannien est réductible au groupe orthochrone.

Pour étendre la dérivation covariante aux champs de cospineurs, on procède comme en algèbre tensorielle, l'endomorphisme $(\nabla_X)_x$ est

(1) On établira plus bas (p. 198) que $\hat{D}B = 0$.

remplacé par $-{}^t(\nabla_X)_x$. Ainsi si ψ et φ sont des éléments d'une base locale de $C(Q')f$, et $u(X)$ un élément de $\mathcal{L}(\text{Pin } Q)$ nous avons à chercher la transposée relativement à B du produit à gauche par u, or

$$\beta(\varphi).(u\,\psi) = \beta(\varphi)\,u.\psi,$$

trivialement, de sorte que $\beta(\varphi)$ étant un élément du repère cospinoriel local, la dérivée covariante transforme $\beta(\varphi)$ en $-\beta(\varphi)\,u$ et cela résout complètement le problème pour toutes les connexions spinorielles déjà considérées.

On peut alors étendre la dérivation $\hat{D}$ aux champs tensoriels, spinoriels, spino-tensoriels. Sur la variété $\mathcal{S}(V)\times V$, où $\mathcal{S}(V)$ désigne ici le fibré spinoriel de fibre C^{2r}, on définira

$$D_X = (\hat{D}_X \otimes I_n) + (I_{2^r} \otimes \nabla_X).$$

Nous avons déjà traité cette question, dans un contexte un peu différent [4, *a*].

Remarque. — En Physique théorique on est conduit à considérer un « tenseur-spineur » fondamental dont la dérivée covariante spinorielle est nulle. Ce résultat apparaît ici très simplement. Soit ψ élément d'une base canonique spinorielle.

Posons $x^i = g^{ij}\,x_j$, avec les repères canoniques spinoriels

$$x^i = x_i^* \qquad (* = \pm r).$$

x^i définit un opérateur linéaire noté $\tilde{x}^i$ dans l'espace des spineurs et on peut écrire

$$\hat{D}_X(x^i\,\psi) = u(X)(x^i\,\psi) = \hat{D}_X(\tilde{x}^i\,\psi) = (D_X\,\tilde{x}^i)(\psi) + x^i\,(\hat{D}_X\,\psi),$$

d'où l'on déduit

$$u(X)\,x^i - x^i\,u(X) - \hat{D}_X\,\tilde{x}^i = 0;$$

or $u(X)\,x_{i*} - x_{i*}\,u(X) = \omega^k_{i*}\,x_k$, d'après les résultats rappelés au paragraphe 1.2 et, de plus, sachant que $\omega^i_{k*} = -\omega^k_{i*}$:

$$u(X)\,x^i - x^i\,u(X) = -\,\omega^i_{k*}\,x^{k*} = -\,\omega^i_j\,x^j = -\,\nabla_X\,x^i.$$

Ainsi : $\hat{D}_X\,\tilde{x}^i + \nabla_X\,x^i = 0$, ou encore, si on appelle γ^i_x l'élément de $C(Q')f_x \otimes (C(Q')f_x)^* \otimes T^*_x$ que définit X^i, $D_X\,\gamma^i = 0$. C'est l'ensemble des γ^i qui représente chez les spécialistes de Physique théorique le « tenseur-spineur fondamental ».

Il est facile de vérifier que $D_X \gamma^i = 0$ se traduit encore par $\nabla_X x_i - \hat{D}_X \tilde{x}_i = 0$ ou si l'on préfère par

$$\sigma^a_c \, x^c_{ib} - \sigma^c_b \, x^a_{ic} - \omega^j_i \, x^a_{jb} = 0,$$

en désignant par $\| \sigma^a_b \|$ la matrice de connexion spinorielle et $\| x^a_{ib} \|$ celle de $\tilde{x}_i$ (les indices a, b, c sont relatifs au repère spinoriel) [7, *b*].

Remarques diverses. — Une connexion spinorielle $\hat{D}$ étant choisie, on obtient toute connexion sur le fibré des spineurs en ajoutant à la forme $\frac{1}{4} \omega^i_j \, x_i \, x^j = \sigma$ qui définit $\hat{D}$ un champ de 1-formes à valeurs matricielles ou, ce qui revient au même (à un isomorphisme près), un champ de 1-formes à valeurs dans le fibré de Clifford de V.

En particulier, prenant une 1-forme à valeurs scalaires de composantes locales φ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), on obtient une connexion telle que la dérivée covariante du « tenseur-spineur » fondamental soit encore nulle. Il existe une réciproque facile de cette propriété [4, *a*]. Le champ de formes locales φ_i a été proposé par certains auteurs (Schrödinger) pour représenter le potentiel électromagnétique, quand V est l'espace-temps.

Observons que la 1-forme ω^α_α, obtenue pour une connexion spinorielle associée naturellement à une connexion euclidienne fournirait peut-être dans notre théorie un autre candidat à la représentation d'un « potentiel-vecteur » électromagnétique ou quelque chose d'analogue ?

1.6. Dérivée de Lie des champs de spineurs

Soit X un champ de vecteurs de Killing de V. Nous avons signalé en 1.1 que L_X, dérivée de Lie attachée à X passe « au quotient », de l'algèbre tensorielle à l'algèbre de Clifford.

Considérons sur V une connexion ∇ dont la forme ω est à valeurs dans $\mathcal{L}(0(Q))$ et qui soit sans torsion. Alors :

$$L_X(Y) = X^k \nabla_k Y - Y^k \nabla_k X, \quad \forall \, Y \in D^1(V),$$

$$L_X(f) = \sum_{\alpha^*=1}^{r} x_{1^*} \ldots L_X(x_{\alpha^*}) \ldots x_{r^*}.$$

Posant $L_X(x_{\alpha^*}) = a^i_{\alpha^*} x_i$, *on voit que la dérivée de Lie passe naturellement au quotient, puis à une dérivation spinorielle si et seulement si* $a^\beta_{\alpha^*} = 0$ *et on a alors*

$$L_X(f) = \sum_{\alpha^*} a^{\alpha^*}_{\alpha^*} f.$$

L_X est alors un élément de $\mathcal{L}(\tilde{p}\,K)$, où

$$\tilde{p} : \quad \mathcal{L}(\text{Pin } Q) \to \mathcal{L}(0\,(Q)).$$

La dérivée de Lie de f est nulle si et seulement si $L_X \in \mathcal{L}(\mathfrak{S})$ (il s'agit ici de la restriction de L_X aux champs de vecteurs). Supposant cette dernière condition réalisée, nous considérons une connexion spin-euclidienne sans torsion; ψ a le même sens qu'en 1.3

$$L_X(\psi) = \sum_{\alpha \in I} x_{\alpha_1} \dots \underset{\hat{x}_\alpha}{X^k \nabla_k x_\alpha} \dots x_{\alpha_h} f - \sum_{\alpha \in I} x_{\alpha_1} \dots \underset{\hat{x}_\alpha}{\nabla_\alpha X} \dots x_{\alpha_h} f,$$

avec $I = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h)$.

Le premier paquet de termes se transforme comme une expression trouvée en 1.3 et donne

$$\frac{1}{4}(\Gamma^i_{jk}\, X^k\, x_i\, x^j)\, \psi = X^k\, \nabla_k\, \psi,$$

où les Γ^i_{jk} sont les coefficients de la connexion ∇ et

$$\nabla_\alpha X = (\nabla_\alpha X)^i\, x_i = \nabla_X\, x_\alpha - L_X\,(x_\alpha).$$

L'application qui à Y associé $\nabla_Y X$, X fixé, est donc un élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$.

Transformant comme en 1.3, le deuxième paquet de termes donne

$$-\frac{1}{4}(\nabla_j X)^i\, x_i\, x^j\, \psi.$$

Finalement, on trouve :

$$L_X(\psi) = X^k(\nabla_k \psi) - \frac{1}{4}(\nabla_j X^i)\, x_i\, x^j\, \psi, \tag{7}$$

formule qui a été donnée dans [6] mais dans un contexte très différent. On y observera aussi un changement de signe lié aux conventions de définition de l'algèbre de Clifford. Le deuxième membre de (7) s'écrit encore

$$\frac{1}{4} L_X\,(x_j)\, x^j\, \psi.$$

Il apparaît la multiplication à gauche par l'élément de $\mathcal{L}(H)$ qui correspond à l'élément L_X de $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$, car

$$L_X\,(x_i) = a^k_i\, x_k,$$

et on a trouvé

$$L_X(\psi) = \frac{1}{4}(a^k_j\, x_k\, x^j)\, \psi,$$

formule identique dans sa forme à celle que l'on a obtenue pour la dérivée covariante.

Comme plus haut, on peut maintenant considérer X, champ de Killing quelconque de V et définir une dérivée de Lie, attachée à X en posant

$$\mathrm{L_X}(\psi) = \frac{1}{4}(a^k_j\, x_k\, x^j)\,\psi \qquad \text{si} \quad \mathrm{L_X}(x_i) = a^k_i\, x_k;$$

$\frac{1}{4}(a^k_j\, x_k\, x^j)$ définit comme on l'a vu, un élément de $\mathcal{L}$ (Pin Q).

Cette dérivation n'est plus maintenant, en général, naturellement associée à la dérivée de Lie dans l'algèbre de Clifford.

Si X est un champ de vecteurs quelconques, on peut, utilisant une antisymétrisation, définir une dérivée de Lie pour tout champ (*cf.* [6]).

Pour passer aux dérivées de Lie de champs de cospineurs, on procède comme en 1.5; si θ est un champ de cospineurs on trouve immédiatement à partir de (7) et de 1.5 que

$$\mathrm{L_X}(\theta) = \mathrm{X}^k\, \nabla_k\, \theta + \frac{1}{4}(\nabla_j\, \mathrm{X}^i)\,\theta\, x_i\, x^j,$$

formule que l'on retrouvera dans ([6], p. 63). C'est ensuite un travail de routine que d'étendre les dérivées de Lie à tous les types de spineurs et de « tenseurs-spineurs ». On posera :

$$\bar{\mathrm{L}}_{\mathrm{X}} = (\mathrm{L_X} \otimes \mathrm{I}_n) + (\mathrm{I}_{2^r} \otimes \mathrm{L_X}),$$

à la façon de ce que l'on a fait en 1.5 pour la dérivée covariante et avec un léger abus de notations.

1.7. Généralisation

Examinons à quelle condition une dérivation D de l'algèbre tensorielle de V qui conserve le type, passe naturellement aux champs de spineurs. Elle doit d'abord passer à l'algèbre de Clifford, donc conserver l'idéal $\mathcal{J}$ engendré par les éléments de la forme $\mathrm{X} \otimes \mathrm{X} - \mathrm{Q}(\mathrm{X})$. Un calcul fait dans [4, *a*], dont l'extension est immédiate, montre que $\mathrm{D_Q} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que D passe à l'algèbre de Clifford.

On en déduit aisément que la restriction de D aux champs de vecteurs définit une isométrie infinitésimale. En conséquence dans les repères canoniques, la matrice D^i_j de la restriction de D aux champs de vecteurs est telle que $\mathrm{D}^\alpha_{\beta*} = 0$ et cette condition est visiblement suffisante.

Donc pour qu'une dérivation D *de l'algèbre tensorielle de* V, *qui conserve le type, induise naturellement une dérivation des champs de spineurs, il faut et il suffit que sa restriction aux champs de vecteurs induise une isométrie infinitésimale dans l'algèbre de Lie d'un groupe de spinorialité élargi.*

L'action de D, de matrice D^i_j, sur les champs de vecteurs se traduit alors sur ψ, élément d'une base spinorielle privilégiée par

$$\psi \to \frac{1}{4}(D^i_j\, x_i\, x^j)\, \psi,$$

comme dans les deux cas déjà étudiés.

Il est alors possible d'étendre D comme plus haut, quand D^i_j représente seulement une isométrie infinitésimale, et de passer ensuite aux champs de cospineurs et tenseurs-spineurs.

2. OPÉRATEURS SUR LES CHAMPS DE SPINEURS. ÉTUDE DE DEUX CAS PARTICULIERS

On suppose connue la notion de conjugaison complexe.

Au pseudo-champ f, défini au signe près, déjà introduit sur la variété V connexe, à structure Pin Q-spinorielle, associons par conjugaison le pseudo-champ noté $\bar{f}$. Selon un résultat établi dans ([3], chap. III, p. 71] et que nous avons déjà utilisé, $f\bar{f}f = \lambda\, f$, où λ est *a priori* une fonction à valeurs complexes définie sur V. La connexion spin-euclidienne ∇, telle que $\nabla f = 0$ est aussi telle que $\overline{\nabla f} = \nabla \bar{f} = 0$, donc λ est une constante absolue sur V. De plus, cette constante est réelle, car on déduit de

$$f\bar{f}f = \lambda\, f,$$

que

$$\bar{f}f\bar{f} = \bar{\lambda}\,\bar{f}, \qquad \lambda\,\bar{f}f = \bar{\lambda}\,\bar{f}f, \qquad \lambda = \bar{\lambda}.$$

Donc deux cas seulement se présenteront :

a. $\bar{f}f = 0$, *sur tout* V : On rencontrera en particulier ce cas si Q est d'indice maximal et f défini par des vecteurs réels. Si F′ et $\overline{F'}$ sont les s. t. i. m. de f et $\bar{f}$, $F' = \overline{F'}$ donnera $\bar{f} = af$, $f = \bar{a}\bar{f} = \bar{a}\,af$, donc $a = e^{i\theta}$, θ réel, constant sur V, en raison de la relation $\nabla \bar{f} = 0$.

On observera cependant que $\bar{f}f = 0$, n'équivaut pas à $F' = \overline{F'}$ on reviendra sur ce point plus bas au paragraphe 3).

b. $\bar{f} f \neq 0$ *sur tout* V : Alors $f \bar{f} f = \lambda f$, λ réel, constant sur V. $\bar{f} f$ est en général distinct de $f \bar{f}$, donc le champ $\bar{f} f$ n'est pas réel. $\frac{1}{\lambda} \bar{f} f$ est un idempotent de l'algèbre de Clifford de V. Selon un résultat établi dans ([3], chap. III, p. 79) $f \bar{f} f \neq 0$ équivaut à $F' \cap \bar{F}' = 0$.

Dans le paragraphe 2, nous ne considérerons que le cas *a* avec $\bar{f} = e^{i\theta} f$ et le cas *b*.

2.1. Structure hermitienne sur les champs de spineurs

Cas a. — Nous rappelons l'existence locale sur V du champ de formes bilinéaires non dégénérées B (§ 1.5).

Si uf est un champ local de spineurs, nous lui associons $\overline{uf}$ et cette correspondance est semi-linéaire, bijective.

Nous formons $B(\overline{uf}, vf)$, noté encore $B(u, v)$ par abus. On sait que $\beta(f) = \varepsilon f$, avec $\varepsilon = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}$. Il est alors loisible d'écrire :

$$\beta(\overline{uf})\, vf = k\, \mathcal{H}(u, v)\, f,$$

où nous pouvons choisir k de manière que $\mathcal{H}$ soit une forme hermitienne. Un calcul facile montre que $k = \pm e^{\frac{i\theta}{2}}$ si $\varepsilon = 1$ et $k = \pm i\, e^{\frac{i\theta}{2}}$ si $\varepsilon = -1$.

Par définition, nous poserons donc

$$(1) \qquad \begin{cases} e^{\frac{i\theta}{2}} \beta(\overline{uf})\, vf = \mathcal{H}(u, v)\, f, & \text{si} \quad \varepsilon = 1, \\ i\, e^{\frac{i\theta}{2}} \beta(\overline{uf})\, vf = \mathcal{H}(u, v)\, f, & \text{si} \quad \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Comme B, $\mathcal{H}$ est non dégénérée et invariante par G_0 (immédiat).

Cas b. — Comme nous l'avons signalé dans [4, *b*], $\overline{uf} \to \overline{uf}\, f$ est l'équivalence des représentations spinorielles dans $C(Q')\,\bar{f}$ et $C(Q')\,f$ respectivement. Cette correspondance est donc bijective, la correspondance réciproque associant à $\overline{uf}\, f$ l'élément $\lambda\, uf$. La forme bilinéaire B étant non dégénérée, il en résulte que si l'on pose

$$(2) \qquad \beta(\overline{uf}\, f)\, vf = \mathcal{H}(u, v) . f,$$

$\mathcal{H}$ est une forme hermitienne, non dégénérée, invariante par G_0.

Localement, le problème est donc résolu; du point de vue global on observera que f n'étant défini qu'au signe près pour une structure Pin Q-spinorielle arbitraire, dans le cas *a* il y a ambiguïté sur le signe de $\mathcal{H}(u, v)$.

— Si $\bar{f} = af$, on supposera de plus que le groupe structural est réductible à $p(G_0) \cap \mathfrak{S}$. Alors la norme spinorielle est 1 dans le groupe considéré. $\mathcal{H}$ est bien définie globalement.

— Si $\bar{f}f \neq 0$, le changement de f en $(-f)$ ne donne aucune ambiguïté de signe sur $\mathcal{H}(u, v)$.

En résumé, nous avons obtenu :

Proposition 1. — *Si $\bar{f}f \neq 0$, il existe un champ de formes hermitiennes $\mathcal{H}$, défini globalement sur la variété* V *à structure* Pin Q*-spinorielle de pseudo-champ f par*

$$(uf, vf) \to \mathcal{H}(uf, vf) = \mathcal{H}(u, v),$$

avec

$$\mathcal{H}(u, v) f = \beta(\overline{uf}f) vf.$$

— *Si $\bar{f} = e^{i\theta} f$, il existe un champ de formes hermitiennes $\mathcal{H}$ défini globalement sur la variété* V *à structure* Pin Q*-spinorielle de pseudo-champ f par*

$$(uf, vf) \to \mathcal{H}(uf, vf) = \mathcal{H}(u, v),$$

avec

$$\mathcal{H}(u, v) f = e^{\frac{i\theta}{2}} \beta(\overline{uf}) vf, \qquad si \quad (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} = 1,$$

$$\mathcal{H}(u, v) f = i\, e^{\frac{i\theta}{2}} \beta(\overline{uf}) vf, \qquad si \quad (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} = -1$$

si le groupe structural est réductible à l'intersection du groupe orthochrome et du groupe de spinorialité.

Dans les deux cas $\mathcal{H}$ est non dégénérée, invariante par G_0.

L'étude du cas *b* et la formule (2) se trouvent dans [2], mais dans un contexte purement algébrique.

2.2. La conjugaison de charge généralisée

Cas a. — Si $\bar{f} = e^{i\theta} f$, nous considérons l'application $\mathcal{C}$ qui à uf associe $e^{i\alpha}\bar{u}f$, α réel quelconque, $\mathcal{C}$ est une application antilinéaire et $\mathcal{C}^2 = \mathrm{Id}$. On voit aussi que

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}(uf), vf) = \varepsilon\, \mathcal{H}(\mathcal{C}(vf), uf).$$

Cas b. — $\bar{f}f \neq 0$. $f\bar{f}f = \lambda f$, λ réel constant.

On pose maintenant :

$$\mathcal{C}(uf) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{\lambda}} \overline{uf} f.$$

$\mathcal{C}$ est antilinéaire et

$$\mathcal{C}^2 = \mathrm{Id}, \quad \text{si} \quad \lambda > 0,$$
$$\mathcal{C}^2 = -\mathrm{Id}, \quad \text{si} \quad \lambda < 0.$$

De plus, $\mathcal{H}(\mathcal{C}(uf), vf) = \varepsilon\, \mathcal{H}(\mathcal{C}(vf), uf)$, comme on le vérifie immédiatement.

2.3. Adjonction de Dirac généralisée

On cherche à définir $\mathcal{A}$, appliquant l'espace $(C(Q')f)_x$ des spineurs en $x \in V$, dans l'espace des cospineurs en x, telle que $\mathcal{A} \circ \mathcal{C} = b$, b étant l'application linéaire fondamentale déduite de B qui envoie uf sur $\beta(uf)$.

— Si $\bar{f} = e^{i\theta} f$, on a la suite d'applications :

$$uf \xrightarrow{\mathcal{C}} e^{i\alpha}\, \bar{u}\, f \xrightarrow{\mathcal{A}} \beta(uf),$$

donc

$$\mathcal{A} : \quad uf \to \beta(\mathcal{C}(uf)) = e^{i\alpha}\, \beta(\bar{u} f).$$

— Si $\bar{f} f \neq 0$, on a la suite :

$$uf \xrightarrow{\mathcal{C}} \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{\lambda}}\, \overline{uf}\, f \xrightarrow{\mathcal{A}} \beta(uf)$$

et on voit immédiatement que

$$\mathcal{A} : \quad uf \to \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{\lambda}}\, \beta(\overline{uf}\, f), \qquad \text{si} \quad \lambda > 0,$$

puisque $\mathcal{A}\, \mathcal{C}(uf) = \beta(uf)$ et

$$\mathcal{A}(uf) = \mathcal{A}(\mathcal{C}\, \mathcal{C}(uf)) = \beta(\mathcal{C}(uf)).$$

Si $\lambda < 0$, on aura

$$\mathcal{A}(uf) = -\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{\lambda}}\, \beta(\overline{uf}\, f).$$

Faisant opérer $\mathcal{C}$ dans $(f\, C(Q'))_x$ par transposition,

$$\mathcal{C} \circ \beta = \beta \circ \mathcal{C},$$

un calcul facile montre que $\mathcal{A} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{A}$ dans les deux cas.

3. FORMES ET OPÉRATEURS USUELS SUR LES CHAMPS DE SPINEURS. CAS GÉNÉRAL

3.1. Préliminaires algébriques. Le spineur pur γf

On se place d'abord dans l'algèbre de Clifford standard. Au r-vecteur isotrope f associons le r-vecteur isotrope conjugué $\bar{f}$. Si $f = x_{1*} x_{2*} \ldots x_{r*}$, il existe γ appartenant à Pin Q′ qui « applique » $x_{\alpha*}$ sur $\bar{x}_{\alpha*}$:

$$\bar{x}_{\alpha*} = \gamma\, x_{\alpha*}\, \gamma^{-1}, \qquad \alpha^* = 1^*, 2^*, \ldots, r^*.$$

Nous avons alors $\gamma f = \bar{f} \gamma$, γf appartient à l'intersection de l'idéal à gauche engendré par f et de l'idéal à droite engendré par $\bar{f}$. Nous dirons donc que c'est un spineur pur ([3], chap. III). Il est loisible de supposer que $\mathrm{N}(\gamma) = 1$, c'est-à-dire que $\gamma \in \mathrm{G}_0(\mathrm{Q}')$ (*cf.* [4, *a*] et aussi [3], chap. III, p. 81).

Si γ' est un autre élément de Pin Q′, tel que $\mathrm{N}(\gamma') = 1$ et $\bar{f} = \gamma' f \gamma'^{-1}$, on obtient

$$f = (\gamma'^{-1} \gamma) f (\gamma'^{-1} \gamma)^{-1},$$

égalité qui équivaut [4, *b*] à

$$(\gamma'^{-1} \gamma) f = \pm f \qquad \text{puisque} \quad \mathrm{N}(\gamma) = \mathrm{N}(\gamma') = 1.$$

$\gamma'^{-1} \gamma$ appartient donc au groupe appelé H′ dans [4, *b*]. Donc $\gamma' = \gamma\tau$, $\tau \in \mathrm{H}'$ et $\tau f = \pm f$.

Il y a une autre ambiguïté de définition de γ, f étant fixé. Si $f = x'_{1*} x'_{2*} \ldots x'_{r*}$, il existe un élément σ de H′ qui applique $x_{\alpha*}$ sur $x'_{\alpha*}$ respectivement ($\sigma f = \varepsilon''' f$, $\varepsilon''' = \pm 1$) et l'on voit, après un calcul facile, que l'on doit remplacer γ précédemment choisi par $\bar{\sigma} \gamma \sigma^{-1} = \gamma'$ avec $\mathrm{N}(\gamma') = 1$.

Nous définissons enfin $\rho = \bar{\gamma} \gamma$ et de $\bar{f} = \bar{\gamma}^{-1} f \bar{\gamma}$ nous déduisons :

$$\rho f = \varepsilon' f, \qquad \varepsilon' = \pm 1.$$

Il est fondamental pour la suite d'observer que $\varepsilon' f$ ne dépend pas du choix de γ tel que $f = \gamma f \gamma^{-1}$.

En effet, si γ est remplacé par $\gamma' = \gamma\tau$, $\tau f = \varepsilon'' f$ ($\varepsilon'' \pm 1$), $\bar{\gamma}\gamma$ est remplacé par $\bar{\gamma} \bar{\tau} \gamma \tau$ et l'on a

$$\bar{\gamma} \bar{\tau} \gamma \tau \bar{f} = \varepsilon'' \bar{\gamma} \bar{\tau} \gamma f = \varepsilon'' \bar{\gamma} \bar{\tau} \bar{f} \gamma = \varepsilon'' \bar{\varepsilon}'' \bar{\gamma} \bar{f} \gamma = \bar{\gamma} \gamma f = \varepsilon' f.$$

De la même manière, si $\gamma' = \bar{\sigma}\gamma\sigma^{-1}$,

$$\gamma' f = \varepsilon''' \bar{\sigma}\gamma f = \varepsilon''' \bar{\sigma}\bar{f}\gamma = (\varepsilon''')^2 \bar{f}\gamma = \gamma f,$$

d'où résulte facilement

$$\bar{\gamma}'\gamma' f = \bar{\gamma}\gamma f.$$

Remarque. — On peut éventuellement comparer le signe de ε' et celui de $\lambda \neq 0$ tel que $f\bar{f}f = \lambda f$ introduit au paragraphe 2.

Posons $\bar{f}f = k\gamma f$, $k \in \mathbf{C}$, puisque $\bar{f}f$ appartient à l'intersection des idéaux C (Q′) f et $\bar{f}$ C (Q′) ([3], chap. III).

Il vient alors aisément :

$$f = \frac{k}{\lambda} f\gamma f,$$

$$f\gamma^{-1} = \frac{k}{\lambda} f\bar{f} = \frac{k}{\lambda}\bar{k}\gamma\bar{f},$$

$$\bar{f} = \frac{k\bar{k}}{\lambda}\gamma\bar{\gamma}\bar{f},$$

$$k\bar{k} = \lambda\varepsilon'.$$

Donc λ et ε' sont de même signe.

Si $\bar{f} = e^{i\theta} f$, de $\gamma f \gamma^{-1} = e^{i\theta} f$ on déduit utilisant [4, *b*], que $\gamma f = e^{\frac{i\theta}{2}} f$ et $\bar{\gamma}\gamma f = f$, donc $\varepsilon' = 1$.

Cette remarque nous permettrait de faire au besoin certaines vérifications.

PROPOSITION 1. — *Le scalaire réel* ε' *tel que* $\rho f = \varepsilon' f$ $(\bar{\gamma}\gamma = \rho, \bar{f} = \gamma f \gamma^{-1})$, *ne dépend :*

(*a*) *ni du choix du s. t. i. m.* F′ *de f*,

(*b*) *ni de la manière de factoriser f en produit de r vecteurs isotropes linéairement indépendants.*

(*b*) a déjà été établi.

(*a*) est facile à vérifier.

Si $f' = \sigma f \sigma^{-1}$ [avec $N(\sigma) = 1$],

$$\bar{f}' = (\bar{\sigma}\gamma\sigma^{-1}) f' (\bar{\sigma}\gamma\sigma^{-1})^{-1}.$$

On peut prendre $\gamma' = \bar{\sigma}\gamma\sigma^{-1}$ (modulo un facteur appartenant au groupe tel que H′ construit avec f') et il est immédiat que $\bar{\gamma}'\gamma' f' = \varepsilon' f'$.

ε' ne dépend donc que de la dimension $n = 2r$ et de la signature de Q.

Nous nous proposons de déterminer explicitement un élément γ, une fois choisie la factorisation de f de s. t. i. m. F′.

Lemme 1. — *Si γf est un spineur pur définissant $\bar{F}'$, pour que x appartienne à $\bar{F}'$, il faut et il suffit que $x\gamma f = 0$. Réciproquement, si γ appartient à* Pin Q′ *et si $x\gamma f = 0$, pour tout x appartenant à $\bar{F}'$, alors γf est un spineur pur définissant $\bar{F}'$.*

En effet, si $x \in \bar{F}'$, $x\gamma f = x\bar{f}\gamma = 0$. Inversement, si $x\gamma f = 0$, $x \in E_{\mathbf{C}}$, écrivons $x = x_1 + x'_1$, où $x_1 \in \bar{F}'$ et x'_1 a un sous-espace isotrope maximal F_1 tel que $F_1 \oplus \bar{F}' = E_{\mathbf{C}}$. $(x_1 + x'_1)\bar{f} = 0$, donc $x'_1\bar{f} = 0$, ce qui implique que $x'_1 = 0$.

Réciproquement, si $x\gamma f = 0$, $\forall\, x \in \bar{F}'$, $\gamma \in$ Pin Q′, alors $x\gamma f\gamma^{-1} = 0$.

Posant $f' = \gamma f \gamma^{-1}$, on a $xf' = 0$, ce qui entraîne que x est dans le s. t. i. m. de f' (utiliser une décomposition de Witt) : les s. t. i. m. de f' et de $\bar{f}$ sont confondus; or $f'\gamma = \gamma f$ assure que γf définit le s. t. i. m. de f'.

Lemme 2. — *Si $g(y, \bar{y}) = 0$ pour tout y appartenant au s. t. i. m. F′, on a $g(\bar{y}, x) = 0$ pour tout x appartenant à F′ et $\bar{F}' = F'$.*

Appliquant l'hypothèse à $y + x$ et à $y + ix$, on voit immédiatement que $g(\bar{y}, x) = 0$. $\bar{F}'$ est donc orthogonal à F′, F′ étant un s. t. i. m. $\bar{F}' = F'$.

Lemme 3. — *Si $g(y, \bar{y}) \neq 0$ pour tout y non nul appartenant à F′, on peut construire une base de Witt $(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ telle que*

$$\bar{y}_i = \delta x_i \quad (\delta = \pm 1), \qquad i = 1, 2, \ldots, r \qquad et \qquad \bar{F}' \cap F' = 0.$$

On choisit $y_1 \in F'$, et on pose $x_1 = \pm \bar{y}_1$; si $H_1 = (x_1, y_1)$, H_1 est non isotrope, on choisit y_2 dans $F' \cap (H_1)^{\perp}$, et il est possible d'obtenir x_2 tel que $x_2 = \pm \bar{y}_2$ de sorte que $(x_1, x_2, y_1, y_2) = H_2$ soit non isotrope et $g(x_i, y_j) = \delta ij$; on choisit y_3 dans $F' \cap (H_2)^{\perp}$, etc. Finalement on obtient une base de Witt du type indiqué avec $\bar{F}' = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ et $F' = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$. En raison de la continuité de g, $g(y, \bar{y})$ réel garde un signe constant sur $F' - \{0\}$. ette propriété entraînera que δ est indépendant de l'indice i.

Proposition 2. — *Si F′ est un s. t. i. m. de l'espace complexifié $E_{\mathbf{C}}$, avec* $\dim(F' \cap \bar{F}') = r - h$:

1° *On peut construire une base de Witt*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$$

telle que les vecteurs isotropes $y_1, y_2, \ldots, y_r$ engendrent F′, avec y_{h+1}, $y_{h+2}, \ldots, y_r$, constituant une base de $F' \cap \bar{F}'$, et

$$y_1 = \delta\bar{x}_1, \qquad \ldots, \qquad y_h = \delta\bar{x}_h \qquad (\delta = \pm 1).$$

2° *Si γf est un spineur pur représentant $\overline{F}'$, on peut choisir*

$$\gamma = \left(\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x_2 + y_2}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(\frac{x_h + y_h}{\sqrt{2}}\right).$$

Si $h = 0$, le lemme 3 donne le 1°.

Supposons donc $h > 0$. D'après le lemme 2, il existe $y_1 \in F'$ tel que $g(y_1, \bar{y}_1) = \pm 1$. Soit $H_1 = (y_1, \bar{y}_1)$, H_1 est non isotrope, $(H_1)^\perp$ également et de dimension $n - 2$. g restreinte à $(H_1)^\perp$ est non dégénérée. Si $F'_1 = (H_1)^\perp \cap F'$, F'_1 est de dimension $(r-1)$. Si $g(y, \bar{y}) = 0$ pour tout y appartenant à F'_1, on a $\overline{F}'_1 = F'_1$, on peut construire une base de Witt avec $x_1 = \pm \bar{y}_1$ et $y_2, y_3, \ldots, y_r \in \overline{F}'_1 \cap F'_1 = \overline{F}' \cap F'$, le résultat 1° est établi.

S'il existe y_2 appartenant à F'_1 tel que $g(y_2, \bar{y}_2) = \pm 1$, on construit $H_2 = (y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ non isotrope et on se retrouve devant la même situation, on continue. Le lecteur verra ensuite aisément que $y_{h+1}, \ldots, y_r$ constituent une base de $F' \cap \overline{F}'$.

Il reste à montrer que $\delta = \pm 1$ ne dépend pas de l'indice $i = 1, \ldots, h$. Supposons que $y_h = \bar{x}_h$ et $y_{h-1} = -\bar{x}_{h-1}$. On peut construire $z_1 = y_h + \lambda y_{h-1}$ tel que $\lambda \bar{\lambda} = 1$, $\bar{z}_1 = x_h - \bar{\lambda} x_{h-1}$, d'où $g(z_1, \bar{z}_1) = 0$, et z_2 tel que $z_2 = y_h - \lambda y_{h-1}$; alors l'espace F'_2 de dimension $r - h + 2$ $(z_1, z_2, y_{h+1}, \ldots, y_r)$ satisfait aux conditions du lemme 2 : c'est l'intersection de F' avec le sous-espace K non isotrope orthogonal à l'espace non isotrope $(x_1, \ldots, x_{h-2}, y_1, \ldots, y_{h-2})$. On peut appliquer le lemme 2 à la restriction non dégénérée de g à K. On a $F'_2 = \overline{F}'_2$, donc $F' \cap \overline{F}'$ contient F'_2, ce qui est impossible puisque la dimension de $F' \cap \overline{F}'$ est $r - h$.

Pour établir le 2° il suffit d'utiliser le lemme 1. On vérifie que pour tout x appartenant à $\overline{F}'$, $x \gamma f = 0$: il suffit de s'en assurer pour

$$x = x_1, \ldots, x_h, \bar{y}_{h+1}, \ldots, \bar{y}_r.$$

Or

$$\begin{aligned} & x_i (x_1 + y_1) \ldots (x_h + y_h)\, y_1 y_2 \ldots y_r \\ & \quad = x_i x_1 x_2 \ldots x_h\, y_1 y_2 \ldots y_r = 0 \qquad (i = 1, \ldots, h) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \bar{y}_i (x_1 + y_1) \ldots (x_h + y_h)\, y_1 \ldots y_r \\ & = \sum_{h+1}^{r} \alpha_i^k\, y_k (x_1 + y_1) \ldots (x_h + y_h)\, y_1 \ldots y_r \qquad (i = h+1, \ldots, r). \end{aligned}$$

Observons que $(\sqrt{2})^h \gamma f$ s'écrit localement :

$$x_1 x_2 \ldots x_h f = \pm \bar{y}_1 \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_h y_1 y_2 \ldots y_r.$$

La proposition (2 *bis*) ci-dessous n'est autre qu'un raffinement de la proposition 2. Elle se démontre à partir du lemme 4 suivant :

LEMME 4. — *Si* W *est un sous-espace vectoriel complexe, de dimension h, du sous-espace totalement isotrope maximal* F′, *tel que* $\overline{W} = W$, *on peut trouver une base de* W : $y_1, y_2, \ldots, y_h$, *telle que* $y_1 = \bar{y}_1, \ldots, y_h = \bar{y}_h$.

Considérons $z_1 \in W$. Si $\bar{z}_1 = \lambda z_1$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda = e^{i\theta}$ nécessairement, prenant $y_1 = e^{\frac{i\theta}{2}} z_1$ on a $\bar{y}_1 = y_1$. Si, au contraire, $(z_1, \bar{z}_1)$ est un système libre, on forme

$$y_1 = z_1 + \bar{z}_1,$$
$$y_2 = i\,(z_1 - \bar{z}_1)$$

et

$$y_1 = \bar{y}_1, \qquad y_2 = \bar{y}_2.$$

Supposons donc que nous ayons obtenu le système libre $y_1, y_2, \ldots, y_s$ tel que $y_1 = \bar{y}_1, \ldots, y_s = \bar{y}_s$, $s < h$. Considérons z_{s+1} n'appartenant pas à l'espace des s premiers vecteurs. Si le système $y_1, \ldots, y_s, z_{s+1}, \bar{z}_{s+1}$ est libre, nous posons

$$y_{s+1} = z_{s+1} + \bar{z}_{s+1},$$
$$y_{s+2} = i\,(z_{s+1} - \bar{z}_{s+1}).$$

Si, au contraire, le système est lié, il est loisible d'écrire

$$\bar{z}_{s+1} = \sum_1^s \alpha^i y_i + \alpha^{s+1} z_{s+1}, \qquad \alpha^{s+1} \neq 0,$$

et nous prenons

$$Z_{s+1} = z_{s+1} - \sum_1^s a^i y_i,$$

qui est différent de 0.

En choisissant les a^i de sorte que

$$a^i \alpha^{s+1} - \bar{a}^i + \alpha^i = 0, \qquad \text{alors} \quad \overline{Z}_{s+1} = \frac{y_{s+1}}{\alpha^{s+1}},$$

et nous retrouvons une situation déjà examinée.

PROPOSITION 2 *bis*. — *Si* F′ *est un s. t. i. m. de l'espace complexifié* $E_{\mathbf{C}}$ *avec* $\dim(F' \cap \bar{F}') = r - h$, *on peut construire une base de Witt*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_r$$

telle que $(y_1, \ldots, y_r)$ *engendrent* F′ *avec :*

(*a*) $y_{h+1} = \bar{y}_{h+1}, \; y_{h+2} = \bar{y}_{h+2}, \; \ldots, \; y_r = \bar{y}_r$;

(*b*) $y_1 = \delta\bar{x}_1, \; \ldots, \; y_h = \delta\bar{x}_h \; (\delta = \pm 1)$;

(*c*) $x_{h+1} = \bar{x}_{h+1}, \; \ldots, \; x_r = \bar{x}_r$.

En effet :

(*a*) résulte de la proposition 2 et du lemme 4;

(*b*) a déjà été prouvé;

(*c*) se démontre en s'inspirant de la méthode de construction bien connue d'une base de Witt :

Si on a déterminé les $2h$ premiers vecteurs d'une base de Witt du type indiqué dans la proposition 2, on choisit ensuite $y_{h+1} = \bar{y}_{h+1}$ et x_{h+1}, on a alors

$$\begin{aligned} g(\bar{x}_{h+1}, x_i) = g(\bar{x}_{h+1}, \bar{y}_i) = g(x_{h+1}, y_i) = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, h, \\ g(\bar{x}_{h+1}, y_i) = g(\bar{x}_{h+1}, \bar{x}_i) = g(x_{h+1}, x_i) = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, h, \\ g(\bar{x}_{h+1}, y_{h+1}) = g(x_{h+1}, \bar{y}_{h+1}) = g(x_{h+1}, y_{h+1}) = 1. \end{aligned}$$

On peut remplacer x_{h+1} par $\dfrac{x_{h+1} + \bar{x}_{h+1}}{2}$ et on poursuit.

Remarques. — Dans tout s. t. i. m. F′ de l'espace complexifié $E_{\mathbf{C}}$, muni de la forme quadratique complexifiée, on peut trouver $y_1, y_2, \ldots, y_r$ totalement isotropes et linéairement indépendants et les compléter par $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de manière que ces $2r$ vecteurs constituent une base de Witt « réelle » au sens que nous avons donné plus haut. Il suffit de se référer à la proposition (2 *bis*) (*cf.* aussi le paragraphe suivant).

Si la forme quadratique Q est définie, on aura $\bar{f}f \neq 0$ et $\bar{F}' \cap F' = 0$. Si on transporte cette remarque à la variété V de dimension $2r$ à structure spinorielle complexe, on voit qu'il existera sur V des champs de sous-espaces totalement isotropes maximaux supplémentaires F′ et $\bar{F}'$; cependant on ne pourra pas en déduire nécessairement l'existence d'une structure presque complexe [*cf.* (4, *b*) à ce sujet] (¹).

(¹) Dans le fibré tangent complexifié de groupe 0 (Q′), on n'a pas nécessairement une décomposition en somme de Whitney de deux sous-fibrés conjugués avec des fonctions de transition conjuguées.

CONSÉQUENCES. — (*a*) *Dans la décomposition décrite par la proposition* (2 *bis*), $h = k - r$, *ou* $r - k$, *où* k *est le nombre de carrés positifs de la décomposition de Sylvester de* g. $\bar{f} f \neq 0$ *équivaut à* Q *définie.*

Si $\delta = 1$, on forme la base de $E_{\mathbf{C}}$, d'éléments réels :

$$e_j = \frac{x_j + \bar{x}_j}{\sqrt{2}}, \qquad e'_j = \frac{i\,(x_j - \bar{x}_j)}{\sqrt{2}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, h,$$

$$f_j = \frac{x_j + y_j}{\sqrt{2}}, \qquad f'_j = \frac{x_j - y_j}{\sqrt{2}}, \qquad j = h+1, \ldots, r,$$

$$(e_j)^2 = 1, \qquad (e'_j)^2 = 1, \qquad (f_j)^2 = 1, \qquad (f'_j)^2 = -1.$$

La décomposition en carrés de g dans cette base réelle orthonormée contient $2h + r - h = h + r$ carrés positifs et $r - h$ carrés négatifs. Si k est le nombre de carrés positifs de la décomposition de g : $k = h + r$, $h = k - r$.

Si $\delta = -1$, on procède de la même manière et on obtient $h + r$ carrés négatifs et $r - h$ carrés positifs. On a donc $h = r - k$.

On voit donc que toute décomposition de Witt de l'espace complexifié peut s'écrire à l'aide d'une base de Witt « réelle » au sens donné dans [4, *b*]. On voit ensuite que $\bar{f} f \neq 0$ équivaut à Q définie (prop. 2 et 2 *bis*).

(*b*) *Calcul de* ε' *tel que* $\bar{\gamma}\gamma f = \varepsilon' f$. — Nous utilisons la proposition 1 et le (*a*) précédent.

γf peut être choisi égal à

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^h}(x_1 + y_1)\ldots(x_h + y_h)\, y_1 \ldots y_h = x_1\, x_2 \ldots x_h\, f,$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{(\sqrt{2})^h}(\bar{x}_1 + \delta x_1)\ldots(\bar{x}_h + \delta x_1),$$

$$\bar{\gamma}\gamma f = \frac{1}{2^h}\bar{x}_1\, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_h\, x_1\, x_2 \ldots x_h\, f.$$

Si $\delta = 1$, g a k carrés positifs, $k \geq r$, $h = k - r$,

$$\bar{\gamma}\gamma f = (-1)^{\frac{(k-r)(k-r-1)}{2}} f, \qquad \varepsilon' = (-1)^{\frac{(k-r)(k-r-1)}{2}} f.$$

Si $\delta = -1$, g a k carrés positifs, $k \leq r$, $h = (r - k)$,

$$\bar{\gamma}\gamma f = (-1)^{(r-k)}(-1)^{\frac{(r-k)(r-k-1)}{2}} f = (-1)^{\frac{(k-r)(k-r-1)}{2}} f.$$

Donc :

Si k *est le nombre de carrés positifs de la décomposition de Sylvester de la forme quadratique réelle* g,

$$\varepsilon' = (-1)^{\frac{(k-r)(k-r-1)}{2}}.$$

Par exemple :

si $k = 2$ (forme g neutre), $\varepsilon' = 1$;
si $k = 2r$ (forme définie positive)

$$\varepsilon' = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} = \varepsilon;$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } k = 1,\ r = 2,\ \varepsilon' = -1 \\ \text{si } k = 3,\ r = 2,\ \varepsilon' = 1 \end{array}\right\}\ \text{(Relativité générale).}$$

3.2. La forme hermitienne fondamentale

A (uf, vf) on associe $\beta\left(\overline{uf}\right) vf$ et l'on peut écrire, avec un léger abus, selon une remarque déjà utilisée [3] :

$$\beta\left(\overline{uf}\right) vf = a\,\mathcal{H}(u, v)\,\gamma f,$$

où a et $\mathcal{H}(u, v)$ sont des scalaires, γ étant choisi comme au 1°.

$\mathcal{H}$ est une forme non dégénérée (immédiat) et on peut choisir a de manière qu'elle soit hermitienne.

En effet, si nous formons $\beta\left(\overline{vf}\right) uf$:

$$\beta\left(\overline{vf}\right) uf = a\,\mathcal{H}(v, u)\,\gamma f,$$

d'où

$$\gamma^{-1}\beta\left(\overline{vf}\right) uf = a\,\mathcal{H}(v, u)\, f.$$

Appliquant β et la conjugaison complexe :

$$\begin{aligned} \beta\left(\overline{uf}\right) vf\,\bar{\gamma} &= \varepsilon\,\bar{a}\,\overline{\mathcal{H}(v, u)}\,\bar{f}, \\ \beta\left(\overline{uf}\right) vf &= \varepsilon\,\bar{a}\,\overline{\mathcal{H}(v, u)}\,\bar{\gamma}^{-1} f \\ &= \varepsilon\,\bar{a}\,\overline{\mathcal{H}(v, u)}\,\gamma\rho^{-1} f \\ &= \varepsilon\varepsilon'\,\bar{a}\,\overline{\mathcal{H}(v, u)}\,\gamma f \end{aligned}$$

et $\mathcal{H}$ sera hermitienne si et seulement si $\varepsilon\varepsilon'\,\bar{a} = a$. Si on se borne à $a = e^{i\theta}$, on aura $a^2 = \varepsilon\varepsilon'$.

Nous conviendrons donc de poser :

$$\beta\left(\overline{uf}\right) = a\,\mathcal{H}(uf, vf)\,\gamma f, \qquad \text{avec} \quad a^2 = \varepsilon\varepsilon',$$

si

$$\left\{\begin{array}{l} \beta(f) = \varepsilon f, \\ \bar{\gamma}\gamma f = \varepsilon' f, \end{array}\right.$$

et nous écrirons souvent $\mathcal{H}(u, v)$ pour $\mathcal{H}(uf, vf)$.

La définition de $\mathcal{H}$ ne dépend du choix de γ que par son signe (on peut remplacer γ par $\gamma' = \gamma\tau$, $\tau \in \mathrm{H}'$, $\tau f = \pm f$, elle est indépendante de la factorisation de f, *cf.* préliminaires).

Toutes ces considérations sont encore jusqu'ici purement algébriques. Si nous introduisons maintenant la variété à structure spinorielle nous supposons de plus que le groupe structural du fibré pseudoriemannien se réduit à $p\,(\mathrm{G}_0) \cap \mathfrak{S}$, de sorte qu'il existera par V un champ f de r-vecteurs isotropes.

F′ étant le champ de s. t. i. m. que définit f, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 5. — *On peut définir sur* V, *un champ global de spineurs purs* $x \to (\gamma f)_x$, *associé au champ de s. t. i. m.* $x \to \overline{\mathrm{F}}'_x$. $(\gamma f)_x$ *est à un coefficient constant près, un élément d'un repère canonique en* x.

Supposons $1 \leqq k < n - k$; pour tout point $x \in \mathrm{V}$, il existe un repère de Witt « réel » $(x_i, y_j)_x$ tel qu'il est décrit dans la proposition (2 *bis*), les y_j, $j = 1, \ldots, r$, sous-tendant $\overline{\mathrm{F}}'_x$. Si $f'_x = (y_1 y_2 \ldots y_r)_x \neq f_x$, ce repère de Witt ne peut appartenir au fibré pseudo-riemannien réduit (*cf.* I, 2°), mais si nous avons

$$f'_x = \underset{x}{\chi}\, e^{i\theta_x} f_x,$$

définissant un repère de Witt « réel » par

$$\left(e^{i\theta} x_1, x_2, \ldots, \chi\, x_r, e^{-i\theta} y_1, y_2, \ldots, \frac{y_r}{\chi}\right),$$

celui-ci est bien canonique. Par continuité on obtient dans un ouvert $\mathcal{U}$ connexe contenant x un champ local de repères de Witt canoniques « réels ». On peut alors, selon la proposition 2, introduire au-dessus de cet ouvert le champ local $(\gamma f)_{\mathcal{U}}$ associé à $\overline{\mathrm{F}}'$, et défini au signe près. Il devient ensuite possible de choisir au-dessus de V, globalement, le champ γf [on observera que l'expression locale de $(\gamma f)_{\mathcal{U}}$ ne dépend pas de la factorisation de f, ce qui est essentiel].

Le raisonnement utilisé ne s'applique pas lorsque $k = 0$, mais on sait alors que l'on peut prendre $\gamma f = \bar{f} f$ (*cf.* Remarques III, 1°) et lorsque $k = r$, mais on peut alors choisir $\gamma f = af$: ce sont là les cas particuliers du paragraphe 2.

Remarque. — Il est intéressant de noter que si $f' = \gamma f \gamma^{-1}$ *avec* $\gamma \in \mathrm{Pin}\ \mathrm{Q}$ *et* $f' = \lambda f$, $\lambda \in \mathbf{C}$, *alors* $|\lambda| = 1$, *si* Q *est définie.*

En effet, posant $\lambda = \mathrm{N}(\gamma)\,\mu^2$, un calcul fait dans ([4, *b*], p. 315) assure que $\gamma f = \pm \mu f$.

On en déduit aisément

$$(\mu\,\bar{\mu})^2\,\bar{f}f = (\bar{\mu}\,\mu)\,\gamma\,\bar{f}\gamma\,f = \gamma\,\bar{f}f\,\gamma^{-1}$$

et de $f\gamma^{-1} = \mathrm{N}(\gamma)\,\mu\,f$, obtenue en appliquant β, on tire

$$\mu\,\bar{\mu}\,(\bar{f}f) = \mathrm{N}(\gamma)\,\bar{f}f.$$

Si $\bar{f}f = 0$, c'est-à-dire si Q n'est pas définie, on n'obtient aucune information sur λ, mais si $\overline{f}f = 0$, on a : $\mu\,\bar{\mu} = \mathrm{N}(\gamma)$, donc $\mathrm{N}(\gamma) = 1$ et $|\lambda| = 1$, on peut donc prendre $p(\gamma)$ dans le groupe SO (Q). On n'a donc pas toujours la possibilité de considérer que le repère de Witt réel (x_i, y_j) précédent ou ceux qui s'en déduisent par $\gamma \in \mathrm{SO}(\mathrm{Q})$ sont dans le fibré spinoriel; si c'était le cas, on aurait alors une structure presque complexe sur V.

Si f s'écrit dans un ouvert U_α, sous la forme $x_{1*}\,x_{2*}\ldots x_{r*}$ on transportera aisément à U_α les développements précédents de ce 2°. Il y aura lieu de remarquer que si $\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\mu \neq \emptyset$ et si $f = x'_{1*}\,x'_{2*}\ldots x'_{r*}$ dans l'ouvert U_β, on aura $\forall\, x \in \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$, une définition cohérente et intrinsèque de $\mathcal{H}(u, v)$ et $\mathcal{H}$ sera définie partout sur V.

Il est immédiat que $\mathcal{H}$ est invariante par G_0.

Ainsi il existe sur V *un champ différentiable* $\mathcal{H}$ *de formes hermitiennes invariantes par* G_0.

3.3. La conjugaison de charge et l'adjonction de Dirac généralisées

On considère la suite d'applications bijectives $uf \to \overline{uf} \to \overline{uf}\gamma = \bar{u}\,\gamma\,f$ et on pose :

(4) $$\mathcal{C}(uf) = e^{i\alpha}\,\bar{u}\,\gamma\,f,$$

où $e^{i\alpha}$ est un coefficient constant arbitraire. $\mathcal{C}$ est bien antilinéaire et $\mathcal{C}^2 = \varepsilon'.\mathrm{Id}$.

Il est sans difficulté de vérifier que

(5) $$\mathcal{H}(\mathcal{C}(uf), vf) = \varepsilon\,\mathcal{H}(\mathcal{C}(vf), uf).$$

Enfin, comme au paragraphe 2.4, on considère la suite d'applications :

$$uf \xrightarrow{\mathcal{C}} e^{i\alpha}\,\bar{u}\,\gamma\,f \xrightarrow{\mathcal{A}} \beta\,(uf),$$

donc $\mathcal{A}(\mathcal{C}(uf)) = \beta(uf)$

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}(uf) = \varepsilon' \beta(\mathcal{C}(uf)) & \text{puisque} \quad \mathcal{C}^2 = \varepsilon'.\mathrm{Id}, \\ \mathcal{A}(uf) = \varepsilon' e^{i\alpha} \beta(\bar{u}\gamma f). \end{cases}$$

On voit ensuite comme au paragraphe 2 que $\mathcal{A}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{A}$. Nous n'aborderons pas ici le problème de la recherche de tous les champs d'applications $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ qui posséderaient les propriétés précédentes. On sait qu'une forme quadratique telle que B n'est pas unique [3] et le choix de B laisse subsister *a priori* de nombreuses indéterminées.

3.4. Composition des formes et opérateurs D, B, $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$

Proposition 3. — *La dérivée covariante de* B *est nulle relativement à toute connexion spinorielle associée à la connexion euclidienne.*

En effet, si $\psi = vf$ et $\varphi = wf$ sont des éléments d'un repère comme dans le paragraphe 1, il vient, $u(\mathrm{X})$ ayant le sens donné au paragraphe 1.4 :

$$\mathrm{D}[\mathrm{B}(\psi, \varphi) f] = \mathrm{B}(\psi, \varphi)\, u(\mathrm{X}) f + d\mathrm{B}(\psi, \varphi) f,$$

d'une part,

$$= (\mathrm{DB})(\psi, \varphi) f + d\mathrm{B}(\psi, \varphi) f + \mathrm{B}(\mathrm{D}\psi, \varphi) f$$
$$+ \mathrm{B}(\psi, \mathrm{D}\varphi) f + \mathrm{B}(\psi, \varphi)\, u(\mathrm{X}) f,$$

d'autre part.

Mais les deux avant-derniers termes donnent 0, car $\beta(u(\mathrm{X})) + u(\mathrm{X}) = 0$ puisque $u(\mathrm{X}) \in \mathcal{L}(\mathrm{Pin}\ \mathrm{Q})$. Ainsi on a bien $\mathrm{DB} = 0$, qui pourrait tout aussi bien se noter $\hat{\mathrm{D}}\mathrm{B} = 0$.

Proposition 4. — *La dérivée covariante de* $\mathcal{H}$ *est nulle relativement à toute connexion spinorielle associée à la connexion euclidienne.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3, il suffit de noter de plus que $u(\mathrm{X}) = \overline{u(\mathrm{X})}$ puisque $u(\mathrm{X}) \in \mathcal{L}(\mathrm{G}_0^+)$, que $\mathrm{D}(\gamma f) = u(\mathrm{X})\gamma f$, que $\mathrm{D}(\bar{v} f) = u(\mathrm{X})\bar{v} f$, selon le paragraphe 1.4, les propositions 2 et 2 *bis*, en utilisant un calcul purement local.

Proposition 5. — *Dans les hypothèses de la proposition* 4, *on a*

$$\mathrm{D}\,\mathcal{C} = \mathcal{C}\,\mathrm{D} \quad \textit{et} \quad \mathrm{D}\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\,\mathrm{D}.$$

Il suffit de calculer $\mathrm{D}[\mathcal{C}(vf)]$ en utilisant les remarques précédentes. Tenant alors compte de $\mathcal{A}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{A}$, on a $\mathrm{D}\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\,\mathrm{D}$.

3.5. Une application à la mécanique quantique. Opérateur hermitien associé à une multiplication à gauche

Soit $w \in C(Q')$, w définit par produit à gauche un opérateur linéaire. Il est hermitien si $\mathcal{H}(wuf, vf) = \mathcal{H}(uf, wvf)$ pour tout u et v.

On a donc :

$$\beta\left(\overline{wuf}\right) vf = \beta\left(\overline{uf}\right) wvf,$$

ce qui entraîne $\beta(\overline{w}) = w$ et réciproquement.

Donc l'opérateur associé à w est hermitien si et seulement si $\beta(\overline{w}) = w$.

Si A est cet opérateur $\mathcal{H}(A\varphi, \psi) = \overline{\mathcal{H}(A\psi, \varphi)}$, ψ et φ étant des spineurs. A étant fixé $\mathcal{H}(A, .)$ est une nouvelle forme hermitienne.

Le vecteur courant et les identités de conservation. — En mécanique quantique, si V est l'espace-temps, s'il admet une structure spinorielle le fibré des repères est trivial [4, *b*] et on peut choisir un champ de r-vecteurs isotropes f tel que $\varepsilon' = -1$, si on utilise la signature $+, -, -, -$, $\varepsilon' = 1$ si on utilise la signature opposée. On a $\bar{f} f = 0$.

Prenons donc la 2e signature e_1, e_2, e_3, e_4 sont des champs locaux de vecteurs réels, avec

$$(e_1)^2 = -1, \qquad (e_2)^2 = (e_3)^2 = (e_4)^2 = +1;$$

on écrit

$$x_1 = \frac{e_1 + e_4}{\sqrt{2}}, \qquad x_2 = \frac{ie_2 + e_3}{\sqrt{2}},$$
$$y_1 = \frac{e_1 - e_4}{\sqrt{2}}, \qquad y_2 = \frac{ie_2 - e_3}{\sqrt{2}},$$

$y_2 = -\bar{x}_2$, et on peut choisir

$$\gamma = \frac{-i}{\sqrt{2}}(x_2 + y_2) = e_2,$$

on a alors

$$N(\gamma) = (e_2)^2 = 1,$$
$$\bar{\gamma}\gamma = +1, \qquad \varepsilon' = +1$$

comme l'on sait par ailleurs.

Posons $e^k = g^{kj} e_j$. e^k définit un opérateur hermitien A^k.

Comme $\varepsilon\varepsilon' = -1$, écrivons

$$\beta(\overline{uf})\, vf = i\, \mathcal{H}(uf, vf)\, e_2 f,$$

soit encore, en particulier,

$$\beta(\overline{\psi})\, e^k \psi = i\, \mathcal{H}(\psi, A^k \psi)\, e_2 f.$$

Les quatre nombres réels $\mathcal{H}(\psi, A^k \psi)$ notés $\langle \psi, A^k \psi \rangle$, où ψ est un champ local de spineurs, définissent un champ local de vecteurs X sur V dont nous allons calculer la divergence.

Auparavant, observons que (5) entraîne que

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}(uf), \mathcal{C}(vf)) = \varepsilon\varepsilon' \overline{\mathcal{H}(uf, vf)},$$

donc

$$\mathcal{H}(\psi, A^k \psi) = -\mathcal{H}(\mathcal{C}\psi, A^k \mathcal{C}\psi),$$

la conjugaison de charge utilisée ici transforme donc le champ local de vecteurs en son opposé. Ce résultat est lié au signe de $\varepsilon\varepsilon'$,

$$D_k X^k = \nabla_k X^k,$$

$$D_k \langle \psi, A^k \psi \rangle = \langle D_k \psi, A^k \psi \rangle + \langle \psi, D_k (A^k \psi) \rangle$$

puisque $D_k \mathcal{H} = \hat{D}_k \mathcal{H} = 0$.

Mais il est immédiat que $D_k(A^k) = 0$, donc comme A^k est hermitien :

$$D_k X^k = \langle A_k (D_k \psi), \psi \rangle + \langle \psi, A^k (D_k \psi) \rangle.$$

Si l'on postule selon Dirac que $i A^k D_k = m$, on a

$$D_k X^k = \nabla_k X^k = 0,$$

X s'interprète comme le vecteur courant et $\operatorname{Div} X = 0$ est une équation classique de conservation. Si ce courant est créé par des particules chargées, $\mathcal{C}$ correspond au passage à des particules dont les charges sont de signes opposés. On comparera ces calculs à ceux de Raševski ([8], § 25). Nos calculs sont plus généraux puisqu'ils sont valables sur une variété pseudo-riemannienne et en dimension paire quelconque.

Remarque. — Si on tient à utiliser la signature $(+, -, -, -)$ et obtenir néanmoins $\mathcal{C}^2 = \mathrm{Id}$, on remarque que $Q(iv) = -Q(v)$ et que l'application linéaire $v \to iv$ de $E_{\mathbf{C}}$ dans $C(Q')$, telle que $(iv)^2 = -v^2$ induit un isomorphisme θ de $C(-Q')$ dans $C(Q')$, alors on forme la suite d'applications :

$$\mathcal{C}: \quad uf \underset{\theta}{\to} i^{h+2}(uf) \underset{\mathcal{C}}{\to} (-i)^{h+2}\, \bar{u}\, e_2 f \underset{\theta^{-1}}{\to} (-i)^{2h+1}\, \bar{u}\, e_2 f,$$

si u est écrit avec h facteurs du « 1^er^ degré ». Cela donne la conjugaison cherchée avec $\mathcal{C}^2 = \mathrm{Id}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, Hermann, Paris, 1938.

[2] P. Cavailles, *C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964, p. 1166.

[3] C. Chevalley, *The algebraic theory of spinors*, Columbia University Press, New-York, 1954.

[4] A. Crumeyrolle, *a. Structures spinorielles* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, Section A, vol. XI, n° 1, 1969, p. 19-55); *b. Groupes de spinorialité* (*Ibid.*, Section A, vol. XIV, n° 4, 1971, p. 309-323).

[5] S. Kobayashi et K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Interscience, New-York, 1963, vol. 1.

[6] Y. Kosmann, *Thèse*, Paris, 1969.

[7] A. Lichnerowicz, *a. Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Rome, 1955; *b. Champs spinoriels et propagateurs en Relativité générale* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 92, 1964, p. 11-100); *c.* Cours du Collège de France, 1963-1964 (non publié).

[8] P. K. Raševski, *La théorie des spineurs* [*Uspehi Mat. Nauk*, (N. S.), t. 10, n° 2, (64), 1955, p. 3-110] (en russe). Traduction en anglais : *American Math. Translations*, 1957, série 2-6, p. 1-110.

(*Manuscrit reçu le* 19 *janvier* 1972.)