ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

O. COSTA DE BEAUREGARD

Intéressantes questions soulevées par H. Arzeliès dans « Fluides relativistes »

Annales de l'I. H. P., section A, tome 16, nº 2 (1972), p. 103-117
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__16_2_103_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVI, n° 2, 1972, p. 103-107.

Section A :
Physique théorique.

Intéressantes questions soulevées par H. Arzeliès dans « Fluides relativistes »

par

O. COSTA DE BEAUREGARD

Laboratoire de Physique théorique associé au C. N. R. S.
Institut Henri Poincaré, Paris

RÉSUMÉ. — Dynamique relativiste des fluides et dynamique du point à masse propre variable : « Paléoforce » $m\,V'^i$ et « néoforce » $m'\,V^i$; densités correspondantes. Application de ces vues à la dynamique relativiste des fluides non visqueux : nouvelle forme du raisonnement inductif conduisant aux équations admises par les auteurs; examen de l'induction d'Arzeliès et ré-examen de notre précédente induction. Brèves remarques sur l'équilibre du levier coudé.

1. INTRODUCTION

Dans son nouveau livre *Fluides Relativistes*; *Principes Généraux*; *Équations fondamentales* [1], H. Arzeliès propose principalement deux choses :

— Lier intimement la dynamique relativiste des fluides à la dynamique du point à masse propre variable;

— Modifier par un terme additif en c^{-2} l'équation fondamentale de la dynamique relativiste des fluides non visqueux acceptée par la quasi-totalité des auteurs.

Le but principal du présent article est d'examiner de manière critique ces deux thèmes (et plus brièvement les vues d'Arzeliès sur le vieux problème de l'équilibre du levier coudé).

Disons tout de suite que sur le principe du premier thème nous sommes pleinement d'accord avec Arzeliès — tellement d'accord que nous avons, avant [2] et indépendamment [3] de lui, soutenu la même idée. Cependant, le nouveau texte d'Arzeliès nous a amené à réexaminer le problème et à préciser [en fait, à restreindre : *voir* équation (6) ci-dessous] notre précédent formalisme. Écrivant avec Arzeliès $(m\,V^i)' = m\,V'^i + m'\,V^i$

pour la dérivée par rapport au temps propre τ de l'impulsion-énergie $m\,V^i$ ($V_i V^i = -c^2$) du point à masse propre m variable, nous proposons, pour la clarté du discours, d'appeler *paléoforce* la force responsable de l'accélération V'^i et *néoforce* celle responsable de la variation de la masse propre m' (si l'on préfère, la *paléoforce* et la *néoforce* seront respectivement responsables de la variation de l'impulsion-énergie en direction et en grandeur). Définissant aussi les densités correspondantes f^i_0 et f^i_1 de paléoforce et de néoforce en dynamique des milieux continus, nous montrons que l'équation fondamentale de la dynamique de ces milieux conserve la forme bien connue $\partial_j(\rho\,V^i V^j) = f^i_0 + f^i_1$ (ce qui, incidemment, rend vaines les craintes exprimées par Arzeliès [4] concernant les équations admises pour le cas gravitationnel intérieur). En bref, il nous semble que, faute d'introduire explicitement la « néoforce » et sa densité, Arzeliès n'a pas exploité pleinement les virtualités d'une idée en elle-même parfaitement juste.

Concernant le second thème, équations fondamentales de la dynamique des fluides non visqueux où le concept de pression scalaire ϖ joue un rôle essentiel, nous avons examiné attentivement le raisonnement inductif d'Arzeliès [5] conduisant à un système d'équations différant (par un terme en c^{-2}) de celui des autres auteurs, puis réexaminé notre propre [(1], [2]) raisonnement inductif conduisant aux équations des auteurs. Arzeliès pense que son raisonnement serre de beaucoup plus près la formule fondamentale de la dynamique prérelativiste.

Nous pensons que notre raisonnement représente l'extension covariante la plus proche possible du raisonnement classique (tout en ajoutant que la version très explicite que nous en présentons ici n'aurait probablement jamais vu le jour sans les critiques d'Arzeliès).

Nous pensons en outre que le système des deux équations tensorielles d'Arzeliès n'a pas la même élégance que celui des autres auteurs. Nous n'en dirons pas plus : une induction n'est pas une déduction, et il serait tout à fait vain à l'un des opposants de vouloir *contraindre* l'assentiment de l'autre. Au lecteur de juger sur pièces.

Le troisième thème d'Arzeliès ici abordé, ses idées concernant l'équilibre du levier coudé, n'a pas la même portée générale que les précédents; nous pensons que ce problème relève plutôt de la « physique amusante ». Il a cependant alimenté de récentes controverses [6], et c'est à ce titre que nous exprimons ici notre façon de voir.

Au total, si nous en jugeons par l'effet qu'il a produit sur nous, le nouveau livre d'Arzeliès oblige à réfléchir, même si après un examen impartial le lecteur n'en adopte pas les conclusions lorsqu'elles s'écartent du consensus général. Autrement dit, nous sommes prêts à parier que ces nouvelles propositions d'Arzeliès n'auront pas le même succès international que celle d'Ott [7] et Arzeliès [8] relativement à la variance de la température.

2. DYNAMIQUE DU POINT A MASSE PROPRE VARIABLE ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES

D'accord avec nous, ([2], [3]), H. Arzeliès [1] considère que les équations générales de la dynamique des fluides doivent être telles que les équations correspondantes du point matériel soient à masse propre variable. Quant à la direction dans laquelle il est préférable d'exposer la connexion, Arzeliès préfère partir de la dynamique du point et nous de la dynamique des fluides. Pour faciliter les comparaisons, nous partons ici avec H. Arzeliès de la dynamique du point matériel.

Notant m la masse propre d'un point matériel sans spin, V^i sa quadri-vitesse satisfaisant à la relation

$$V_i \, V^i = - c^2 \tag{1}$$

dans la métrique $x^i, x^2, x^3, x^4 = ict$, et les dérivées étant prises par rapport au temps propre τ, l'impulsion-énergie p^i $(p^4 = icm = ic^{-1}\,W)$ est telle que

$$p^i \equiv m \, V^i; \tag{2}$$

$$p'^i \equiv m \, V'^i + m' \, V^i. \tag{3}$$

Nous avons proposé ([2], [3]) de représenter la force par un tenseur du second rang F^{ij} et d'écrire l'équation fondamentale de la dynamique du point sous la forme

$$p'^i \equiv (m \, V^i)' = c^{-1} \, F^{ij} \, V_j, \tag{4}$$

le tenseur F^{ij} étant antisymétrique si m est constant [9] et asymétrique dans le cas général :

$$F^{ij} \equiv F^{\underset{\vee}{ij}} + F^{\underset{-}{ij}}. \tag{5}$$

Les implications du texte d'Arzeliès (qui n'emploie pas le tenseur du second rang F^{ij}) nous incitent ici à restreindre la généralité de l'identité (5) en posant

$$F = F^{\underset{-}{ij}} \, \delta^{ij}, \tag{6}$$

où δ^{ij} désigne le tenseur de Kronecker.

Des précédentes formules, on tire

$$m \, V'^i = c^{-1} \, F^{\underset{\vee}{ij}} \, V_j, \tag{7}$$

$$m' = c^{-1} \, F. \tag{8}$$

Les formules (1) à (8) résument la dynamique relativiste du point à masse propre variable conforme à nos précédentes idées ([2], [3]) et, nous semble-t-il, à celles d'Arzeliès [1]. Nous proposons en vue de la suite d'appeler *paléoforce* la force (somme toute classique) $F^{\overset{ij}{\vee}}$ qui ne fait pas varier la masse propre du point matériel, et *néoforce* la force $F\,\delta^{ij}$ qui la fait varier.

Montrons à présent la relation étroite entre ces équations et les équations générales de la dynamique relativiste des fluides sans spin.

D'accord avec Mc Connell [10] et Synge (11) nous avons défini ([2], [3]) le volume propre matériel fluide par la formule

$$\delta\, u \equiv c^{-1}\, V^i\, \delta\, u_i, \tag{9}$$

où $ic\,\delta u_i \equiv \dfrac{1}{6}\,\varepsilon_{ijkl}\,[dx^j\,dx^k\,dx^l]$ désigne le 4-vecteur élément de volume tridimensionnel. A la contribution antisymétrique $\delta\,F^{\overset{ij}{\vee}}$ à la force appliquée à δu nous associons ([2], [3]) la 4-densité de force f^i_0 telle que

$$V_i\, f^i_0 = 0 \tag{10}$$

et que

$$\delta F^{\overset{ij}{\vee}} \equiv f^i_0\,\delta u^j - f^j_0\,\delta u^i, \tag{11}$$

d'où il suit

$$c^{-1}\,V_j . \delta F^{\overset{ij}{\vee}} = f^i_0\,\delta u. \tag{12}$$

A la contribution scalaire δF à la force appliquée à δu nous associons la densité de force scalaire f telle que

$$\delta F \equiv f\,\delta u. \tag{13}$$

Enfin, à la masse propre δm de δu nous associons ([2], [3]) la densité de masse propre ρ telle que

$$\delta m = \rho\,\delta u. \tag{14}$$

De (7), (12) et (14) on tire

$$\rho\, V'^i = f^i_0, \tag{15}$$

équation proposée par nous ([2]), [3]) et Arzeliès [1].

De (8), (13) et (15) on tire

$$c^{-1}\, f\,\delta u = (\rho\,\delta u)' = \rho'\,\delta u + \rho\,\delta u'$$

où, puisque $\rho' \equiv V^i \partial_i \rho$ et que ([1], [2], [3])

$$\delta u' = \partial_i V^i \delta u, \tag{16}$$

$$\partial_i (\rho V^i) = c^{-1} f. \tag{17}$$

L'hypothèse $f \neq 0$ entraîne donc $\partial_i (\rho V^i) \neq 0$.

Ceci nous ramène à une controverse ancienne entre Durand [12] et nous-même [13]; l'hypothèse $f \neq 0$ ou $F \neq 0$ est liée à la non conservation de la masse propre.

Introduisons enfin le tenseur symétrique d'impulsion-énergie $\rho V^i V^j$ bien connu; compte tenu de (15) et (17),

$$\partial_j (\rho V^i V^j) = f^i_0 + c^{-1} f V^i. \tag{18}$$

Il est naturel de poser

$$f^i_1 \equiv c^{-1} f V^i, \tag{19}$$

$$f^i = f^i_0 + f^i_1, \tag{20}$$

de telle sorte que

$$V_i f^i = - c f, \tag{21}$$

$$\partial_j (\rho V^i V^j) = f^i, \tag{22}$$

et, par conséquent,

$$\partial_i (\rho V^i) = - c^{-2} V_i f^i, \tag{23}$$

formule compatible avec (17) et antérieurement proposée par nous ([2], [3]). En accord avec une précédente convention, nous appellerons f^i_0 satisfaisant à (10) la *paléo-densité de force* et f^i_1, qui contribue seule à la divergence $\partial_j (\rho V^j)$, la *néo-densité de force*. Il est clair que l'existence de la formule (22) rend vaines les craintes d'Arzeliès [4] relatives au cas gravitationnel intérieur.

Voici une intéressante remarque concernant la formule (23). On sait ([2], [3]) que si l'on note $\vec{f_0}$ le vecteur de composantes f^1_0, f^2_0, f^3_0, l'on a $f^4_0 = ic^{-1} \vec{f}.\vec{v}$ et que si, par conséquent f^i_0 existait seule, on aurait la formule

$$\operatorname{div} (\tilde{\rho} \vec{v}) + \partial_t \tilde{\rho} = c^{-2} \vec{f_0}.\vec{v}, \tag{24}$$

avec (densité de masse classique)

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{1 - \beta^2} \tag{25}$$

et (vitesse classique)

$$v^\alpha = V^\alpha (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{26}$$

En dynamique classique, le second membre de (24) était identiquement nul (conservation de la masse). En dynamique relativiste il est non nul, mais très petit (d'ordre c^{-2}), et son existence traduit la contribution à la masse du travail de la densité de paléoforce. Toutefois, cette contribution est *relative* au référentiel. La remarque que nous avions en vue est que (23) est l'analogue invariant relativiste de (24).

En guise de *post scriptum*, et pour montrer la compatibilité de tout ce qui précède, repassons des formules du fluide à celles du point matériel, en posant

$$dx^i \equiv V^i \, d\tau \tag{27}$$

et

$$\delta\omega \equiv \delta u_i . dx^i \equiv c \, \delta u \, d\tau. \tag{28}$$

De (11) et (10) nous tirons

$$\delta \overset{ij}{F^{\vee}} \, dx_j = f^i_0 \, \delta\omega, \tag{29}$$

et de (13) et (9),

$$\delta F \, dx^i = c^{-1} \, FV^i \, \delta\omega \equiv f^i_1 \, \delta\omega. \tag{30}$$

Notant $d\,\delta p^i_0$ et $d\,\delta p^i_1$ ces deux contributions à la variation d'impulsion-énergie $d\,\delta p^i$ de la goutte fluide suivie dans son mouvement, nous récrivons

$$d\,\delta p^i_0 = f^i_0 \, \delta\omega, \tag{31}$$

$$d\,\delta p^i_1 = f^i_1 \, \delta\omega, \tag{32}$$

ou, sous forme intégrale,

$$\Delta p^i_0 = \iiiint f^i_0 \, \delta\omega, \tag{33}$$

$$\Delta p^i_1 = \iiiint f^i_1 \, \delta\omega. \tag{34}$$

Or,

$$\Delta p^i = \iiiint f^i \, \delta\omega, \tag{35}$$

où $\Delta p^i \equiv \Delta\, p^i_0 + \Delta p^i_1$ et $f^i \equiv f^i_0 + f^i_1$ est bien l'équation fondamentale de la dynamique des fluides sous forme intégrale ([2], [3]).

Nous pensons que le précédent schéma d'argumentation améliore ceux que nous avions antérieurement proposés, et savons gré à H. Arzeliès de nous l'avoir inspiré par ses réflexions, même si nous ne partageons pas toutes ses façons de voir.

3. SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES FLUIDES PARFAITS

Pour clarifier la discussion nous supposerons que le fluide parfait n'est soumis à aucune force de volume, mais uniquement aux forces d'origine superficielle découlant de l'existence d'une pression isotrope $\overline{\omega}$. Il est bien connu, d'après la théorie classique, que $\vec{f} \equiv -\operatorname{grad} \overline{\omega}$ joue le rôle d'une densité de force volumique, d'où il suit que le 4-vecteur $-\partial^i \overline{\omega}$ joue certainement, lui aussi, le rôle d'une 4-densité de force dont l'interprétation exacte, spécialement en ce qui concerne la composante temporelle, reste à trouver.

L'utilité d'une 4-densité de force f_0^i satisfaisant à (10) étant apparue dans la section précédente, il est naturel de poser par définition, et conformément à une excellente suggestion d'Arzeliès [14],

$$f_0^i \equiv -\partial^i \overline{\omega} - c^{-2} \overline{\omega}' V^i, \tag{36}$$

d'où (10) suit.

Reste alors à définir conjointement f et f^i conformément à (19) et (20). Le plus simple est certainement de poser

$$f^i = -\partial^i \overline{\omega}, \tag{37}$$

$$f = c^{-1} \overline{\omega}', \tag{38}$$

d'où, d'après (21),

$$V_i f^i = -\overline{\omega}'. \tag{39}$$

Sous ces conditions, les équations générales (21) et (22) ou (17) de la dynamique des fluides reçoivent la spécification suivante :

$$\partial_j (\rho V^i V^j) = -\partial^i \overline{\omega}, \tag{40}$$

$$\partial_i (\rho V^i) = c^{-2} \overline{\omega}'. \tag{41}$$

Posant

$$\rho \equiv \rho_0 + c^{-2} \overline{\omega}, \tag{42}$$

elles se récrivent

$$\partial_j \{ (\rho_0 + c^{-2} \overline{\omega}) V^i V^j \} = -\partial^i \overline{\omega}, \tag{43}$$

$$\partial_i (\rho_0 V^i) = -c^{-2} \overline{\omega} \partial_i V^i, \tag{44}$$

équations admises par tous les auteurs. Sous l'incitation des remarques d'Arzeliès, nous venons de les retrouver par un raisonnement inductif en un sens plus synthétique que celui que nous avions antérieurement utilisé ([2], [3]).

Toujours sous l'incitation des remarques d'Arzeliès, il faut se demander comment s'interprètent les deux densités massiques ρ et ρ_0. Nous avons montré [(2), [3]) que l'intégration 4-dimensionnelle de (43) donne au second membre la généralisation covariante du travail classique de la pression $dU \equiv \int \varpi\, du$; dans ces conditions, ρ_0 représente (en l'absence de toute autre source d'énergie) la densité d'énergie interne. C'est bien ce que pensent, explicitement ou implicitement, les auteurs, nous compris.

Quant à la densité ρ, l'intégrale 4-dimensionnelle de (41) porte au second membre sur

$$c^{-2}\, V^i\, \partial_i\, \varpi\, dx^j\, \delta u_j = c^{-2}\, dx^i\, \partial_i\, \varpi\, V^j\, \delta u_j \;= c^{-1}\, d\varpi\, \delta u;$$

il viendra donc par intégration la généralisation covariante du $\int u\, d\varpi$ classique, ce qui montre que ρ est la densité de la grandeur $U + \varpi\, u$ souvent considérée en thermodynamique (où elle est notée $U + pv$).

Arzeliès [5] conteste l'ensemble des équations admises (40) et (41), ou (43) et (44), pour une raison qui, exprimée dans la présente perspective, équivaut à dire que rien, dans la dynamique des fluides classiques, ne corrobore l'idée que la densité de force volumique $-\,\partial^i\, \varpi$ (ou $-\,\partial^i\, \varpi + f^i$ si l'on rétablit une densité de force *proprement* volumique) aurait à vaincre une inertie du fluide de densité $\rho_0 + c^{-2}\, \varpi$ plutôt que ρ_0 seulement. Si l'on préfère, son argument est qu'on ne voit aucune raison pour que la densité de force volumique ait à vaincre la densité de la fonction thermodynamique $U + \varpi\, u$ plutôt que celle de la seule énergie interne U. Avant de discuter ce point, exposons la modification proposée par Arzeliès.

Tout d'abord demandons-nous si, avec les équations admises (43) et (44), il est possible de trouver une équation d'état du fluide telle que la divergence $\partial_j\, (\varpi\, V^i\, V^j)$ ne contribue pas à la paléodensité de force; si la réponse était affirmative, il y aurait là, selon les vues d'Arzeliès, une définition possible du fluide incompressible. On a

$$\partial_j\, (\varpi\, V^i\, V^j) \equiv \varpi\, V'^i + V^i\, \partial_j\, (\varpi\, V^j),$$

le premier terme étant une contribution à la paléodensité de force et le second à la néodensité de force. Le premier terme ne peut être nul que si $\varpi = 0$ ou $V'^i = 0$, deux restrictions trop sévères pour être intéressantes. La conclusion est donc qu'avec les équations classiques, il est impossible de trouver une équation d'état du fluide satisfaisant les desiderata d'Arzeliès.

La proposition qu'il fait alors [15] consiste à retenir l'équation admise (44), mais à corriger (43) par une paléoforce additive en c^{-2} suivant

$$\partial_j\, \{ (\rho_0 + c^{-2}\, \varpi)\, V^i\, V^j \} = -\, \partial^i\, \varpi + c^{-2}\, \varpi\, V'^i, \tag{45}$$

ou équivalement, compte tenu de (44), à corriger (40) par une néoforce additive en c^{-2} suivant

$$\partial_j (\rho_0 V^i V^j) = - \partial^i \overline{\omega} - c^{-2} V^i \partial_j (\rho V^j). \tag{46}$$

Dans le repère entraîné, cette dernière équation coïncide exactement (pour $i = 1, 2, 3$) avec celle admise par les classiques, et c'est là l'argument sur lequel Arzeliès appuie sa proposition.

Il est clair que le système d'Arzeliès, (45) ou (46), et (41) ou (44), n'a pas l'élégance du système admis (dont il ne diffère que par des termes en c^{-2}). La question importante reste cependant celle de savoir si les desiderata d'Arzeliès sont ou non fondés. Avant d'en juger, réexaminons l'induction à base physique que nous avions initialement proposée ([2], [3]) pour établir les équations admises.

En dynamique classique des fluides non visqueux, la force appliquée par la pression $\overline{\omega}$ à chaque élément d'aire $\delta\vec{S}$ d'une gouttelette fluide est $\delta\vec{F} = - \overline{\omega}\, \delta\vec{s}$. Nous avons proposé ([2], [3]) en dynamique relativiste des fluides la généralisation covariante $\delta \overset{ij}{F^{\vee}} = - \overline{\omega}\, \delta \overset{ij}{s^{\vee}}$, où $ic\, \delta \overset{ij}{s^{\vee}} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijkl} [\delta x_k\, \delta x_l]$ est le dual de l'élément d'aire à six composantes; cette définition est spontanément compatible avec celle [9] de la force par un tenseur antisymétrique du second rang. Arzeliès la conteste [16]. Cependant, nous allons voir dans un instant qu'elle généralise très convenablement en relativité les conceptions classiques.

La généralisation obvie de l'impulsion élémentaire $d\,\delta\vec{p} = \delta\vec{F}\, dt = - \overline{\omega}\, \delta\vec{s}\, dt$ communiquée pendant le temps dt à l'élément d'aire $\delta\vec{s}$ de la goutte fluide est

$$d\, \delta p^i \equiv \delta F^{ij}\, dx_j = - \overline{\omega}\, \delta s^{ij}\, dx_j.$$

Or, le 4-vecteur $\delta s^{ij} dx_j$, d'ordre 3 en les dx, n'est autre que l'élément de volume de l'hyperparoi $\mathfrak{L}$ d'espace-temps engendrée par le mouvement du contour de la goutte fluide; c'est un 4-vecteur orthogonal à l'élément de trajectoire dx_j, ainsi d'ailleurs qu'aux deux vecteurs $\delta_1 x_j$ et $\delta_2 x_j$ définissant l'aire à deux dimensions. Le précédent $d\,\delta p^i = - \overline{\omega}\, \delta u^i$, où $ic\, \delta u^i$ désigne le 4-vecteur élément de volume d'hyperparoi, est donc exactement le concept relativiste bien défini de manière intrinsèque dont nous avions besoin.

Soit alors un élément de tube fluide de section petite dans ses trois dimensions et limité par deux cloisons tridimensionnelles du genre espaces $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, voisines et ne se coupant pas, $\mathcal{C}_2$ succédant à $\mathcal{C}_1$. Formons l'intégrale

$$- \oint\!\!\oint\!\!\oint_{\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1 + \mathfrak{L}} \overline{\omega}\, \delta u^i$$

dont la portion $\mathfrak{L}$ est l'intégrale du $d\,\delta p^i$ précédent, soit $\Delta_1 p^i$.

On a évidemment

$$(47) \qquad \Delta_1 p^i = -\iiint_{\mathfrak{X}} \overline{\omega}\, \delta u^i = \iiint_{\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1} \overline{\omega}\, \delta u^i - \iiiint \partial^i \overline{\omega}\, \delta\omega.$$

Ainsi, l'impulsion-énergie Δp_1^i communiquée par la pression $\overline{\omega}$ à la gouttelette fluide de volume propre δu pendant le temps propre élémentaire $d\tau$ et qui, rappelons-le, est orthogonale au filet moyen dx^i, se trouve décomposée en deux termes dont ni l'un ni l'autre n'est orthogonal à dx^i. Nous reviendrons sur ce point.

La première remarque est que le dernier terme de (47) permet d'interpréter $-\partial^i \overline{\omega}$ comme une 4-densité de force volumique appliquée au fluide, conclusion identique pour $i = 1, 2, 3$, à celle des classiques. Notre argumentation continue donc à se montrer tout à fait satisfaisante, remarque qui n'est pas inutile en vue de la suite et des objections soulevées par Arzeliès.

Il nous faut maintenant parler de l'interprétation du $-\partial^4 \overline{\omega} \equiv ic^{-1} \partial^t \overline{\omega}$ que la théorie classique laissait dans l'ombre. Dans le repère propre du 4-volume $\delta\omega \equiv \delta u_i\, dx^i$, $\Delta p^4 = 0$: il est donc clair que le $-\partial^4 \overline{\omega}\, \delta\omega$ *est exactement compensé par les deux termes d'hypercloison* $\overline{\omega}_2\, \delta u_2^4 - \overline{\omega}_1\, \delta u_1^4$, *et c'est très précisément là l'origine du rôle inertial de* $c^{-2}\overline{\omega}$ *trouvé par tous les auteurs et contesté par Arzeliès.* En d'autres termes, le simple déroulement du formalisme mathématique à partir de prémisses qui ne nous semblent guère contestables *prouve* que le $-\partial^t \overline{\omega}\, \delta u\, dt \equiv -d\overline{\omega}\, \delta u$ (c'est-à-dire, en notations classiques, que le $-u\, d\overline{\omega}$ généralement noté en thermodynamique $-v\, dp$) *doit* être compensé par une variation de la masse attribuée à la gouttelette valant $\overline{\omega}_2\, \delta u_2^4 - \overline{\omega}_1\, \delta u_1^4$.

A ce point — et comme nous l'avions noté dans nos précédentes expositions de ce raisonnement — nous rencontrons une difficulté : *le* $\overline{\omega}_2\, \delta u_2^i - \overline{\omega}_1\, \delta u_1^i$ *n'est pas indépendant de l'orientation des hypercloisons* δu_1^i et δu_2^i. Comme on vient de l'expliquer dans le repère localement entraîné, ceci ne joue nullement pour le Δp^4, mais uniquement pour le $\Delta\vec{p}$. Il n'en reste pas moins que cet incident suffit à bloquer la dérivation des équations densitaires du fluide relativiste.

Mais souvenons-nous que *nous sommes en train de conduire un raisonnement inductif serrant d'aussi près que possible le raisonnement classique.* Dans celui-ci l'on raisonne à temps constant et avec des vitesses faibles. *Nous sommes donc parfaitement habilités à postuler que les deux états successifs* δu_1^i *et* δu_2^i *de notre goutte fluide seront pris à temps constant dans le repère entraîné,* c'est-à-dire orthogonaux au filet fluide moyen. Dans ces conditions, δu^i est colinéaire à V^i et, compte tenu de (1) et (9),

$$(48) \qquad \overline{\omega}\, \delta u^i = -c^{-1}\, \overline{\omega}\, V^i\, \delta u \equiv -c^{-2}\, \overline{\omega}\, V^i\, V^j\, \delta u_j.$$

Nous pouvons donc alors récrire (47) suivant

$$\Delta p^i = -\iint_{\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1} c^{-2}\,\overline{\omega}\,V^i V^j\,\delta u_j - \iiint \partial^i \overline{\omega}\,\delta\omega \tag{49}$$

ou encore, puisque $\iint_{\mathfrak{T}} c^{-2}\,\overline{\omega}\,V^i V^j\,\delta u_j \equiv 0$,

$$\Delta p^i = -\iiint [c^{-2}\,\partial_j\,(\overline{\omega}\,V^i V^j) + \overline{\omega}\,\delta^{ij}]\,\delta\omega. \tag{50}$$

Remplaçant enfin Δp^i par son expression bien connue

$$\iiint \partial_j\,(\rho_0\,V^i V^j)\,\delta\omega,$$

nous obtenons l'équation (43) des auteurs relativistes.

En bref, nous venons de montrer que les deux expressions (47) et (50), non identiques en général, sont égales dans le cas d'un filet fluide coupé par deux sections orthogonales, et cela suffit (comme nous l'avons dit) à légitimer notre raisonnement inductif. D'après ce raisonnement, qui *postule essentiellement* la formule $\delta \mathrm{F}^{\overset{ij}{\vee}} = -\overline{\omega}\,\delta s^{\overset{ij}{\vee}}$ comme généralisation covariante de la formule classique $\delta \vec{\mathrm{F}} = -\overline{\omega}\,\delta \vec{s}$ de la force superficielle élémentaire, la densité de force pondéromotrice engendrée par la pression $\overline{\omega}$, et à laquelle s'oppose l'inertie du fluide de densité $-\rho_0\,V^i V^j$, ne se réduit pas au terme de forme classique $-\partial^i \overline{\omega}$, mais contient aussi le terme

$$- c^2\,\partial_j\,(\overline{\omega}\,V^i V^j) \equiv - c^{-2}\,V^i\,\partial_j\,(\overline{\omega}\,V^j) - c^{-2}\,\overline{\omega}\,V'^i$$

d'origine manifestement relativiste.

Arzeliès laisse entendre [17] que le système (40) et (41), ou (43) et (44), admis par les auteurs et justifiable par le précédent raisonnement, est incompatible avec ses définitions [8] 4-vectorielles de la chaleur et de la température. Une excellente preuve que cette crainte est vaine est fournie par l'élégante et ingénieuse thermodynamique des fluides de Schmid [18].

Je dirai, pour clore cette section, que le problème général de l'extension relativiste d'une théorie classique est un problème inductif, et soumis comme tel à un certain arbitraire où se manifeste le goût personnel de l'auteur. Il est donc *rigoureusement impossible* de donner raison à un auteur et tort aux autres, ou *vice versa*, par un argument contraignant — excepté bien sûr si une expérimentation suffisamment précise est possible, qui devrait ici porter sur des termes en c^{-2}. Tout ce que peut faire le lecteur est de suivre les raisonnements inductifs faits par les auteurs et de décider lesquels il préfère. Arzeliès a donné le sien, avec les attendus correspondants. Nous donnons ici le nôtre, avec beaucoup plus de détails que dans nos expositions précédentes, et ce à la suite, précisément, des critiques d'Arzeliès. L'esprit de notre induction est clair : *covariance relativiste explicite dans une extension fidèle du raisonnement classique, et abandon seulement par nécessité de l'arbitraire des hypercloisons — mais abandon qui ne viole en rien la règle de la coïncidence limite avec les classiques.* Au lecteur de juger sur pièces.

4. MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN AXE

Depuis Lewis et Tolman [19], von Laue [20] et Epstein [21], le problème du levier coudé a fait couler beaucoup d'encre, Arzeliès (22) y ayant contribué par une remarque pertinente que nous ferons nôtre. Pour l'énoncé du problème et les solutions publiées nous renvoyons à la littérature. Disons pour être bref que tout tourne autour de la définition relativiste du moment d'une force par rapport à un axe, définition qui (*le principe de relativité* appliqué au concept d'équilibre le montre) devrait être *invariante relativiste.*

Or, en statique classique, le moment M d'une force $\vec{F}$ relativement à un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ est *un scalaire,* le *co-moment*

$$(51) \qquad \mathfrak{M} = (\vec{r} \wedge \vec{F})\,\vec{u} = (\vec{r}\,.\vec{F}.\vec{u}),$$

où $\vec{r}$ désigne la distance orientée entre un point de l'axe et le point d'application de la force $\vec{F}$.

En cherchant la généralisation relativiste de ce concept nous allons une fois de plus confirmer les avantages de la force, tenseur antisymétrique de second rang $\overset{ij}{F^{\vee}}$, que nous avions antérieurement définie [9].

Soit donc, dans le repère propre d'un solide en équilibre (K_0 chez Arzeliès), r^i le 4-vecteur du genre espace joignant le point courant d'un axe du genre espace de vecteur directeur u^i au point d'application dans le solide d'une force $\overset{ij}{F^{\vee}}$. Bien entendu, dans K_0, $r_0^4 = 0$, $u_0^4 = 0$ et $\overset{\alpha\beta}{F_0^{\vee}} = 0$ (α, β, $\gamma = 1, 2, 3$).

Le moment de la force $\overset{ij}{F^{\vee}}$ relativement à un instant-point sera défini comme le tenseur complètement antisymétrique de rang 3

$$(52) \qquad \mathfrak{M}^{ijk} = \sum_{\text{circ.}} r^i\, F^{jk};$$

dans K_0,

$$(53) \qquad \mathfrak{M}_0^{\alpha\beta 4} = r^\alpha\, F^{\beta 4} - r^4\, F^{\alpha 4}, \qquad \mathfrak{M}_0^{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Finalement, le *co-moment scalaire* de $\overset{ij}{F^{\vee}}$ et u^i sera défini suivant :

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{12} \varepsilon_{ijkl}\, u^i\, r^j\, \overset{kl}{F^{\vee}}, \tag{54}$$

définition qui, dans K_0, se ramène exactement à la définition (51).

Étant scalaire, le co-moment d'un système de forces appliqué à un solide est indépendant du référentiel, et le principe de relativité appliqué à l'équilibre est sauf.

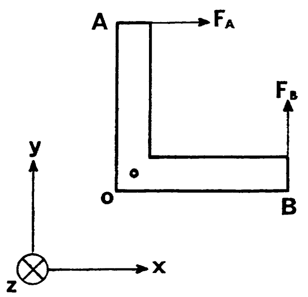
Remarque 1. — Dans un repère autre que K_0, en général $r^4 \neq 0$: c'est la remarque d'Arzeliès. De plus, en général $u^4 \neq 0$: les différents points de l'axe ne seront pas simultanés s'il y a une composante de la vitesse parallèle à cet axe.

Remarque 2. — Si l'on considère un problème de dynamique, avec transmission retardée des actions et réactions, les choses se compliquent beaucoup : il faut considérer notamment les trajectoires d'espace-temps des points d'application des forces F^{ij}, et le plan du genre temps engendré par l'axe autour duquel tournera le solide relativiste.

5. SUR LE COURANT D'ÉNERGIE DE VON LAUE

Considérons à nouveau le levier coudé en équilibre de von Laue [19].

Le bras OA, par exemple, est soumis à un pur cisaillement élastique, c'est-à-dire que le tenseur élastique symétrique $E^{\alpha\beta} = E^{\beta\alpha}$ a pour seule



composante non nulle, dans le repère propre K_0 du levier, $E_0^{xy} = E_0^{yx} \neq 0$. La généralisation relativiste de ce tenseur est certainement telle que, dans K_0, $E_0^{\alpha 4} = E_0^{4\alpha} = 0$. Quant à la densité d'énergie E_0^{44} emmagasinée dans le milieu tendu, elle ne peut pas être nulle, mais sa valeur n'interviendra pas dans l'évaluation qui va suivre.

Avec von Laue passons du repère K_0 à un repère K animé relativement à K_0 d'une vitesse uniforme $c\beta_x = c\beta, 0, 0$. La matrice du changement de repère est (en doordonnées réelles avec $x^4 = ct$)

$$0^i_j = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\varphi & 0 & 0 & \mathrm{sh}\,\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sh}\,\varphi & 0 & 0 & \mathrm{ch}\,\varphi \end{pmatrix}, \tag{55}$$

avec

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathrm{sh}\,\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{56}$$

L'on a donc dans K

$$E^{y4} = E^{4y} = 0^y_y\, 0^4_x\, E_0^{yx} = \mathrm{sh} E_0^{yx}, \tag{57}$$

avec, S_0 désignant la section droite du bras OA, $E_0^{yx} = F_{0A}/S_0$. Au facteur $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ près, c'est le résultat de von Laue.

Notre conclusion est donc que *le courant d'énergie de von Laue existe bien, comme un effet « relatif » conséquence de la loi de transformation du tenseur élastique.* Mais cette conclusion, quoique rejetée par Arzeliès, n'invalide aucunement sa remarque concernant les instants d'application des forces.

BRÈVE CONCLUSION

Nous avons pris un réel intérêt à la lecture du livre d'Arzeliès sur les fluides relativistes; il nous a incité à réfléchir sur les fondements, ce que nous avons voulu faire en toute indépendance de jugement. Ses critiques — et nous considérons ceci comme un éloge — sont celles d'un « fantassin » de la théorie physique qui aime sentir la terre ferme des classiques, et celle aussi des raisonnements physiquement opératoires, coller à la semelle de ses souliers. En ce sens elles portent, et elles nous ont obligé à nous préciser à nous-même certains détails restés implicites dans nos précédentes inductions.

Cependant nous n'avons cru devoir suivre Arzeliès dans aucune de ses conclusions majeures, notre examen de ses arguments nous ayant au contraire pleinement confirmé dans notre adhésion aux idées de la majorité des auteurs. La manière dont nous justifions ces idées nous est, comme le mentionne Arzeliès, tout à fait personnelle dans certains de ses éléments, et d'ailleurs d'une inspiration bien différente de la sienne puisqu'elle cherche à voir les choses directement en termes de géométrie quadridimensionnelle. Nous avons toujours trouvé que ce point de vue, disons d'aviateur, a le précieux mérite de produire des calculs extrêmement concis et transparents. Lorsque, par la contrainte de leur seule symétrie interne, ces calculs fournissent des formules différant par des termes petits — usuellement en c^{-2} — de celles engendrées par des calculs plus terre à terre, notre confiance va spontanément aux premiers, car nous les trouvons non pas moins, mais *plus sûrs* que les seconds.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Arzeliès, *Fluides relativistes, principes généraux, équations fondamentales*, Masson et Cie, Paris, 1971.

[2] O. Costa de Beauregard, *La théorie de la relativité restreinte*, Masson et Cie, Paris, 1949, p. 90-106.

[3] O. Costa de Beauregard, *Précis of Special Relativity*, Academic Press, New-York, 1966, p. 103-139.

[4] Réf. [1], p. 2.

[5] Réf. [1], chap. III, p. 15-51.

[6] R. G. Newburgh, *Nuovo Cimento*, t. 61 B, 1969, p. 201.

[7] H. Ott, *Zeits. Phys.*, t. 175, 1963, p. 70.

[8] H. Arzeliès, *Nuovo Cimento*, t. 35, 1965, p. 792.

[9] O. Costa de Beauregard, *C. R. Acad. Sc.*, 221, 1945, p. 743.

[10] A. J. Mc Connell, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, t. 6, 1929, p. 207.

[11] J. L. Synge, *Trans. Roy. Soc.*, Canada, t. 28, 1934, p. 127.

[12] É. Durand, *J. Math. pures et appl.*, t. 25, 1946, p. 179.

[13] O. Costa de Beauregard, *J. Math. pures et appl.*, t. 25, 1946, p. 477.

[14] Réf. [1], p. 5 et 68.

[15] *Voir* réf. [1], p. 4 ou 104, les équations proposées; nous laisserons comme exercice simple au lecteur de montrer l'équivalence entre l'équation (7) compte tenu de (8), p. 4 d'Arzeliès, et (45) ou (46) de notre texte. Incidemment, Arzeliès écrit à plusieurs reprises qu'il trouve inutile l'introduction d'un tenseur d'impulsion-énergie du second rang. C'est parce que nous la trouvons très utile que nous récrivons l'équation d'Arzeliès sous la forme (45) ou (46)....

[16] Réf. [1], p. 81.

[17] Réf. [1], p. 42-43.

[18] L. A. Schmid, *Nuovo Cimento*, t. 52 B, 1967, p. 288 et 313.

[19] G. N. Lewis et R. C. Tolman, *Phil. Mag.*, t. 18, 1909, p. 510.

[20] M. Von Laue, *Verhandl. Deutsch. Phys. Ges.*, 1911, p. 513.

[21] P. S. Epstein, *Ann. der Physik*, t. 36, 1911, p. 779.

[22] H. Arzeliès, *Nuovo Cimento*, t. 35, 1965, p. 783.

(*Manuscrit reçu le* 18 *novembre* 1971).