ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

# Vibrations élastiques excitées par une onde gravitationnelle

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 16, nº 1 (1972), p. 63-78
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__16_1_63_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. XVI, n° 1, 1972, p. 63-78.

Section A :
*Physique théorique.*

# Vibrations élastiques excitées par une onde gravitationnelle

par

**A. PAPAPETROU**

Institut Henri Poincaré,
Laboratoire de Physique théorique, associé au C. N. R. S.

RÉSUMÉ. — L'équation d'ondes élastiques qui décrit les vibrations d'un corps élastique excitées par le passage d'une onde gravitationnelle est déduite à partir de l'équation relativiste du mouvement d'un milieu continu jointe à l'équation relativiste de l'Élasticité.

ABSTRACT. — The general relativistic equation of motion of a continuous material distribution combined with the relativistic equation of Elasticity leads to the equation of elastic waves which determines the vibrations of an elastic body induced by a gravitational wave.

## INTRODUCTION

Une onde gravitationnelle se propageant dans une région de l'espace qui contient un corps élastique a comme conséquence l'excitation de vibrations élastiques de ce corps. Ces vibrations pourraient en principe être observées : Le corps élastique constitue la plus simple antenne pour la réception du rayonnement gravitationnel.

Les vibrations élastiques excitées par le passage d'une onde gravitationnelle ont été étudiées par Weber [1]. A la base de ce calcul est une généralisation de l'équation de déviation géodésique pour le cas où les deux particules sont soumises à une interaction du type élastique. Par une utilisation appropriée de cette équation Weber établit l'équation d'ondes élastiques qui détermine ces vibrations.

Nous allons montrer dans le présent travail que les vibrations élastiques induites par une onde gravitationnelle et plus généralement par un champ gravitationnel variable peuvent être étudiées d'une manière directe à l'aide de l'équation de la théorie d'élasticité relativiste jointe à l'équation générale du mouvement d'un corps élastique. Cette dernière équation est déduite immédiatement de l'équation dynamique de la relativité générale,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0,$$

étant donné que le corps élastique peut être considéré comme un corps d'épreuve.

## RAPPEL DES FORMULES DE L'ÉLASTICITÉ EN MÉCANIQUE NEWTONIENNE

Les deux grandeurs physiques fondamentales sont les tenseurs des tensions $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ et de déformation $s_{ik}$ $(i, k, \ldots = 1, 2, 3)$. Le tenseur $s_{ik}$ est défini à partir du déplacement $s_i$ :

$$x'^i = x^i + s_i,$$

$x^i$ et $x'^i$ étant les coordonnées d'un point matériel du corps avant et après la déformation. En supposant que les déformations sont petites, c'est-à-dire en négligeant les termes quadratiques en $\frac{\partial s_i}{\partial x^l} \equiv s_{i,l}$ on trouve :

$$s_{ik} = \frac{1}{2}(s_{i,k} + s_{k,i}) \equiv s_{(i,k)}. \tag{1}$$

Dans le domaine de déformations élastiques les tenseurs $\sigma_{ik}$ et $s_{ik}$ sont liés par la loi de Hooke dont la forme générale est

$$\sigma_{ik} = C_{ik}{}^{lm}\, s_{lm}. \tag{2}$$

Le tenseur constant $C_{ik}{}^{lm}$, qui caractérise le corps considéré, a les symétries suivantes :

$$C_{iklm} = C_{kilm} = C_{ikml} = C_{lmik}. \tag{3}$$

Il a par conséquent dans le cas le plus général $6 + \frac{1}{2}(36 - 6) = 21$ composantes indépendantes. Le cas qui nous intéresse dans ce travail est le cas d'un corps isotrope. Le tenseur $C_{iklm}$ ne contient alors que deux quantités indépendantes (coefficients de Lamé) :

$$C_{iklm} = \lambda \delta_{ik}\, \delta_{lm} + \mu\, (\delta_{il}\, \delta_{km} + \delta_{im}\, \delta_{kl}). \tag{3'}$$

Au lieu des coefficients $\lambda$ et $\mu$ il est plus commode d'introduire le module d'élasticité de Young, E, et le coefficient de Poisson $\sigma$ :

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \tag{3''}$$

La relation entre $\sigma_{ik}$ et $s_{ik}$ prend alors la forme :

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(s_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\delta_{ik}\, s_{ll}\right). \tag{4}$$

Nous sommes intéressés aux vibrations libres du corps élastique, quand il n'y a pas des forces extérieures exercées sur le corps. Dans ce cas la force exercée sur un élément de volume du corps provient des tensions et la densité de force est

$$f_i = \sigma_{ik,k}. \tag{5}$$

L'équation de mouvement qu'on trouve finalement est l'équation d'ondes élastiques

$$\rho\, s_{i,tt} = \frac{E}{2(1+\sigma)} s_{i,ll} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} s_{l,li}, \tag{6}$$

$\rho$ étant la densité du corps et $s_{i,tt} \equiv \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2}$. On peut écrire cette équation aussi sous la forme

$$s_{i,tt} = c_{tr}^2\, s_{i,ll} + (c_l^2 - c_{tr}^2)\, s_{l,li}; \tag{6'}$$

les quantités $c_l$ et $c_{tr}$ sont définies par

$$c_l^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad c_{tr}^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \tag{7}$$

et représentent les vitesses de propagation des ondes élastiques longitudinales et transversales dans un milieu élastique infini.

Nous aurons encore besoin d'une équation déduite de (6) par la différentiation $\frac{\partial}{\partial x^k}$ accompagnée de la symétrisation par rapport aux indices $i$, $k$. Cette équation est :

$$s_{ik,tt} = c_{tr}^2\, s_{ik,ll} + (c_l^2 - c_{tr}^2)\, s_{ll,ik}. \tag{8}$$

## ÉLASTICITÉ EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Le tenseur 3-dimensionnel des tensions $\sigma_{ik}$ est remplacé ici par le tenseur 4-dimensionnel $\Theta^{\lambda\mu}$. Mais $\Theta^{\mu\lambda}$ est de nouveau essentiellement 3-dimensionnel, car il satisfait à la condition d'orthogonalité

$$\Theta^{\lambda\mu}\, u_\mu = 0, \tag{9}$$

$u_\mu$ étant la vitesse du milieu élastique au point considéré. Rappelons que la condition (9) n'est satisfaite exactement que dans le cas de changements isothermes, c'est-à-dire dans le cas de vibrations transversales (quand on néglige les phénomènes irréversibles). Mais les corps solides étant très peu déformables, la condition (9) reste valable approximativement aussi dans le cas d'ondes longitudinales.

La définition du tenseur de déformation du milieu élastique se heurte en Relativité générale à certaines difficultés [1]. Il est néanmoins remarquable qu'on peut définir en Relativité générale le tenseur *vitesse de déformation* $E_{\lambda\mu}$ du milieu en partant de la vitesse $u^\lambda$ [5] :

$$(10) \qquad E_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \underset{u}{\mathcal{L}} \overset{*}{g}_{\lambda\mu}.$$

$\underset{u}{\mathcal{L}}$ signifie la dérivée de Lie par rapport au vecteur $u^\lambda$ et $\overset{*}{g}_{\lambda\mu}$ est l'opérateur de projection sur l'hypersurface orthogonale à $u^\lambda$ :

$$(11) \qquad \overset{*}{g}_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} - u_\lambda\, u_\mu.$$

L'expression détaillée de $E_{\lambda\mu}$ est

$$(10') \qquad E_{\lambda\mu} = u_{(\lambda;\mu)} - u_{(\lambda}\, \dot{u}_{\mu)}.$$

Nous rappelons la relation d'orthogonalité

$$(12) \qquad E_{\lambda\mu}\, u^\mu = 0.$$

On peut formuler l'équation fondamentale de l'Élasticité en Relativité générale en utilisant le tenseur $E_{\lambda\mu}$ au lieu d'un tenseur de déformation. Ce qu'on obtient de cette manière sera la généralisation relativiste de la dérivée par rapport au temps de l'équation classique (2).

La première équation de ce type a été proposée par Synge [2] et elle est la suivante :

$$\dot{\Theta}_{\lambda\mu} \equiv \Theta_{\lambda\mu;\alpha}\, u^\alpha = -\, C_{\lambda\mu}{}^{\alpha\beta}\, E_{\alpha\beta}.$$

Cette équation a l'inconvénient d'être essentiellement 4-dimensionnelle : Malgré la relation (9) on a en général $\dot{\Theta}_{\lambda\mu}\, u^\mu \neq 0$, ce qui a la conséquence $C_{\lambda\mu\nu\rho}\, u^\mu \neq 0$. C'est-à-dire $C_{\lambda\mu\nu\rho}$ est essentiellement 4-dimensionnel et a par conséquent $10 + \frac{1}{2}(100 - 10) = 55$ composantes indépendantes

(1) Voir Synge [2] et Rayner [3]. Une définition directe du tenseur de déformation en Relativité générale a été proposée récemment par Hernandez [4].

au lieu des 21 composantes que nous avons dans la théorie de l'Élasticité newtonienne.

Cette difficulté est évitée dans l'équation [6]

$$\underset{u}{\mathcal{L}}\, \Theta_{\lambda\mu} = - C_{\lambda\mu}{}^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}. \tag{13}$$

En effet la relation (9) a la conséquence

$$\underset{u}{\mathcal{L}}\, \Theta_{\lambda\mu} . u^{\mu} = \underset{u}{\mathcal{L}}\, (\Theta_{\lambda\mu}\, u^{\mu}) = 0$$

et par conséquent nous aurons

$$C_{\lambda\mu\nu\rho}\, u^{\mu} = 0. \tag{14}$$

Le tenseur $C_{\lambda\mu\nu\rho}$ est donc essentiellement 3-dimensionnel et a 21 composantes indépendantes.

Ajoutons que la modification suivante de l'équation de Synge,

$$\dot{\Theta}^{\nu\rho}\, \overset{*}{g}_{\lambda\nu}\, \overset{*}{g}_{\mu\rho} = - C_{\lambda\mu}{}^{\nu\rho} E_{\nu\rho},$$

conduit aussi à (14) et est par conséquent aussi acceptable de ce point de vue. La différence entre cette équation et l'équation (13) est sans importance pour le problème que nous allons discuter dans ce travail, car elle conduit à des termes d'ordre supérieur à celui que nous retiendrons ici.

## COMPORTEMENT D'UN CORPS ÉLASTIQUE DANS UN CHAMP GRAVITATIONNEL VARIABLE

Pour la discussion de ce problème nous avons besoin d'une part de l'équation fondamentale de l'Élasticité Relativiste (13) et d'autre part de l'équation dynamique de la Relativité Générale :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{15}$$

Nous accepterons pour $T^{\mu\nu}$ la forme habituelle

$$T^{\mu\nu} = \rho\, u^{\mu}\, u^{\nu} - \Theta^{\mu\nu}, \tag{16}$$

le tenseur $\Theta^{\mu\nu}$ satisfaisant la condition d'orthogonalité (9).

En introduisant (16) dans (15) nous arrivons aux équations

$$\dot{\rho} + \rho\, u^{\nu}{}_{;\nu} = \Theta^{\mu\nu}{}_{;\nu}\, u_{\mu}; \tag{17}$$

$$\rho\, \dot{u}^{\mu} = \Theta^{\mu\nu}{}_{;\nu} - u^{\mu}\, \Theta^{\nu\rho}{}_{;\rho}\, u_{\nu}. \tag{17'}$$

La deuxième équation est orthogonale à $u_\mu$ et a par conséquent 3 composantes indépendantes, par exemple les composantes $\mu = i$. Nous les écrirons avec l'indice $i$ inférieur :

$$(18) \qquad \rho\, \dot{u}_i = \Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha} - u_i\, \Theta_{\alpha\beta}{}^{;\beta}\, u^\alpha.$$

Les équations du mouvement (17), (18) ne sont pas suffisantes pour déterminer le mouvement tant que les tensions $\Theta_{\alpha\beta}$ restent arbitraires. Mais en joignant à ces équations l'équation de l'Élasticité (13), qui est aussi une relation entre $\Theta_{\alpha\beta}$ et $u_\alpha$, nous arriverons à des équations du mouvement qui ne contiennent plus cet arbitraire. Nous ne pourrons déduire ces équations que sous une forme approximative. Nous allons d'abord énumérer les hypothèses que nous sommes obligés d'introduire pour simplifier le problème.

La première hypothèse, qui est sans doute entièrement justifiée, est que nous pourrons considérer le corps élastique comme un corps d'épreuve; c'est-à-dire que le champ gravitationnel peut être donné indépendamment de la présence de ce corps.

La deuxième hypothèse est qu'avant l'arrivée de l'onde gravitationnelle le champ est stationnaire et que le corps élastique est en repos dans ce champ initial. Nous aurons donc

$$(19) \qquad (g_{\mu\nu})_{in} \equiv \gamma_{\mu\nu}; \qquad \gamma_{\mu\nu,0} = 0; \qquad (V^k)_{in} = 0.$$

Le champ initial $\gamma_{\mu\nu}$ est, dans le cas qui nous intéresse ici, le champ gravitationnel de la terre. Nous allons le simplifier en négligeant la rotation de la terre, ce qui équivaut à supposer que $\gamma_{\mu\nu}$ est essentiellement un champ de Schwarzschild. Mais nous n'utiliserons pas explicitement cette dernière hypothèse.

Pendant le passage de l'onde gravitationnelle nous supposerons que la métrique sera de la forme

$$(20) \qquad g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \lambda_{\mu\nu},$$

$\lambda_{\mu\nu}$ étant la quantité qui décrit l'onde gravitationnelle incidente dans le cas où $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Ceci signifie que nous négligeons un terme $\delta\gamma_{\mu\nu}$ qui serait la conséquence de l'interaction des sources du champ $\gamma_{\mu\nu}$ avec l'onde gravitationnelle. Remarquons que $\gamma_{\mu\nu}$ est aussi un champ faible, c'est-à-dire que les quantités

$${}_0\lambda_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$$

sont petites par rapport à 1. Nous aurons à tenir compte du fait que ${}_0\lambda_{\mu\nu}$ sera grand par rapport à $\lambda_{\mu\nu}$.

Avant l'arrivée de l'onde gravitationnelle un élément du milieu élastique, que nous allons désigner par P, a des coordonnées ${}_0x^i$ (P) qui ne dépendent pas du temps. Pendant le passage de l'onde gravitationnelle cet élément matériel sera en mouvement vibratoire autour du point ${}_0x^i$ (P) :

$$x^i\,(\mathrm{P}) = {}_0x^i\,(\mathrm{P}) + s^i, \tag{21'}$$

$s^i$ étant un très petit déplacement qui dépend de $t$ et de ${}_0x^i$ (P). La vitesse du point matériel P sera donc

$$\mathrm{V}^i\,(\mathrm{P}) = \frac{dx^i\,(\mathrm{P})}{dx^0} = s^i{}_{,0}. \tag{21}$$

D'une manière analogue nous aurons au point P le tenseur des tensions ${}_0\Theta_{\mu\nu}$ (P) avant l'arrivée de l'onde gravitationnelle et le tenseur

$$\Theta_{\mu\nu}\,(\mathrm{P}) = {}_0\Theta_{\mu\nu}\,(\mathrm{P}) + \theta_{\mu\nu}\,(\mathrm{P}) \tag{22}$$

pendant le passage de cette onde. La quantité ${}_0\Theta_{\mu\nu}$ (P) ne dépend pas de $t$ et elle est en général grande par rapport à $\theta_{\mu\nu}$. Nous supposerons que les quantités $\lambda_{\mu\nu}$, $\mathrm{V}^i$ et $\theta_{\mu\nu}$ sont du même ordre et nous allons retenir dans la suite seulement les termes qui sont indépendantes de ces trois quantités ou linéaires dans l'une ou l'autre de ces quantités. Dans les formules finales nous allons aussi négliger les termes qui contiennent ces quantités multipliées par $\gamma_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$.

## CALCUL DU TENSEUR $\mathrm{E}_{\lambda\mu}$

A cause de la relation (12) il suffit de calculer les composantes $\mathrm{E}_{ik}$. Nous considérons d'abord les quantités $u^\lambda$ et $u_\lambda$. La formule générale

$$(u^0)^{-2} = g_{\lambda\mu}\,\mathrm{V}^\lambda\,\mathrm{V}^\mu; \qquad \mathrm{V}^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dx^0} \qquad (\mathrm{V}^0 = 1)$$

nous donne par un calcul élémentaire :

$$u^0 = (\gamma_{00})^{-\frac{3}{2}}\left(\gamma_{00} - \frac{1}{2}\,\lambda_{00} - \gamma_{0i}\,\mathrm{V}^i\right) + \dots, \tag{23'}$$

les termes omis contenant plus d'un facteur $\lambda_{\mu\nu}$ ou $\mathrm{V}^i$. Nous écrirons ce résultat sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} &u^0 = {}_0u^0 + \delta u^0; \\ &{}_0u^0 = (\gamma_{00})^{-\frac{1}{2}}, \qquad \delta u^0 = -\,({}_0u^0)^3\left(\frac{1}{2}\,\lambda_{00} + \gamma_{0i}\,\mathrm{V}^i\right). \end{aligned}\right. \tag{23}$$

La formule

$$u^i = u^0 \, V^i$$

nous donne alors immédiatement :

$$(24) \qquad {}_0u^i = 0, \qquad \delta u^i = {}_0u^0 \, V^i;$$

${}_0u^\alpha$ est le vecteur vitesse dans l'état de repos initial, avant l'arrivée de l'onde gravitationnelle.

La formule

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta} \, u^\beta$$

permet maintenant de calculer ${}_0u_\alpha$ et $\delta u_\alpha$ :

$$(24') \qquad u_\alpha = {}_0u_\alpha + \delta u_\alpha.$$

Le résultat est

$$(24'') \quad \begin{cases} {}_0u_\alpha = \gamma_{\alpha 0} \, {}_0u^0; \\ \delta u_0 = {}_0u^0 \dfrac{1}{2} \lambda_{00}, \qquad \delta u_i = {}_0u^0 \left(\lambda_{0i} - \dfrac{1}{2} \overset{*}{\gamma}_{0i} \lambda_{00} + \overset{*}{\gamma}_{il} V^l\right); \end{cases}$$

$$(25) \qquad \overset{*}{\gamma}_{0i} \equiv \frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}}, \qquad \overset{*}{\gamma}_{ik} = \gamma_{ik} - \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}.$$

Pour le calcul de $E_{ik}$ il est commode d'utiliser la formule qui contient les dérivées ordinaires de $g_{ik} - u_i u_k$ et $u^\lambda$ :

$$(26) \quad 2\, E_{ik} = (g_{ik} - u_i u_k)_{,\lambda} u^\lambda + (g_{i\lambda} - u_i u_\lambda) u^\lambda{}_{,k} + (g_{k\lambda} - u_k u_\lambda) u^\lambda{}_{,i}.$$

En partant de (20) et (24) on trouve sans difficulté :

$$g_{i0} - u_i u_0 = - \overset{*}{\gamma}_{il} V^l + \ldots,$$

$$g_{il} - u_i u_l = \overset{*}{\gamma}_{il} + \overset{*}{\gamma}_{0i} \overset{*}{\gamma}_{0l} \lambda_{00} - (\overset{*}{\gamma}_{0i} \lambda_{0l} + \overset{*}{\gamma}_{0l} \lambda_{0i}) + \lambda_{il} - (\overset{*}{\gamma}_{0i} \overset{*}{\gamma}_{lm} + \overset{*}{\gamma}_{0l} \overset{*}{\gamma}_{im}) V^m + \ldots.$$

En introduisant ces expressions dans (26) on trouve finalement :

$$(27) \quad \begin{cases} 2\sqrt{\gamma_{00}}\, E_{ik} = \overset{*}{\gamma}_{0i} \overset{*}{\gamma}_{0k} \lambda_{00,0} - (\overset{*}{\gamma}_{0i} \lambda_{0k,0} + \overset{*}{\gamma}_{0k} \lambda_{0i,0}) + \lambda_{ik,0} + \overset{*}{\gamma}_{ik,l} V^l \\ \qquad + \overset{*}{\gamma}_{il} V^l{}_{,k} + \overset{*}{\gamma}_{kl} V^l{}_{,i} - (\overset{*}{\gamma}_{0i} \overset{*}{\gamma}_{kl} + \overset{*}{\gamma}_{0k} \overset{*}{\gamma}_{il}) V^l{}_{,0} + \ldots. \end{cases}$$

Cette formule montre d'abord que quand $\lambda_{\mu\nu} = 0 = V^i$ on a aussi $E_{ik} = 0$, résultat qu'on aurait d'ailleurs à demander *a priori*. La formule (27) se simplifie beaucoup dans le cas $\gamma_{0i} = 0$ (métrique de Schwarzschild). Elle se simplifie davantage dans le cas d'un champ $\gamma_{\mu\nu}$ faible où nous négligeons les termes contenant un facteur ${}_0\lambda_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ à côté de $\lambda_{\mu\nu}$ ou $V^i$. En effet la formule (27) se réduit alors à

$$2\,E_{ik} = -V^i{}_{,k} - V^k{}_{,i} + \lambda_{ik,0} + \dots \tag{27'}$$

On remarquera que cette formule ne contient pas ${}_0\lambda_{\mu\nu}$ : On aurait la même expression dans le cas où le corps élastique serait très loin de toute distribution matérielle, c'est-à-dire si $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

En tenant compte de (21) on peut écrire (27′) sous la forme

$$E_{ik} = -\varepsilon_{ik,0} + \dots; \tag{27''}$$

$$\varepsilon_{ik} \equiv \frac{1}{2}(s^i{}_{,k} + s^k{}_{,i} - \lambda_{ik}). \tag{28}$$

On vérifie sans difficulté que $\varepsilon_{ik}$ est invariant par rapport aux transformations de jauge

$$x'^\lambda = x^\lambda + \varepsilon f^\lambda. \tag{29}$$

Par conséquent $\varepsilon_{ik}$ est la généralisation relativiste du tenseur de déformation classique donné par (1). Plus exactement $\varepsilon_{ik}$ n'est pas la déformation totale, mais seulement la déformation à partir de l'état stationnaire du corps élastique qui existait avant l'arrivée de l'onde gravitationnelle.

## LA LOI DE HOOKE GÉNÉRALISÉE

La prochaine quantité que nous avons à calculer est le premier membre de (13). Cette quantité est donnée par l'expression suivante (pour $\lambda,\ \mu = i,\ k$) :

$$\underset{u}{\mathcal{L}}\,\Theta_{ik} = \Theta_{ik,\alpha}\,u^\alpha + \Theta_{i\alpha}\,u^\alpha{}_{,k} + \Theta_{k\alpha}\,u^\alpha{}_{,i}.$$

La condition d'orthogonalité (9) appliquée à l'état stationnaire initial nous donne

$${}_0\Theta_{0\alpha} = 0.$$

Dans l'état variable cette condition prend d'après (22) la forme

$$({}_0\Theta_{i0} + \theta_{i0})\,u^0 + ({}_0\Theta_{ik} + \theta_{ik})\,u^k = 0.$$

Nous aurons donc en première approximation, en tenant compte de (24) :

$$\theta_{i0} = -\,{}_0\Theta_{ik}\,V^k + \dots \tag{30}$$

Dans le cas général ${}_0\Theta_{ik}$ peut contenir non seulement les tensions induites par le champ gravitationnel iintial $\gamma_{\mu\nu}$ mais aussi des tensions internes indépendantes. En tout cas on ne doit pas dépasser la limite de l'élasticité, ce qui nous donne pour un métal la restriction :

$$\left|\frac{{}_0\Theta_{ik}}{\mathrm{E}}\right| < 10^{-3}. \tag{31}$$

Comme nous avons supposé que $\mathrm{V}^k$ est du même ordre que $\frac{\theta_{ik}}{\mathrm{E}}$, il s'ensuit que $\frac{\theta_{i0}}{\mathrm{E}}$ est petit par rapport à $\frac{\theta_{ik}}{\mathrm{E}}$. D'autre part ${}_0\Theta_{ik}\,(\mathrm{P})$ ne dépend pas, d'après (22), de $t$ et par conséquent

$${}_0\Theta_{ik,\alpha}\, u^\alpha = 0.$$

Nous aurons donc en première approximation :

$$\frac{1}{\mathrm{E}} \underset{u}{\mathcal{L}}\, \Theta_{ik} = \frac{1}{\mathrm{E}} \left(\theta_{ik,0} + {}_0\Theta_{il}\, \mathrm{V}^l{}_{,k} + {}_0\Theta_{kl}\, \mathrm{V}^l{}_{,i}\right) + \ldots.$$

Les deux derniers termes sont aussi négligeables à cause de (31) et de l'hypothèse que $\frac{\theta_{ik,0}}{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{V}^l{}_{,k}$ sont du même ordre. Nous avons donc finalement

$$\underset{u}{\mathcal{L}}\, \Theta_{ik} = \theta_{ik,0} + \ldots. \tag{32}$$

La généralisation relativiste de la loi de Hooke est donnée par (13). Pour un corps élastique isotrope nous aurons

$$\mathrm{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = \lambda\, \overset{*}{g}_{\mu\nu}\, \overset{*}{g}_{\rho\sigma} + \mu\, (\overset{*}{g}_{\mu\rho}\, \overset{*}{g}_{\nu\sigma} + \overset{*}{g}_{\mu\sigma}\, \overset{*}{g}_{\nu\rho}).$$

En tenant compte de la condition d'orthogonalité (12) on déduit alors de (13) :

$$\underset{u}{\mathcal{L}}\, \Theta_{\mu\nu} = -\left(2\,\mu\, \mathrm{E}_{\mu\nu} + \lambda\, \overset{*}{g}_{\mu\nu}\, g^{\rho\sigma}\, \mathrm{E}_{\rho\sigma}\right),$$

ou en exprimant $\mu$ et $\lambda$ par E et $\sigma$ d'après (3″) :

$$\underset{u}{\mathcal{L}}\, \Theta_{\mu\nu} = -\frac{\mathrm{E}}{1+\sigma} \left\{ \mathrm{E}_{\mu\nu} + \frac{\sigma}{1-2\,\sigma}\, \overset{*}{g}_{\mu\nu}\, g^{\rho\sigma}\, \mathrm{E}_{\rho\sigma} \right\}. \tag{33}$$

La relation (12) montre que $\mathrm{E}_{\mu 0}$ est petit par rapport à $\mathrm{E}_{ik}$. Par conséquent :

$$g^{\rho\sigma}\, \mathrm{E}_{\rho\sigma} = +\, g^{ik}\, \mathrm{E}_{ik} + \ldots = -\, \mathrm{E}_{ii} + \ldots.$$

D'autre part $u_i\, u_k$ est petit par rapport à $g_{ik} = -\,\delta_{ik} + \ldots.$ L'équation (33) se réduit donc pour $\mu, \nu = i, k$ à

$$\underset{u}{\mathcal{L}}\, \Theta_{ik} = -\frac{\mathrm{E}}{1+\sigma} \left( \mathrm{E}_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\,\sigma}\, \delta_{ik}\, \mathrm{E}_{ll} \right) + \ldots. \tag{34}$$

En introduisant dans cette équation les résultats (27″) et (32) on trouve finalement :

$$\theta_{ik,0} = \frac{\mathrm{E}}{1+\sigma}\left(\varepsilon_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\,\delta_{ik}\,\varepsilon_{ll}\right)_{,0} + \dots \tag{35}$$

L'équation (35) se laisse intégrer immédiatement par rapport à $x^0$. En partant d'un moment $(x^0)_0$ où le système était dans l'état stationnaire initial nous trouvons :

$$\theta_{ik} = \frac{\mathrm{E}}{1+\sigma}\left(\varepsilon_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\,\delta_{ik}\,\varepsilon_{ll}\right) + \dots \tag{36}$$

La constante d'intégration qui devrait entrer dans cette relation est égale à zéro, car pour $x^0 = (x^0)_0$ nous avons $\theta_{ik} = 0 = \varepsilon_{ik}$ d'après (22) et (28). La relation (36) a exactement la forme classique (4) avec la seule différence que $s_{ik}$ a été remplacé par $\varepsilon_{ik}$. On remarquera que les quantités $\gamma_{\mu\nu}$ et ${}_0\Theta_{ik}$ n'entrent pas dans cette relation, évidemment à cause des hypothèses que $\gamma_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ et $\frac{{}_0\Theta_{ik}}{\mathrm{E}}$ sont petits par rapport à 1.

## L'ÉQUATION DU MOUVEMENT

Dans l'équation du mouvement (18) entrent les quantités $\rho$, $\dot{u}$ et $\Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha}$. Pour $\rho$ nous avons l'équation (17). Le deuxième membre de cette équation peut être transformé à l'aide de la condition d'orthogonalité :

$$\Theta^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\, u_\alpha = -\,\Theta^{\alpha\beta}\, u_{\alpha;\beta} = -\,\Theta^{\alpha\beta}\,\mathrm{E}_{\alpha\beta}. \tag{37}$$

En première approximation cette équation se réduit à

$$\Theta^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\, u_\alpha = -\,{}_0\Theta^{ik}\,\mathrm{E}_{ik} + \dots = -\,{}_0\Theta_{ik}\,\mathrm{E}_{ik} + \dots \tag{37'}$$

Nous avons aussi

$$u^\alpha{}_{;\alpha} = g^{\alpha\beta}\,\mathrm{E}_{\alpha\beta} = -\,\mathrm{E}_{ll} + \dots \tag{38}$$

Posons

$$\rho\,(\mathrm{P}) = {}_0\rho\,(\mathrm{P}) + \delta\rho, \tag{39}$$

${}_0\rho$ étant la densité constante initiale. L'équation (17) nous donne alors :

$$(\delta\rho)^{\cdot} = {}_0\rho\left(\mathrm{E}_{ll} - \frac{1}{{}_0\rho}\,{}_0\Theta_{ik}\,\mathrm{E}_{ik}\right) + \dots \tag{40}$$

Le facteur

$$\frac{{}_0\Theta_{ik}}{{}_0\rho} = \frac{{}_0\Theta_{ik}}{\mathrm{E}}\,\frac{\mathrm{E}}{{}_0\rho}, \qquad \frac{\mathrm{E}}{{}_0\rho} \approx 10^{-10}$$

est très petit et par conséquent le dernier terme de (40) est négligeable. L'équation (40) montre déjà que $\delta\rho$ est petit du premier ordre. Nous aurons donc

$$(\delta\rho)^{\cdot} = (\delta\rho)_{,0} + (\delta\rho)_{,l}\,V^l + \ldots = (\delta\rho)_{,0} + \ldots.$$

En tenant compte de (27″) nous trouvons pour (40) la forme

$$(\delta\rho)_{,0} = -\,{}_0\rho\,\varepsilon_{ll,0} + \ldots.$$

L'intégration de cette équation donne

$$\delta\rho = -\,{}_0\rho\,\varepsilon_{ll} + \ldots. \tag{41}$$

Pour l'accélération $\dot{u}_i$ vous trouvons :

$$\dot{u}_i = g_{i\alpha}\,u^\alpha{}_{;\beta}\,u^\beta = g_{i\alpha}\,(u^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta}\,u^\lambda)\,u^\beta.$$

Le premier terme nous donne en première approximation

$$g_{i\alpha}\,u^\alpha{}_{,\beta}\,u^\beta = \gamma_{i\alpha}\,\{(\delta u^\alpha)_{,\beta}\,{}_0u^\beta + ({}_0u^\alpha)_{,\beta}\,\delta u^\beta\} + \ldots = -\,V^i{}_{,0} + \ldots.$$

Le deuxième terme donne :

$$\begin{aligned}\left(g_{i\rho,\beta} - \frac{1}{2}\,g_{\rho\beta,i}\right)u^\rho\,u^\beta &= -\,\frac{1}{2}\,\gamma_{00,i}\,({}_0u^0)^2 + \left(\lambda_{0i,0} - \frac{1}{2}\,\lambda_{00,i}\right)({}_0u^0)^2 \\ &\quad + (\gamma_{0i,\beta} - \gamma_{0\beta,i})\,{}_0u^0\,\delta u^\beta + \ldots \\ &= -\,\frac{1}{2}\,\gamma_{00,i} + \lambda_{0i,0} - \frac{1}{2}\,\lambda_{00,i} + \ldots.\end{aligned}$$

Nous trouvons finalement :

$$\left\{\begin{aligned}&\dot{u}_i = {}_0(\dot{u}_i) + \delta\,(\dot{u}_i);\\ &{}_0(\dot{u}_i) = -\,\frac{1}{2}\,\gamma_{00,i}, \qquad \delta\,(\dot{u}_i) = -\,V^i{}_{,0} + \lambda_{0i,0} - \frac{1}{2}\,\lambda_{00,i}.\end{aligned}\right. \tag{42}$$

On vérifie immédiatement que l'expression trouvée pour $\delta\,(\dot{u}_i)$ est invariante par rapport aux transformations de jauge (29).

Il nous reste à calculer la quantité

$$\Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha} = g^{\alpha\beta}\,\Theta_{i\alpha;\beta}.$$

Un calcul direct vous donne :

$$\Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha} = g^{\alpha\beta}\,\Theta_{i\alpha,\beta} + \frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}{}_{,i}\,\Theta_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\,\Theta_{i\alpha} + \frac{1}{2}\,g^{\rho\sigma}\,g^{\alpha\beta}\,g_{\alpha\beta,\rho}\,\Theta_{i\sigma}. \tag{43}$$

Cette formule nous donne pour l'état stationnaire initial :

$${}_0(\Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha}) = \gamma^{kl}\,{}_0\Theta_{ik,l} + \frac{1}{2}\,\gamma^{kl}{}_{,i}\,{}_0\Theta_{kl} + \gamma^{kl}{}_{,l}\,{}_0\Theta_{ik} + \frac{1}{2}\,\gamma^{kl}\,\gamma^{\alpha\beta}\,\gamma_{\alpha\beta,k}\,{}_0\Theta_{il}.$$

Dans le cas d'un champ $\gamma_{\mu\nu}$ faible cette expression se réduit à

$$ {}_0(\Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha}) = - {}_0\Theta_{ik,k} + \dots \tag{44} $$

Pour le terme variable de $\Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha}$ on déduit de (43) en première approximation :

$$ \left\{ \begin{aligned} \delta(\Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha}) &= \lambda^{kl}\,{}_0\Theta_{ik,l} - \theta_{ik,k} + \frac{1}{2}\lambda^{kl}{}_{,i}\,{}_0\Theta_{kl} \\ &+ \frac{1}{2}\gamma^{kl}{}_{,i}\,\theta_{kl} + \lambda^{k\lambda}{}_{,\lambda}\,{}_0\Theta_{ik} + \gamma^{kl}{}_{,l}\,\theta_{ik} \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda^{kl}\eta^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta,l} - \lambda^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta,k} - \eta^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta,k})\,{}_0\Theta_{ik} \\ &- \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta,k}\,\theta_{ik}. \end{aligned} \right. \tag{45} $$

Dans cette formule on a déjà utilisé le fait que $\gamma_{\mu\nu}$ est un champ faible, $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \dots$.

Le champ $\gamma_{\mu\nu}$ qui nous intéresse est le champ gravitationnel de la terre. Dans ce cas nous avons

$$ \gamma_{kl,i} \sim \gamma_{00,i} \sim \frac{m}{R^2}, $$

$m$ étant la masse gravitationnelle de la terre et R son rayon :

$$ m \approx 1 \text{ cm}, \qquad R \approx 10^9 \text{ cm}. $$

En supposant que la longueur d'onde du rayonnement gravitationnel est de l'ordre de $10^7$ cm (expérience de Weber) on vérifie sans difficulté que tous les termes après le deuxième sont petits par rapport au deuxième. Le premier terme dépend du gradient ${}_0\Theta_{ik,l}$ et pourrait en principe devenir de l'ordre du deuxième, si on pouvait réaliser des tensions initiales à gradient suffisamment élevé. Mais ceci n'est pas le cas dans un cylindre métallique du type utilisé dans l'expérience de Weber. Le premier terme est donc dans ce cas aussi négligeable et nous avons le résultat final :

$$ \delta(\Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha}) = - \theta_{ik,k} + \dots \tag{46} $$

Le dernier terme dans l'équation du mouvement (18) est d'après (37)

$$ - \dot{u}_i\,\Theta_{\alpha\beta}{}^{;\beta}\,u^\alpha = \dot{u}_i\,\Theta^{\alpha\beta}\,E_{\alpha\beta}. $$

Dans l'état stationnaire initial ce terme s'annule à cause du facteur $E_{\alpha\beta}$. Dans l'état variable il a en première approximation la valeur

$$ \gamma_{i0}\,{}_0\Theta_{kl}\,E_{kl}. $$

On vérifie immédiatement que cette quantité est petite par rapport au premier terme du deuxième membre de (18). Il suffit par conséquent d'écrire l'équation (18) sous la forme

$$\rho\, \dot{u}_i = \Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha} + \ldots .$$

Cette équation nous donne pour l'état stationnaire initial :

$$(47) \qquad {}_0\rho\, \frac{1}{2}\gamma_{00,i} = {}_0\Theta_{ik,k} + \ldots .$$

Pour l'état variable nous trouvons d'abord

$$(48) \qquad \delta\rho\; {}_0(\dot{u}_i) + {}_0\rho\; \delta\,(\dot{u}_i) = \delta\,(\Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha}).$$

En tenant compte de (41), (42) et (46) on vérifie que le premier terme de (48) est négligeable et on trouve finalement :

$$(49) \qquad {}_0\rho \left(\mathrm{V}^i{}_{,0} + \frac{1}{2}\lambda_{00,i} - \lambda_{0i,0}\right) = \theta_{ik,k}.$$

Les équations (49) et (36) sont les équations du mouvement vibratoire du corps élastique en présence de l'onde gravitationnelle. Il est à remarquer que, sous les conditions que nous avons considéré ici, ces équations ne contiennent pas le champ initial $\gamma_{\mu\nu}$ et les tensions initiales ${}_0\Theta_{ik}$. En introduisant dans (49) la valeur de $\theta_{ik}$ donnée par (36) on obtient la généralisation relativiste de l'équation classique (6) ou (6').

## L'ÉQUATION RELATIVISTE D'ONDES ÉLASTIQUES

Nous avons déjà remarqué que l'expression figurant au premier membre de (49) ainsi que la quantité $\varepsilon_{ik}$ définie par (28) et entrant dans (36) sont invariantes par rapport aux transformations de jauge (29). Cependant le fait que l'équation (49) contient les quantités $\mathrm{V}^i$ et $\lambda_{\mu\nu}$ qui ne sont pas invariantes séparément constitue un certain inconvénient.

On obtient une équation qui ne présente pas cet inconvénient en formant d'abord la dérivée par rapport à $x^k$ de l'équation (49) :

$$s^i{}_{,k00} + \frac{1}{2}\lambda_{00,ik} - \lambda_{0i,0k} = \frac{\mathrm{E}}{{}_0\rho\,(1+\sigma)}\left\{\varepsilon_{il,lk} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\varepsilon_{ll,ik}\right\}.$$

La symétrisation de cette équation par rapport à $i$, $k$ donne :

$$(50) \qquad \varepsilon_{ik,00} + \mathrm{R}_{i00k} = \frac{\mathrm{E}}{2\,{}_0\rho\,(1+\sigma)}\left\{\varepsilon_{il,lk} + \varepsilon_{kl,li} + \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\varepsilon_{ll,ik}\right\}.$$

On a dans cette formule tenu compte de la valeur linéarisée de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ :

$$(51) \qquad 2\, R_{\alpha\beta\mu\nu} = \lambda_{\alpha\mu,\beta\nu} + \lambda_{\beta\nu,\alpha\mu} - \lambda_{\beta\mu,\alpha\nu} - \lambda_{\alpha\nu,\beta\mu} + \dots$$

D'autre part on déduit de (28) la relation :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{il,lk} + \varepsilon_{kl,li} + \frac{2\rho}{1-2\sigma}\varepsilon_{ll,ik} \\ &= \varepsilon_{ik,ll} + \frac{1}{1-2\sigma}\varepsilon_{ll,ik} + \frac{1}{2}(\lambda_{il,lk} + \lambda_{kl,li} - \lambda_{ik,ll} - \lambda_{ll,ik}). \end{aligned}$$

Le dernier terme de cette relation est égal à $R_{iook}$, à cause des équations d'Einstein pour le vide satisfaites par l'onde gravitationnelle :

$$\begin{aligned} R_{\alpha\nu} &= \eta^{\beta\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \dots \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\beta\mu}(\lambda_{\alpha\mu,\beta\nu} + \lambda_{\beta\nu,\alpha\mu} - \lambda_{\beta\mu,\alpha\nu} - \lambda_{\alpha\nu,\beta\mu}) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Mais ce nouveau terme $R_{iook}$ est multiplié par le très petit nombre $\dfrac{E}{2_0\,\rho\,(1+\sigma)}$ et il est par conséquent négligeable par rapport au deuxième terme de (50). Nous trouvons donc comme résultat final la formule :

$$(52) \qquad \varepsilon_{ik,00} - \frac{c_{tr}^2}{c^2}\varepsilon_{ik,ll} - \frac{c_l^2 - c_{tr}^2}{c^2}\varepsilon_{ll,ik} + R_{iook} = 0.$$

Nous avons dans cette relation utilisé les définitions (7) de $c_l$ et $c_{tr}$.

L'équation (52) est la généralisation relativiste de l'équation classique d'ondes élastiques (8). La généralisation consiste dans le remplacement de $s_{ik}$ par $\varepsilon_{ik}$ et l'apparition du terme $R_{iook}$ qui joue, du point de vue classique, le rôle d'une force extérieure excitant de vibrations élastiques. Dans le cas d'ondes longitudinales se propageant dans la direction $x^1$ avec $\sigma = 0$ on a

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(x^1, t), \qquad \text{les autres} \quad \varepsilon_{ik} = 0.$$

L'équation (52) devient alors identique à l'équation correspondante donnée par Weber [1] (²), quand on met dans cette dernière équation $b = 0$.

Nous indiquerons brièvement une méthode plus générale qui conduit aussi à l'équation (52). Écrivons l'équation du mouvement (17') — équivalente à l'équation (18) — sous la forme

$$(53) \qquad X_\mu \equiv \dot{u}_\mu - \overset{*}{g}_{\mu\alpha} K^\alpha = 0; \qquad K^\alpha = \frac{1}{\rho}\Theta^{\alpha\beta}{}_{;\beta}.$$

De cette équation nous déduisons immédiatement :

$$X_{\mu;\nu} \equiv (\dot{u}_\mu)_{;\nu} - K_{\mu;\nu} + (u_\alpha K^\alpha u_\mu)_{;\nu} = 0.$$

(²) Équation (8.34), p. 132.

Le premier terme de cette expression nous donne

$$(u_{\mu;\alpha}\, u^{\alpha})_{;\nu} = u_{\mu;\alpha;\nu}\, u^{\alpha} + u_{\mu;\alpha}\, u^{\alpha}{}_{;\nu}.$$

En tenant compte de la relation

$$u_{\mu;\alpha;\nu} - u_{\mu;\nu;\alpha} = \mathrm{R}_{\mu\beta\alpha\nu}\, u^{\beta}$$

nous trouvons finalement :

$$(54)\qquad \begin{aligned} \mathrm{X}_{\mu;\nu} \equiv (u_{\mu;\nu})^{\cdot} &+ \mathrm{R}_{\mu\beta\alpha\nu}\, u^{\beta}\, u^{\alpha} \\ &+ u_{\mu;\alpha}\, u^{\alpha}{}_{;\nu} - \mathrm{K}_{\mu;\nu} + (u_{\alpha}\, \mathrm{K}^{\alpha}\, u_{\mu})_{;\nu} = 0. \end{aligned}$$

La symétrisation de cette relation par rapport à $\mu$, $\nu$ donne :

$$(55)\qquad \begin{aligned} \mathrm{X}_{(\mu;\nu)} \equiv \{ u_{(\mu;\nu)} \}^{\cdot} &+ \mathrm{R}_{\mu\beta\alpha\nu}\, u^{\beta}\, u^{\alpha} \\ &+ u^{\alpha}{}_{;(\mu}\, u_{\nu);\alpha} - \mathrm{K}_{(\mu;\nu)} + (u_{\alpha}\, \mathrm{K}^{\alpha}\, u_{(\mu})_{;\nu)} = 0. \end{aligned}$$

On pourrait aussi antisymétriser (54) et trouver :

$$(56)\qquad \mathrm{X}_{[\mu;\nu]} \equiv \{ u_{[\mu;\nu]} \}^{\cdot} - u^{\alpha}{}_{;[\mu}\, u_{\nu];\alpha} - \mathrm{K}_{[\mu;\nu]} + (u_{\alpha}\, \mathrm{K}^{\alpha}\, u_{[\mu})_{;\nu]} = 0.$$

Le permier terme de (55) s'écrit d'après (10') :

$$\{ u_{(\mu;\nu)} \}^{\cdot} = \{ \mathrm{E}_{\mu\nu} + u_{(\mu}\, \dot{u}_{\nu)} \}^{\cdot}.$$

Il contient par conséquent le terme

$$\dot{\mathrm{E}}_{\mu\nu} = \mathrm{E}_{\mu\nu,0} + \ldots = - \varepsilon_{\mu\nu,00} + \ldots,$$

qui est pour $\mu$, $\nu = i$, $k$ le premier terme de (52). En effet l'équation (55) constitue la forme exacte de l'équation (52), si on suppose que les $\Theta_{\mu\nu}$ ont été éliminés de (55) à l'aide de la loi de l'élasticité (33). Sous les hypothèses que nous avons fait dans ce travail sur le champ gravitationnel initial $\gamma_{\mu\nu}$ et les tensions initiales ${}_0\Theta_{ik}$ l'équation (55) devient au premier ordre identique à l'équation (52).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Weber, *General Relativity and Gravitational Waves*, Interscience Publishers, New York, 1961, chap. 8.
[2] J. L. Synge, *Math. Z.*, t. **72**, 1959, p. 82.
[3] C. B. Rayner, *Proc. Roy. Soc.* (London), vol. **272 A**, 1963, p. 44.
[4] W. C. Hernandez Jr., *Phys. Rev.*, D, vol. **1**, 1970, p. 1013.
[5] N. Rosen, *Phys. Rev.*, vol. **71**, 1947, p. 54; G. Salzman et A. Taub, *Phys. Rev.*, vol. **95**, 1954, p. 1659.
[6] F. A. E. Pirani (non publié); J. F. Bennoun, *C. R. Acad. Sc.*, t. **259**, 1964, p. 3705; J. F. Bennoun, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **A 3**, 1965, p. 41.

(*Manuscrit reçu le* 23 *juillet* 1971.)