ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JAN TARSKI

Intégrale d'« histoire » pour le champ quantifié libre scalaire

Annales de l'I. H. P., section A, tome 15, nº 2 (1971), p. 107-140
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__15_2_107_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XV, n° 2, 1971, p. 107-140. *Physique théorique.*

Intégrale d' « histoire » pour le champ quantifié libre scalaire

par

Jan TARSKI

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies,
Faculté des Sciences de Paris; et Faculté des Sciences d'Amiens.

SOMMAIRE. — L'intégrale d'histoire est construite pour le champ libre scalaire, par adaptation de la définition d'Itô de l'intégrale de chemin. Les propriétés principales de cette intégrale discutées dans le texte sont les suivantes: l'intégrabilité de certaines fonctionnelles caractéristiques, la représentation des valeurs moyennes du vide des fonctionnelles chronologiques, et des lois de composition.

ABSTRACT. — The history integral for the free scalar field is constructed, by adapting Itô's definition of the path integral. The main properties of this integral discussed in the text are the following: integrability of certain characteristic functionals, representation of time-ordered vacuum expectation values, and composition laws.

1. INTRODUCTION

Dans un travail récent [*1*], l'auteur a discuté une description fonctionnelle des théories des champs, pour un temps fixé. La base mathématique de cette étude comprenait surtout des mesures non gaussiennes sur un espace commode de dimension infinie, e. g. sur $\mathscr{S}'$.

Le cadre qui y est présenté, ne fournit pas de base pour décrire l'évolution temporelle, sauf d'une manière détournée, i. e. par voie de théories euclidiennes [*2*] et de prolongement analytique. Des méthodes fonctionnelles plus directes pour aborder une telle description dépendent en particulier de l'intégrale d'histoire.

L'intégrale d'histoire est un type de l'intégrale de Feynman, à savoir, l'extension de l'intégrale de chemin à un nombre infini de degrés de liberté. Cette extension fut indiquée d'abord dans [*3*], et des présentations plus récentes de ce sujet se trouvent dans les références [*4*]-[*10*], et ailleurs.

L'intégrale d'histoires, dans une formulation particulièrement commode (e. g. [*4*], [9]), donne l'équation

$$\langle (\mathrm{F}\{\varphi\})_+ \rangle_0 = \int \mathscr{D}(\eta) e^{i\mathrm{A}\{\eta\}} \mathrm{F}\{\eta\}, \tag{1.1}$$

où à gauche, on prend des produits chronologiques, et A est l'action du champ φ :

$$\mathrm{A}\{\varphi\} = \int d^4u(\mathrm{L}^{(0)}\{\varphi\} + \mathrm{L}_{\mathrm{int}}\{\varphi\})(u), \tag{1.2a}$$

$$\mathrm{L}^{(0)}\{\varphi\}(u) = \frac{1}{2} : \dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2 : (u). \tag{1.2b}$$

Dans (1.1) et (1.2), on comprend toutes les valeurs de t au lieu d'un intervalle fini, et ce fait change la structure de l'intégrale autant que le nombre de degrés de liberté. En fait, supposons qu'on remplace le champ libre par un nombre croissant d'oscillateurs non couplés, et qu'on construit des intégrales de chemin correspondantes. Alors, l'intégrale finale, dans la limite, différera de celle dans (1.1) et manquera de la grande simplicité qu'on trouve dans cette formule-ci (voir e. g. [7]).

Ce travail-ci donne une construction rigoureuse de l'intégrale comme dans (1.1), pour le cas le plus simple d'un champ libre scalaire. Il semble qu'une telle construction n'a pas été tentée précédemment, en dépit du fait qu'un grand corps de résultats sur le champ libre soit disponible. Néanmoins, ce n'est pas tout à fait surprenant, car les études sur la base de l'intégrale de chemin (ce qui est plus simple) sont encore assez récentes [*11*]-[*13*].

Notre construction est une adaptation de la méthode d'Itô [*13*], et nous regardons brièvement une autre possibilité, dépendant de la formule de Trotter. Cependant, la variété des études récentes des intégrales de chemin montre, que des définitions et constructions plus satisfaisantes seront, peut-être, encore introduites. Dans ce sens, cette étude-ci doit être considérée comme provisoire.

Le but principal de ce papier est l'établissement de la formule (1.1) pour le champ libre, en comprenant les résultats préparatoires, et des extensions simples. Mais une sorte de propriété de l'intégrale d'histoire est examinée en détail, à savoir, certaines lois de composition.

On commente la notation : souvent, une intégrale fonctionnelle est caractérisée par un poids e^{F}, de façon que

$$\int \mathscr{D}(\eta) e^{\mathrm{F}\{\eta\}} = 1. \tag{1.3}$$

Cette notation indique le comportement suivant sous translation :

$$\mathscr{D}(\eta) = \mathscr{D}(\eta + \xi),$$

et e^{F} se transforme de la manière évidente. S'il y a une ambiguïté concernant le poids pour une intégrale donnée, on peut écrire $\mathscr{D}_{\mathrm{F}}$, $\mathscr{D}_1$, etc. Alors, par définition,

$$\int \mathscr{D}_1(\eta) e^{\mathrm{F}_1\{\eta\}} = \int \mathscr{D}_2(\eta) e^{\mathrm{F}_2\{\eta\}} = 1, \tag{1.4a}$$

mais typiquement

$$\int \mathscr{D}_1(\eta) e^{\mathrm{F}_2\{\eta\}} = \mathrm{J}(\mathrm{M})^{-1}, \tag{1.4b}$$

où J(M) est le jacobien (ou le déterminant) de la transformation M qui mène de F_1 à F_2. Dans ce papier-ci, F sera toujours un polynôme quadratique sur un espace hilbertien.

Dans la section 2, on résume les points saillants de la construction d'Itô, dont une forme modifiée est présentée dans la section 3. Ensuite, on considère l'oscillateur harmonique : ses valeurs moyennes chronologiques en section 4, et une loi de composition de l'intégrale correspondante en section 5. La section 6 est consacrée à l'intégrale d'histoire pour le champ libre scalaire, et la section 7, aux certaines constructions liées.

L'appendice A contient quelques démonstrations. Enfin, on discute brièvement, et d'une manière heuristique : les fonctions de Green, dans l'appendice B, et la possibilité de l'emploi de la formule de Trotter, dans l'appendice C.

L'auteur aimerait remercier le Professeur K. Itô pour une discussion très utile, et le Docteur R. Sénéor pour un exemple de la section 3. Il est très reconnaissant de l'hospitalité du Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies à Paris.

2. L'INTÉGRALE DE CHEMIN ET L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

Nous récapitulons la théorie d'Itô [*13*]. C'est en effet une adaptation de la définition

$$\mathrm{I}(f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\pi i)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\frac{1}{2}(i-\varepsilon)x^2} f(x), \tag{2.1}$$

au cas où x varie sur un espace hilbertien. Le fait que les mesures gaussiennes sur les espaces hilbertiens sont déterminées par les opérateurs à trace (ou, par ceux d'Hilbert-Schmidt, voir [*14*], [*15*]) motive la procédure suivante.

Soit $\mathscr{T}$ la classe d'opérateurs symétriques, strictement positifs, et à trace, sur un espace hilbertien réel $\mathscr{H}$. Pour chaque $\mathrm{T} \in \mathscr{T}$, on a la mesure gaussienne (normalisée) $\mathrm{N}(dx, \alpha, \mathrm{T})$ ayant α comme le vecteur moyen et T comme l'opérateur de covariance. Dans le cas de dimension finie $k < \infty$, on peut écrire explicitement,

$$\mathrm{N}(dx, \alpha, \mathrm{T}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}k} (\det \mathrm{T})^{-\frac{1}{2}} d^k x \exp\left[-\frac{1}{2} \langle x-\alpha, \mathrm{T}^{-1}(x-\alpha) \rangle \right]. \tag{2.2a}$$

Si $\alpha \in \mathrm{D}(\mathrm{T}^{-1})$, on peut écrire, en utilisant la notation de l'Introduction,

$$\mathrm{N}(dx, \alpha, \mathrm{T}) = \mathscr{D}(x) \exp\left[-\frac{1}{2} \langle x - \alpha, \mathrm{T}^{-1}(x - \alpha) \rangle \right]. \tag{2.2b}$$

Or, soient σ_ν les valeurs propres de T. La mesure N définit la fonctionnelle,

$$\mathrm{F}^{(\mathrm{T})}(g) = c_{\mathrm{T}}^{-1} \int \mathrm{N}(dx, \alpha, \mathrm{T}) g\{x\}, \tag{2.3a}$$

où

$$c_{\mathrm{T}} = \Pi_\nu (1 + i^{-1}\sigma_\nu)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.3b}$$

Nous avons supprimé la dépendance de $\mathrm{F}^{(\mathrm{T})}$ de α. Les inverses des racines carrées doivent être choisis dans le premier quadrant. Puisque $\Sigma\sigma_\nu < \infty$, le produit infini est convergent.

On a supposé l'intégrabilité de g. C'est toujours le cas si g est bornée et continue pour la topologie forte sur $\mathscr{H}$ (cf. [*15*], p. 6).

Dans la classe $\mathscr{T}$ on introduit une relation d'ordre : pour $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathscr{T}$, on pose

$$\mathrm{T}_1 > \mathrm{T}_2 \qquad \text{si} \qquad \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 \in \mathscr{T}. \tag{2.4}$$

On dénote maintenant par $\lim_{\mathrm{T}}$ la limite quand $\mathrm{T} \to \infty$ en suivant cet ensemble filtrant. Itô définit

$$\mathrm{F}_{\infty}(g) = \lim_{\mathrm{T}} \mathrm{F}^{(\mathrm{T})}(g), \tag{2.5}$$

si la limite existe et ne dépend pas de $\alpha \in \mathscr{H}$.

Nous donnons dans la section suivante une construction semblable, où cependant (2.5) est remplacée par

$$\mathrm{F}_{\infty}(g) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{F}^{(n\mathrm{T})}(g), \tag{2.6}$$

à condition que la limite ne dépende pas de $\alpha \in \mathscr{H}$ et de $\mathrm{T} \in \mathscr{T}$, pour $\mathrm{T} > \mathrm{T}_0(\alpha, g) \in \mathscr{T}$.

ASSERTION (1). — *Tous les théorèmes dans [13] restent valables si la définition* (2.5) *est remplacée par* (2.6) *(les conditions accompagnantes étant comprises).*

Les facteurs c_{T} dans (2.3) sont choisis afin que (pour $\alpha = 0$)

$$g_0\{x\} = e^{\frac{1}{2}i\langle x,x\rangle} \qquad \text{donne} \qquad \mathrm{F}^{(\mathrm{T})}(g_0) = 1, \tag{2.7}$$

et alors $\mathrm{F}_{\infty}(g_0) = 1$. Parfois, il est commode d'écrire

$$g\{x\} = e^{\frac{1}{2}i\langle x,x\rangle}\bar{g}\{x\}, \qquad \overline{\mathrm{F}}_{\infty}(\bar{g}) = \mathrm{F}_{\infty}(g). \tag{2.8}$$

Certaines propriétés s'expriment plus facilement pour F_{∞} et g, et les autres, pour $\overline{\mathrm{F}}_{\infty}$ et $\bar{g}$. Dans les sections suivantes, nous utilisons surtout les fonctionnelles comme $\bar{g}$ ici, avec les exponentielles séparées (mais les barres seront supprimées).

L'intégrale que nous venons de présenter, i. e. F_{∞} ou $\overline{\mathrm{F}}_{\infty}$, est invariante par transformations isométriques de $\mathscr{H}$ (i. e. translations et transformations orthogonales), et ce fait mène à la généralisation suivante. On introduit dans [13] des *espaces quasi-hilbertiens* (*hilbertian spaces*, ce qui se distingue des *Hilbert spaces*) : un espace métrique $\mathscr{M}$ est quasi-hilbertien s'il existe une transformation isométrique de $\mathscr{M}$ sur un espace hilbertien $\mathscr{H}$. Alors, l'intégrale est définie d'une manière naturelle sur $\mathscr{M}$.

Un exemple simple d'espace quasi-hilbertien (non hilbertien) est le suivant. Prenons $\mathscr{H}$ hilbertien et $\xi_0 \notin \mathscr{H}$ tel que $\xi_0 + \xi$ soit défini pour $\xi \in \mathscr{H}$. Alors, on pose

$$\mathscr{M} = \xi_0 + \mathscr{H}. \tag{2.9}$$

On considère maintenant la fonction de Green $\mathrm{G}(t, y ; s, u)$ pour l'équation de Schrödinger à une dimension et avec un potentiel commode V :

$$\psi(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} du \mathrm{G}(t, y; s, u)\psi(s, u). \tag{2.10a}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(t, y; s, u) &= [m/2\pi i(t-s)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{F}_{\infty}(g) \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i(t-s)}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Gamma} \mathscr{D}(x) \exp\left(i\int_s^t d\tau\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \mathrm{V}\{x(\tau)\}\right]\right), \end{aligned} \tag{2.10b}$$

et g est la dernière exponentielle. L'espace quasi-hilbertien Γ est donné par

$$\Gamma = \xi_0 + \mathscr{H}', \qquad \xi_0(\tau) = u + (\tau - s)(y-u)/(t-s), \tag{2.11a}$$

et $\mathscr{H}'$ est défini par

$$\langle \xi, \xi \rangle_{\mathrm{W}} = m\int_s^t d\tau\dot{\xi}^2, \qquad \xi(s) = \xi(t) = 0. \tag{2.11b}$$

On peut appeler $x \in \Gamma$ un chemin, et ainsi le nom *intégrale de chemin* pour F_{∞} est approprié.

L'intégrale F_{∞} existe en particulier dans le cas suivant [*13*] :

LEMME (2). — *Soit*

$$\mathrm{V}(u) = \frac{1}{2}k^2u^2,$$

et l'on suppose $0 < t - s < \pi k^{-1}$. *Alors* $\mathrm{F}_{\infty}(g)$ *correspondante existe et*

$$\begin{aligned} &\mathrm{G}(t, y; s, u) \\ &= \left(\frac{mk}{2\pi i \sin[k(t-s)]}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{imk}{2}\cdot\frac{(y^2+u^2)\cos[k(t-s)] - 2uy}{\sin[k(t-s)]}\right]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

On voit que, quand $t - s$ s'accroît jusqu'à πk^{-1} et au-delà, alors G exhibe un point de ramification, qui est lié au fait que l'exposant dans (2.10b) peut s'annuler. Cette singularité a des analogies dans la suite, où l'on prend l'intervalle temporel $(-\infty, \infty)$.

3. UNE VARIANTE DE LA CONSTRUCTION D'ITO

Pour l'intégrale d'histoire, il est naturel de la définir par l'action (1.2) toute entière, plutôt que par la partie venant du terme $:\dot{\varphi}^2:$. Le caractère de l'action étant indéfini, il faut employer la règle $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$, et d'ordinaire nous prendrons $\varepsilon > 0$. On retournera aux systèmes particuliers dans les sections suivantes, et pour maintenant, la discussion sera assez générale.

Soit Q une forme quadratique sur un espace hilbertien réel $\mathscr{H}$,

$$Q\{\eta\} = \frac{1}{2} i \langle \eta, B\eta \rangle - \frac{1}{2} \langle \eta, C\eta \rangle, \tag{3.1a}$$

où B et C sont des opérateurs linéaires bornés, et symétriques. On suppose la forme Q telle que, pour $\forall \eta \in \mathscr{H}$,

$$Q\{\eta\} \neq 0 \quad \text{si} \quad \eta \neq 0, \tag{3.1b}$$

$$\operatorname{Re} Q\{\eta\} \leqslant 0 \quad (\text{i. e. } C \geqslant 0). \tag{3.1c}$$

Parfois, il est commode d'ajouter des conditions supplémentaires,

$$[B, C] = 0, \tag{3.2a}$$

$$C > 0, \tag{3.2b}$$

$$\inf |Q\{\eta\}| / \langle \eta, \eta \rangle > 0. \tag{3.2c}$$

Au lieu de Q on peut considérer, plus généralement, une fonctionnelle Φ (i. e., $\Phi : \mathscr{H} \to R$) vérifiant

$$\Phi \text{ est continue pour la topologie forte,} \tag{3.3a}$$

$$\Phi\{\eta\} \neq 0 \text{ si } \eta \neq 0, \qquad \operatorname{Re} \Phi\{\eta\} \leqslant 0. \tag{3.3b,c}$$

Correspondant à une telle fonctionnelle, nous définissons l'intégrale fonctionnelle de la manière suivante.

DÉFINITION (3). — *Soit $\mathscr{H}$ un espace hilbertien réel, soient Φ et f deux fonctionnelles sur $\mathscr{H}$, où Φ vérifie* (3.3*a-c*). *Prenons $\alpha \in \mathscr{H}$, $T \in \mathscr{T}$, et soit* $N(d\eta, \alpha, T)$ *la mesure correspondante* [*voir* (2.2) *et dessus*]. *On pose*

$$\hat{I}_{nT,\alpha}(f) = c_{nT}^{-1} \int N(d\eta, \alpha, nT) e^{\Phi\{\eta\}} f\{\eta\} \tag{3.4a}$$

si l'intégrale est définie. La constante c_{nT} est déterminée par $\hat{I}_{nT,0}(1) = 1$. (On suppose que cette condition donne $c_{nT} \neq 0$). Nous définissons maintenant

$$\hat{I}_\infty^\Phi(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \hat{I}_\infty(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{n\to\infty} \hat{I}_{nT,\alpha}(f) \tag{3.4b}$$

s'il existe $T_0(\alpha, f) = T_0 \in \mathscr{T}$ tel que la limite soit définie, et qu'elle ne dépende pas de $T \in \mathscr{T}$, quand $T > T_0$, ni de $\alpha \in \mathscr{H}$.

Si $\hat{I}_\infty$ est défini pour f, nous dirons que f est intégrable pour le poids e^Φ, ou brièvement, intégrable.

La définition d'Itô (voir la section 2) ne diffère de la précédente qu'en deux aspects : (1) Itô suppose une forme particulière Q pour Φ, et (2) il prend T $\to \infty$ en suivant un ensemble filtrant. Nous avons remplacé cette limite par $\lim_{n\to\infty}$, $\forall T > T_0$, pour pouvoir établir facilement l'intégrabilité de certaines fonctionnelles importantes.

Nous démontrons maintenant :

LEMME (4). — *Pour le cas d'une forme quadratique* Q *de* (3.1*a*), *et pour* $\forall T \in \mathscr{T}$,

$$c_T = \int_{\mathscr{H}} \mathscr{D}_T(\eta) e^{-\frac{1}{2}\langle \eta, T^{-1}\eta \rangle} e^{Q\{\eta\}} \neq 0. \tag{3.5}$$

Démonstration. — La notation présente nous mène aux transformations et aux calculs standards. On donne des détails. D'abord, nous complexifions l'espace hilbertien,

$$\mathscr{H}_c = \mathscr{H} + i\mathscr{H}, \tag{3.6}$$

le nouveau produit scalaire étant linéaire dans le deuxième argument. L'action des opérateurs B, etc., est définie sur $\mathscr{H}_c$ par linéarité. Alors

$$c_T = \int_{\mathscr{H}} \mathscr{D}_T(\eta) \exp \left\langle \eta, -\frac{1}{2}(I - iBT + CT)T^{-1}\eta \right\rangle. \tag{3.7}$$

Or, considérons un sous-espace $\mathscr{H}_k \subset \mathscr{H}_c$ de dimension finie, $k < \infty$, et invariant pour T. Soit P le projecteur correspondant, et l'on pose (où R est un opérateur),

$$PRP = R_k, \qquad R'_k = R_k|_{\mathscr{H}_k}, \qquad Q_k\{\eta\} = \left\langle \eta, \frac{1}{2}(iB - C)_k\eta \right\rangle. \tag{3.8}$$

Le remplacement de Q par Q_k dans (3.5) donne au lieu de (3.7),

$$\begin{aligned}[(2\pi)^k \det T'_k]^{-\frac{1}{2}} \int d\eta^1 \dots d\eta^k \exp \left\langle \eta, -\frac{1}{2}(I'_k - iB'_kT'_k + C'_kT'_k)(T'_k)^{-1}\eta \right\rangle \\ = [\det (I'_k - iB'_kT'_k + C'_kT'_k)]^{-\frac{1}{2}} = [\det (I - iB_kT + C_kT)]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

De tels calculs se trouvent e. g. dans ([*14*], chap. IV). Le choix de la racine carrée ne nous concerne pas. Le premier facteur est comme dans (2.2*a*).

Pour la limite $k \to \infty$, P $\to$ I, le théorème de la convergence bornée nous permet de retourner de Q_k à Q dans (3.5). D'ailleurs, les opérateurs BT et CT restent à trace ([*14*], chap. I) et le dernier déterminant reste bien défini [*16*]. Donc

$$c_T = [\det (I - iBT + CT)]^{-\frac{1}{2}} \neq 0. \tag{3.10}$$

Le lemme est établi. On peut noter aussi, que $|c_T| \leqslant 1$, à raison de la condition Re Q $\leqslant 0$, et donc det $(\dots) = 0$ est impossible.

Nous retournons à la définition de l'intégrale. Le poids (formel) de la mesure gaussienne,

$$\exp\left\langle x-\alpha, -\frac{1}{2}\mathrm{T}^{-1}(x-\alpha)\right\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\mathrm{T}^{-\frac{1}{2}}(x-\alpha)\|^2\right],$$

suggère l'utilité d'avoir $\alpha \in \mathrm{D}(\mathrm{T}^{-\frac{1}{2}})$. Le lemme suivant donne un critère simple pour assurer cette relation.

LEMME (5). — *Soient* M_0, M_1 *deux opérateurs fermés, définis sur des domaines denses (de* $\mathscr{H}$ *ou de* $\mathscr{H}_c$*), et tels que* M_0^*, M_1^* *soient inversibles. Si* $\mathrm{D}(\mathrm{M}_1) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{M}_0)$ *et* $\|\mathrm{M}_0\xi\| \leqslant \|\mathrm{M}_1\xi\|$ *pour tous* $\xi \in \mathrm{D}(\mathrm{M}_1)$, *alors [pour* $\forall\zeta \in \mathrm{D}(\mathrm{M}_0^*)$*],*

$$\|\mathrm{M}_1^{*-1}\zeta\| \leqslant \|\mathrm{M}_0^{*-1}\zeta\|, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}(\mathrm{M}_0^{*-1}) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{M}_1^{*-1}). \tag{3.11a}$$

En particulier, si R_0 *et* R_1 *sont bornés et symétriques, si* $\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1 > 0$, *et si* $\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_0 \geqslant 0$, *alors*

$$\mathrm{D}(\mathrm{R}_0^{-\frac{1}{2}}) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{R}_1^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.11b}$$

Pour la démonstration de (3.11*a*), voir [*17*], p. 333. L'inclusion (3.11*b*) est un corollaire, qu'on peut établir indépendamment et facilement en utilisant le lemme 3 de [*13*].

Il est naturel, aussi, de se demander si $\mathrm{T} > \mathrm{T}_0$ implique

$$\mathrm{D}(\mathrm{T}_0^{-1}) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{T}^{-1}). \tag{3.12}$$

L'inclusion s'ensuivrait, si l'on avait $\mathrm{R}_1^2 - \mathrm{R}_0^2 \geqslant 0$ sous les hypothèses de ce lemme. Cependant, cette dernière inégalité est contredite par les matrices suivantes (trouvées par R. Sénéor),

$$\mathrm{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{R}_0 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & (3/8)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Un problème fondamental qui reste est celui de l'intégrabilité des fonctionnelles. Nous nous confions à deux simples conclusions, adaptées de [*13*].

LEMME (6). — *Soit* f *une fonctionnelle intégrable pour le poids* e^{Φ} *[voir (3.3)]. Alors la fonctionnelle*

$$h\{\eta\} = f\{\eta+\xi\}\, e^{\Phi\{\eta+\xi\}} e^{-\Phi\{\eta\}} \qquad (\text{où } \xi \in \mathscr{H}) \tag{3.14a}$$

est intégrable de même, et

$$\hat{\mathrm{I}}_\infty(f) = \hat{\mathrm{I}}_\infty(h). \tag{3.14b}$$

En fait, dans les intégrales approximatives pour $\hat{I}_\infty$, une telle transformation équivaut la translation $\alpha \to \alpha + \xi$. Cf. le lemme 4 de [13].

Le lemme justifie la notation de l'Introduction. C'est-à-dire, les éq. (3.14) peuvent s'écrire comme

$$\int \mathscr{D}_{\Phi\{\eta\}}(\eta) e^{\Phi\{\eta\}} f\{\eta\} = \int \mathscr{D}_{\Phi\{\eta\}}(\eta) e^{\Phi\{\eta+\xi\}} f\{\eta+\xi\}, \tag{3.15}$$

le $\mathscr{D}(\eta)$ étant invariant par translation.

Avant de donner le deuxième résultat, nous notons quelques propriétés des opérateurs tels comme les précédents. En appliquant le lemme suivant, on prendra pour W les opérateurs C, $C + T^{-1}$, $T^{\frac{1}{2}}CT^{\frac{1}{2}}$, etc.

LEMME (7). — *Soient* V *et* W *deux opérateurs sur un espace hilbertien réel* $\mathscr{H}$, V *étant symétrique et borné, et* W, *auto-adjoint.*

a) On suppose que pour $\forall \eta \in D(W) \overset{\mathrm{df}}{=} D$ (*et* $\eta \neq 0$),

$$|i\langle \eta, V\eta \rangle - \langle \eta, W\eta \rangle| / \langle \eta, \eta \rangle \geqslant a > 0, \qquad \langle \eta, W\eta \rangle \geqslant 0. \tag{3.16a,b}$$

Alors, quand l'action de V *et de* W *s'étend à l'espace complexe* $\mathscr{H}_c$, *ces inégalités restent valables sous la forme suivante : pour* $\forall \zeta \in D + iD$ (*et* $\neq 0$), *et avec*

$$M = iV - W, \tag{3.17}$$

on a

$$|\langle \zeta, M\zeta \rangle| / \langle \zeta, \zeta \rangle \geqslant a, \qquad \mathrm{Re}\,\langle \zeta, M\zeta \rangle \leqslant 0. \tag{3.18a,b}$$

Il résulte aussi, que

$$\mathrm{def}\, M = 0, \qquad \|M^{-1}\| \leqslant a^{-1}, \tag{3.19a,b}$$

$$D(M^{-1}) = \mathscr{H}_c, \qquad \mathrm{Re}\,\langle \xi, M^{-1}\xi \rangle \leqslant 0, \tag{3.19c,d}$$

pour $\forall \xi \in \mathscr{H}_c$.

b) Si au lieu de (3.16*a*) *on admet* $a = 0$, *alors les inégalités* (3.18*b*), (3.19*d*) *restent valables, ceci à condition que* M *soit inversible, et que* $\xi \in D(M^{-1})$.

c) La possibilité $a = 0$ *est admise. Si l'on suppose au lieu de* (3.16*b*),

$$\langle \eta, W\eta \rangle > 0 \quad \text{si} \quad \eta \neq 0, \tag{3.20}$$

alors M *est inversible, et* $D(M^{-1})$ *est dense dans* $\mathscr{H}_c$.

Ce lemme dépend des propriétés fondamentales des opérateurs, dont nous ferons un bref rappel. (Voir e. g. [17], p. 165, 230, 234, 268). Soit N un opérateur sur $\mathscr{H}_c$, fermé et inversible, avec D(N) dense dans $\mathscr{H}_c$. Alors

$$\mathrm{def}\, N = \mathrm{nul}\, N^*, \tag{3.21a}$$

$$\mathrm{def}\, N = 0 \Leftrightarrow D(N^{-1}) \text{ est dense dans } \mathscr{H}_c. \tag{3.21b}$$

L'opérateur N^{-1} est nécessairement fermé. Ensuite, on introduit

$$\Theta(N) = \{ u : u = \langle \eta, N\eta \rangle, \eta \in D(N), \| \eta \| = 1 \}, \qquad (3.22a)$$
$$\Gamma(N) = \overline{\Theta(N)}. \qquad (3.22b)$$

Si def $N = 0$, et si z appartient à l'ensemble résolvant de N, alors

$$\| (N - z)^{-1} \| \leqslant (\text{dist}\, [z, \Gamma(N)])^{-1}. \qquad (3.23)$$

Démonstration. — *a*) On établit (3.18*a*,*b*) directement, en écrivant $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, $\zeta_j \in \mathscr{H}$. Mais (3.18*a*) s'applique aussi bien à M^*, donc nul $M^* = 0$, et (3.21*a*,*b*) donnent (3.19*a*) et le fait que $D(M^{-1})$ est dense. Ensuite, (3.23) entraîne (3.19*b*,*c*) et (3.19*d*) découle de

$$\operatorname{Re} \langle M\chi, \chi \rangle = \operatorname{Re} \langle \chi, M\chi \rangle \leqslant 0, \quad \text{avec} \quad \chi = M^{-1}\xi \in D + iD. \qquad (3.24)$$

b) Les mêmes arguments s'appliquent.

c) Prenons $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, et supposons que $M\zeta = 0$. Il s'ensuit que

$$- W\zeta_1 - V\zeta_2 = 0, \qquad V\zeta_1 - W\zeta_2 = 0. \qquad (3.25)$$

On en déduit $\langle \zeta_1, W\zeta_1 \rangle + \langle \zeta_2, W\zeta_2 \rangle = 0$; et $W > 0$ implique $\zeta = 0$. On voit que nul $M = 0$, ainsi que nul $M^* = 0$, et (3.21*a*,*b*) donnent le lemme.

DÉFINITION (8). — *Soit $\mathscr{H}$ un espace hilbertien, et $\mathscr{H}'$ un sous-espace. On dénote par $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}')$ l'ensemble des fonctionnelles caractéristiques suivantes,*

$$f\{\eta\} = \int_{\mathscr{H}'} d\mu(\xi) e^{i\langle \xi, \eta \rangle}, \qquad (3.26)$$

(*définies pour $\eta \in \mathscr{H}$*), *où μ est une mesure complexe sur $\mathscr{H}'$, dont le support est borné, et dont la variation absolue totale est bornée. Cette mesure doit être définie sur les ensembles ouverts pour la topologie forte.*

THÉORÈME (9). — *Soit* Q *une forme sur un espace réel hilbertien, comme dans* (3.1). *On suppose que l'inverse* $(iB - C)^{-1}$ *soit défini sur un domaine dense dans $\mathscr{H}_c$. On prend un sous-espace $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$ tel que la restriction de* $(iB - C)^{-1}$ *à $\mathscr{H}'$ soit bornée. Alors, chaque fonctionnelle dans $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}')$ est intégrable* (*pour le poids* e^{Q}). *Pour f donnée par* (3.26), *on a*

$$\hat{I}_\infty(f) = \int_{\mathscr{H}'} d\mu(\xi) \exp \left\langle \xi, \frac{1}{2}(iB - C)^{-1}\xi \right\rangle. \qquad (3.27)$$

On donne la démonstration dans l'appendice A. D'après le lemme 7, l'hypothèse sur l'inverse est satisfaite si une des conditions supplémentaires (3.2*b*,*c*) est remplie. Ce lemme-ci entraîne aussi la convergence de la dernière intégrale [cf. (3.19*d*)], ainsi que le corollaire suivant :

COROLLAIRE (10). — *Si la condition supplémentaire* (3.2*c*) *est remplie, alors chaque fonctionnelle dans* $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H})$ *est intégrable.*

On n'a pas discuté la condition supplémentaire [B, C] = 0. Elle nous permettrait d'exprimer l'opérateur $(i\mathrm{B} - \mathrm{C})^{-1}$ par sa décomposition spectrale. Cette condition-ci est vérifiée dans le cas du champ libre, et ailleurs. Elle doit avoir d'autres conséquences intéressantes, mais nous ne regarderons pas cette question.

4. VALEURS MOYENNES CHRONOLOGIQUES DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

Avant de plonger dans le cas d'un champ, nous aimerions nous familiariser avec les caractéristiques de l'intégrale dans (1.1). Un modèle simple donnant cette formule se trouve dans [9]. Maintenant, on va en considérer un autre: celui d'un oscillateur harmonique, avec l'opérateur φ et l'action

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau(\dot{\varphi}^2 - m^2\varphi^2). \tag{4.1}$$

Ici, m est une constante > 0, et φ s'identifie avec l'opérateur de position x.

La transformation de Fourier ainsi que la règle $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$, nous mènent à poser [avec $\tilde{\eta}(-\omega) = \tilde{\eta}^*(\omega)$],

$$\mathrm{A}_\varepsilon\{\eta\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\tilde{\eta}(\omega)\tilde{\eta}(-\omega)(\omega^2 - m^2 + i\varepsilon). \tag{4.2}$$

Cette fonctionnelle peut s'incorporer dans le cadre général de la section 3. En fait, A_ε est défini sur l'espace hilbertien suivant,

$$\mathscr{H} = \{\eta \in \mathrm{L}_2(-\infty, \infty) : \eta \quad \text{réelle et} \quad \langle \eta, \eta \rangle < \infty\}, \tag{4.3a}$$

où

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(\omega^2 + \kappa^2)\tilde{\xi}(-\omega)\tilde{\eta}(\omega). \tag{4.3b}$$

La constante κ est arbitraire mais positive.

La forme $i\mathrm{A}_\varepsilon$ est bornée à distance de zéro si $\varepsilon > 0$,

$$\inf |i\mathrm{A}_\varepsilon\{\eta\}| / \langle \eta, \eta \rangle > 0. \tag{4.4}$$

Le théorème 9 ainsi que le corollaire 10 s'appliquent. En outre, l'intégrale de l'équation (4.2) montre la commutativité, [B, C] = 0.

Ce théorème nous permet de faire contact avec les valeurs moyennes chronologiques. Prenons $\xi \in \mathscr{H}$ et posons

$$\tilde{\xi}^{(1)}(\omega) = (\omega^2 + \kappa^2)\tilde{\xi}(\omega), \tag{4.5a}$$

$$\langle \varphi, \xi \rangle = \int d\tau \varphi \xi^{(1)}. \tag{4.5b}$$

Nous suivons maintenant la référence [*4*]. Pour précision, nous ajoutons que les valeurs moyennes chronologiques peuvent être définies par un développement en série. Un calcul formel donne

$$\left\langle \left(\exp i \int d\tau \varphi \xi^{(1)} \right)_+ \right\rangle_0 = \exp \left[\frac{1}{2} i \int d\tau d\tau' \xi^{(1)}(\tau) h_c(\tau - \tau') \xi^{(1)}(\tau') \right] \tag{4.6a}$$

$$= \exp \left[\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2i} \int d\omega \frac{|\tilde{\xi}^{(1)}(\omega)|^2}{\omega^2 - m^2 + i\varepsilon} \right]. \tag{4.6b}$$

[Pour la fonction h_c, cf. les équations (B.1)]. On reconnaît la dernière expression comme l'intégrale de $f_\xi = e^{i\langle \cdot, \xi \rangle}$, avec le poids e^{iA_ε} et dans la limite $\varepsilon \downarrow 0$ (l' « exp » et le « lim » étant échangeables).

La limite dans (4.6*b*) doit être égale à l'expression obtenue par la décomposition

$$(\omega^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1}$$
$$= \{ [\omega - (m^2 - i\varepsilon)^{\frac{1}{2}}]^{-1} - [\omega + (m^2 - i\varepsilon)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \} / 2(m^2 - i\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \tag{4.7a}$$

et par l'emploi de la règle

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (z - i\varepsilon)^{-1} = \mathrm{PV}(z^{-1}) + i\pi\delta(z). \tag{4.7b}$$

La valeur principale est définie si $\tilde{\xi}$ (ou $\tilde{\xi}^{(1)}$) est Hölder-continue en $\omega = \pm m$ [*18*], et si $\xi \in \mathscr{H}$. Pour brévité, nous nous limitons maintenant à de telles fonctions. On introduit

$$\check{\mathscr{H}} = \{ \xi \in \mathscr{H} : \xi \text{ est Hölder-continue en } \omega = \pm m \}. \tag{4.8}$$

Pour $\xi \in \check{\mathscr{H}}$, on définit l'intégrale dans (4.6*a*) par la limite dans (4.6*b*).

Considérons maintenant $f \in \mathscr{F}_{\mathscr{H}}(\check{\mathscr{H}})$. Le théorème de la convergence bornée permet l'échange de $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$ avec l'intégration par rapport à ξ. D'autre part, la définition par développement en série des fonctions chronologiques correspondantes donne des termes comme le suivant,

$$-\frac{1}{2} \int d\mu(\xi_0) \int d\tau_1 d\tau_2 \xi_0(\tau_1) \xi_0(\tau_2) i^{-1} h_c(\tau_1 - \tau_2), \tag{4.9}$$

et l'on voit l'accord avec les résultats de l'intégration fonctionnelle. Nous résumons.

COROLLAIRE (11). — *L'équation suivante,*

$$\langle (f\{\varphi\})_+ \rangle_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \mathscr{D}(\eta) e^{iA_\varepsilon\{\eta\}} f\{\eta\} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int \mathscr{D}(\eta) e^{iA} f, \tag{4.10}$$

est valable pour les fonctionnelles $f \in \mathscr{F}_{\mathscr{H}}(\check{\mathscr{H}})$.

On peut penser à $\mathscr{H}$ comme l'espace d'intégration. C'est un espace de chemins. Nous appellerons ainsi cette intégrale-ci par l'*intégrale de chemin modifiée.*

Les chemins sont en fait continus (comme dans l'intégrale de [*13*]), et l'on peut exprimer la valeur de $\zeta \in \mathscr{H}$ à $\tau = s$ ainsi. Posons

$$\eta_s(\tau) = e^{-\kappa|\tau - s|}, \qquad \tilde{\eta}_s(\omega) = 2\kappa(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\omega^2 + \kappa^2)^{-1} e^{is\omega}, \tag{4.11a}$$

alors

$$\zeta(s) = (2\kappa)^{-1} \langle \eta_s, \zeta \rangle. \tag{4.11b}$$

Il sera intéressant et utile d'examiner un cas particulier de (4.6). On prend (où $\lambda \in \mathrm{R}$)

$$\xi = (2\kappa)^{-1}\lambda\eta_s, \qquad \xi^{(1)} = \lambda\delta(\tau - s), \qquad \tilde{\xi}^{(1)}(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\lambda e^{is\omega}, \tag{4.12}$$

alors on a

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\lambda^2}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - m^2 + i\varepsilon} = -\frac{\lambda^2}{4m}, \tag{4.13}$$

et enfin

$$\langle e^{i\lambda\varphi(s)} \rangle_0 = \exp(-\lambda^2/4m). \tag{4.14}$$

En fait, nous avons ici la valeur moyenne pour l'état fondamental de l'oscillateur harmonique :

$$\langle e^{i\lambda\varphi(s)} \rangle_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(\pi/m)^{\frac{1}{2}}} |\psi^{(0)}(v)|^2 e^{i\lambda v}, \tag{4.15a}$$

où

$$\psi^{(0)}(v) = \exp\left(-\frac{1}{2}mv^2\right). \tag{4.15b}$$

5. UNE LOI DE COMPOSITION

Les lois de composition que nous développons (ici et dans la section suivante) semblent être la propriété structurale la plus facilement accessible des intégrales considérées. En particulier, ces lois clarifient quelques-unes des formules précédentes, et sont un premier pas vers l'étude des fonctions de Green dans le formalisme présent. Notre argument est une adaptation de celui d'Itô [13], qui établit cette propriété pour des intégrales donnant les fonctions de Green en mécanique quantique.

Prenons η_s comme dans (4.11*a*), et posons:

$$R_- = (-\infty, s), \qquad R_+ = (s, \infty), \tag{5.1a}$$

$$\mathscr{H}^{\pm} = \{ \eta \in \mathscr{H} : \operatorname{supp} \eta \subseteq \overline{R}_{\pm} \}, \tag{5.1b}$$

$$\mathscr{H}_s = \{ u\eta_s : u \in R \}. \tag{5.1c}$$

On voit que $\eta(s) = 0$ pour $\eta \in \mathscr{H}^{\pm}$, et par conséquent

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_s \dotplus \mathscr{H}^- \dotplus \mathscr{H}^+. \tag{5.2}$$

La dépendance de $\mathscr{H}^-$, etc., de s sera supprimée.

Or, soit $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ le sous-ensemble des opérateurs qui laissent les trois sous-espaces invariants. Soit $T \in \mathscr{T}'$, ayant les restrictions respectives $T_s = \sigma$ et $T^{\pm}$. Alors la mesure gaussienne se décompose en facteurs,

$$\int_{\mathscr{H}} \mathscr{D}(\eta) e^{-\frac{1}{2}\langle \eta, T^{-1}\eta \rangle} e^{iA_\varepsilon\{\eta\}} f\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(2\pi\sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-u^2/2\sigma} \times \int_{\mathscr{H}^-} \mathscr{D}(\eta_1) e^{-\frac{1}{2}\langle \eta_1, (T^-)^{-1}\eta_1 \rangle} \int_{\mathscr{H}^+} \mathscr{D}(\eta_2) e^{-\frac{1}{2}\langle \cdots \rangle} e^{iA_\varepsilon} f. \tag{5.3}$$

Nous voulons transformer les deux dernières intégrales aux intégrales des chemins ξ vérifiant $\xi(s) = u$. Il est commode, ainsi, de restreindre les chemins à $R_{\pm}$, et d'introduire

$$\mathscr{M}_{u,\pm} = \{ \xi : \xi = (\zeta + u\eta_s)_{\pm}, \zeta \in \mathscr{H}^{\pm}, u \in R \}, \tag{5.4}$$

où

$$\eta_{\pm} = \eta\,|_{R_{\pm}}. \tag{5.5}$$

On notera les composantes de η dans $\mathscr{H}^{\pm}$ par $\eta^{\pm}$. Les espaces $\mathscr{M}_{u,\pm}$ sont quasi-hilbertiens, voir la section 2. L'intégrale de chemin modifiée se définit facilement pour ces espaces, et nous établirons la formule,

$$\int \mathscr{D}(\eta) e^{iA_\varepsilon\{\eta\}} f\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(\pi\bar{c}_\varepsilon/m)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathscr{M}_{u,-}} \mathscr{D}(\xi_-) \int_{\mathscr{M}_{u,+}} \mathscr{D}(\xi_+) \times e^{iA_{\varepsilon,-}\{\xi_-\}} e^{iA_{\varepsilon,+}\{\xi_+\}} f_{\mathscr{M}}\{u, \xi_-, \xi_+\}. \tag{5.6}$$

On va préciser les symboles du deuxième membre.

La fonctionnelle (restreinte) d'action est définie de la manière évidente. Il n'y a pas de contribution isolée du point $\tau = s$, et l'on pose

$$A_{\varepsilon,\pm}\{\xi\} = A_{\varepsilon,\pm}\{\xi_{\pm}\} = \frac{1}{2}\int_{R_{\pm}} d\tau[\dot{\xi}^2 - (m^2 - i\varepsilon)\xi^2]. \tag{5.7a}$$

On note que

$$A_\varepsilon\{\xi\} = A_{\varepsilon,-}\{\xi\} + A_{\varepsilon,+}\{\xi\}. \qquad (5.7b)$$

Pour les fonctionnelles f de (5.6), on doit avoir

$$f\{u\eta_s + \eta^- + \eta^+\} = f_{\mathcal{M}}\{u, (\eta^- + u\eta_s)_-, (\eta^+ + u\eta_s)_+\}. \qquad (5.8)$$

La dépendance de $f_{\mathcal{M}}$ du premier argument vient du point $\tau = s$.

Ensuite, on peut identifier les espaces $\mathcal{M}_{0,\pm}$ et $\mathcal{H}^\pm$. Pour eux, la construction de la section 3 s'applique directement, définissant

$$\int_{\mathcal{H}^\pm} \mathcal{D}(\zeta)e^{iA_{\varepsilon,\pm}\{\zeta\}}f\{\zeta\}.$$

Pour $\mathcal{M}_{u,\pm}$ en général, on pose

$$\int_{\mathcal{M}_{u,\pm}} \mathcal{D}(\xi)e^{iA_{\varepsilon,\pm}\{\xi\}}f\{\xi\} = \int_{\mathcal{H}^\pm} \mathcal{D}(\zeta)e^{iA_{\varepsilon,\pm}\{\zeta+u\eta_s\}}f\{\zeta + u\eta_s\}, \qquad (5.9)$$

le poids de référence étant toujours $\exp(iA_{\varepsilon,\pm}\{\zeta\})$. Puisque $\eta_s \notin \mathcal{H}^\pm$, le lemme 6 ne s'applique pas, et la nouvelle intégrale diffère en général de celle pour $u = 0$.

La fonctionnelle d'action dans (5.9) peut être exprimée ainsi:

$$iA_{\varepsilon,\pm}\{\zeta + u\eta_s\} = iA_{\varepsilon,\pm}\{\zeta\} + iu\int_{R_\pm} d\tau[\dot{\zeta}\dot{\eta}_s - (m^2 - i\varepsilon)\zeta\eta_s] + \frac{iu^2}{2}(\kappa^2 - m^2 + i\varepsilon)\int_{R_\pm} d\tau\eta_s^2. \qquad (5.10)$$

La première intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{H}^\pm$, ce qui est égal à un produit scalaire. L'intégration par parties donne

$$\int_{R_\pm} d\tau[\dot{\zeta}\dot{\eta}_s - (m^2 - i\varepsilon)\zeta\eta_s] = -(\kappa^2 + m^2 - i\varepsilon)\int_{R_\pm} d\tau\zeta\eta_s, \qquad (5.11a)$$

et nous cherchons l'élément $\chi \in \mathcal{H}^- \dotplus \mathcal{H}^+$ tel que

$$\langle \zeta, \chi \rangle_{\mathcal{H}^\pm} = \int_{R_\pm} d\tau\zeta(-\ddot{\chi} + \kappa^2\chi) = -(\kappa^2 + m^2 - i\varepsilon)\int_{R_\pm} d\tau\zeta\eta_s. \qquad (5.11b)$$

La fonction ζ étant arbitraire, on obtient une équation différentielle pour χ, avec la solution (sur R_- ou sur R_+):

$$\chi(\tau) = -(\kappa^2 + m^2 - i\varepsilon)(2\kappa)^{-1}|\tau - s|e^{-\kappa|\tau-s|}, \qquad (5.12)$$

d'où l'on obtient $\chi^\pm$ et $\chi_\pm$.

D'ailleurs, la seconde intégrale de (5.10) donne $(2\kappa)^{-1}$, et

$$iA_{\varepsilon,\pm}\{\zeta+u\eta_s\}=iA_{\varepsilon,\pm}\{\zeta\}+iu\langle\zeta^\pm,\chi^\pm\rangle+iu^2(\kappa^2-m^2+i\varepsilon)(4\kappa)^{-1}. \quad (5.13)$$

Dénotons maintenant par $B^\pm$, $C^\pm$ les restrictions à $\mathcal{H}^\pm$ de B, C respectivement. Alors, si $\zeta\in\mathcal{H}^\pm$,

$$iA_{\varepsilon,\pm}\{\zeta\} = \frac{1}{2}\langle\zeta, (iB^\pm - C^\pm)\zeta\rangle. \quad (5.14)$$

Ensuite, posons $f = 1$ dans (5.9). Le théorème 9 donne

$$\int_{\mathcal{M}_{u,\pm}} \mathcal{D}(\xi)e^{iA_{\varepsilon,\pm}\{\xi\}} = \exp\left[\frac{iu^2(\kappa^2 - m^2 + i\varepsilon)}{4\kappa} + \frac{u^2}{2}\langle\chi^\pm, (iB^\pm - C^\pm)^{-1}\chi^\pm\rangle\right] \quad (5.15a)$$

$$\overset{\text{df}}{=} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_\varepsilon u^2\right). \quad (5.15b)$$

Les valeurs γ_ε doivent être telles que l'intégrale sur u dans l'équation (5.6) soit convergente pour $\forall\varepsilon > 0$, et que cette équation-ci soit en accord avec les équations (4.15). Ces propriétés des γ_ε sont garanties par :

LEMME (12). — *Les constantes γ_ε de* (5.15*b*) *vérifient*

$$\operatorname{Re}\gamma_\varepsilon \geqslant \varepsilon/2\kappa \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0, \quad (5.16a)$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\gamma_\varepsilon = m. \quad (5.16b)$$

Démonstration. — La première inégalité s'ensuit de (5.15*a*) et du lemme 7, car l'hypothèse de celui-ci reste remplie pour les restrictions $B^\pm$ et $C^\pm$. Quant à (5.16*b*), les calculs sont élémentaires, et nous donnons ici quelques détails. Considérons le cas $s = 0$ et l'espace $\mathcal{H}^+$.

En général, l'inverse d'une restriction d'un opérateur n'égale pas la restriction de l'inverse, et par conséquent, on doit utiliser la transformée de Fourier de la fonction sinus,

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty d\tau \sin\tau\omega\,\chi^+(\tau) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(\kappa^2 + m^2 - i\varepsilon)\frac{\omega}{(\kappa^2+\omega^2)^2}. \quad (5.17a)$$

Le noyau de l'opérateur $(iB^+ - C^+)^{-1}$ [i. e. $(\omega^2+\kappa^2)i^{-1}(\omega^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1}$] et le poids du produit scalaire sont comme précédemment. Donc

$$\langle\chi^+, (iB^+ - C^+)^{-1}\chi^+\rangle = \frac{2(\kappa^2+m^2-i\varepsilon)^2}{i\pi}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\omega^2}{(\kappa^2+\omega^2)^2(\omega^2-m^2+i\varepsilon)}. \quad (5.17b)$$

L'évaluation par la méthode des résidus est directe. Dans la limite $\varepsilon\downarrow 0$, le pole en $\omega = -(m^2 - i\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ donne $-m$, cf. (4.13), et celui en $\omega = i\kappa$

élimine le coefficient $i(\kappa^2 - m^2)(2\kappa)^{-1}$ dans (5.15*a*). Le lemme est établi.

La constante $\bar{c}_\varepsilon$ de l'équation (5.6) est maintenant définie par

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(\pi\bar{c}_\varepsilon/m)^{\frac{1}{2}}} e^{-\gamma_\varepsilon u^2} = 1. \tag{5.18a}$$

En particulier, (5.16*b*) donne

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \bar{c}_\varepsilon = 1. \tag{5.18b}$$

Ensuite, nous discutons l'intégrabilité des fonctionnelles définies sur $\mathscr{M}_{u,\pm}$, et la validité de l'équation (5.6). Nous ne considérons ici que les fonctionnelles caractéristiques, comme dans le théorème 9. Commençons avec l'exponentielle

$$f_\zeta\{\eta\} = e^{i\langle\eta,\zeta\rangle}, \tag{5.19}$$

et, en utilisant les composantes,

$$\langle \eta, \zeta \rangle = (2\kappa)^{-1}u\lambda + \langle \eta^-, \zeta^- \rangle + \langle \eta^+, \zeta^+ \rangle \tag{5.20a}$$

où $u = \eta(s)$ et $\lambda = \zeta(s)$. On pose (pour $\beta \in \mathscr{H}$ ou $\in \mathscr{M}_{u,\pm}$)

$$\xi_\pm = (\eta^\pm + u\eta_s)_\pm, \quad (\xi_\pm, \beta) = \int_{\mathbf{R}_\pm} d\tau(\dot{\xi}_\pm\dot{\beta} + \kappa^2\xi_\pm\beta), \tag{5.20b}$$

et alors

$$\langle\eta^\pm,\zeta^\pm\rangle = (\xi_\pm,\zeta^\pm) \quad \text{et} \quad \langle\eta,\zeta\rangle = (2\kappa)^{-1}u\lambda + (\xi_-,\zeta^-) + (\xi_+,\zeta^+). \tag{5.20c}$$

Notre conclusion principale est la suivante :

THÉORÈME (13). — *Soient $\mu^\pm$, μ_s des mesures complexes sur $\mathscr{H}^\pm$, $\mathscr{H}_s$ respectivement, vérifiant les conditions de la définition* 8. *Soit $\varepsilon > 0$. Alors*

$$g\{\xi_\pm\} = \int_{\mathscr{H}^\pm} d\mu^\pm(\zeta) \exp[i(\xi_\pm, \zeta)] \tag{5.21a}$$

est intégrable sur $\mathscr{M}_{u,\pm}$, et

$$\int_{\mathscr{M}_{u,\pm}} \mathscr{D}(\xi) e^{i\mathrm{A}_{\varepsilon,\pm}\{\xi\}} g\{\xi\} = e^{-\frac{1}{2}\gamma_\varepsilon u^2} \int_{\mathscr{H}^\pm} d\mu^\pm(\zeta) \exp\left\langle \zeta, \frac{1}{2}(i\mathrm{B}^\pm - \mathrm{C}^\pm)^{-1}(\zeta + 2u\chi^\pm)\right\rangle. \tag{5.21b}$$

En outre, l'équation (5.6) *est valable pour*

$$f\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_s(\zeta(s)) \int_{\mathscr{H}^-} d\mu^-(\zeta^-) \int_{\mathscr{H}^+} d\mu^+(\zeta^+) e^{i\langle\eta,\zeta\rangle}, \tag{5.22}$$

et la fonctionnelle $f_{\mathscr{M}}$ correspondante est déterminée par les équations (5.20).

Démonstration. — La première partie est un corollaire du théorème 9 et des équations (5.13-15). Pour établir la validité de l'équation (5.6) pour f, on commence avec l'équation (5.3), on remplace T par nT (par conséquent, σ par $n\sigma$, etc.), on divise par c_{nT}, et l'on passe à la limite $n \to \infty$, en isolant le facteur

$$c_{nT}{}^{-1} c_{nT^+} c_{nT^-} (2n\sigma m/\bar{c}_\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.23}$$

dans le deuxième membre. En outre, on voit facilement, à cause du lemme 12 et du théorème de la convergence bornée, que $\lim_{n\to\infty}$ et l'intégration par rapport à u sont échangeables. Les intégrales sur $\mathscr{H}$ et sur $\mathscr{H}^{\pm}$ convergent alors vers les intégrales de (5.6). Le cas $f = 1$ et l'équation (5.18a) impliquent que le facteur (5.23) tend vers unité, et le théorème est démontré.

6. L'INTÉGRALE D'HISTOIRE

Après la préparation des sections 3-5, cette intégrale-ci pour le champ libre scalaire peut être facilement abordée. L'action de ce champ est

$$A_\varepsilon^{(0)}\{\varphi^{(0)}\} = \frac{1}{2}\int d^4k[(k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 - m^2 + i\varepsilon] : \tilde{\varphi}^{(0)}(-k)\tilde{\varphi}^{(0)}(k) :. \tag{6.1}$$

Alors, il est naturel d'introduire l'espace hilbertien $\mathscr{H}^{(0)}$ des fonctions réelles η, avec le produit scalaire (où $\kappa > 0$),

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int d^4k[(k^0)^2 + \boldsymbol{k}^2 + \kappa^2]\tilde{\xi}(-k)\tilde{\eta}(k), \tag{6.2}$$

et nous écrivons (sans tenir compte pour le moment de produit de Wick),

$$iA_\varepsilon^{(0)}\{\eta\} = (i\langle \eta, B\eta \rangle - \langle \eta, C\eta \rangle)/2. \tag{6.3}$$

A la différence du cas de l'oscillateur harmonique, $|A_\varepsilon^{(0)}\{\eta\}|$ n'est pas borné à distance de zéro (pour $\|\eta\| = 1$). Cependant, il l'est sur les sous-espaces suivants,

$$\mathscr{H}_K = \{\xi \in \mathscr{H}^{(0)} : \tilde{\xi}(k^0, \boldsymbol{k}) = 0 \quad \text{pour} \quad |\boldsymbol{k}| > K\}. \tag{6.4a}$$

On a, d'ailleurs, $C > 0$, donc la définition 3 ainsi que le théorème 9 sont applicables.

Pour passer à la limite $\varepsilon \downarrow 0$, on considère la restriction

$$\breve{\mathscr{H}}^{(0)} = \{\xi \in \mathscr{H}^{(0)} : \tilde{\xi} \text{ est Hölder-continue en points où } k^2 - m^2 = 0\}, \tag{6.4b}$$

et l'on pose

$$\breve{\mathscr{H}}_K = \breve{\mathscr{H}}^{(0)} \cap \mathscr{H}_K. \tag{6.4c}$$

On se rappelle [*18*] qu'une intégrale de type de Cauchy d'une fonction Hölder-continue est elle-même Hölder-continue par rapport aux autres variables. Donc, la présence de plusieurs variables ne pose aucun problème. L'intégrale fonctionnelle qu'on obtient est égale, dans la limite $\varepsilon \downarrow 0$, aux valeurs moyennes chronologiques, comme précédemment. Nous résumons.

COROLLAIRE (14). — *La formule*

$$\langle (f\{\varphi^{(0)}\})_+ \rangle_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \mathscr{D}(\eta) e^{iA_\varepsilon^{(0)}\{\eta\}} f\{\eta\} \overset{\mathrm{df}}{=} \int \mathscr{D}(\eta) e^{iA^{(0)}} f, \tag{6.5}$$

est valable pour les fonctionnelles $f \in \mathscr{F}_{\mathscr{H}^{(0)}}(\check{\mathscr{H}}_K)$, $\forall K > 0$.

La fonctionnelle chronologique montre le rôle particulier de la variable t. On peut donc interpréter un élément $\eta \in \mathscr{H}^{(0)}$ comme l'évolution temporelle, ou l'histoire, d'une fonction $\chi(\boldsymbol{x})$ (e. g., poser $\chi = \eta_{t=0}$), d'où le nom *intégrale d'histoire.*

Pour simplifier la discussion, on prendra $\varepsilon > 0$ dans la suite, sans considérer la limite $\varepsilon \downarrow 0$.

Nous ajoutons un commentaire. Les fonctionnelles d'action dans (6.1) et (6.3) diffèrent par une constante infinie. Cependant, cette constante n'a aucune conséquence, car la normalisation de l'intégrale est fixée. Quelles que soient les approximations de cette constante qu'on puisse faire, elles seront compensées par les changements des constantes c_{nT} dans la définition de l'intégrale.

Les équations précédentes sont analogues à celles de l'oscillateur harmonique, mais ne montrent pas de relation directe entre ces deux modèles. Cependant, on peut considérer le champ comme un cas limite d'un nombre croissant d'oscillateurs harmoniques non couplés. Ce point de vue rendra la discussion suivante plus transparente, et l'on va donner un résultat simple.

Il est commode d'utiliser les variables $(t, \boldsymbol{k})$ au lieu de k : on pose

$$\bar{\eta}(t, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\boldsymbol{x} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \eta(t, \boldsymbol{x}). \tag{6.6}$$

On partage l'espace des $\boldsymbol{k}$ en un nombre fini n de cellules finies $R_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, n$, de volumes $v_j^{(n)}$, et en une région infinie. [On ne tiendra pas compte de cette région-ci. Quant aux $R_j^{(n)}$, il est naturel, mais pas nécessaire, de les prendre symétriques par rapport à l'origine, car $\bar{\eta}^*(t, \boldsymbol{k}) = \bar{\eta}(t, -\boldsymbol{k})$]. Pour chaque cellule, on choisit un vecteur $\boldsymbol{k}_j^{(n)} \in R_j^{(n)}$.

Ensuite, on définit les valeurs approchées des intégrales par rapport à t et à $\boldsymbol{k}$ de la manière suivante,

$$\int dt \int d^3\boldsymbol{k} f(t, \boldsymbol{k}) \to \int dt \sum_{j=1}^{n} v_j^{(n)} f(t, \boldsymbol{k}_j^{(n)}) \tag{6.7a}$$

(l'intégrale par rapport à t étant celle de Lebesgue). Donc, en posant

$$\bar{\eta}(t, \boldsymbol{k}_j^{(n)}) = \eta_j^{(n)}(t), \tag{6.7b}$$

on a

$$(\mathrm{A}_\varepsilon^{(0)})^{(n)}\{\eta\} = \frac{1}{2}\int dt \sum v_j^{(n)}(|\dot{\eta}_j^{(n)}|^2 - [(\boldsymbol{k}_j^{(n)})^2 + m^2 - i\varepsilon]|\eta_j^{(n)}|^2), \tag{6.7c}$$

$$\begin{aligned}\langle \eta, \xi \rangle^{(n)} &= \langle \xi, \eta \rangle^{(n)} \\ &= \int dt \sum v_j^{(n)}(\dot{\bar{\xi}}(t, -\boldsymbol{k}_j^{(n)})\dot{\eta}_j^{(n)}(t) + [(\boldsymbol{k}_j^{(n)})^2 + \kappa^2]\bar{\xi}(t, -\boldsymbol{k}_j^{(n)})\eta_j^{(n)}(t)).\end{aligned} \tag{6.7d}$$

Nous voudrons considérer des fonctions ξ telles que

$$\int d^{k0} \sum v_j^{(n)} \frac{|\tilde{\xi}(k^0, \boldsymbol{k}_j^{(n)})|^2}{(k^0)^2 - (\boldsymbol{k}_j^{(n)})^2 - m^2 + i\varepsilon} \to \int d^4k \frac{|\tilde{\xi}|^2}{(k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{6.8}$$

quand $n \to \infty$, pourvu que

$$\max_j v_j^{(n)} \to 0, \qquad \mathrm{U}_{j=1}^{n} \mathrm{R}_j^{(n)} \to \mathrm{R}^3, \tag{6.9}$$

et indépendamment du choix des vecteurs $\boldsymbol{k}_j^{(n)}$.

LEMME (15). — *En suivant la discussion précédente, on prend des cellules finies* $\mathrm{R}_j^{(n)}$ et *des vecteurs* $\boldsymbol{k}_j^{(n)} \in \mathrm{R}_j^{(n)}$. *Soit* ξ *telle que le premier membre de* (6.8) *converge dans le sens spécifié. On fait les approximations indiquées, et en même temps, on approche l'intégrale d'histoire de la fonctionnelle* $e^{i\langle \cdot, \xi \rangle}$ *par les intégrales évidentes par rapport aux fonctions* $\eta_j^{(n)}$. *Une intégrale approchée se réduit à un produit d'intégrales de chemin modifiées. Quand* $n \to \infty$, *ce produit tend vers la valeur donnée par le théorème* 9 *pour la fonctionnelle* $e^{i\langle \cdot, \xi \rangle}$, *si les conditions* (6.9) *sont remplies.*

Démonstration. — Le corollaire 10 s'applique aux intégrales approximatives, donnant

$$\begin{aligned}&\int \mathscr{D}(\eta_1^{(n)}) \dots \mathscr{D}(\eta_n^{(n)}) e^{i(\mathrm{A}_\varepsilon^{(0)})^{(n)}\{\eta\}} e^{i\langle \eta, \xi \rangle^{(n)}} \\ &\qquad = \exp \frac{1}{i} \int dk^0 \sum v_j^{(n)} \frac{|\tilde{\xi}(k^0, \boldsymbol{k}_j^{(n)})|^2}{(k^0)^2 - (\boldsymbol{k}_j^{(n)})^2 - m^2 + i\varepsilon}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

L'hypothèse sur la convergence de la dernière intégrale donne le lemme.

On peut dire, qu'il aurait été plus proche de l'esprit de cet article, d'effectuer les approximations en utilisant des projections dans l'espace $\mathscr{H}^{(0)}$, plutôt que les sommes de Riemann. Cependant, cette dernière méthode apparaît plus simple ici.

Nous retournons maintenant à la formule (6.5), où nous supposons un temps fixé s pour le champ. Pour une fonction $h(\boldsymbol{k})$ suffisamment bonne, on trouve [e. g. par l'emploi de (4.14) et du lemme 15],

$$\left\langle \exp\left[i \int d^3k\varphi^{(0)}(s, \boldsymbol{k})h(\boldsymbol{k}) \right] \right\rangle_0 = \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^3\boldsymbol{k} \mid h(\boldsymbol{k}) \mid^2 (\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (6.11)$$

D'autre part, de telles valeurs moyennes du vide peuvent être représentées par des intégrales fonctionnelles plus familières (e. g. [*1*], [*9*]). I. e., pour le temps s, et pour les fonctionnelles commodes $g\{ \varphi^{(0)} \}$, on a

$$\langle g\{ \varphi^{(0)} \} \rangle_0 = \int \mathscr{D}(\zeta) \exp\left[- \int d^3\boldsymbol{k} \mid \tilde{\zeta}(\boldsymbol{k}) \mid^2 (\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \right] g\{ \zeta \}. \quad (6.12)$$

La dernière intégrale fonctionnelle est l'intégrale usuelle (commutative, isotropique) sur un espace hilbertien. L'espace pertinent est impliqué par l'exposant dans cette intégrale,

$$\mathscr{H}_{\mathbf{R}^3} = \left\{ \zeta : \int d^3\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \mid \tilde{\zeta}(\boldsymbol{k}) \mid^2 < \infty, \ \zeta \text{ réelle} \right\}. \quad (6.13)$$

D'ailleurs, l'exponentielle correspond au carré de la fonctionnelle d'état du vide, en analogie avec les équations (4.15) (cf. [*1*]).

Une telle intégrale fonctionnelle peut être définie de plusieurs façons. En outre de la définition par mesure, ou comme l'intégrale de Friedrichs et Shapiro (e. g. [*1*], [*9*], [*14*]), la construction de la section 3 peut être utilisée. Bien entendu, ces définitions sont en accord pour les fonctionnelles typiques, e. g. pour les exponentielles linéaires.

Cet exemple montre que l'intégrale d'histoire, pour un champ, a une structure assez riche. En fait, l'intégrale de (6.12) est comprise dans les lois de composition correspondantes. Nous les abordons ensuite.

La procédure de la section 5 peut s'adapter au cas présent. La restriction d'une fonction $\eta \in \mathscr{H}^{(0)}$ à $x^0 = s$ donne maintenant un vecteur dans $\mathscr{H}_{\mathbf{R}^3}$, et nous introduisons les autres espaces analogues :

$$\mathscr{H}^{(0)\pm} = \{ \eta \in \mathscr{H}^{(0)} : \eta(t, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{quand} \quad t \notin \mathbf{R}_\pm \}, \quad (6.14a)$$

$$\mathscr{H}_s^{(0)} = \{ \eta_{\zeta,s} : \zeta \in \mathscr{H}_{\mathbf{R}^3} \}, \quad (6.14b)$$

où
$$\bar{\eta}_{\zeta,s}(t, \boldsymbol{k}) = \tilde{\zeta}(\boldsymbol{k}) \exp\left[-(\boldsymbol{k}^2 + \kappa^2)^{\frac{1}{2}} \,|\, t - s \,|\right]. \tag{6.14c}$$

On peut confirmer directement que $\mathscr{H}_s^{(0)} \subset \mathscr{H}^{(0)}$. Enfin,

$$\mathscr{M}_{\zeta,\pm} = \{\, \xi : \xi = (\eta + \eta_{\zeta,s})_{\pm},\ \eta \in \mathscr{H}^{(0)\pm},\ \zeta \in \mathscr{H}_{\mathrm{R}^3} \,\}. \tag{6.14d}$$

Les souscrits $\pm$ indiquent les restrictions à $\mathrm{R}_{\pm}$, mais seulement pour la variable t. Nous définissons maintenant

$$\int_{\mathscr{M}_{\zeta,\pm}} \mathscr{D}(\xi) e^{i\mathrm{A}_{\varepsilon,\pm}^{(0)}\{\xi\}} f\{\,\xi\,\} = \int_{\mathscr{H}^{(0)\pm}} \mathscr{D}(\eta) e^{i\mathrm{A}_{\varepsilon,\pm}^{(0)}\{\eta + \eta_{\zeta,s}\}} f\{\,\eta + \eta_{\zeta,s}\,\}, \tag{6.15}$$

où le poids de référence pour la deuxième intégrale est $\exp(i\mathrm{A}_{\varepsilon,\pm}^{(0)}\{\,\eta\,\})$. Pour $f = 1$, nous trouvons, en utilisant l'équation (5.15) et le lemme 15,

$$\int_{\mathscr{M}_{\zeta,\pm}} \mathscr{D}(\xi) e^{i\mathrm{A}_{\varepsilon,\pm}^{(0)}\{\xi\}} = \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{k}\,|\,\tilde{\zeta}(\boldsymbol{k})\,|^2 \gamma_\varepsilon((\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}, (\boldsymbol{k}^2 + \kappa^2)^{\frac{1}{2}})\right], \tag{6.16}$$

où la fonction $\gamma_\varepsilon(.,.)$ est définie par la dépendance de γ_ε de (m, κ) dans (5.15). [Cf. aussi (5.17b).]

La loi de composition prend maintenant la forme,

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{H}^{(0)}} \mathscr{D}(\eta) e^{i\mathrm{A}_\varepsilon^{(0)}\{\eta\}} f\{\,\eta\,\} = \int_{\mathscr{H}_{\mathrm{R}^3}} \mathscr{D}(\zeta) \int_{\mathscr{M}_{\zeta,-}} \mathscr{D}(\xi_-) \int_{\mathscr{M}_{\zeta,+}} \mathscr{D}(\xi_+) \\ \times \exp(i\mathrm{A}_{\varepsilon,-}^{(0)}\{\,\xi_-\,\} + i\mathrm{A}_{\varepsilon,+}^{(0)}\{\,\xi_+\,\}) f_{\mathscr{M}}\{\,\zeta, \xi_-, \xi_+\,\},\end{aligned} \tag{6.17}$$

où le poids de référence pour l'intégrale par rapport à ζ est le carré de l'exponentielle de (6.16). Nous n'établissons cette loi que pour un cas spécial.

LEMME (16). — *La formule* (6.17) *est valable pour* $f_\beta = e^{i\langle\cdot,\beta\rangle}$, *où* $\beta \in \mathscr{H}_{\mathrm{K}}$, $\mathrm{K} < \infty$. *La fonctionnelle* $f_{\beta,\mathscr{M}}$ *est analogue à celle de l'oscillateur harmonique.*

Pour la fonctionnelle f_β, le calcul des intégrales de cette formule est une adaptation directe des méthodes précédentes, et nous omettons les détails.

On note que, pour établir (6.17) ainsi que (5.6), il s'agit surtout de justifier l'échange des limites. Dans le théorème 13, on a l'intégration par rapport à la mesure du, et l'on a pu employer le théorème de la convergence bornée. Ici, on n'a pas discuté les mesures appropriées pour l'intégrale par rapport à ζ, et nos conclusions sont très restreintes.

On peut placer la formule (6.17) dans un contexte plus général, de la manière suivante. Étant donnée une décomposition $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \dotplus \mathscr{H}_2$ de l'espace hilbertien, il doit exister une décomposition correspondante des intégrales définies par le poids e^{Q}. Bien entendu, en général, les opérateurs B et C ne laisseront par $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ invariants.

Sans doute, on pourrait établir facilement quelques résultats sur ce problème général, ainsi que sur d'autres cas particuliers de la loi de composition. Mais nous ne poursuivons plus ces questions.

7. QUELQUES CONSTRUCTIONS LIÉES A LA PRÉCÉDENTE

Il est naturel qu'on essaie de construire les intégrales d'histoire en formes différentes, et pour des systèmes divers. Nous commentons ici assez brièvement trois exemples :

(*a*) l'intégrale d'histoire sur l'espace de phase,
(*b*) le couplage $\lambda(\varphi^4)_2$,
(*c*) le cas d'une source extérieure fixée.

(*a*) L'intégration sur l'espace de phase est un moyen naturel d'étude des principes variationnels, voir e. g. [*19*]. Pour le champ libre, une telle intégrale d'histoire prend la forme,

$$\int \mathscr{D}(\eta)\mathscr{D}(\xi)\exp\left\{\frac{1}{2}i\int d^4u[2\xi\dot{\eta}-\xi^2-(\nabla\eta)^2-m^2\eta^2+i\varepsilon_1\xi^2+i\varepsilon_2\eta^2]\right\}\mathrm{F}\{\xi,\eta\}. \tag{7.1}$$

On peut adapter la construction de la section 3, par l'emploi de l'espace hilbertien (réel) de paires (ξ, η) avec le produit scalaire,

$$\langle(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2)\rangle = \int d^4k\,\{\,\tilde{\xi}_1(-k)\tilde{\xi}_2(k)+[(k^0)^2+\boldsymbol{k}^2+\kappa^2]\tilde{\eta}_1(-k)\tilde{\eta}_2(k)\,\}. \tag{7.2}$$

La relation entre ε_1 et ε_2 dans (7.1) n'est pas *a priori* donnée. E. g., avec $\varepsilon_1 = 0$ et $\mathrm{F} = \mathrm{F}\{\eta\}$, l'intégration sur ξ (si justifiée) réduit cette intégrale à la forme de la section 6.

Si $\varepsilon_1 \geqslant 0$, $\varepsilon_2 > 0$, alors le théorème 9 s'applique, mais nous ne déterminons pas des espaces appropriés $\mathscr{H}'$.

Supposons que la fonctionnelle suivante est intégrable,

$$\mathrm{F}\{\xi,\eta\} = \exp i\langle(\xi,\eta),(f,g)\rangle. \tag{7.3}$$

Si $g \in \mathscr{H}_s^{(0)}$, voir (6.14*b*), η sera en effet restreinte au temps $\tau = s$. Cependant, ξ n'est pas en général continue, et une telle restriction pour elle n'est pas possible. On peut, en fait, étudier $\xi(\tau\downarrow s)$ et $\xi(\tau\uparrow s)$, et la différence doit être liée au commutateur canonique $[\pi, \varphi]$ du champ (cf. [*8*], p. 175).

(*b*) Pour que le langage fonctionnel soit intéressant, on doit pouvoir l'utiliser pour exprimer des relations hors du cas relativement trivial du champ libre. Donc, un essai de traduire les résultats récents sur le couplage $\lambda(\varphi^4)_2$ (dans l'espace-temps à deux dimensions, voir [*20*]) se suggère naturellement.

Un tel essai doit donner en particulier un exemple non trivial des propriétés de causalité, cf. les appendices B et C. Mais il y a (au moins) deux sortes de difficultés, qui indiquent, peut-être, qu'un assaut direct à ce problème serait prématuré maintenant. Premièrement, la théorie d'intégration d'après Itô a été peu étudiée, et la convergence de l'intégrale de chemin même pour le potentiel γx^4 n'a pas encore été établie. Deuxièmement, il semble que les produits de Wick, et les contre-termes accompagnants, n'ont pas encore été traités par des méthodes fonctionnelles.

(*c*) Les cas singuliers des sources extérieures fixées, dans lesquels apparaissent les représentations myriotiques des relations de commutation, sont particulièrement intéressants. Ces cas ont la propriété, que les valeurs moyennes de l'état fondamental pour un temps donné, et par conséquent, les lois de composition, mènent aux mesures perpendiculaires à la mesure canonique, qui est associée à l'intégrale de l'équation (6.12).

Pour avoir un problème particulier, nous supposons une source ponctuelle à l'origine ($j = \lambda\delta_0$) et $m > 0$. Alors, l'action peut s'écrire de la manière suivante,

$$\mathrm{A}_\varepsilon^\lambda \{ \varphi \} = \mathrm{A}_\varepsilon^{(0)} \{ \varphi \} - \lambda \int d\tau d^3\boldsymbol{u}\delta(\boldsymbol{u})\varphi(\tau, \boldsymbol{u}) \tag{7.4a}$$

$$= \mathrm{A}_\varepsilon^{(0)} \{ \varphi \} - \lambda(2\pi)^{\frac{1}{2}}\breve{\varphi}(k^0 = 0, \boldsymbol{u} = 0), \tag{7.4b}$$

où $\breve{\varphi}$ est la transformée de Fourier indiquée, pour une dimension. Dans les sections précédentes, nous avons montré comment une telle valeur de $\breve{\varphi}$ peut être donnée par un produit scalaire.

Soit $\mathscr{H}$ l'espace hilbertien réel défini par

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int d^4k\xi(-k)\left[(k^0)^2 - \frac{\partial^2}{\partial(k^0)^2} + \frac{1}{2}\right]\prod_{j=1}^{3}[(k^j)^2 + \kappa^2]\tilde{\eta}(k). \tag{7.5}$$

L'équation
$$\left[-(d^2/d\omega^2) + \omega^2 + \frac{1}{2}\right]y(\omega) = \delta(\omega) \tag{7.6}$$

(où $\omega = k^0$) a une solution y_0 qui s'annule pour $\omega \to \pm\infty$. Pour la trouver, on note d'abord la solution suivante de l'équation homogène ([*21*], p. 73):

$$g(\omega) = \int_0^\infty dv e^{-\omega v} e^{-v^2/4} v^{-1/4}, \tag{7.7a}$$

et l'on pose

$$y_0(\omega) = (\text{cte})\, g(|\,\omega\,|), \tag{7.7b}$$

où la constante est déterminée par

$$-\, y_0'(0\,+) + y_0'(0-) = 1. \tag{7.7c}$$

En outre, nous utilisons $\check{\eta}_0(p) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(p^2 + \kappa^2)^{-1}$, et nous posons

$$\iota(k) = y_0(k^0)\Pi_{j=1,2,3}\check{\eta}_0(k^j). \tag{7.8a}$$

Alors

$$\check{\eta}(k^0 = 0, \boldsymbol{u} = 0) = \langle\, \eta, \iota\, \rangle. \tag{7.8b}$$

Bien entendu, le produit scalaire (7.5) définit un espace plus petit que $\mathscr{H}^{(0)}$ (de la section 6). Le traitement standard de ce problème par les C*-algèbres [22] exploite une restriction analogue pour les fonctions d'onde d'une particule.

On peut maintenant aborder l'intégration des fonctionnelles. Premièrement, on doit normaliser l'intégrale par

$$\int \mathscr{D}(\eta) \exp\,(i\mathrm{A}_\varepsilon^\lambda\,\{\,\eta\,\}) = 1. \tag{7.9}$$

Alors, si $f_\xi = e^{i\langle\cdot,\xi\rangle}$, on trouve les approximations suivantes,

$$\hat{\mathrm{I}}_{n\mathrm{T},\alpha=0}(f_\xi) = \exp\left\langle\, \xi - \lambda\iota,\, \frac{1}{2}[i\mathrm{B} - \mathrm{C} - (n\mathrm{T})^{-1}]^{-1}(\xi - \lambda\iota)\right\rangle$$
$$\times \exp\left(-\,\lambda^2\left\langle\, \iota,\, \frac{1}{2}[i\mathrm{B} - \mathrm{C} - (n\mathrm{T})^{-1}]^{-1}\iota\right\rangle\right). \tag{7.10}$$

En fait, on a $\iota \notin \mathscr{D}((i\mathrm{B} - \mathrm{C})^{-1})$, car la divergence associée à la source ponctuelle n'a pas pu disparaître. Mais dans (7.10), la limite $n \to \infty$ est possible, pour $\xi \in \mathscr{H} \cap \mathrm{D}((i\mathrm{B} - \mathrm{C})^{-1})$.

Dans l'appendice A, nous complétons la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME (17). — *Soit $\mathscr{H}'$ un sous-espace de $\mathscr{H}$ tel que la restriction de $(i\mathrm{B} - \mathrm{C})^{-1}$ à $\mathscr{H}' + i\mathscr{H}'$ soit bornée. Alors, les fonctionnelles dans $\mathscr{F}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}')$ sont intégrables (pour le poids $e^{i\mathrm{A}_\varepsilon^\lambda}$).*

APPENDICE A

L'INTÉGRATION DES FONCTIONNELLES CARACTÉRISTIQUES

Nous démontrons ici les théorèmes 9 et 17.

Comme dans la section 3, on suppose un espace hilbertien réel $\mathscr{H}$, deux opérateurs bornés symétriques $C \geqslant 0$ et B sur $\mathscr{H}$, et $T \in \mathscr{T}$. L'action de ces opérateurs s'étend à l'espace complexe $\mathscr{H}_c$. On suppose que $iB - C$ est inversible, et que $D((iB - C)^{-1})$ est dense dans $\mathscr{H}_c$. Alors, on utilisera la notation suivante,

$$S_n = [iB - C - (nT)^{-1}]^{-1}, \quad S_\infty = (iB - C)^{-1}. \tag{A.1}$$

Nous commençons avec une évaluation simple:

LEMME (A1). — *Soient ξ, $\alpha \in \mathscr{H}$ arbitraires, et l'on pose $f_\xi = e^{i\langle \cdot, \xi \rangle}$. Alors*

$$\hat{I}_{nT,\alpha}(f_\xi) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \langle \alpha, (iB - C)\alpha \rangle + i \langle \alpha, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \beta_1^+, S_n \beta_1^- \rangle \right\}, \tag{A.2a}$$

où

$$\beta_1^\pm = \xi \pm i(\mp iB - C)\alpha. \tag{A.2b}$$

Si T *est tel que* $\alpha \in D(T^{-\frac{1}{2}})$, *alors*

$$\hat{I}_{nT,\alpha}(f_\xi) = \exp\left\{ - (2n)^{-1} \| T^{-\frac{1}{2}}\alpha \|^2 + \frac{1}{2} \langle \beta_2^+, S'_n \beta_2^- \rangle \right\}, \tag{A.3a}$$

où

$$\beta_2^\pm = (nT)^{\frac{1}{2}}\xi \pm i(nT)^{-\frac{1}{2}}\alpha, \quad S'_n = n^{-1}[T^{\frac{1}{2}}(iB - C)T^{\frac{1}{2}} - n^{-1}]^{-1}. \tag{A.3b}$$

Enfin, si $\alpha \in D(T^{-1})$, *alors*

$$\hat{I}_{nT,\alpha}(f_\xi) = \exp\left\{ - (2n)^{-1} \| T^{-\frac{1}{2}}\alpha \|^2 + \frac{1}{2} \langle \beta_3^+, S_n \beta_3^- \rangle \right\}, \tag{A.4a}$$

où

$$\beta_3^\pm = \xi \pm i(nT)^{-1}\alpha. \tag{A.4b}$$

On obtient le premier résultat par la translation $\eta \to \eta + \alpha$ dans l'équation (3.3*a*), et par des calculs analogues à ceux dans la démonstration du lemme 4. Pour la deuxième évaluation, on factorise d'abord le poids $\exp \langle T^{-\frac{1}{2}}(\eta - \alpha), -(2n)^{-1} \ldots \rangle$. La troisième découle des transformations simples.

Il y a dans les exposants des termes quadratiques en ξ, quadratiques en α, et bilinéaires en ξ et α. Les termes correspondants dans les trois évaluations sont nécessairement égaux.

Notre méthode d'étude de la limite $n \to \infty$ dépend surtout du théorème suivant, qui est une adaptation du théorème 1.5 de [*17*], p. 429 (voir aussi p. 166, problème 5.16).

THÉORÈME (A2). — *Soit M_∞ un opérateur borné, et soient M_n, $n = 1, 2, \ldots$ des opérateurs fermés et définis sur un domaine dense, sur lequel $M_n\xi \to M_\infty\xi$ fortement. Si l'ensemble des normes $\| (M_n - z)^{-1} \|$ est borné (où z appartient aux ensembles résolvants, et $n = \infty$ est admis), alors*

$$s - \lim_{n\to\infty} (M_n - z)^{-1} = (M_\infty - z)^{-1}. \tag{A.5}$$

Si l'on suppose une borne inférieure $b > 0$ dans (3.2*c*), alors ce théorème donne directement

$$s - \lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty. \tag{A.6}$$

Un résultat analogue sera obtenu dans le cas où S_∞ est non borné, mais on a besoin d'un lemme préparatoire.

LEMME (A3). — *Soit* $M = iV - W$, *où* V *est borné et symétrique, et* W, *auto-adjoint (cf. le lemme 7). On suppose* $W > 0$, M *inversible*, $D(M^{-1})$ *dense dans* $\mathscr{H}_c$, $\zeta \in D(M^{-1})$, *et* $u > 0$. *Alors*

$$\left\| \frac{1}{M - u} \right\| \leqslant \frac{1}{u}, \qquad \left\| \frac{1}{1 - uM^{-1}} \right\| \leqslant 1, \tag{A.7a,b}$$

$$(M - u)^{-1}\zeta = (1 - uM^{-1})^{-1}M^{-1}\zeta, \tag{A.7c}$$

$$s - \lim_{u\downarrow 0} (1 - uM^{-1})^{-1} = 1. \tag{A.7d}$$

(Ici comme ailleurs, 1 dénote aussi l'opérateur identité).

Démonstration. — Le lemme 7 donne $\mathrm{Re} \langle \zeta, M^{\pm 1}\zeta \rangle \leqslant 0$, et (A.7*a,b*) s'ensuivent de (3.22) [et (3.18*a*) et def $M^{-1} = 0$]. L'équation (A.7*c*) découle des manipulations élémentaires et de l'hypothèse $\zeta \in D(M^{-1})$. Enfin, $1 - uM^{-1} \to 1$ fortement sur le domaine dense $D(M^{-1})$. Alors, le théorème A2 avec $z = 0$, et (A.7*b*), donnent (A.7*d*).

LEMME (A4). — *Si* $\chi_0 \in D(T^{-\frac{1}{2}}S_\infty)$, *alors*

$$S_n\chi_0 \to S_\infty\chi_0 \text{ fortement.} \tag{A.8a}$$

Si $\chi \in D(S_\infty)$ *et* $\chi = s - \lim \chi_m$, *où* $\chi_m \in D(T^{-\frac{1}{2}}S_\infty)$ *pour* $\forall m < \infty$, *alors*

$$S_n\chi \to S_\infty\chi \text{ faiblement.} \tag{A.8b}$$

Nous n'utiliserons que (A.8*b*), et la convergence forte pour de tels χ reste une conjecture raisonnable.

Démonstration. — On note que, pour $\xi \in \mathscr{H}_c$ et $0 < n < \infty$,

$$S_n\xi = T^{\frac{1}{2}}[T^{\frac{1}{2}}(iB - C)T^{\frac{1}{2}} - n^{-1}]^{-1}T^{\frac{1}{2}}\xi, \tag{A.9}$$

ce qui est implicitement compris dans le lemme A1. Cette égalité découle aussi de la remarque que $[iB - C - (nT)^{-1}](S_n\xi) = \xi$, donc $S_n\xi \in D(T^{-1})$, et *a fortiori*, $S_n\xi \in D(T^{-\frac{1}{2}})$. Ensuite, on emploie (A.7*c-d*), avec

$$u = n^{-1}, \qquad M = T^{\frac{1}{2}}(iB - C)T^{\frac{1}{2}}. \tag{A.10}$$

L'hypothèse donne $T^{\frac{1}{2}}\chi_0 \in D(M^{-1})$, d'où

$$s - \lim (M - u)^{-1}T^{\frac{1}{2}}\chi_0 = M^{-1}T^{\frac{1}{2}}\chi_0 = T^{-\frac{1}{2}}S_\infty\chi_0, \tag{A.11a}$$

et (A.8*a*) est une conséquence de (A.9) et de (A.11*a*),

$$s - \lim S_n\chi_0 = T^{\frac{1}{2}} (s - \lim) (M - u)^{-1}T^{\frac{1}{2}}\chi_0 = S_\infty\chi_0. \tag{A.11b}$$

Pour établir (A.8*b*), on prend $\zeta \in \mathscr{H}_c$, et l'on commence avec (A.9) et (A.7*c*), où $T^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$ peut être inséré entre deux facteurs:

$$\langle \zeta, S_n\chi_m \rangle = \langle \zeta, [T^{\frac{1}{2}}(1 - uM^{-1})^{-1}T^{-\frac{1}{2}}][T^{\frac{1}{2}}M^{-1}T^{\frac{1}{2}}]\chi_m \rangle \tag{A.12a}$$

$$= \langle T^{-\frac{1}{2}}(1 - uM^{*-1})^{-1}T^{\frac{1}{2}}\zeta, S_\infty\chi_m \rangle. \tag{A.12b}$$

Le vecteur $T^{-\frac{1}{2}} \dots \zeta$ est bien défini. En fait, posons

$$\eta = (1 - uM^{*-1})^{-1}T^{\frac{1}{2}}\zeta, \tag{A.13a}$$

et supposons $u > 0$. Alors, $(1 - uM^{*-1})\eta = T^{\frac{1}{2}}\zeta$, et

$$T^{-\frac{1}{2}}\eta = u^{-1}(iB + C)T^{\frac{1}{2}}(T^{\frac{1}{2}}\zeta - \eta). \tag{A.13b}$$

Dans (A.12*b*) on peut passer à la limite $m \to \infty$, les opérateurs S_n et S_∞ étant fermés. Donc, un emploi de (A.7*d*) établit le lemme.

La suite $\{ S_n\chi \}$ dans (A.8*b*) est nécessairement bornée. Les résultats standards peuvent assurer l'uniformité de telles bornes (e. g. [*17*], p. 136).

LEMME (A5). — *Prenons un sous-espace (fermé)* $\mathscr{H}_0 \subseteq \mathscr{H}$ *tel que la restriction* $S_\infty |_{\mathscr{H}_0}$ *soit borné. Prenons* $T \in \mathscr{T}$ *tel que la condition du lemme* A4 *sur* χ *soit remplie pour* $\forall\chi \in \mathscr{H}_0$. *Alors l'ensemble suivant est borné :*

$$E = \{ \| S_n\chi \| : 1 \leqslant n \leqslant \infty, \ \chi \in \mathscr{H}_0, \ \| \chi \| = 1 \}. \tag{A.14}$$

Ce lemme sera utile pour démontrer le théorème 17.

Démonstration du théorème 9. — Prenons $\alpha \in \mathscr{H}$ et $T_0' \in \mathscr{T}$ tel que $\alpha \in D(T_0'^{-\frac{1}{2}})$, et soit $T_0'' \in \mathscr{T}$ tel qu'il laisse $S_\infty\mathscr{H}'$ invariant. Le lemme 5 montre que, pour

$$T > T_0 \overset{\text{df}}{=} T_0' + T_0'', \tag{A.15}$$

on a $\alpha \in D(T^{-\frac{1}{2}})$. En outre, $D(T^{-\frac{1}{2}}S_\infty) \cap \mathscr{H}'$ est dense dans $\mathscr{H}'$, et la convergence faible (A.8*b*) est valable pour $\forall\xi \in \mathscr{H}'$.

L'hypothèse que supp μ soit borné, et le fait que les ensembles

$$\{ S_n(iB - C)\alpha, \ S_n^*(-iB - C)\alpha \}$$

sont bornés [d'après le lemme A4 : prendre χ ou χ_0 égal à $(iB - C)\alpha$, etc.] impliquent l'existence des constantes K, $a < \infty$ vérifiant

$$\sup_{\xi\in\mathscr{K}} \| \xi \| \leqslant K \quad \text{où} \quad \mathscr{K} = \operatorname{supp} \mu, \tag{A.16a}$$

$$\| S_n(iB - C)\alpha \| = \| S_n^*(-iB - C)\alpha \| \leqslant a. \tag{A.16b}$$

On se rappelle (3.19*d*), Re $\langle \zeta, S_n\zeta \rangle \leqslant 0$, et l'évaluation (A.2) maintenant montre que

$$\sup_{\xi\in\mathscr{K}} | \hat{I}_{nT,\alpha}(f_\xi) | \leqslant \exp [Ka + \| (iB - C)\alpha \| a] \overset{\text{df}}{=} \rho. \tag{A.17}$$

Le théorème de Fubini s'applique pour $n < \infty$, et

$$\hat{I}_{nT,\alpha}(f) = \int_{\mathscr{H}'} d\mu(\xi)\hat{I}_{nT,\alpha}(f_\xi). \tag{A.18}$$

La borne (A.17) et l'hypothèse $| \mu | (\mathscr{H}') < \infty$ permettent l'emploi du théorème de la convergence bornée. Donc, il suffit d'établir que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{I}_{nT,\alpha}(f_\xi) = \hat{I}_\infty(f_\xi), \qquad \forall\xi \in \mathscr{H}'. \tag{A.19}$$

Considérons l'exposant dans (A.2*a*). Le terme quadratique en ξ tend vers la valeur voulue quand $n \to \infty$, à cause de (A.8*b*) et de la condition (A.15), et il reste à montrer que les autres termes s'annulent pour cette limite. Ceci est évident d'après (A.3) pour les termes quadratiques en α, puisque (A.7*a*) donne $\| S_n' \| \leqslant 1$. Quant aux termes bilinéaires en ξ et α, on utilise (A.8) avec χ_0 (ou χ) égal à $(iB - C)\alpha$, et la relation complexe conjuguée. Quand $n \to \infty$, on trouve dans (A.2*a*) : $i \langle \xi, \alpha \rangle \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$, et le théorème est démontré.

Nous ajoutons deux remarques. Premièrement, la référence [*13*] suggère l'emploi du théorème de Prohorov [*23*] pour éliminer la restriction que supp μ soit borné. Ici, on rencontre la difficulté suivante. La borne ρ dans (A.13*a*) dépend de K. Alors, bien qu'on puisse écrire

$$| \mu | (\mathscr{H}' \setminus \mathscr{K}_0) < \varepsilon_0, \tag{A.20}$$

avec $\mathscr{K}_0$ compact et ε_0 arbitrairement petit, on ne peut pas facilement contrôler la contribution venant de $\mathscr{H}'\backslash\mathscr{K}_0$.

Deuxièmement, considérons la limite $T \to \infty$ en suivant l'ensemble filtrant. On voit du théorème A2 que cette convergence s'obtiendrait sous la condition (3.2*c*), si l'on avait $T^{-1} \to 0$ fortement sur un domaine dense quand $T \to \infty$. Mais les remarques qui suivent le lemme 5 laissent entrevoir la difficulté de ces questions.

Démonstration du théorème 17. — On considère $\hat{I}^{Q_\iota}_{nT,\alpha}(f_\xi)$ en forme (A.2). Le terme quadratique en ι (dans l'exposant) s'élimine, tandis qu'il reste les nouveaux termes

$$i\langle \iota, \alpha \rangle + \frac{1}{2}\langle \iota, S_n[\xi - i(iB - C)\alpha] \rangle + \frac{1}{2}\langle S_n^*[\ldots]^*, \iota \rangle. \tag{A.21}$$

La limite $n \to \infty$ est clairement possible ici. En outre, ces termes et le lemme A5 montrent que

$$\sup_{1 \leqslant n \leqslant \infty} \sup_{\xi \in \operatorname{supp} \mu} |\hat{I}^{Q_\iota}_{nT,\alpha}(f_\xi)| < \infty, \tag{A.22}$$

si le support de la mesure μ (sur $\mathscr{H}'$) est borné. Donc, l'intégration par rapport à $d\mu(\xi)$, ainsi que les autres détails, peuvent être traités comme précédemment, et le théorème s'ensuit.

APPENDICE B

FONCTIONS DE GREEN ET LA CAUSALITÉ

Le formalisme des intégrales fonctionnelles (de cet article) nous permet de présenter une comparaison instructive des fonctions de Green en mécanique quantique et en théorie des champs. Si l'on considère de telles fonctions qu'elles soient employées d'habitude, alors ces deux sortes ont une grande ressemblance de forme, tandis que leurs définitions sont assez différentes. Il semble que ce point n'a pas été souligné.

Les fonctions de Green sont au centre de la description de propagation, et la propagation, à son tour, détermine la présence ou l'absence de causalité. Or, l'hypothèse de causalité est fondamentale dans la théorie des champs, et la difficulté d'exploiter cette hypothèse dans le cadre des intégrales fonctionnelles fut appelée « un défaut important » [*4*]. Nous pourrons faire des observations préliminaires sur ce problème.

La validité des équations ci-dessous n'a pas été établie dans les arguments du texte. Cependant, nous croyons qu'une formulation rigoureuse pourrait être fournie pour ces équations sans obstacles sérieux.

On considère l'oscillateur harmonique. En théorie des champs, on prend normalement $\langle (\varphi\varphi)_+ \rangle_0$ comme la fonction de Green. Dans ce modèle, cette expression-ci devient

$$i^{-1}h_c(t_2 - t_1) \overset{\mathrm{df}}{=} \langle (\varphi(t_2)\varphi(t_1))_+ \rangle_0 = \int \mathscr{D}(\eta)e^{iA}\eta(t_2)\eta(t_1) \tag{B.1a}$$

$$= (2m)^{-1}e^{-im|t_2 - t_1|}. \tag{B.1b}$$

La fonction h_c vérifie l'équation differentielle,

$$[(d^2/dt^2) + m^2]h_c(t) = \delta(t). \tag{B.2a}$$

En particulier, elle est continue à zéro, tandis que le comportement de sa dérivée à ce point est en accord avec la règle $[\dot{\varphi}, \varphi] = i^{-1}$:

$$h_c'(0+) - h_c'(0-) = 1. \tag{B.2b}$$

D'autre part, la fonction de Green usuelle de mécanique quantique, g, est définie par

$$\psi(t_2, u_2) = \int du_1 g(t_2, u_2; t_1, u_1)\psi(t_1, u_1). \tag{B.3}$$

Cette fonction-ci vérifie l'équation de Schrödinger avec la valeur initiale δ: pour l'oscillateur harmonique, et $t > 0$,

$$\left(-i^{-1}\partial/\partial t + \frac{1}{2}\partial^2/\partial u_2^2 - \frac{1}{2}m^2u_2^2\right)g(t, u_2; 0, u_1) = 0, \tag{B.4a}$$

$$\lim_{t\downarrow 0} g(t, u_2; 0, u_1) = \delta(u_2 - u_1). \tag{B.4b}$$

On peut représenter cette fonction par une intégrale de chemin,

$$g(t_2, u_2; t_1, u_1) \sim \int_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \eta(t_j) = u_j} \mathscr{D}(\eta)e^{iA}$$
$$= (\pi/m)e^{\frac{1}{2}m(u_1^2 + u_2^2)} \int \mathscr{D}(\eta)e^{iA}\delta(u_2 - \eta(t_2))\delta(u_1 - \eta(t_1)). \tag{B.5}$$

Nous avons fourni les facteurs qui annulent les contributions des intervalles temporels $(-\infty, t_1)$ et (t_2, ∞), cf. (5.15*b*), (5.16*b*). Cependant, nous n'avons pas tenté de donner la normalisation précise; cf. la racine carrée dans (2.10).

Pour le cas du champ libre, la définition de la fonction causale est analogue à (B.1),

$$i^{-1}\Delta_c(u_2 - u_1) = \langle (\varphi^{(0)}(u_2)\varphi^{(0)}(u_1))_+ \rangle_0 = \int \mathscr{D}(\eta)e^{iA^{(0)}}\eta(u_2)\eta(u_1). \tag{B.6}$$

Cependant, cette fonction vérifie des équations qui semblent plus analogues à (B.4) qu'à (B.2):

$$(\Box - m^2)\Delta_c(u) = 0 \qquad (u \neq 0), \tag{B.7a}$$

$$(\partial/\partial u^0)\Delta_c(0+, \boldsymbol{u}) - (\partial/\partial u^0)\Delta_c(0-, \boldsymbol{u}) = \delta(\boldsymbol{u}). \tag{B.7b}$$

Cette dichotomie suggère encore l'introduction d'une fonction de Green, qui serait définie par analogie avec (B.4, 5). Alors, nous représentons les états du champ au temps t par les fonctionnelles, e. g. $\Psi\{t, \zeta\}$ (cf. la section 6). La nouvelle fonction de Green G doit maintenant vérifier,

$$\Psi\{t_2, \zeta_2\} = \int \mathscr{D}(\zeta_1)G\{t_2, \zeta_2; t_1, \zeta_1\}\Psi\{t_1, \zeta_1\}, \tag{B.8a}$$

$$G\{t_2, \zeta_2; t_1, \zeta_1\} \sim \int_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \eta(t_j) = \zeta_j} \mathscr{D}(\eta)e^{iA^{(0)}}. \tag{B.8b}$$

On s'attend à ce que la fonctionnelle G montre une dépendance des ζ_j gaussienne, et cette propriété-ci caractériserait l'intégrale fonctionnelle dans (B.8*a*).

De telles fonctionnelles de Green ont été considérées en mécanique statistique (d'une manière heuristique; e. g. [*24*]), mais presque pas du tout en théorie des champs (cf. [*7*]).

Les dernières équations semblent avoir le rapport avec la question de causalité. En fait, c'est une hypothèse raisonnable, que seulement les histoires causales contribuent à l'intégrale de (B.8*b*). Cette propriété s'exprime facilement, en particulier, si les supp ζ_j sont bornés (dans l'espace de configuration).

Pour le cas du champ libre, il y a de bonnes raisons pour croire qu'à l'intégrale de (B.8*b*) ne contribuent que des histoires classiques, satisfaisant à $(\Box - m^2)\eta = 0$, qui sont *a fortiori* causales. (Cf. [*25*], mais voir aussi la critique dans [*26*], p. 1562). Peut-être une conjecture si forte n'est-elle pas valable pour les champs en interaction. Mais en tout cas, la restriction aux histoires causales est une expression naturelle de causalité.

APPENDICE C

REMARQUES SUR LA FORMULE DE TROTTER

Rappelons-nous la formule de Trotter et son rapport aux intégrales de chemin [12]. Soient respectivement A et B les générateurs infinitésimaux des semi-groupes de contractions $\{ P^t \}$ et $\{ Q^t \}$, et A + B le générateur de $\{ R^t \}$, alors

$$R^t = s - \lim_{n \to \infty} (P^{t/n} Q^{t/n})^n. \tag{C.1}$$

Prenons maintenant l'opérateur H_0 de l'énergie cinétique pour A, et celui de l'énergie potentielle V pour B. Les approximations successives découlant de (C.1) sont en accord avec les intégrales de chemin, si on les approche par la restriction aux chemins polygonaux associés. La convergence de ces intégrales approximatives est maintenant garantie par (C.1).

Cette méthode s'applique bien à l'oscillateur harmonique, mais pas si facilement aux champs quantifiés. En fait, pour respecter l'analogie entre l'intégrale de chemin et celle d'histoire, on doit décomposer $H^{(0)}$ ainsi,

$$H^{(0)} \sim \frac{1}{2} \int d^3u \pi^2 + \frac{1}{2} \int d^3u [(\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2]. \tag{C.2}$$

Les deux termes ne sont pas définis séparément, même si les constantes infinies sont éliminées par les produits de Wick.

Cependant, la formule de Trotter a été très utile dans l'étude du couplage $\lambda(\varphi^4)_2$ [20], et c'est ce fait-ci (entre autres) qui nous a amenés à reconsidérer cette formule. Dans l'étude de ce couplage-là (avec un cut-off), on décompose l'hamiltonien en deux opérateurs auto-adjoints, $H^{(0)} + H_{\text{int}}$, et la difficulté notée en (C.2) n'existe pas.

Il nous semble néanmoins intéressant de regarder quelques formules (strictement heuristiques) qui dépendent de ce partage (C.2). Pour les vecteurs d'état on prend les fonctionnelles des fonctions $\zeta(\boldsymbol{u})$, et les deux termes dans (C.2) deviennent, respectivement,

$$H_1^{(0)} \sim \frac{1}{2} \int d^3 \boldsymbol{u} \pi^2 \sim - \frac{1}{2} \int d^3 \boldsymbol{u} \frac{\delta^2}{[\delta \zeta(\boldsymbol{u})]^2}, \tag{C.3a}$$

$$H_2^{(0)} \sim \frac{1}{2} \int d^3u [(\nabla \zeta)^2 + m^2 \zeta^2]. \tag{C.3b}$$

L'action de $H_1^{(0)}$ peut être exprimée facilement par l'emploi de la transformée de Fourier fonctionnelle,

$$\tilde{f} \{ \xi \} = \int \mathscr{D}(\zeta) \exp \left(- i \int d^3 \boldsymbol{u} \xi \zeta \right) f \{ \zeta \}, \tag{C.4a}$$

$$f \{ \zeta \} = \int \mathscr{D}(\xi) \exp \left(i \int d^3 \boldsymbol{u} \xi \zeta \right) f \{ \xi \}. \tag{C.4b}$$

(Cette forme de la transformation de Fourier fut analysée dans [27]). Alors

$$\begin{aligned}
[\exp(- i\tau H_1^{(0)}) f] \{ \zeta_{j+1} \} \sim & \int \mathscr{D}(\xi) \exp \left(i \int d^3 \boldsymbol{u} \xi \zeta_{j+1} \right) \\
& \times \exp \left(- \frac{1}{2} i\tau \int d^3 \boldsymbol{u} [\xi(\boldsymbol{u})]^2 \right) \int \mathscr{D}(\zeta_j) \exp \left(- i \int d^3 \boldsymbol{u} \xi \zeta_j \right) f \{ \zeta_j \} \\
& \sim \int \mathscr{D}(\zeta_j) \exp \left[\frac{1}{2} i\tau \int d^3 \boldsymbol{u} (\zeta_{j+1} - \zeta_j)/\tau^2 \right] f \{ \zeta_j \},
\end{aligned} \tag{C.5}$$

l'intégrale (heuristique) par rapport à ξ étant gaussienne. Dans la limite $n \to \infty$, $\tau = t/n \to 0$, on a $(\zeta_{j+1} - \zeta_j)/\tau \to \dot{\zeta}_j$, et l'équation (C.1) mène aux équations (B.8) pour la fonctionnelle de Green.

RÉFÉRENCES

[1] J. TARSKI, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. A, t. **11**, 1969, p. 131 (addendum et erratum à suivre).
[2] K. SYMANZIK, Conférences de Varenna, 1968, Cours XLV, *Quantum field theory*, édité par R. Jost, Academic Press, New York, 1969, p. 152.
[3] R. P. FEYNMAN, *Phys. Rev.*, t. **80**, 1950, p. 440.
[4] N. N. BOGOLOUBOV et D. V. CHIRKOV, *Introduction à la théorie quantique des champs*, Dunod, Paris, 1960, surtout chapitre VII.
[5] J. R. KLAUDER, *Ann. Phys.* (New York), t. **11**, 1960, p. 123.
[6] J. R. KLAUDER, Notes de conférences de Bern, 1962 (non publiées).
[7] S. S. SCHWEBER, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 831.
[8] R. P. FEYNMAN et A. R. HIBBS, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1965.
[9] J. TARSKI, Conférences de Boulder, 1967, dans *Lectures in theoretical physics*, vol. X-A, édité par W. Brittin, Gordon and Breach, New York, 1968, p. 433, surtout la section XII.
[10] C. M. DEWITT, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. A, t. **11**, 1969, p. 153.
[11] R. H. CAMERON, *J. Math. and Phys.*, t. **39**, 1960, p. 126.
[12] E. NELSON, *J. Math. Phys.*, t. **5**, 1964, p. 332.
[13] K. ITÔ, dans *Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, University of California Press, Berkeley, 1966, vol. II, part 1, p. 145.
[14] I. M. GUELFAND et N. Ya. VILENKIN, *Les distributions*, t. IV, Dunod, Paris, 1967.
[15] L. GROSS, Harmonic analysis on Hilbert space. *Mem. Amer. Math. Soc.*, n° 46, 1963.
[16] D. SHALE, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **103**, 1962, p. 149.
[17] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[18] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular integral equations*, P. Noordhoff N. V., Groningen-Holland, 1953, chap. 1 et 2.
[19] A. KATZ, *Classical mechanics, quantum mechanics, field theory*, Academic Press, New York, 1965, chapitre 2.
[20] J. GLIMM et A. JAFFE, *Phys. Rev.*, t. **176**, 1968, p. 1945; *Ann. of Math.*, t. **91**, 1970, p. 362; et *Acta Math.*, t. **125**, 1971, p. 203.
[21] E. C. TITCHMARSH, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, Part 1, University Press, Oxford, 2nd ed., 1962.
[22] D. SHALE, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 915.
[23] Yu. V. PROHOROV, *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, t. **1**, 1946, p. 177 (en traduction : p. 156).
[24] I. HOSOKAWA, *J. Math. Phys.*, t. **8**, 1967, p. 221.
[25] M. CLUTTON-BROCK, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. **61**, 1965, p. 201.
[26] L. SCHULMAN, *Phys. Rev.*, t. **176**, 1968, p. 1558.
[27] P. KRISTENSEN, L. MEJLBO et E. THUE POULSEN, dans *Symposium on probability methods in analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1967, *Lecture notes in Mathematics*, n° 31, p. 187.

(Manuscrit reçu le 18 mars 1971).