ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. CAHEN
J. GEHENIAU
M. GÜNTHER
CH. SCHOMBLOND

Fonctions de Green de l'équation de Dirac dans l'univers de De Sitter

Annales de l'I. H. P., section A, tome 14, nº 4 (1971), p. 325-333
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_4_325_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 4, 1971, p. 325-333.

Section A :
Physique théorique.

Fonctions de Green de l'équation de Dirac dans l'univers de de Sitter

par

M. CAHEN, J. GEHENIAU, M. GÜNTHER et Ch. SCHOMBLOND
Université Libre de Bruxelles.

SUMMARY. — We obtain simple closed expressions for the Green's functions of Dirac's equations in de Sitter space, exploiting properties of the space that it is symmetric and conformal Minkowskian with a conformal factor depending only on the distance from one point which is chosen as the origin of coordinates.

1. INTRODUCTION

Les fonctions de Green jouent un rôle essentiel en théorie quantique des champs dans l'espace-temps de Minkowski. Afin d'étendre cette théorie à l'univers de de Sitter, il est nécessaire de disposer, pour cet espace, d'expressions commodes des propagateurs relatifs aux équations fondamentales.

Pour l'équation de Klein-Gordon, la question a été résolue de plusieurs manières [*1*] [*2*] [*3*].

L'équation de Weyl dans l'univers de de Sitter ne pose pas de problème parce qu'elle est équivalente à cette équation dans l'espace-temps de Minkowski (voir notamment [*3*]).

G. Börner et H. P. Dürr [*4*] ont obtenu un système complet de solutions de l'équation de Dirac dans l'univers de de Sitter, et construit les fonctions de Green à l'aide de ces solutions, comme cela se fait dans l'espace-temps de Minkowski avec les ondes planes.

Nous avons suivi une autre voie. Elle consiste à écrire d'abord la solution lorsque l'origine des coordonnées est placée en l'un des deux points;

le problème est alors ramené à la résolution d'une équation différentielle, parce que l'espace est minkowskien conforme avec un facteur conforme qui ne dépend que de la distance à l'origine. On passe ensuite au cas général par un transport adéquat qui tire profit de ce que l'espace est symétrique.

2. NOTATIONS

Nous utilisons les systèmes de coordonnées (x) pour lesquels le carré de la distance élémentaire a la forme

$$ds^2 = \phi_x^2 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$
$$\phi_x = (1 - x^2)^{-1} \qquad x^2 = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \tag{2}$$
$$\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = +1, \quad \eta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta.$$

Les composantes covariantes et contravariantes du vecteur unité sur l'axe k du tétrapode en x sont désignées par $e_{\alpha k}(x)$ et $e_k^\alpha(x)$ et $\nabla_k \psi$ est la dérivée covariante du spineur ψ suivant cet axe.

L'équation de Dirac s'écrit alors

$$(\mathrm{P} - m)\psi = 0$$

où

$$\mathrm{P} = i\gamma^k \nabla_k$$

et les γ sont un système de matrices de Dirac :

$$\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k = 2\eta_{kl};$$

les indices latins sont abaissés ou élevés avec le tenseur métrique minkowskien

$$\eta_{kl} = \eta^{kl} \qquad (k, l = 0, 1, 2, 3).$$

Pour le spineur $\overline{\psi}$ adjoint de ψ on a de même

$$(\overline{\mathrm{P}} - m)\overline{\psi} = 0$$

où

$$\overline{\mathrm{P}}\overline{\psi} = -\nabla_k \overline{\psi} \gamma^k i.$$

Nous plaçons en chaque point le tétrapode sur le repère naturel. En ce cas [3],

$$\mathrm{P}\psi \equiv \phi_x^{-5/2} i\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} (\phi_x^{3/2} \psi) \tag{3}$$

$$\overline{\mathrm{P}}\overline{\psi} \equiv -\phi_x^{-5/2} \frac{\partial}{\partial x^k} (\phi_x^{3/2} \overline{\psi}) \gamma^k i. \tag{4}$$

3. LES ÉQUATIONS

Les fonctions de Green $S(x, y)$ attachées aux deux points x et y sont des solutions des équations

$$(P_x - m)S(x, y) = \delta(x, y) \tag{5}$$

$$(\bar{P}_y - m)S(x, y) = \delta(x, y). \tag{6}$$

Les indices x et y indiquent ici les points où opèrent P et $\bar{P}$. La mesure de Dirac $\delta(x, y)$ dans l'univers de de Sitter est liée à celle de l'espace-temps de Minkowski, $\delta(x - y)$, par

$$\delta(x - y) = \phi_x^2 \delta(x, y) \phi_y^2 \tag{7}$$

où, comme en (2),

$$\phi_y = (1 - y^2)^{-1}. \tag{2'}$$

Grâce à (3), (4), (7), et en posant

$$T(x, y) = \phi_x^{3/2} S(x, y) \phi_y^{3/2} \tag{8}$$

les équations (5) et (6) se réduisent à

$$(p_x - m\phi_x)T(x, y) = \delta(x - y) \tag{9}$$

$$(\bar{p}_y - m\phi_y)T(x, y) = \delta(x - y) \tag{10}$$

où

$$p_x T = i\gamma^k \frac{\partial T}{\partial x^k} \quad , \quad \bar{p}_y T = - \frac{\partial T}{\partial y^k} \gamma^k i. \tag{11}$$

Notons que pour la solution élémentaire au sens de Hadamard les seconds membres de (9) et (10) sont nuls.

4. CAS PARTICULIER

Le problème a été résolu dans [2] lorsque le point (y) est à l'origine des coordonnées.

Guidé par la théorie générale [5], on peut poser directement

$$T(x, y) = (\phi_x^{-1} p_x + m)B. \tag{12}$$

L'équation pour B se réduit à une équation différentielle, parce que ϕ_x

ne dépend du point (x) que par l'intermédiaire de x^2. En désignant par B′ la dérivée de $B(\nu)$ par rapport à

$$\nu = \phi_x \phi_y (x - y)^2 \tag{13}$$

l'équation à satisfaire est

$$\nu(1 + \nu)B'' + (2 + \nu)B' + \frac{m^2}{4} B = 0. \tag{14}$$

Sa solution régulière en $\nu = 0$ est la fonction hypergéométrique

$$F(\beta, -\beta; 2; -\nu) \tag{15}$$

$$\beta = \pm\, im/2. \tag{16}$$

L'autre fonction solution de (14) possède les singularités en ν^{-1}, en ν; elle fournit la solution élémentaire de Hadamard. Les solutions mesures de Dirac, portées dans (12), donnent des « fonctions de Green » et les propagateurs. Par exemple :

$$B(\nu) = \delta(\nu) - \left(1 + \frac{m^2}{4}\right) F(\beta, -\beta; 2; -\nu) \cdot \theta(\nu) \tag{17}$$

donne la demi-somme des « fonctions de Green » avancée et retardée. A noter que ces distributions satisfont à (9) et (10) en (x) et $(y = 0)$.

5. TRANSPORT DES POINTS SUR L'ESPACE DE DE SITTER

La méthode utilisée ici pour expliciter ce transport fait appel à la propriété de l'espace de de Sitter $\mathscr{H}$ d'être un espace symétrique.

Le groupe d'isométries de $\mathscr{H}$ est O(1,4) ; le groupe d'isotropie d'un point est O(1,3); les composantes connexes de l'identité sont respectivement $O_+^\uparrow(1,4)$ et $O_+^\uparrow(1,3)$. L'espace de de Sitter est difféomorphe au quotient

$$\mathscr{H} \sim O_+^\uparrow(1,4)/O_+^\uparrow(1,3). \tag{18}$$

Soit π la projection canonique de $O_+^\uparrow(1,4)$ sur $\mathscr{H} \sim O_+^\uparrow(1,4)/O_+^\uparrow(1,3)$. Les coordonnées des points de $\mathscr{H}$ sont identifiées aux paramètres caractérisant les classes latérales de $O_+^\uparrow(1,3)$. En particulier l'origine de $\mathscr{H}$ est identifiée à $O_+^\uparrow(1,3)$. Si $\mathscr{G}$ désigne l'algèbre de Lie de $O_+^\uparrow(1,4)$, si $\mathscr{K}$ désigne l'algèbre de Lie de $O_+^\uparrow(1,3)$, il existe un supplémentaire canonique $\mathscr{P}$ de $\mathscr{K}$ dans $\mathscr{G}$, tel que $\pi_* \mid \mathscr{P}$ soit un isomorphisme de $\mathscr{P}$ sur l'espace tangent à $\mathscr{H}$ à l'origine.

On obtient un transport sur $\mathscr{H}$ en considérant l'action sur $\mathscr{H}$ des sous-groupes à un paramètre de $O_+^\uparrow(1,4)$ contenus dans exp $\mathscr{P}$.

La décomposition de $\mathscr{G}$ en $\mathscr{K}$ et $\mathscr{P}$ est immédiate : les dix éléments $g^{rs} = - g^{sr}$ qui satisfont aux règles de commutation

$$[g^{rs}, g^{uv}] = \eta^{su}g^{rv} + \eta^{rv}g^{su} - \eta^{sv}g^{ru} - \eta^{ru}g^{sv} \qquad r, s, u, v = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad \eta^{\alpha 4} = 0 \quad \eta^{44} = -1 \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{19}$$

forment une base de $\mathscr{G}$, les six $g^{\alpha\beta}$ une base de $\mathscr{H}$, et l'espace $\mathscr{P}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des quatre autres éléments $g^{\alpha 4}$.

Dans l'espace de Minkowski à cinq dimensions rapporté à un système de coordonnées rectilignes orthogonal (ξ) les isométries de $O_+^\uparrow(1,4)$ sont engendrées par les déplacements infinitésimaux

$$d\xi_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{rs}(g^{rs})_{ab}\xi^b \qquad (r, s, a, b = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{20}$$

$$(g^{rs})_{ab} = \delta_a^r\delta_b^s - \delta_a^s\delta_b^r \tag{21}$$

celles de $O_+^\uparrow(1,3)$ par

$$d\xi_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}(g^{\alpha\beta})_{ab}\xi^b \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \tag{22}$$

et les transports cherchés sont obtenus en résolvant les équations

$$d\xi_a = \varepsilon_{\alpha 4}(g^{\alpha 4})_{ab}\xi^b \tag{23}$$

ou encore, en posant

$$\varepsilon_{\alpha 4} = a_\alpha dt \quad , \quad a_\alpha a^\alpha = a^2 = \pm 1, 0, \tag{24}$$

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = a_\alpha \xi^4 \qquad \frac{d\xi_4}{dt} = - a_\alpha \xi^\alpha. \tag{25}$$

(Dans ces formules, les indices sont élevés ou abaissés à l'aide du tenseur métrique $\eta^{rs} = \eta_{rs}$).

En particulier, les solutions

$$\xi^\alpha = \frac{a^\alpha R}{\sqrt{a^2}} \operatorname{sh} \sqrt{a^2}t \quad , \quad \xi^4 = R \operatorname{ch} \sqrt{a^2}t \tag{26}$$

sont les trajectoires de l'origine (0, 0, 0, 0, R) sur l'hypersurface

$$\eta_{rs}\xi^r\xi^s = - R^2 \tag{27}$$

qui représente l'univers de de Sitter de « rayon » R.

Si $a^2 = +1$, (26) devient $\begin{cases} \xi^\alpha = a^\alpha R \operatorname{sh} t \\ \xi^4 = R \operatorname{ch} t \end{cases}$

$$\xi^4 \geqslant R\,;$$

si $a^2 = 0$, (26) devient $\begin{cases} \xi^\alpha = a^\alpha R t \\ \xi^4 = R \end{cases}$

la région couverte est l'hypercône de lumière de sommet [0, 0, 0, 0, R];

si $a^2 = -1$, (26) devient $\begin{cases} \xi^\alpha = a^\alpha R \sin t \\ \xi^4 = R \cos t \end{cases}$

et $|\xi^4| \leqslant R$.

L'origine est donc transportée en tout point de $\mathscr{H}$ appartenant à

$$\{\xi^4 > -R\}\, \mathrm{U}[0, 0, 0, 0, -R]. \tag{28}$$

On obtient aisément la matrice qui transporte un point P de coordonnées $\tilde{\xi}$ en un point Q de coordonnées ξ, en calculant la solution générale de (26)

$$\begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \\ \xi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^\alpha_\beta + \dfrac{a^\alpha a_\beta}{a^2}(\operatorname{ch}\sqrt{a^2}t - 1) & \dfrac{a^\alpha}{\sqrt{a^2}} \operatorname{sh}\sqrt{a^2}t \\ \dfrac{a_\beta}{\sqrt{a^2}} \operatorname{sh}\sqrt{a^2}t & \operatorname{ch}\sqrt{a^2}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}^\beta \\ \\ \tilde{\xi}^4 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Réintroduisons à présent les coordonnées conformes (x) sur $\mathscr{H}$; elles sont liées aux (ξ) par

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &= x^\alpha \phi_x \\ \xi^4 &= \frac{1}{2}(1 + x^2)\phi_x \\ \phi_x &= (1 - x^2)^{-1} \qquad (2R = 1) \end{aligned} \tag{30}$$

A l'origine $\left(\tilde{\eta}^\alpha = 0,\ \tilde{\eta}^4 = R = \dfrac{1}{2}\right)$ on associe par (30), $\tilde{y}^\alpha = 0$; par (26), ce point est transporté en (η^α, η^4) auquel sont associées les coordonnées conformes y^α ; (26) devient alors :

$$\begin{aligned} y^\alpha \phi_y &= \frac{a^\alpha}{\sqrt{a^2}} R \operatorname{sh}\sqrt{a^2}t = \frac{1}{2}\frac{a^\alpha}{\sqrt{a^2}} \operatorname{sh}\sqrt{a^2}t \\ \frac{1}{2}(1 + y^2)\phi_y &= R \operatorname{ch}\sqrt{a^2}t = \frac{1}{2}\operatorname{ch}\sqrt{a^2}t \end{aligned} \tag{31}$$

d'où on tire

$$y^\alpha = \frac{a^\alpha}{\sqrt{a^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{a^2}t}{2} \quad , \quad y^2 = \operatorname{th}^2 \frac{\sqrt{a^2}t}{2}, \tag{32}$$

ce qui établit le difféomorphisme local entre exp $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$. En associant respectivement à $\tilde{\xi}$ et ξ les coordonnées intrinsèques $\tilde{x}$ et x, et en utilisant (32) dans (29), il vient

$$x^\alpha = (1 + 2\tilde{x}y + \tilde{x}^2y^2)^{-1}[(1 - y^2)\tilde{x}^\alpha + (1 + 2\tilde{x}y + \tilde{x}^2)y^\alpha], \tag{33}$$

les y^α sont les paramètres du transport.

La transformation inverse de (33) s'obtient par les substitutions

$$x \leftrightarrow \tilde{x} \quad , \quad y^\alpha \leftrightarrow -y^\alpha.$$

6. CAS GÉNÉRAL

On peut voir aussi (33) comme un changement de variables : $\tilde{x}$ et $\tilde{y}=0$ sont alors les coordonnées initiales des deux points P et Q, x et y leurs nouvelles coordonnées.

Par ce changement de coordonnées, les composantes $\tilde{e}_k^\alpha$ des vecteurs unités sur les axes du tétrapode en P deviennent

$$\underline{e}_k^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} \tilde{e}_k^\beta. \tag{34}$$

Selon nos conventions, le tétrapode à utiliser est celui placé sur le repère naturel du nouveau système de coordonnées. La rotation minkowskienne à effectuer est donnée par

$$e_k^\alpha \equiv \delta_k^\alpha \phi_x^{-1} = \mathrm{R}_k^l \underline{e}_l^\alpha. \tag{35}$$

A l'aide de la formule inverse de (33)

$$\tilde{x}^\alpha = (1 - 2xy + x^2y^2)^{-1}[(1 - y^2)x^\alpha - (1 - 2xy + x^2)y^\alpha] \tag{36}$$

on tire de (35)

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{kl} &= \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x^k} \phi_x^{-1}(1 + v) \\ &= \eta_{kl} + \phi_x\phi_y \frac{1}{1 + v} \left\{ \frac{1}{2} \omega_{kr}\omega^r{}_l + \omega_{kl}(1 - xy) \right\} \\ &= \eta_{kl} + \left(1 + \frac{1}{8}\mathrm{O}^2\right)^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{O}_{kr}\mathrm{O}^r{}_l + \mathrm{O}_{kl} \right\} \end{aligned} \tag{37}$$

où

$$\omega_{kl} = 2(y_k x_l - y_l x_k) \tag{38}$$
$$\mathrm{O}_{kl} = \omega_{kl}/(1 - xy) \tag{39}$$
$$\mathrm{O}^2 = \mathrm{O}_{rs}\mathrm{O}^{rs}. \tag{40}$$

Par le changement de coordonnées (36), le spineur $\tilde{\psi}(\tilde{x})$ devient

$$\underline{\psi}(x) = \tilde{\psi}[\tilde{x}(x)]$$

et la rotation (37) le transforme en

$$\psi(x) = \Lambda\underline{\psi}(x) \tag{41}$$

où la matrice Λ est déterminée par les équations

$$\Lambda\gamma^k\Lambda^{-1} = \gamma^l \mathrm{R}_l{}^k, \tag{42}$$

qui expriment l'invariance des équations de Dirac, et la condition

$$\det \Lambda = 1.$$

On trouve facilement

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{1 - xy}{[1 - 2xy + x^2y^2]^{\frac{1}{2}}}\left[\mathrm{I} - \frac{i\omega^{rs}\sigma_{rs}}{4(1 - xy)}\right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{8}\mathrm{O}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\mathrm{I} - \frac{i}{4}\mathrm{O}^{rs}\sigma_{rs}\right]\end{aligned} \tag{43}$$

où

$$\sigma_{rs} = \frac{i}{2}(\gamma_r\gamma_s - \gamma_s\gamma_r). \tag{44}$$

Ceci est valable en tout point de l'espace. En particulier, au point Q de coordonnées y^α, la matrice Λ se réduit à la matrice unité.

Reprenons enfin l'une quelconque des « fonctions » S obtenues au paragraphe 4. Dans nos notations actuelles, à un facteur constant près qui dépend de la fonction considérée,

$$\tilde{\mathrm{S}}(\tilde{x}, 0) = \phi_{\tilde{x}}^{-3/2}\left(\phi_{\tilde{x}}^{-1} i\gamma^l \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^l} + m\right)\mathrm{B}(\tilde{v}) \tag{45}$$

$$= \phi_{\tilde{x}}^{-1/2} 2i\gamma^l \tilde{x}_l \mathrm{B}'(\tilde{v}) + m\phi_{\tilde{x}}^{-3/2}\mathrm{B}(\tilde{v}). \tag{46}$$

Dans les nouvelles variables, $\tilde{v}$ s'écrit

$$v = \phi_x\phi_y(x - y)^2.$$

En tenant compte de

$$\phi_{\tilde{x}} = 1 + v$$

on obtient

$$\underline{S}(x, y) = (1 + \nu)^{-3/2} \{ 2i\gamma^k[(x_k - y_k)\phi_x - \nu y_k]B'(\nu) + mB(\nu) \}. \quad (47)$$

Puisque S(x, y) est un bi-un-spineur, l'effet de la rotation des tétrapodes est

$$S(x, y) = \Lambda\underline{S}(x, y)I.$$

Nous obtenons ainsi, en utilisant la notation

$$X = x_k\gamma^k \quad (48)$$

$$S(x, y) = 2i\phi_x^{1/2}(X - Y)\phi_y^{1/2} \frac{B'(\nu)}{1 + \nu} + m\phi_x^{1/2}(I - XY)\phi_y^{1/2} \frac{B(\nu)}{(1 + \nu)^2} \quad (49)$$

$$= \phi_x^{-3/2}\phi_y^{-3/2}[\phi_x^{-1}p_x + m][\phi_x^2\phi_y^2(1 + \nu)^{-2}B(\nu)[I - XY]]. \quad (50)$$

On peut vérifier d'ailleurs que la fonction T(x, y) construite avec cet S(x, y) satisfait bien aux équations (9) et (10).

RÉFÉRENCES

[*1*] G. BÖRNER, Feldtheorien in de Sitterraum unter besonderer Berücksichtigung der nichtlearen Spinortheorie. Dissertation. Ludwig-Maximilans Universität, München, 1968.

[*2*] N. A. CHERNIKOV and E. A. TAGIROV, *Annales de l'I. H. P.*, A, t. **9**, 1968.

[*3*] J. GEHENIAU et Ch. SCHOMBLOND, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. des Sciences*, t. **54**, 1968, p. 1147-1157.

[*4*] G. BÖRNER and H. P. DURR, *Nuovo Cim.*, t. **64**, 1969, p. 669-714.

[*5*] A. LICHNEROWICZ, *Publicazioni del Comitato Nazionale per le manifestazioni celebrative del IV centenario della nascita di Galileo Galilei*, t. **II**, 1965, p. 160.

Manuscrit reçu le 28 décembre 1970.