ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

FERNAND NAHON

Le problème des N corps unidimensionnel et le mouvement rectiligne des gaz

Annales de l'I. H. P., section A, tome 14, nº 3 (1971), p. 249-284
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_3_249_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 3, 1971, p. 249-284.

Section A :
Physique théorique.

Le problème des N corps unidimensionnel et le mouvement rectiligne des gaz

par

Fernand NAHON
Faculté des Sciences, Paris

RÉSUMÉ. — Appelons « système autogravitant » le système de deux fonctions : f, densité dans l'espace des phases, φ fonction de forces, vérifiant les deux équations de Liouville et de Poisson. A tout problème des N corps, particularisé par ses conditions initiales, correspond un système autogravitant qui en est la formulation statistique. D'autre part à tout système autogravitant correspond, par la méthode des équations hydrodynamiques, le mouvement d'un gaz. Le but de cet article est de préciser les rapports entre ces trois problèmes dans le cas unidimensionnel. Ce cas a été choisi, d'abord parce qu'il est le plus simple, ensuite parce qu'il a été l'objet de nombreuses expériences numériques. Il apparaît en particulier que le modèle étudié en physique des plasmas sous le nom de « water-bag model » correspond à l'évolution isentropique d'un gaz adiabatique d'indice 3. L'équation obtenue pour l'étude de ce modèle est une généralisation de l'équation de Riemann du mouvement rectiligne des gaz. Réciproquement l'étude de cette équation est facilitée par l'information tirée du problème des N corps, c'est-à-dire par l'utilisation du théorème des forces vives et de l'identité de Lagrange (qu'on appelle aussi théorème du viriel).

Plan de l'article

Chapitre premier : PROBLÈME DES N CORPS ET SYSTÈME AUTOGRAVITANT UNIDIMENSIONNELS

On rappelle leurs définitions et on précise leur correspondance. On montre qu'une symétrie initiale dans l'espace des phases par rapport au centre de gravité se conserve au cours du temps.

Chapitre II : SYSTÈME AUTOGRAVITANT ET MOUVEMENT RECTILIGNE DES GAZ

Les équations hydrodynamiques associent à l'équation de Liouville le mouvement d'un gaz parfait d'indice 3 ; l'évolution de ce gaz est isentropique si le système autogravitant est du type étudié en physique des plasmas sous le nom de « water-bag model ».

Cette évolution est régie par une équation aux dérivées partielles qui généralise l'équation de Riemann du mouvement rectiligne des gaz.

Chapitre III : LES INÉGALITÉS DU VIRIEL

Au moment d'inertie et au potentiel du système correspondent deux longueurs caractéristiques $q(t)$, $R(t)$. L'emploi des deux théorèmes des forces vives et du viriel conduit à un système d'inégalités vérifiées par ces deux longueurs. L'application au cas particulier du water-bag model permet de préciser la stabilité de la solution stationnaire.

CHAPITRE I

PROBLÈME DES N CORPS ET SYSTÈME AUTOGRAVITANT UNIDIMENSIONNELS

Appelons P_1 le problème des N corps unidimensionnel, P_2 le système autogravitant correspondant et rappelons leurs définitions.

P_1. — Soit, sur l'axe des x, N points matériels de masses m_i, d'abscisses x_i. Ils s'attirent deux à deux suivant la force

$$|F_{ij}| = gm_im_j \tag{1}$$

ou g est une constante proportionnelle à la constante G de la gravitation universelle. On donne à l'instant initial t_0 la distribution des positions et des vitesses des N particules. En déduire la distribution à l'instant t.

P_2. — Soit $f(x, y, t)$ une densité dans l'espace des phases x, y, variable avec le temps, et $\varphi(x, t)$ une fonction de forces, liées par les deux conditions :

C^1. — L'intégrale $\iint_{A(t)} f\delta x\delta y$ est invariante pour les transformations ponctuelles solutions du système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2}$$

C^2. — Soit $S(x) = -g|x|$ le potentiel gravitationnel de la masse unité placée à l'origine, et soit

$$\rho(x, t) = \int f(x, y, t)\delta y$$

la densité projetée sur l'axe des x.

φ est le potentiel créé par cette densité, c'est-à-dire :

$$\varphi(x, t) = \int S(x' - x)\rho(x', t)\delta x' \tag{3}$$

Remarques

A) Le système différentiel (2) admet l'invariant intégral $\iint_{A(t)} \delta x\delta y$.

Donc f vérifie l'équation de continuité de la mécanique des milieux continus :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}y + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

C'est cette équation de continuité qu'on appelle équation de Liouville, de Vlasov, etc.

B) Soit $F(x, y, t)$ une fonction différentielle arbitraire et

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

sa dérivée le long d'une solution de (2).

Considérons l'intégrale

$$I(t) = \iint_{A(t)} Ff\delta x\delta y$$

On démontre, et nous l'utiliserons, que (4) entraîne la formule

$$\frac{dI}{dt} = \iint_{A(t)} \frac{dF}{dt} f\delta x\delta y \tag{5}$$

C) Soit $s(x) = -g$ signe de x la dérivée de $S(x)$. Pour $x = 0$, nous poserons $s(0) = 0$.

Posons d'autre part:

$$\begin{aligned} M^+(x, t) &= \text{ensemble des masses à droite de } x \\ &= \int_x^{\infty} \rho(x', t)\delta x' \end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned} M^-(x, t) &= \text{ensemble des masses à gauche de } x \\ &= \int_{-\infty}^{x} \rho(x', t)\delta x' \end{aligned}$$

Nous trouverons

(7) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = g[M^+(x) - M^-(x)]$$

donc

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -2g\rho(x, t)$$

C'est l'équation de Poisson à une dimension.

Rapports entre P_1, P_2.

On admet que P_2 représente une expression asymptotique de P_1 lorsque le nombre N de particules tend vers l'infini. Cette conjecture se fonde sur les analogies des deux problèmes. Ces analogies sont bien connues, mais nous voulons les rappeler parce qu'il est difficile d'en trouver un exposé explicite.

A) La fonction de forces du problème des N corps:

Soit $\{x_i\}$ la suite $x_1, x_2, \ldots, x_N$

Posons:

(8) $$V(x, \{x_i\}) = \Sigma m_i S(x_i - x)$$

Je dis que les équations du mouvement des N particules peuvent se mettre sous la forme:

(2 *bis*) $$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= y_j \\ \frac{dy_j}{dt} &= \left(\frac{dV}{\partial x}\right)_{x=x_j} = x_j \end{aligned}$$

Le potentiel des N corps est en effet :

$$U\{x_i\} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j m_i m_j S(x_i - x_j) \tag{9}$$

d'où

$$\begin{cases} 2U = \Sigma m_i V(x = x_i) \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_j} = m_j\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=x_j} \end{cases} \tag{10}$$

La fonction V joue donc pour P_1 le même rôle que φ pour P_2.

Or V et φ sont les valeurs moyennes de la même fonction $S(x' - x)$ pour les deux distributions discrète D_1 et continue D_2, dont les problèmes P_1 et P_2 étudient l'évolution.

DÉFINITION. — Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points de l'espace des phases $F(M, M')$ une fonction donnée et

$$F_1(M, \{x_i\}) = \Sigma m_i F(M, M_i)$$

la valeur moyenne de F pour la distribution discrète D_1

$$F_2(M, t) = \iint F(M, M')f(x', y', t)\delta x'\delta y'$$

la valeur moyenne de F pour la distribution continue D_2.

Nous dirons que F_1 et F_2 sont correspondantes, de noyau $F(M, M')$.

THÉORÈME 1. — Les fonctions de force V et φ sont correspondantes.

Leur noyau est en effet $S(x' - x)$. Est-ce que leurs dérivées partielles sont correspondantes ?

a) c'est évident pour les dérivées par rapport à x. Leur noyau est $s(x - x')$,

b) calculons $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ et utilisons pour ce faire la formule (5).

Nous trouvons :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \iint s(x' - x)y'f(x', y', t)\partial x'\partial y' \tag{11}$$

Donc :

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ = valeur moyenne pour la distribution D_2 de la fonction $s(x' - x)y'$.

c) nous sommes donc conduits à définir $\frac{\partial V}{\partial t}$ par :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \Sigma m_i s(x_i - x) y_i \tag{12}$$

Cette définition est naturelle; elle revient à considérer que la fonction $V(x, \{ x_i \})$ dépend implicitement du temps par l'intermédiaire de la suite $\{ x_i \}$.

Propriétés communes de P_1 et P_2.

1. Théorème d'existence

La donnée de la distribution D_1 à l'instant t_0 détermine de façon unique la distribution D_1 à l'instant t. C'est le théorème de Cauchy ; il suppose que les équations différentielles de P_1 n'ont pas de singularité pendant cet intervalle de temps.

Si les seules singularités possibles sont les collisions, l'énoncé est donc valable pour tout t. Car les collisions ne sont pas des singularités pour le problème unidimensionnel.

Nous admettrons de même que la donnée de la distribution D_2 à l'instant t_0 détermine uniquement cette distribution à l'instant t.

2. Intégrale première du centre de gravité

Son accélération est nulle : nous le prendrons comme origine des axes dans les deux systèmes.

Théorème 2. — Si la distribution initiale $D(t_0)$ est symétrique par rapport à l'origine, il en est de même de la distribution $D(t)$.

Examinons par exemple le cas de D_2.

Soient M, M′ deux points de l'espace des phases symétriques par rapport à l'origine. Par hypothèse

$$f_0(M) = f_0(M')$$

Pour qu'il en soit de même à l'instant $t_0 + \varepsilon$, il faut et il suffit que les vitesses de ces deux points soient symétriques par rapport à l'origine. Or ces vitesses sont :

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$$

Il faut donc calculer $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x}$ et vérifier que

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(\mathrm{M}) = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(\mathrm{M}')$$

Introduisons la fonction

$$\mathrm{M}_0(x) = 2\int_0^x \rho_0 \delta x \tag{13}$$

Par hypothèse, ρ_0 est une fonction paire, donc M_0 impaire et

$$\mathrm{M}_0{}^+(x) - \mathrm{M}_0{}^-(x) = -\mathrm{M}_0(x)$$

donc d'après (7)

$\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x} = -g\mathrm{M}_0(x)$ est bien une fonction impaire.

Nous nous bornerons désormais à l'étude du cas symétrique et nous retiendrons que l'équation de Poisson prend dans ce cas une forme particulièrement simple :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}(x, t) = 2\int_0^x \rho(x', t)\delta x' \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -g\mathrm{M} \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Nous normaliserons le problème en supposant que la masse totale est égale à 1 de sorte que M varie de 0 à 1 lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$ et nous utiliserons la fonction $x(\mathrm{M}, t)$ inverse de $\mathrm{M}(x, t)$.

3. Théorème de l'énergie cinétique et théorème du viriel

Soit 2T l'énergie cinétique,
$-$ U l'énergie potentielle
et I le moment d'inertie par rapport au centre de gravité du problème des N corps unidimensionnel.

Ces trois quantités sont définies comme des valeurs moyennes par rapport à D_1 ; nous définirons les quantités correspondantes du système autogravitant comme les fonctions correspondantes pour la distribution D_2 et nous aurons ainsi le tableau :

	Problème des N corps	Système autogravitant
	$2T = \Sigma my^2$	$\iint y^2 f \delta x \delta y$
(15)	$2U = \Sigma mV$	$\iint \varphi f \delta x \delta y$
	$I = \Sigma mx^2$	$\iint x^2 f \delta x \delta y$

Pour le problème P_1 on a les deux relations :

(16)

Théorème des forces vives $\dfrac{d}{dt}(T - U) = 0$

Identité de Lagrange $\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2 I}{dt^2} = 2T + U$

Je dis que ces deux relations sont vraies pour P_2. Soit par exemple à démontrer le théorème des forces vives :

Pour P_1, il faut vérifier que :

$$\begin{array}{ccc} 2\Sigma my\dfrac{dy}{dt} & = & \Sigma m\dfrac{dV}{dt} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2\Sigma my\dfrac{\partial V}{\partial x} & = & \Sigma my\dfrac{\partial V}{\partial x} + \Sigma m\dfrac{\partial V}{\partial t} \end{array}$$

Donc tout revient à démontrer l'égalité de deux valeurs moyennes :

$$\text{valeur moyenne de } y\frac{\partial V}{\partial x} = \text{valeur moyenne de } \frac{\partial V}{\partial t}$$

et le procédé de démonstration que l'on établit pour D_1 vaut mot pour mot pour D_2.

Nous verrons au chapitre III la forme que prennent ces deux relations pour P_2 lorsqu'on décrit le système autogravitant par la fonction $x(M, t)$.

La formulation du problème P_2 est due à CAMM.

(1) G. L. CAMM, *Vistas in Astronomy*, 1955, p. 216.

L'étude numérique du problème P_1 a fait l'objet de deux colloques.

(2) Symposium on computer simulation of plasma and many-body problems Williamsburg, Virginia (U. S. A.), *N. A. S. A. SP 153*, 1967.

(3) Colloque sur le problème des N corps, Paris, 1967, ***Publication du Centre National de la Recherche Scientifique***, 1968.

Le but de cet article est d'éclaircir du point de vue des concepts de la Dynamique des Gaz les résultats numériques publiés dans ces deux colloques, notamment ceux de HOHL.

CHAPITRE II

MOUVEMENT RECTILIGNE DES GAZ ET SYSTÈMES AUTOGRAVITANTS

Introduction

Dans le premier chapitre nous avons associé à tout problème des N corps unidimensionnel l'étude de l'évolution d'un système autogravitant. Dans ce chapitre nous allons associer à cette évolution l'étude du mouvement rectiligne d'un gaz parfait d'indice 3.

Nous obtiendrons un résultat général : soit μ_3 le moment d'ordre 3 de la distribution des vitesses du système autogravitant, et soit S l'entropie du gaz. Pour que $\frac{dS}{dt}$ soit identiquement nul, c'est-à-dire pour que le mouvement du gaz soit adiabatique, il faut et il suffit que μ_3 soit identiquement nul.

L'entropie est alors constante le long de la trajectoire de chaque molécule de gaz, mais elle dépend de cette molécule. Le cas particulier où elle n'en dépend pas, c'est-à-dire où le mouvement du gaz est isentropique, correspond à un cas particulier de système autogravitant symétrique, qui a fait l'objet de nombreuses études numériques sous le nom de « waterbag model ».

Ce modèle a été introduit en Dynamique Stellaire par analogie avec la Physique des Plasmas ; nous voyons qu'il s'introduit tout naturellement du point de vue de la Dynamique des Gaz, et nous obtenons à son sujet un résultat précis : l'étude de son évolution se ramène à celle d'une équation aux dérivées partielles qui généralise l'équation de Riemann du mouvement rectiligne des gaz adiabatiques.

1. Les équations de conservation du mouvement rectiligne des gaz

Soit $\rho(x, t)$ la densité, $u(x, t)$ la vitesse de la particule qui passe en x à l'instant t : x et t sont les variables d'Euler. Isolons par la pensée la tranche de gaz $x \geqslant a(t)$ et appliquons lui les trois principes fondamentaux de la Mécanique (1).

(1) L'étude du mouvement rectiligne des gaz se trouve dans plusieurs ouvrages. Nous avons choisi l'exposé de Paul R. GARABEDIAN, *Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons, 1964, chap. 14.

1 Conservation de la masse

Ecrivons que $M = \int_a^\infty \rho(x, t)\delta x$ est un invariant intégral pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

nous obtenons l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \tag{1}$$

Introduisons la dérivée suivant la trajectoire de chaque particule

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}$$

nous obtenons la forme duale:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1 bis}$$

2 Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement est $L = \int_a^\infty \rho u \delta x.$

Les forces appliquées sont:

d'une part les forces extérieures de résultante $\int_a^\infty \rho X \partial x,$

d'autre part la force de pression $\varpi(x, t)$ qui exerce sur la tranche considérée la force

$$\varpi(a, t) = -\int_a^\infty \frac{\partial \varpi}{\partial x}\partial x$$

Ecrivons que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la résultante des forces appliquées, et utilisons pour le faire l'identité

$$\frac{d}{dt}\int_a^\infty F\rho\partial x = \int_a^\infty \frac{dF}{dt}\rho\partial x$$

qui est valable pour toute fonction $F(x, t)$ différentiable en conséquence de l'équation de continuité (1 *bis*).

Nous trouverons l'équation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial \varpi}{\partial x} = \rho X \tag{2}$$

3 Bilan d'énergie

Soit $\frac{\sigma^2}{2}$ l'énergie interne par unité de masse du gaz. L'énergie de la tranche $x \geqslant a(t)$ est

$$T = \int_a^\infty \frac{1}{2}(u^2 + \sigma^2)\rho\delta x$$

La puissance des forces extérieures est

$$P = \int_a^\infty \rho u X \delta x$$

et la puissance de la force de pression est

$$P' = (u\varpi)(x = a) = -\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x}(u\varpi)\delta x$$

Définissons l'excédent de puissance Δ par la formule

$$\Delta = \frac{dT}{dt} - (P + P') \tag{3}$$

et éliminons X par l'équation (2)

$\frac{\partial u}{\partial x}$ par l'équation (1 *bis*)

Nous obtenons l'équation du bilan d'énergie :

$$\Delta = \int_a^\infty \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{\varpi}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\right]\rho\delta x \tag{4}$$

On dit que le gaz est parfait s'il existe une constante k telle que :

$$\varpi = k\rho\frac{\sigma^2}{2} \tag{5}$$

et on définit l'entropie $S(x, t)$ du gaz parfait par la formule :

$$\frac{\sigma^2}{2} = \rho^k e^S \tag{6}$$

Pour le gaz parfait, la formule (4) se réduit à :

$$\Delta = \int_a^\infty \frac{dS}{dt}\frac{\sigma^2}{2}\rho\delta x \tag{7}$$

Conséquences de l'équation du bilan d'énergie :

a) On dit que le mouvement du gaz est adiabatique si l'excédent Δ est identiquement nul. On a donc le :

Théorème 1. — Pour que le mouvement du gaz parfait soit adiabatique, il faut et il suffit que l'entropie reste constante le long de la trajectoire de chaque particule.

b) On dit que le mouvement est « isentropique » si cette constante est une constante absolue (indépendante de la particule).

Soit $e^S = K$ cette constante ; on a dans ce cas :

$$\frac{\sigma^2}{2} = K\rho^k$$
$$\varpi = 2K\rho^\gamma$$

où $\gamma = k + 1$ est l'indice du gaz.

2. Le gaz associé à l'équation de Liouville

Rappelons l'équation de Liouville (I,4) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}y + \frac{\partial f}{\partial y}X = 0$$

$X(x, t)$ est la force extérieure. Pour un système autogravitant, elle est reliée à f par l'équation de Poisson ; mais nous considérons pour le moment le cas général.

On appelle « équations hydrodynamiques » les équations obtenues en appliquant à l'équation de Liouville les opérateurs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^n \partial y$$

Ces équations font intervenir les moments $M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} fy^n\partial y$. Ecrivons les trois premières :

$$\frac{\partial M_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(M_1) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(M_2) = M_0 X \tag{9}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(M_3) = 2M_1 X \tag{10}$$

Etude des équations (8) (9).

$M_0 = \rho(x, t)$ est la densité spatiale.

$M_1 = \rho u$ où $u(x, t)$ est la vitesse moyenne de la tranche d'abscisse x.

$M_2 = \rho(u^2 + \sigma^2)$ où $\sigma^2(x, t)$ est la mesure de la dispersion des vitesses dans cette tranche.

Utilisons la forme duale (1 *bis*) de l'équation de continuité. Nous mettons les équations (8) (9) sous la forme

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{8 bis}$$

$$\rho\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\sigma^2) = \rho X \tag{9 bis}$$

Ce sont les équations (1), (2) du gaz de pression $\varpi = \rho\sigma^2$. Si nous identifions $\frac{\sigma^2}{2}$ avec l'énergie interne de ce gaz, nous voyons qu'il est parfait avec $k = 2$ donc avec l'indice $\gamma = 3$; d'ou le :

THÉORÈME 2. — Les équations hydrodynamiques associent à chaque solution de l'équation de Liouville le mouvement rectiligne d'un gaz. Ce gaz est parfait, d'indice $\gamma = 3$.

Etude de l'équation (10). Soit :

$$\mu_3 = \int f(y - u)^3 \partial x$$

le moment centré d'ordre 3. Il est lié à M_3 par l'équation

$$M_3 = \mu_3 + 3\rho u\sigma^2 + \rho u^3$$

Portons cette expression dans l'équation (10) et éliminons X par (9). Les calculs se simplifient si on utilise l'entropie S telle que :

$$\frac{\sigma^2}{2} = \rho^2 e^S$$

et conduisent à la formule

$$\rho\sigma^2 \frac{dS}{dt} + \frac{\partial \mu_3}{\partial x} = 0 \tag{10 bis}$$

qu'on peut mettre aussi sous la forme:

$$\Delta = \frac{1}{2}\mu_3(a)$$

Nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 3. — Soit $f(x, y, t)$ une solution de l'équation de Liouville, $\mu_3(x, t)$ son moment centré d'ordre trois. Pour que le mouvement du gaz associé soit adiabatique, il faut et il suffit que μ_3 soit identiquement nul.

3. Cas d'un système autogravitant symétrique

Tenons compte maintenant de l'équation de Poisson et supposons que la distribution initiale soit symétrique par rapport au centre de gravité. Nous savons que cette symétrie se conserve au cours du temps et que l'équation de Poisson prend alors une forme extrêmement simple.

Soit $M(x, t) = 2\int_0^x \rho(x', t)\delta x'$ la masse de gaz comprise entre $-x$ et $+x$.

On a (I,14)

$$X = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -gM$$

Calculons d'autre part la différentielle de M. On a:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2\rho \text{ par définition}$$

et

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 2\int_0^x \frac{\partial \rho}{\partial t}\partial x = -2(\rho u)_0^x$$

d'après l'équation (1) de continuité.

Mais $u(x = 0, t)$ est identiquement nulle en vertu de l'hypothèse de symétrie. Donc

$$\partial M = 2\rho[\partial x - u\partial t] \tag{11}$$

Nous avions écrit les équations de conservation en prenant comme variables indépendantes (x, t) et comme fonctions inconnues (ρ, u). Cela revient à étudier l'évolution de M en fonction de (x, t). Nous allons décrire le gaz autogravitant symétrique en étudiant l'évolution de la fonction inverse $x(\mathrm{M}, t)$ dans le domaine

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \mathrm{M} \leqslant 1 \\ &0 \leqslant t. \end{aligned}$$

(On a normalisé le problème en prenant égale à 1 la masse totale du système).

Les équations de conservation en variables (M, t).

Le choix de M comme variable indépendante est bien connu en dynamique des gaz. Il est justifié par le fait que M *est une variable de Lagrange.* On déduit en effet de l'équation (10)

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt} = \frac{\partial M}{\partial t} + u\frac{\partial M}{\partial x} \equiv 0$$

On peut observer aussi que c'est une conséquence du fait que la masse est un invariant intégral de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

On en déduit que si $\mathrm{F}(x, t) \equiv \phi(\mathrm{M}, t)$ sont les expressions d'une même quantité dans les deux systèmes de variables, on a les relations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathrm{M}} = \dfrac{1}{2\rho}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \dfrac{d\mathrm{F}}{dt} \end{cases}$$

Pour nous en souvenir, *nous conviendrons de désigner les dérivées partielles en variables* M, t *par les notations :*

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{M}}, \frac{d}{dt}$$

Le choix de M est d'autre part spécialement adapté au cas du gaz autogravitant symétrique à cause de la simplification qu'il apporte à l'équation de Poisson. Contentons-nous de rassembler dans un tableau, en laissant le soin de les vérifier au lecteur, la nouvelle forme des équations de conservation ; et attirons l'attention de ce lecteur ([2]) sur le fait que ces équations sont toutes de la forme

$$\frac{d}{dt}(\quad) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{M}}(\quad) = 0$$

Tableau des équations de conservation en variables M, *t*
(système autogravitant symétrique)

1° Conservation de la masse

Soit $\omega = \frac{1}{2\rho}$. On a l'équation

(12) $$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \mathrm{M}}$$

2° Conservation de la quantité de mouvement.

Soit $\rho\sigma^2 = \varpi(\mathrm{M}, t)$ la pression,

$\mathrm{X} = -g\mathrm{M}$ la force extérieure par unité de masse.

On a l'équation

(13) $$\frac{du}{dt} + g\mathrm{M} + 2\frac{\partial \varpi}{\partial \mathrm{M}} = 0$$

3° Bilan d'énergie.

Soit $e = \frac{u^2 + \sigma^2}{2} + g\mathrm{M}x$ l'énergie totale par unité de masse (cinétique + interne + potentielle).

On a l'équation

(14) $$\frac{de}{dt} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{M}}(u\varpi + \mu_3) = 0$$

ou $\mu_3(\mathrm{M}, t)$ est le moment centré d'ordre 3 de la distribution des vitesses du système autogravitant.

4° Equation de l'entropie.

Soit S(M, *t*) l'entropie définie par $\frac{\sigma^2}{2} = \rho^2 e^{\mathrm{S}}$. L'équation (14) peut se mettre sous la forme équivalente

(14 *bis*) $$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d\mathrm{S}}{dt} + \frac{\partial \mu_3}{\partial \mathrm{M}} = 0$$

([2]) G. B. Whitham a montré que cette forme peut servir à l'étude du comportement asymptotique des solutions lorsque $t \to \infty$. Voir par exemple : G. B. Whitham, Non linear dispersive waves, *Proceedings of the Royal Society*, vol. **283**, série A, 1965, p. 238.

4. Le « water-bag model »

Ce modèle qui a fait l'objet de nombreuses « expériences » numériques [3] est défini comme suit : soit C_0 un contour convexe symétrique dans l'espace des phases x, y.

Soit $f(x, y, 0)$ la fonction de fréquence initiale. On prend :

$f = A$ si le point (x, y) est intérieur au contour,
$f = 0$ dans le cas contraire.

Pour connaître l'évolution de la fonction $f(x, y, t)$ il suffit de connaitre celle du contour C_t ; cette évolution est calculée numériquement et illustrée par les schémas de la figure 1.

Avant d'aborder son étude, résumons ce que nous savons des systèmes autogravitants symétriques.

Si on connaît la fonction de fréquence $f(x, y, t)$ on peut calculer tous les moments de la distribution des vitesses, en particulier $\rho(x, t)\, u(x, t)$; donc on connaît l'évolution du gaz autogravitant associé.

Si on se donne seulement les valeurs initiales de ces fonctions c'est-à-dire l'état initial du gaz associé, on peut essayer de calculer son évolution en utilisant le système des équations de conservation ; mais on se heurte au fait que ce système n'est pas fermé.

En dynamique des gaz, cette « fermeture » est empruntée à une équation d'état. La plus simple est celle du gaz isentropique : S est constante, soit

$$e^S = K$$

l'équation d'état est

$$\frac{\sigma^2}{2} = K\rho^2$$

d'où

$$\varpi = 2K\rho^3$$

qui est celle du gaz adiabatique d'indice 3.

Or ce cas est précisément celui du water-bag model tant du moins que le contour C_t est coupé en deux points et deux seulement par toute parallèle à l'axe des y.

---

(3) L'étude numérique du water-bag model est faite en détail par Hohl : F. Hohl, *Thesis*, College of William and Mary, Williamsburg, Virginia, 1967.

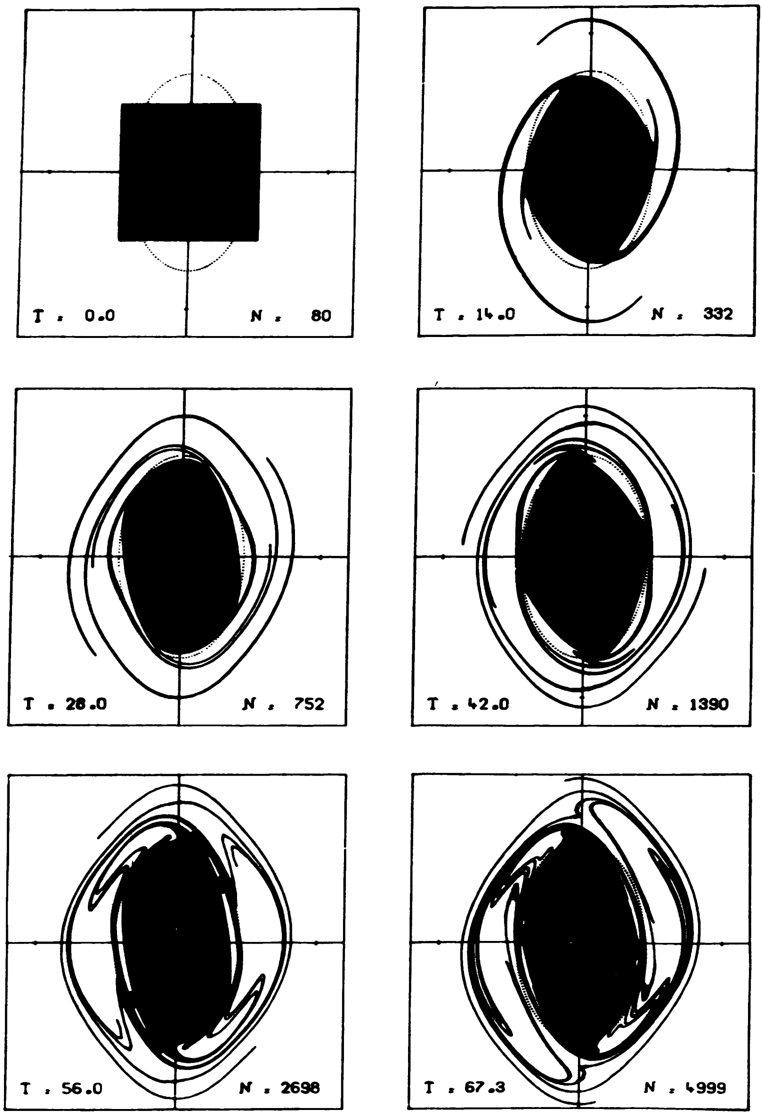

FIG. 1.

Experiences numériques sur le « water-bag model ».

Les figures 1, 2, 3 correspondent à des systèmes dont le rapport du viriel initial vaut respectivement 0,5, 4,0, 44,0.

T représente le temps. T = 4 correspond à une période moyenne de révolution du système.

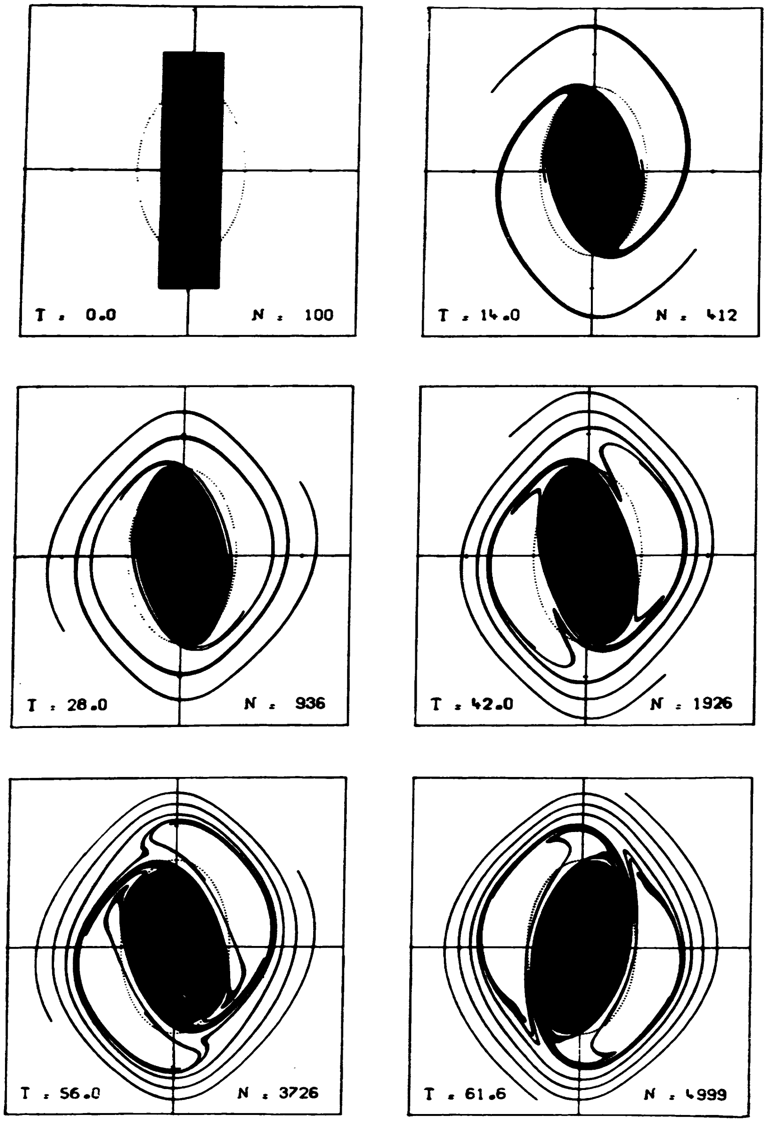

FIG. 2.

N représente le nombre de points utilisé pour calculer numériquement la déformation du contour.

Les unités sont indiquées sur les axes.

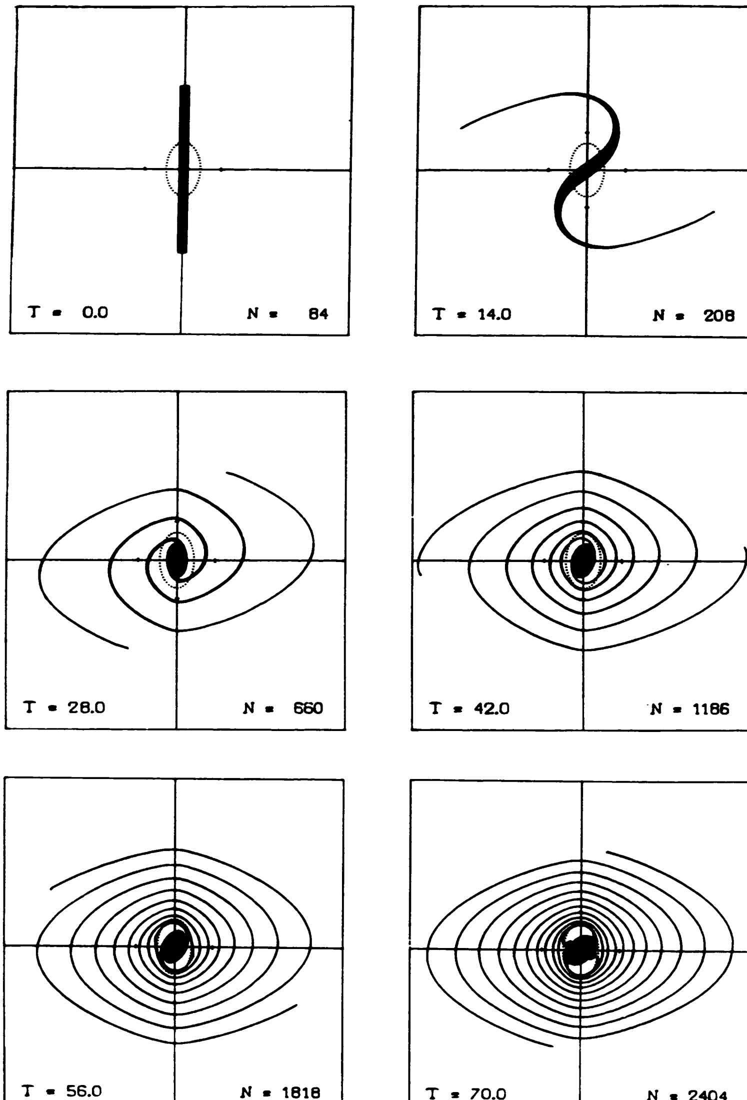

FIG. 3.

Ces figures sont reproduites avec l'aimable autorisation de l'auteur, M. G. JANIN de l'Observatoire de Genève, d'un article à paraitre dans les « Proceedings of the I. A. U. Colloquium, n° 10 ».

Soit en effet y_1, y_2 les ordonnées de ces deux points. On a

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 2u \\ y_2 - y_1 = 2A\rho \\ \dfrac{\sigma^2}{\rho^2} = \dfrac{1}{12A^2} \end{cases}$$

donc l'étude de l'évolution du contour est équivalente à celle du couple (u, ρ) de (x, t) et cette dernière peut se faire à partir des équations de conservation puisque le système est fermé.

Mais les expériences numériques montrent qu'au bout d'un certain temps il apparaît une structure filamenteuse. Le contour est coupé en plus de deux points par les parallèles à Oy ; le rapport $\dfrac{\sigma^2}{\rho^2}$ augmente avec le temps. Cela signifie que le gaz n'est plus « isentropique », et que son évolution n'est plus calculable par le système des équations de conservation qui n'est plus fermé. Il demeure néanmoins intéressant d'étudier la phase initiale simple de l'évolution.

Nous la ferons en trois étapes :

1° évolution « isentropique » du water-bag model,

2° solution stationnaire,

3° étude des solutions voisines de la solution stationnaire.

Les conditions initiales et les conditions aux limites sont du même type dans les trois cas et nous allons les écrire tout de suite.

Les conditions initiales sont du type de Cauchy. La donnée du contour C_0 détermine en effet la densité $\rho(M)$ et la vitesse moyenne $u(M)$ à l'instant $t = t_0$.

Les conditions aux limites sont, quel que soit t : la densité ρ et la pression ϖ sont nulles pour $M = 1$; la vitesse moyenne u est nulle pour $M = 0$ (cette dernière condition est la conséquence de l'hypothèse de symétrie).

1 ÉVOLUTION « ISENTROPIQUE »

Conservation de la masse :

$$\text{(12)} \qquad \frac{d\omega}{dt} - \frac{\partial u}{\partial M} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\text{(13)} \qquad \frac{du}{dt} + 2\frac{\partial \varpi}{\partial M} + gM = 0$$

Equation d'état (résulte de la condition d'isentropie)

(16) $$\varpi = k\omega^{-3}$$

On a posé:

$$e^S = K = 4k \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{1}{2\rho}$$

On peut résumer ces trois équations par une équation aux dérivées partielles unique; si on choisit comme fonction inconnue $x(M, t)$ cette équation sera

(17) $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{\partial}{\partial M}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial M}\right)^{-3}\right] + gM = 0$$

2 Solution stationnaire

L'équation (13) donne directement

$$2\varpi + g\frac{M^2}{2} = \text{constante}$$

Comme $\varpi = 0$ pour $M = 1$, on a donc la solution unique

(18) $$\varpi = \frac{g}{4}(1 - M^2)$$

Comme d'autre part

$$\varpi = k\omega^{-3} = k\left(\frac{\partial x}{\partial M}\right)^{-3}$$

on aura si on veut $x(M)$ par quadrature.

3 Solutions voisines de la solution stationnaire

Soit $\varpi_0(M) = \frac{g}{4}(1 - M^2)$ l'expression de la pression dans le cas stationnaire. Il est commode de garder la pression comme fonction inconnue pour décrire les solutions voisines; je poserai

$$\varpi = \varpi_0(M) + P(M, t)$$

L'équation d'état nous donne

$$\varpi_0(M) + P(M, t) = k\omega^{-3}$$

d'où en linéarisant

$$\frac{dP}{dt} = -\ 3k{\omega_0}^{-4}\frac{d\omega}{dt}$$

Les deux équations de conservation s'écrivent alors

$$\frac{dP}{dt} = -\ 3k{\omega_0}^{-4}\frac{\partial u}{\partial M}$$

$$\frac{du}{dt} + 2\frac{\partial P}{\partial M} = 0$$

et l'élimination de u montre que P(M, t) vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 6k{\omega_0}^{-4}\frac{\partial^2 P}{\partial M^2} \tag{19}$$

Remarque. — Soit

$$\gamma^2 = 6k{\omega_0}^{-4} = 6k\left[\frac{g}{4k}(1 - M^2)\right]^{4/3}$$

γ est la vitesse du son dans le milieu M, t et on peut vérifier la formule classique $C^2 = \left(\frac{d\varpi}{d\rho}\right)_0$ si on se souvient de la relation $\partial x_0 = \omega_0 \partial M$ qui entraîne $C^2 = {\omega_0}^2\gamma^2$.

5. L'équation de Riemann du mouvement rectiligne des gaz

Riemann (4) étudie l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = [X'(\omega)]^2\frac{\partial^2 x}{\partial M^2} \tag{20}$$

où $\gamma = X'(\omega)$ est la vitesse du son.

Il prend comme variables indépendantes u et ω au lieu de M et t ; et comme fonction inconnue la combinaison $z = \omega M + ut - x$.

Il ramène ainsi l'équation (20) à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} = [X'(\omega)]^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \tag{21}$$

(4) Nous utilisons ici l'exposé de Hadamard : HADAMARD, *Leçons sur la Propagation des Ondes*, Chelsea Publishing Company, 1949, chap. IV.

Il choisit enfin comme variables indépendantes les quantités

$$(22) \qquad \begin{cases} u + X(\omega) = \xi \\ u - X(\omega) = \eta \end{cases}$$

et donne à l'équation (20) sa forme définitive :

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = f(\xi - \eta)\left(\frac{\partial z}{\partial\xi} - \frac{\partial z}{\partial\eta}\right)$$

C'est une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles ; pour la résoudre, Riemann a imaginé une méthode d'intégration qui est devenue classique.

Comparons aux équations obtenues pour l'évolution du water-bag model. Nous constatons :

1° Considérons l'équation de Riemann (20) pour le choix particulier de l'équation d'état

$$\varpi = k\omega^{-3}$$

C'est-à-dire du gaz adiabatique d'indice trois.

L'équation (17) du water-bag est une généralisation de cette équation ; elle en diffère en effet par le terme perturbateur gM.

Les équations (15) sont d'autre part identiques pour cette équation d'état particulière aux équations (22), et ceci entraîne que les variables ξ, η de Riemann ne sont pas autre chose que les ordonnées y_1, y_2 dont la variation en fonction de x et de t définit l'évolution du contour C_t.

Pour g = 0, le calcul de l'évolution de ce contour est trivial. On peut en conclure que la considération du water-bag model fournit une solution triviale de l'équation de Riemann dans le cas particulier du gaz adiabatique d'indice 3.

Par contre, pour $g \neq 0$, l'étude de l'équation (17) pose un problème nouveau pour lequel la méthode de Riemann ne semble pas fournir les armes appropriées.

2° Considérons l'équation (19) qui décrit pour le « water-bag model » les solutions voisines de la solution stationnaire. Cette équation est identique à l'équation (21) de Riemann et peut par conséquent se mettre sous la forme (23). Elle entre donc dans le type des équations qu'on sait résoudre par la méthode de Riemann.

On peut en conclure qu'il est possible d'utiliser la méthode de Riemann pour discuter la stabilité ou l'instabilité de la solution stationnaire du water-bag model. Mais on dispose pour ce problème d'une information supplémentaire ; c'est un problème associé au problème des N corps, on peut lui appliquer les deux théorèmes de la force vive et du viriel.

C'est cette information que nous utiliserons au chapitre suivant pour étudier la stabilité.

Chapitre III

LES INÉGALITÉS DU VIRIEL

Soit

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{T} = \dfrac{1}{2}\Sigma m y^2 \\ -\mathrm{U} = \dfrac{1}{2}\Sigma\Sigma m_i m_j \,|\, x_i - x_j \,| \\ \mathrm{I} = \Sigma m x^2 \end{cases}$$

l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le moment d'inertie par rapport au centre de gravité du problème des N corps unidimensionnel. Toute notre information sur ce problème provient des deux relations fondamentales :

théorème des forces vives : $\mathrm{T} - \mathrm{U} = h$

identité de Lagrange : $\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2\mathrm{I}}{dt^2} = 2\mathrm{T} + \mathrm{U}$

Comme nous l'avons vu au chapitre I ces relations sont vraies sous leur forme statistique pour le système autogravitant. Dans le cas symétrique, on peut les déduire directement de l'équation

$$(\mathrm{II},13) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + g\mathrm{M} + 2\frac{\partial\varpi}{\partial\mathrm{M}} = 0$$

Le théorème des forces vives est une conséquence de l'étude du bilan d'énergie ; la relation de Lagrange s'obtient en multipliant (II,13) par x et en intégrant par rapport à M de 0 à 1. On utilisera les expressions :

$$(2) \qquad \begin{cases} 2\mathrm{T} = \displaystyle\int_0^1 \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \sigma^2\right] d\mathrm{M} \\ -\mathrm{U} = \displaystyle\int_0^1 g\mathrm{M}x\,d\mathrm{M} \\ \mathrm{I} = \displaystyle\int^1 x^2\,d\mathrm{M} \end{cases}$$

et on se souviendra que $\varpi = \rho\sigma^2$.

Introduisons les deux longueurs caractéristiques $q(t)$, $R(t)$ par les relations

(3) $$\begin{cases} I = \dfrac{q^2}{2} \\ -2U = gR \end{cases}$$

Pour le problème des N corps unidimensionnel, on aura

(4) $$\begin{aligned} q^2 &= \text{valeur moyenne de } (x_i - x_j)^2 \\ R &= \text{valeur moyenne de } |x_i - x_j| \end{aligned}$$

et pour le système autogravitant symétrique, on aura les formules correspondantes

(5) $$\begin{aligned} q^2 &= 2\int_0^1 x^2 dM \\ R &= 2\int_0^1 MxdM \end{aligned}$$

Nous allons chercher les inégalités vérifiées par les deux longueurs caractéristiques ; nous étudierons ensuite la stabilité de la solution stationnaire du « water-bag model » ([1]).

1. Les inégalités cinétiques

1) L'inégalité de Schwarz

$$\left[\int_0^1 MxdM\right]^2 \leqslant \int_0^1 M^2 dM \int_0^1 x^2 dM$$

nous donne

$$\frac{R^2}{4} \leqslant \frac{1}{3}\frac{q^2}{3}$$

d'où

PROPOSITION 1

$$R \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}}\, q$$

([1]) L'emploi de l'identité de Lagrange pour étudier le comportement asymptotique du problème des N corps pose des problèmes mathématiques difficiles, dont le cas unidimensionnel donne une idée. On trouvera un exposé récent du cas général dans : H. POLLARD, *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*, Prentice Hall, New York, 1966.

avec égalité si, et seulement si, $\frac{x}{\mathrm{M}}$ est une constante c'est-à-dire si la densité ρ est constante.

Pour simplifier l'écriture nous poserons $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

2) Soit

$$F(\lambda) = \int_0^1 \left(\frac{dx}{dt} - \lambda x\right)^2 d\mathrm{M}$$

Calculons $F(\lambda)$ en utilisant

$$\int_0^1 x^2 d\mathrm{M} = \frac{q^2}{2}$$

$$\int_0^1 2x \frac{dx}{dt} \,.\, d\mathrm{M} = q\dot{q}$$

Il vient

$$F(\lambda) = \int_0^1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d\mathrm{M} - \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}[\lambda q - \dot{q}]^2$$

D'où :

a) $F(\lambda)$ est minimum pour $\lambda = \frac{\dot{q}}{q}$.

C'est la pente de la droite de régression du nuage des vitesses.

b) Ce minimum a pour valeur

$$\int_0^1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d\mathrm{M} - \frac{1}{2}\dot{q}^2$$

Posons

$$X_1 = \int_0^1 \left[\frac{dx}{dt} - \frac{\dot{q}}{q}x\right]^2 . d\mathrm{M}$$

$$X_2 = \int_0^1 \sigma^2 d\mathrm{M}$$

Nous aurons :

Propositions 2

$$2T = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + X_1 + X_2$$

$X_1 \geqslant 0$, $= 0$ si, et seulement si, $\frac{dx}{dt}$ est proportionnel à x (le rapport est alors nécessairement égal à $\left.\frac{\dot{q}}{q}\right)$.

$X_2 \geqslant 0$, $= 0$ si, et seulement si, la dispersion des vitesses σ^2 est identiquement nulle.

2. Inégalités dynamiques

Tenant compte de la proposition (2), les deux relations fondamentales s'écrivent :

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 + g\mathrm{R} = 2h - (\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) \tag{6}$$

$$q\ddot{q} + g\mathrm{R} = 2(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) \tag{7}$$

a) Combinons (7) avec

$$\mathrm{R} \leqslant kq$$

nous obtenons

$$q[\ddot{q} + gk] \geqslant 2(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) \geqslant 0$$

d'où

$$\ddot{q} + gk \geqslant 0$$

b) R vérifie une inégalité analogue. Multiplions en effet l'équation (II,13) par MdM et intégrons de 0 à 1 :

$$\int_0^1 \mathrm{M}\frac{d^2x}{dt^2}d\mathrm{M} + \int_0^1 g\mathrm{M}^2 d\mathrm{M} - 2\int_0^1 \varpi \mathrm{M} d\mathrm{M} = [\varpi \mathrm{M}]_0^1 = 0$$

d'où

$$\frac{1}{2}\ddot{\mathrm{R}} + \frac{g}{3} = 2\int_0^1 \varpi \mathrm{M} d\mathrm{M} \geqslant 0$$

qui s'écrit

$$\ddot{\mathrm{R}} + gk^2 \geqslant 0$$

c) Eliminons $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ entre (6) et (7), nous obtenons l'équation fondamentale

$$\dot{q}^2 + q\ddot{q} + 3g\mathrm{R} = 4h \tag{8}$$

En utilisant $\mathrm{R} \leqslant kq$, nous mettrons (8) sous la forme

$$\dot{q}^2 + q\ddot{q} + 3gkq - 4h \geqslant 0 \tag{9}$$

En utilisant (6) que nous écrirons

$$gR \leqslant 2h - \frac{\dot{q}^2}{2}$$

nous mettons (8) sous l'autre forme

$$q\ddot{q} - \frac{\dot{q}^2}{2} + 2h \geqslant 0 \tag{10}$$

Récapitulons : PROPOSITION 3

Les fonctions $R(t)$, $q(t)$ vérifient les inégalités

$$\left\{\begin{array}{ll} a) & \ddot{q} \geqslant -gk \\ & \ddot{R} \geqslant -gk^2 \qquad \text{avec} \qquad k^2 = 2/3 \\ b) & \dot{q}^2 + q\ddot{q} + 3gkq - 4h \geqslant 0 \\ & q\ddot{q} - \dfrac{\dot{q}^2}{2} + 2h \qquad\quad \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{11}$$

Analyse des inégalités (11).

Les inégalités (11 *a*) montrent que l'accélération gravitationnelle qui tend à contracter le système est limitée en valeur absolue.

Les inégalités (11 *b*) dépendent des conditions initiales par l'intermédiaire de la constante h des forces vives.

Posons A = le premier membre de (9)
B = le premier membre de (10)
A − B = 3Z

d'où

$$Z = \frac{\dot{q}^2}{2} + gkq - 2h \tag{12}$$

PROPOSITION 4. — Z considéré comme fonction de q vérifie les inégalités suivantes :

a) $$\frac{dZ}{dq} \geqslant 0$$

b) $$\frac{d}{dq}(q^2 Z) \geqslant 0$$

c) $$\frac{d}{dq}\left(\frac{Z}{q}\right) \geqslant 0$$

En effet :

$$\frac{dZ}{dq} = \ddot{q} + gk \geqslant 0 \qquad \text{d'après (11 } a\text{)}$$

$$\frac{d}{dq}(q^2 Z) = qA \geqslant 0$$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{Z}{q}\right) = \frac{B}{q^2} \geqslant 0$$

Le lecteur vérifiera ces deux dernières identités ; remarquons que l'inégalité $\frac{dZ}{dq} \geqslant 0$ est une conséquence nécessaire des deux autres (car le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante) et voyons l'usage qu'on peut faire des inégalités *b*) et *c*).

1° Partons d'une situation initiale où

$$Z_0 > 0$$
$$\dot{q}_0 > 0$$

donc q croît et $A > B$. C'est donc l'inégalité *c*) tirée de $B > 0$ qui prévaut :

$$\frac{Z}{q} > \frac{Z_0}{q_0}$$

C'est-à-dire tant que $\dot{q}$ ne s'annule pas, Z reste positif et supérieur à $Z_0 \frac{q}{q_0}$

où $$\frac{q}{q_0} > 1$$

2° Partons d'une situation initiale où

$$Z_0 < 0$$
$$\dot{q}_0 < 0$$

donc q décroît et $A < B$. C'est l'inégalité *b*) tirée de $A > 0$ qui prévaut :

$$q^2 Z < q_0{}^2 Z_0.$$

C'est-à-dire : tant que $\dot{q}$ ne s'annule pas, Z reste négatif et supérieur en valeur absolue à

$$| Z_0 | \frac{q_0}{q^2},$$

où

$$\frac{{q_0}^2}{q^2} > 1.$$

Nous nous bornerons à ces remarques et consacrerons le dernier paragraphe à l'étude du water-bag.

3. Stabilité de la solution stationnaire du « water-bag »

Nous avons vu au chapitre II que ce modèle est décrit par l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{\partial \varpi}{\partial \mathrm{M}} + g\mathrm{M} = 0$$

où la pression ϖ vérifie l'équation d'état

$$\varpi = k\left(\frac{\partial x}{\partial \mathrm{M}}\right)^{-3}$$

Soit $x = x_0(\mathrm{M})$ la solution stationnaire. Elle est définie par

$$\begin{cases} \varpi_0 = \dfrac{g}{4}(1 - \mathrm{M}^2) \\ \varpi_0 = k\left(\dfrac{\partial x_0}{\partial \mathrm{M}}\right)^{-3} \end{cases}$$

d'où $x_0(\mathrm{M})$ par quadrature.

Soit $x = x_0(\mathrm{M}) + \mathrm{X}(\mathrm{M}, t)$ une solution voisine. Ecrivons

$$\frac{\partial x_0}{\partial \mathrm{M}} = \omega_0(\mathrm{M}) + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{M}} = \omega(\mathrm{M}, t)$$

L'équation d'état linéarisée s'écrit :

$$\varpi = \varpi_0 - 3k{\omega_0}^{-4}\omega$$

et fournit l'équation linéaire

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{M}}(6k{\omega_0}^{-4}\omega)$$

Introduisons la variable « condensation » de Jeans définie par

$$s = \frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\omega}{\omega_0}$$

et la vitesse du son C_0 définie par

$$C_0{}^2 = \frac{d\varpi_0}{d\rho_0} = 6k\omega_0{}^{-2}$$

Nous mettrons l'équation vérifiée par X sous la forme

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial M}(C_0{}^2\omega_0{}^{-1}s) = 0 \tag{13}$$

avec la condition

$$\omega_0\frac{ds}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{dX}{dt}\right) \tag{14}$$

Cette forme va nous conduire à écrire la version appropriée du théorème des forces vives et de la relation de Lagrange.

1) *Le théorème des forces vives.*

Multiplions l'équation (13) par $\frac{dX}{dt}$:

$$\frac{dX}{dt}\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial M}\left(C_0{}^2\omega_0{}^{-1}s\frac{dX}{dt}\right) = C_0{}^2\omega_0{}^{-1}s\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{dX}{dt}\right) = -C_0{}^2s\frac{ds}{dt}$$

d'où en intégrant par rapport à M entre 0 et 1, et en remarquant que le terme tout intégré est nul aux deux bornes:

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}C_0{}^2s^2\right] = 0 \tag{15}$$

qui établit le théorème des forces vives.

2) *L'identité de Lagrange.*

Multiplions l'équation (13) par $x_0(M)$

$$x_0(M)\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial M}[C_0{}^2\omega_0{}^{-1}sx_0(M)] = C_0{}^2\omega_0{}^{-1}s\frac{\partial x_0}{\partial M} = C_0{}^2s$$

d'où en intégrant par rapport à M entre 0 et 1, et en remarquant que le terme tout intégré est nul aux deux bornes, la version cherchée de l'identité de Lagrange:

$$\int_0^1 x_0\frac{d^2X}{dt^2}dM = \int_0^1 C_0{}^2sdM \tag{16}$$

Remarques :

a) Jeans ([2]) a introduit la variable « condensation » s dans son étude célèbre de « l'instabilité gravitationnelle ». Jeans considérait la propagation d'une perturbation dans un milieu homogène indéfini ; ses conclusions ne s'appliquent donc pas au cas que nous étudions.

b) Rappelons que

$$\frac{dX}{dt} = u \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial X}{\partial M} = -\,\omega_0 s$$

d'où

$$\begin{aligned}\partial X &= u\partial t - (\omega_0 \partial M)s \\ &= u\partial t - s\partial x_0\end{aligned}$$

C'est-à-dire : les variables u (vitesse moyenne) et $-\,s$ (raréfaction) sont les dérivées partielles de la perturbation X considérée comme fonction de t et de x_0.

c) L'intégrale (15) n'est pas autre chose que la variation première de l'intégrale des forces vives au voisinage de la solution stationnaire. Le fait que le terme entre crochets soit une quantité strictement positive peut être pris comme une nouvelle démonstration de la propriété remarquable de la solution stationnaire signalée par Hohl et Feix ([3]), à savoir que l'énergie du water-bag est minimale pour le contour stationnaire.

Etude du couple de relations (15) (16).

Récapitulons les formules obtenues :
intégrale des forces vives :

$$\int_0^1 \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 dM + \int_0^1 C_0{}^2 s^2 dM = 2\Delta h \tag{15}$$

identité de Lagrange

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int^1 x_0 X dM\right] = \int_0^1 C_0{}^2 s dM \tag{16}$$

([2]) J. H. Jeans, *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge University Press, 1928, p. 340.

([3]) F. Hohl and M. R. Feix, Numerical experiments with a one dimensional model, *The Astrophysical Journal*, t. **147**, 1967, p. 1164.

et rappelons que le moment d'inertie est

$$I = \int_0^1 (x_0 + X)^2 dM$$

Il est naturel de poser

$$I = \frac{1}{2}(q_0 + Q)^2 \qquad \text{avec} \qquad \frac{q_0^2}{2} = \int_0^1 x_0^2 dM$$

d'où

$$q_0 Q = 2\int_0^1 x_0 X dM \tag{17}$$

et $q_0\ddot{Q}$ = d'après

$$2\int_0^1 C_0^2 s dM. \tag{16}$$

L'inégalité de Schwatz nous donne

$$\left[\int_0^1 C_0^2 s dM\right]^2 \leqslant \int_0^1 C_0^2 dM \int_0^1 C_0^2 s^2 dM$$

C'est-à-dire en posant

$$C^2 = \int_0^1 C_0^2 dM$$

$$\int_0^1 C_0^2 s^2 dM \geqslant \frac{q_0^2}{4C^2}[\ddot{Q}]^2$$

Minorons de même le premier terme de (15). Nous savons déjà que

$$\int_0^1 \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 dM \geqslant \frac{[\dot{Q}]^2}{2}$$

et nous pouvons d'ailleurs le vérifier directement en appliquant l'inégalité de Schwarz à la dérivée par rapport au temps de la relation (17).

La minoration des deux termes du premier membre de la relation (15) nous donne donc l'inégalité

$$\frac{\dot{Q}^2}{2} + \frac{q_0^2}{4C^2}\ddot{Q}^2 \leqslant 2\Delta h \tag{18}$$

Posons

$$\omega_0^2 = \frac{2C^2}{q_0^2};$$

nous pouvons énoncer le théorème.

PROPOSITION 5. — Soit $I = \frac{q^2}{2}$ le moment d'inertie du water-bag. Pour les mouvements voisins de la solution stationnaire, on peut choisir les conditions initiales de telle sorte que le point $\dot{q}$, $\ddot{q}$ reste intérieur à l'ellipse

$$\omega_0{}^2\dot{q}^2 + \ddot{q}^2 = \varepsilon^2$$

où ε est une constante donnée à l'avance arbitrairement petite, et ω_0 une constante qu'on sait calculer à partir de la solution stationnaire.

Interprétation du mouvement limite

Revenons au calcul de ω_0, c'est-à-dire de C^2. Nous avons l'équation d'état $\frac{\varpi}{\rho 3}$ = constante d'où

$$\frac{d\varpi}{\varpi} = 3\frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \left(\frac{d\varpi}{d\rho}\right)_0 = 3\left(\frac{\varpi}{\rho}\right)_0$$

ou encore

$$C_0{}^2 = 3\sigma_0{}^2$$

Donc

$$C^2 = \int_0^1 C_0{}^2 dM = 3\int_0^1 \sigma_0{}^2 dM = 6T_0$$

D'autre part

$$2T_0 = -U_0 = g\frac{R_0}{2} \qquad \text{d'où} \qquad C^2 = 3g\frac{R_0}{2}$$

Nous en déduirons l'expression de la fréquence ω_0 en fonction des longueurs caractéristiques R_0, q_0 :

$$\omega_0{}^2 = 3g\frac{R_0}{q_0{}^2} \tag{19}$$

Or l'équation fondamentale (8) linéarisée au voisinage d'une solution stationnaire nous donne

$$q_0\ddot{q} + 3gR = \text{constante}$$

qu'on peut encore écrire

$$q_0\ddot{q} + 3g\left(\frac{R}{q}\right)q = \text{constante}$$

Pour que cette équation soit identique à celle du mouvement sinusoïdal limite

$$\ddot{q} + \omega_0{}^2 q = 0$$

il faut et il suffit que

$$\frac{\mathrm{R}}{q} = \frac{\mathrm{R}_0}{q_0}$$

En résumé, le mouvement sinusoïdal limite est celui qu'on obtient si on suppose que le rapport $\frac{\mathrm{R}}{q}$ reste constant et égal à la valeur qu'il a pour la solution stationnaire.

Cette supposition sert de base à plusieurs théories approchées des oscillations du problème des N corps au voisinage d'une solution stationnaire ([4]). Dans le cas du water-bag (c'est-à-dire pour un choix particulier de la configuration initiale), nous voyons quelle est la formulation rigoureuse qu'on peut lui donner.

([4]) D. Lynden Bell, Statistical Mechanics of violent relaxation in stellar systems, *Monthly Notices, Roy. Astr. Society*, vol. **136**, 1967, p. 101.

(Manuscrit reçu le 25 novembre 1970).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1795*a*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6206. 5-1971.