ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BÉCHIR MAHJOUB

Propriété des rayons associés aux ondes hydrodynamiques d'un fluide relativiste conducteur de chaleur

Annales de l'I. H. P., section A, tome 14, nº 3 (1971), p. 205-218

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_3_205_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 3, 1971, p. 205-218.

Section A :
Physique théorique.

Propriété des rayons associés aux ondes hydrodynamiques d'un fluide relativiste conducteur de chaleur (*)

par

Béchir MAHJOUB
Laboratoire de Physique Mathématique, Collège de France (**)

RÉSUMÉ. — Les discontinuités infinitésimales des variables se propagent le long des rayons associés aux ondes hydrodynamiques établies lors de l'étude du système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur. La direction de ces rayons est invariante par l'opérateur de discontinuité infinitésimale.

ABSTRACT. — The infinitesimal discontinuities of variables spead along the rays associated to hydrodynamic waves established in the study of evolution's system of a relativistic fluid with heat conduction. The direction of those rays is invariant by the infinitesimal discontinuity's operator.

TABLE DES MATIÈRES

(*) Article constituant avec l'article [*1*] la thèse de Doctorat d'État ès-Sciences Mathématiques soutenue le 23 juin 1970 à Paris et enregistrée au C. N. R. S. sous le numéro A. O. 4591.

(**) Adresse actuelle : Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, 8, rue de Rome, Tunis (Tunisie).

CHAPITRE IV

TENSEURS-DISTRIBUTIONS

16. Tenseur-distribution sur une variété riemannienne [2].

a) Soit V_{n+1} une variété différentiable, orientée, de dimension $(n + 1)$, de classe C^{h+1} $(h \geqslant 2)$, munie d'une métrique riemannienne de signature quelconque, de classe C^h, qui peut s'écrire localement

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, \ldots, = 0, 1, \ldots, n).$$

Etant donnés deux p-tenseurs T et U, nous appelons produit scalaire $(T, U)_x$ au point x de V_{n+1} le produit en x

$$(16.1) \qquad (T, U)_x = T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) U^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x).$$

Soit $\mathscr{D}^{(p)}(V_{n+1})$ l'espace vectoriel des p-tenseurs de classe C^h, à support compact dans V_{n+1}. Si $U \in \mathscr{D}^{(p)}(V_{n+1})$ nous posons pour tout p-tenseur T:

$$(16.2) \qquad \langle T, U \rangle = \int_{V_{n+1}} (T, U)_x \eta(x),$$

η étant l'élément de volume riemannien qui s'écrit localement

$$(16.3) \qquad \eta = \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

b) Un p-tenseur-distribution T de V_{n+1} est une fonctionnelle linéaire continue à valeurs scalaires sur les p-tenseurs à support compact de classe C^h. Nous désignons par $\langle T, U \rangle$ la valeur du tenseur-distribution T pour $U \in \mathscr{D}^{(p)}(V_{n+1})$.

Un tenseur ordinaire T définit un tenseur-distribution T^D (ou T par abus de notation) par l'intermédiaire de la formule (16.2).

Dans le domaine Ω d'un système de coordonnées locales (x^α), tout p-tenseur-distribution peut être, comme un tenseur ordinaire, rapporté à ces coordonnées, les composantes étant des scalaires-distributions.

c) Considérons un p-tenseur ordinaire T, ∇T sa dérivée covariante dans la connexion riemannienne. Si $U \in \mathscr{D}^{(p+1)}(V_{n+1})$ nous avons

$$\langle \nabla T, U \rangle = \int_{V_{n+1}} \nabla_\rho T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) U^{\rho\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) \eta(x),$$

soit par intégration par parties

$$\langle \nabla T, U \rangle = - \int_{V_{n+1}} T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) \nabla_\rho U^{\rho\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) \eta(x). \tag{16.4}$$

En introduisant l'opérateur $\underline{\delta}$ de codérivation sur les $(p + 1)$-tenseurs défini par

$$\underline{\delta} : U_{\beta_1 \ldots \beta_{p+1}} \to - \nabla_\rho U^\rho{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p},$$

nous pouvons écrire (16.4) sous la forme

$$\langle \nabla T, U \rangle = \langle T, \underline{\delta} U \rangle. \tag{16.5}$$

Nous définissons la dérivée covariante d'un p-tenseur-distribution T comme le $(p + 1)$-tenseur-distribution ∇T déterminé par la relation (16.5) où $U \in \mathscr{D}^{(p+1)}(V_{n+1})$. Les propriétés classiques de la dérivation covariante dans une connexion riemannienne et les formules correspondantes sont valables pour les tenseurs-distributions.

17. Les distributions Y^+, Y^- et $\bar{\delta}$ relatives à une hypersurface [3].

a) Dans un domaine Ω de coordonnées de V_{n+1}, soit Σ une hypersurface régulièrement plongée, d'équation locale $\varphi = 0$ (φ de classe C^2) qui partage Ω en deux domaines Ω^+ et Ω^- vérifiant respectivement $\varphi > 0$ et $\varphi < 0$. Désignons par l_α le vecteur non nul $\partial_\alpha \varphi$.

Désignons par Y^+ (resp. Y^-) la fonction sur Ω qui vaut 1 (resp. 0) dans Ω^+ et 0 (resp. 1) dans Ω^- ; les fonctions Y^+ et Y^- définissent dans Ω des distributions désignées par les mêmes notations, par l'intermédiaire des formules

$$\langle Y^+, f \rangle = \int_\Omega Y^+ f \eta = \int_{\Omega^+} f \eta, \tag{17.1}$$

(17.2) $$\langle Y^-, f \rangle = \int_\Omega Y^- f\eta = \int_{\Omega^-} f\eta$$

où $f \in \mathscr{D}^{(0)}(\Omega)$.

b) Soit ω une n-forme de Leray vérifiant

(17.3) $$\eta = d\varphi \wedge \omega = l \wedge \omega.$$

Si $\partial\Omega^+$ et $\partial\Omega^-$ sont les bords orientés sur Σ de Ω^+ et Ω^- ($\partial\Omega^+ = -\partial\Omega^-$), l'intégrale

$$\int_{\partial\Omega^+} f\omega = -\int_{\partial\Omega^-} f\omega \qquad (f \in \mathscr{D}^{(0)}(\Omega))$$

a une valeur indépendante du choix de ω vérifiant (17.3).

Nous définissons la distribution $\bar{\delta}_\varphi$ (ou plus brièvement $\bar{\delta}$) par la relation

(17.4) $$\langle \bar{\delta}, f \rangle = -\int_{\partial\Omega^+} f\omega = \int_{\partial\Omega^-} f\omega$$

où $f \in \mathscr{D}^{(0)}(\Omega)$; $\bar{\delta}_\varphi$ est la mesure de Dirac relative à φ; son support est porté par Σ.

c) Pour évaluer les tenseurs-distributions dérivées des scalaires-distributions Y^+ et Y^- nous introduisons dans Ω le système de coordonnées (y^α) tel que $y^0 = \varphi$; compte tenu de (16.5) et (17.4) nous obtenons successivement

$$\langle \nabla Y^+, U \rangle = \langle Y^+, \delta U \rangle = \langle l\bar{\delta}, U \rangle$$

pour tout $U \in \mathscr{D}^{(1)}(\Omega)$; nous avons ainsi au sens des distributions

(17.5) $$\nabla Y^+ = l\bar{\delta}$$

et de même

(17.6) $$\nabla Y^- = -l\bar{\delta}.$$

d) Soit V un champ de vecteurs dans Ω tangents aux hypersurfaces $\varphi = C^{te}$, soit

(17.7) $$i(V)l = V^\alpha l_\alpha = 0$$

où $i(V)$ représente le produit intérieur par V. Evaluons la dérivée du scalaire-distribution $\bar{\delta}$ relativement à V, soit $i(V)\nabla\bar{\delta}$. Si $f \in \mathscr{D}^{(0)}(\Omega)$ nous avons

$$\langle i(V)\nabla\bar{\delta}, f \rangle = \langle \nabla\bar{\delta}, fV \rangle = \langle \bar{\delta}, \underline{\delta}(fV) \rangle.$$

En utilisant les coordonnées (y^α), nous obtenons

$$\langle i(V)\nabla\bar{\delta}, f \rangle = 0$$

pour tout $f \in \mathscr{D}^{(0)}(\Omega)$; d'où

$$i(V)\nabla\bar{\delta} = 0\,;$$

il en résulte qu'il existe un scalaire-distribution $\bar{\delta}'$ de support Σ tel que

(17.8) $$\nabla\bar{\delta} = l\bar{\delta}'.$$

18. Discontinuités tensorielles à la traversée d'une hypersurface.

a) Considérons un p-tenseur T dans Ω satisfaisant les hypothèses suivantes:

1° Dans chacun des domaines Ω^+ et Ω^-, T est un p-tenseur ordinaire de classe C^1.

2° Quand φ tend vers 0 par valeurs positives (resp. négatives) T et ∇T tendent uniformément vers des fonctions à valeurs tensorielles définies sur Σ et notées T^+, $(\nabla T)^+$ (resp. T^-, $(\nabla T)^-$).

Nous introduisons sur Σ les tenseurs-discontinuités:

$$[T] = T^+ - T^- \quad , \quad [\nabla T] = (\nabla T)^+ - (\nabla T)^-.$$

Soit T^D le tenseur-distribution défini presque partout dans Ω par

(18.1) $$T^D = Y^+T + Y^-T.$$

Nous définissons de même les tenseurs-distributions à support sur Σ:

$$\bar{\delta}[T] = \bar{\delta}(T^+ - T^-) = \bar{\delta}T^+ - \bar{\delta}T^-,$$
$$\bar{\delta}[\nabla T] = \bar{\delta}((\nabla T)^+ - (\nabla T)^-) = \bar{\delta}(\nabla T)^+ - \bar{\delta}(\nabla T)^-.$$

b) Evaluons le tenseur-distribution ∇T^D dérivée au sens des distributions de T^D; compte tenu de (17.5), (17.6) et (18.1) nous obtenons

(18.2) $$\nabla T^D = l\bar{\delta}[T] + (\nabla T)^D\,;$$

$l\bar{\delta}[T]$ est dite la 0-couche tensorielle correspondant au tenseur-discontinuité [T] sur Σ.

c) En étudiant la dérivée du tenseur-distribution $\bar{\delta}[T]$ dans les coordonnées (y^α) et compte tenu de (17.8), nous obtenons

$$\nabla_i(\bar{\delta}[T]) = \bar{\delta}\nabla_i[T] \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Il en résulte qu'il existe un p-tenseur-distribution, noté δT, à support sur Σ tel que l'on ait la formule

$$\bar{\delta}[\nabla T] = \nabla(\bar{\delta}[T]) + l\delta T. \tag{18.3}$$

19. Cas d'un tenseur continu.

a) Supposons que le tenseur T est, en plus des hypothèses de 18 *a*), continu dans Ω. Les tenseurs correspondants engendrent une algèbre $\mathscr{A}$ de tenseurs. La formule (18.3) s'écrit alors

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha T] = l_\alpha \delta T. \tag{19.1}$$

L'application

$$\delta : T \in \mathscr{A} \to \delta T$$

est une dérivation : si a, b sont deux réels et si T, U $\in \mathscr{A}$ sont deux p-tenseurs, il résulte de (19.1) que

$$\delta(aT + bU) = a\delta T + b\delta U\,;$$

si T, U $\in \mathscr{A}$ sont un p-tenseur et un q-tenseur, on voit que :

$$\delta(T \otimes U) = \delta T \otimes U + T \otimes \delta U.$$

δ est appelé l'opérateur de discontinuité infinitésimale et δT est dite la « discontinuité infinitésimale » de T.

b) Supposons maintenant que le p-tenseur T satisfait les hypothèses (H) suivantes :

H_1. Le tenseur T est continu dans Ω. Dans chacun des domaines Ω^+ et Ω^-, T est un tenseur de classe C^2.

H_2. Quand φ tend vers 0 par valeurs positives (resp. négatives), ∇T et $\nabla\nabla T$ tendent uniformément vers des fonctions à valeurs tensorielles définies sur Σ et notées $(\nabla T)^+$, $(\nabla\nabla T)^+$ (resp. $(\nabla T)^-$, $(\nabla\nabla T)^-$).

Ainsi le tenseur ∇T satisfait les hypothèses du paragraphe 18 *a*), et la relation (18.3) appliquée à ∇T donne

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = \nabla_\alpha(\bar{\delta}[\nabla_\beta T]) + l_\alpha \delta \nabla_\beta T$$

ou bien d'après (19.1)

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = \nabla_\alpha l_\beta \delta T + l_\beta \nabla_\alpha \delta T + l_\alpha \delta \nabla_\beta T. \tag{19.2}$$

D'après les hypothèses faites sur la métrique, le tenseur de courbure de la variété est continu à la traversée de Σ. Il en résulte compte tenu de l'identité de Bianchi:

$$[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = [\nabla_\beta \nabla_\alpha T]. \tag{19.3}$$

Comme $\nabla_\alpha l_\beta = \nabla_\beta l_\alpha = \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi$, nous déduisons de (19.2) et (19.3):

$$l_\alpha(\delta \nabla_\beta T - \nabla_\beta \delta T) - l_\beta(\delta \nabla_\alpha T - \nabla_\alpha \delta T) = 0; \tag{19.4}$$

il existe alors un p-tenseur-distribution $\bar{T}$ à support sur Σ tel que

$$\delta \nabla_\beta T - \nabla_\beta \delta T = l_\beta \bar{T}$$

et en substituant dans (19.2) nous obtenons

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta T] = \nabla_\alpha l_\beta \delta T + l_\alpha \nabla_\beta \delta T + l_\beta \nabla_\alpha \delta T + l_\alpha l_\beta \bar{T}. \tag{19.5}$$

c) Considérons deux tenseurs T et U continus dans Ω et satisfaisant les hypothèses du 19 *a*). Nous avons alors

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha T \nabla_\beta U] = (\nabla_\alpha T)^- \bar{\delta}[\nabla_\beta U] + (\nabla_\beta U)^+ \bar{\delta}[\nabla_\alpha T],$$

soit d'après (19.1)

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha T \nabla_\beta U] = (\nabla_\alpha T)^- l_\beta \delta U + (\nabla_\beta U)^+ l_\alpha \delta T. \tag{19.6}$$

Chapitre V

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES RAYONS ASSOCIÉS AUX ONDES HYDRODYNAMIQUES

20. Ondes hydrodynamiques et rayons associés.

a) Nous supposons que, dans le domaine Ω de V_4 occupé par le fluide, les variables thermodynamiques p et S, le vecteur vitesse u^β et le vecteur courant de chaleur q^β sont continus. Soit une hypersurface Σ régulièrement plongée dans Ω et d'équation locale $\varphi = 0$ (φ de classe C^2) qui ne soit pas engendrée par des lignes de courant ($u^\alpha \partial_\alpha \varphi = u^\alpha l_\alpha \neq 0$). Nous supposons qu'à la traversée de Σ, les variables thermodynamiques p et S, le vecteur vitesse u^β et le vecteur courant de chaleur q^β vérifient les hypothèses (H) sur les tenseurs étudiés au paragraphe 19 *b*). Nous avons ainsi d'après (19.1):

$$\bar{\delta}[\nabla_\alpha p] = l_\alpha \delta p \quad , \quad \bar{\delta}[\nabla_\alpha S] = l_\alpha \delta S \quad , \quad \bar{\delta}[\nabla_\alpha u^\beta] = l_\alpha \delta u^\beta \quad , \quad \bar{\delta}[\nabla_\alpha q^\beta] = l_\alpha \delta q^\beta. \tag{20.1}$$

b) En écrivant l'équation (3.1) [cf. (1)] de part et d'autre de l'hypersurface Σ et retranchant, nous obtenons compte tenu de (20.1)

$$\kappa(u^\alpha l_\alpha)\delta q^\beta + \chi\theta'_p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha \delta p + \chi\theta'_S(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha \delta S = 0, \tag{20.2}$$

ce qui donne par multiplication par l_β

$$\kappa(u^\alpha l_\alpha)l_\beta\delta q^\beta + \chi\theta'_p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta \delta p + \chi\theta'_S(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta \delta S = 0. \tag{20.3}$$

Le même raisonnement permet d'écrire à partir de (4.5)

$$r l_\beta \delta u^\beta + r'_p(u^\alpha l_\alpha)\delta p + r'_S(u^\alpha l_\alpha)\delta S + l_\beta \delta q^\beta = 0. \tag{20.4}$$

En éliminant $l_\beta \delta q^\beta$ entre (20.3) et (20.4) nous obtenons

$$\begin{aligned}\kappa r(u^\alpha l_\alpha)l_\beta\delta u^\beta &+ \{ - \chi\theta'_p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta + \kappa r'_p(u^\alpha l_\alpha)^2 \}\,\delta p \\ &+ \{ - \chi\theta'_S(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta + \kappa r'_S(u^\alpha l_\alpha)^2 \}\,\delta S = 0.\end{aligned} \tag{20.5}$$

Enfin les équations (4.8) et (4.10) permettent d'écrire respectivement

$$rf\, l_\beta \delta u^\beta + f r'_p(u^\alpha l_\alpha)\delta p + (rf)'_S(u^\alpha l_\alpha)\delta S = 0, \tag{20.6}$$

$$rf(u^\alpha l_\alpha)\delta u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha \delta p = 0, \tag{20.7}$$

et par multiplication contractée par l_β, la relation (20.7) donne

$$rf(u^\alpha l_\alpha)l_\beta\delta u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta \delta p = 0. \tag{20.8}$$

Le déterminant du système des trois équations linéaires (20.5), (20.6) et (20.8) aux trois inconnues $l_\beta \delta u^\beta$, δp et δS s'écrit

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} \kappa(u^\alpha l_\alpha) & - \chi\theta'_p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta + \kappa r'_p(u^\alpha l_\alpha)^2 & - \chi\theta'_S(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta + \kappa r'_S(u^\alpha l_\alpha)^2 \\ f & f r'_p(u^\alpha l_\alpha) & (rf)'_S(u^\alpha l_\alpha) \\ f(u^\alpha l_\alpha) & - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta & 0 \end{vmatrix}$$

qui, après développement, prend la forme

$$\begin{aligned}\mathrm{H} = \chi f\theta'_S(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta &\left\{ (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta + \left(f r'_p - \frac{\theta'_p}{\theta'_S}(rf)'_S \right)(u^\alpha l_\alpha)^2 \right\} \\ &+ \kappa r f'_S(u^\alpha l_\alpha)^2 \{ (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)l_\alpha l_\beta + f r'_p(u^\alpha l_\alpha)^2 \}.\end{aligned}$$

Le système homogène considéré admet des solutions autres que la solution nulle si et seulement si $\mathrm{H} = 0$. Les équations (20.8), (20.6), (20.4), (20.2) et (20.7) donnent alors respectivement $l_\beta \delta u^\beta$, δS, $l_\beta \delta q^\beta$, δq^β et δu^β en fonction de δp.

c) Si δp n'est pas nulle, nous avons donc $H = 0$. En définissant a, b, γ_0 et γ_1 par les relations (12.4) et (12.5), nous pouvons écrire l'équation $H = 0$ sous la forme :

$$(20.9)\quad P(l) \equiv a(u^\alpha l_\alpha)^2 \{ (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta + \gamma_0 (u^\alpha l_\alpha)^2 \} + b(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta \{ (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta + \gamma_1 (u^\alpha l_\alpha)^2 \} = 0$$

ou bien après développement

$$(20.10)\quad P(l) \equiv \{ a(\gamma_0 - 1) - b(\gamma_1 - 1) \} (u^\alpha l_\alpha)^4 + \{ a + b(\gamma_1 - 2) \} l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha)^2 + b(l^\rho l_\rho)^2 = 0.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation des ondes hydrodynamiques du fluide considéré que nous avons déjà mises en évidence et étudiées dans [*1*].

d) Soit une telle onde hydrodynamique Σ d'équation $\varphi = 0$. Les bicaractéristiques ou rayons associés aux ondes Σ sont définies par le champ de vecteurs

$$(20.11)\quad N^\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial P(l)}{\partial l_\beta} = \{ 2(a(\gamma_0 - 1) - b(\gamma_1 - 1))(u^\alpha l_\alpha)^2 + (a + b(\gamma_1 - 2)) l^\rho l_\rho \} (u^\alpha l_\alpha) u^\beta + \{ (a + b(\gamma_1 - 2))(u^\alpha l_\alpha)^2 + 2b l^\rho l_\rho \} l^\beta.$$

Comme N^β est tangent à Σ, nous allons pouvoir l'exprimer au moyen de la composante tangentielle v^β du vecteur vitesse u^β qui s'écrit

$$(20.12)\qquad u^\beta = v^\beta + \frac{u^\alpha l_\alpha}{l^\alpha l_\alpha} l^\beta \qquad \text{où} \qquad v^\beta l_\beta = 0.$$

En portant (20.12) dans (20.11) et tenant compte de l'équation des ondes hydrodynamiques (20.10) nous obtenons

$$(20.13)\quad N^\beta = \{ 2(a(\gamma_0 - 1) - b(\gamma_1 - 1))(u^\alpha l_\alpha)^2 + (a + b(\gamma_1 - 2)) l^\rho l_\rho \} (u^\alpha l_\alpha) v^\beta.$$

e) Si $P(l) \neq 0$, nous avons alors

$$\delta p = 0, \qquad \delta S = 0, \qquad \delta u^\beta = 0, \qquad \delta q^\beta = 0,$$

et aucune des variables ne présente de discontinuité.

21. **Propriété fondamentale des rayons associés aux ondes hydrodynamiques.**

a) Soit Σ une onde hydrodynamique définie par l'équation (20.10). Les rayons associés sont les trajectoires du champ de vecteurs N^β définis par (20.11) ou (20.13). Nous nous proposons de montrer que δp, et par suite δS, δu^β et δq^β qui lui sont proportionnels, se propagent le long des rayons [*4*].

Nous savons d'après le paragraphe 19 *b*) qu'il existe des distributions $\overline{p}$, $\overline{S}$, $\overline{u}^\lambda$, $\overline{q}^\lambda$ à supports sur Σ telles que l'on ait

$$\overline{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta p] = \nabla_\alpha l_\beta \delta p + l_\alpha \nabla_\beta \delta p + l_\beta \nabla_\alpha \delta p + l_\alpha l_\beta \overline{p}, \tag{21.1}$$

$$\overline{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta S] = \nabla_\alpha l_\beta \delta S + l_\alpha \nabla_\beta \delta S + l_\beta \nabla_\alpha \delta S + l_\alpha l_\beta \overline{S}, \tag{21.2}$$

$$\overline{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta u^\lambda] = \nabla_\alpha l_\beta \delta u^\lambda + l_\alpha \nabla_\beta \delta u^\lambda + l_\beta \nabla_\alpha \delta u^\lambda + l_\alpha l_\beta \overline{u}^\lambda, \tag{21.3}$$

$$\overline{\delta}[\nabla_\alpha\nabla_\beta q^\lambda] = \nabla_\alpha l_\beta \delta q^\lambda + l_\alpha \nabla_\beta \delta q^\lambda + l_\beta \nabla_\alpha \delta q^\lambda + l_\alpha l_\beta \overline{q}^\lambda. \tag{2z.4}$$

b) Considérons la relation (4.9) et dérivons-la dans Ω. Il vient :

$$rf'_S u^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha S - f\nabla_\beta \nabla_\alpha q^\alpha + \nabla_\beta(rf'_S u^\alpha)\nabla_\alpha S - \nabla_\beta f \nabla_\alpha q^\alpha = 0.$$

En écrivant cette relation de part et d'autre de Σ, nous obtenons

$$rf'_S u^\alpha \overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha S] - f\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha q^\alpha] + \overline{\delta}[\nabla_\beta(rf'_S u^\alpha)\nabla_\alpha S] - \overline{\delta}[\nabla_\beta f \nabla_\alpha q^\alpha] = 0\,; \tag{21.5}$$

or d'après (19.6)

$$\begin{aligned}\overline{\delta}[\nabla_\beta(rf'_S u^\alpha)\nabla_\alpha S] &= \{\nabla_\beta(rf'_S u^\alpha)\}^- \overline{\delta}[\nabla_\alpha S] + \{\nabla_\alpha S\}^+ \overline{\delta}[\nabla_\beta(rf'_S u^\alpha)] \\ &= \{\nabla_\beta(rf'_S u^\alpha)\}^- l_\alpha \delta S + \{\nabla_\alpha S\}^+ l_\beta \delta(rf'_S u^\alpha)\end{aligned}$$

est une combinaison linéaire de termes en δS, δp et δu^λ et est donc proportionnel à δp d'après les résultats du paragraphe 20 ; il en est de même de $\overline{\delta}[\nabla_\beta f \nabla_\alpha q^\alpha]$. Nous écrivons alors (21.5) sous la forme

$$rf'_S u^\alpha \overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha S] - f\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha q^\alpha] \simeq 0 \tag{21.6}$$

où le symbole $\simeq 0$ signifie modulo des termes proportionnels à δp.

Le même raisonnement appliqué aux relations (3.1), (4.8) et (4.10) nous donne respectivement

$$\kappa u^\beta \overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha q^\alpha] + \chi\theta'_p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha p] + \chi\theta'_S(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha S] \simeq 0, \tag{21.7}$$

$$rf\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha u^\alpha] + fr'_p u^\alpha \overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha p] + (rf)'_S u^\alpha \overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha S] \simeq 0, \tag{21.8}$$

$$rfu^\beta \overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha u^\alpha] - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha p] \simeq 0. \tag{21.9}$$

Par élimination de $u^\beta\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha q^\alpha]$ entre (21.6) et (21.7), il vient :

$$\begin{aligned}\chi f\theta'_p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha p] + \{\,&\chi f\theta'_S(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \\ &+ \kappa rf'_S u^\alpha u^\beta\}\,\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha S] \simeq 0.\end{aligned} \tag{21.10}$$

Enfin en éliminant $u^\beta\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha u^\alpha]$ entre (21.8) et (21.9) nous obtenons

$$\{(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) + fr'_p u^\alpha u^\beta\}\,\overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha p] + (rf)'_S u^\alpha u^\beta \overline{\delta}[\nabla_\beta\nabla_\alpha S] \simeq 0. \tag{21.11}$$

c) Les relations (21.10) et (21.11) s'écrivent respectivement, compte tenu de (21.1), (21.2) et (12.4)

$$(21.12)\quad 2b\frac{\theta'_p}{\theta'_S}\{ l^\beta - (u^\alpha l_\alpha)u^\beta \}\nabla_\beta\delta p + 2\{ bl^\beta + (a-b)(u^\alpha l_\alpha)u^\beta \}\nabla_\beta\delta S$$
$$+ b\frac{\theta'_p}{\theta'_S}\{ l^\alpha l_\alpha - (u^\alpha l_\alpha)^2 \}\bar{p} + \{ bl^\alpha l_\alpha + (a-b)(u^\alpha l_\alpha)^2 \}\bar{S} \simeq 0,$$

$$(21.13)\quad 2\{ l^\beta + (fr'_p - 1)(u^\alpha l_\alpha)u^\beta \}\nabla_\beta\delta p + 2(rf)'_S(u^\alpha l_\alpha)u^\beta\nabla_\beta\delta S$$
$$+ \{ l^\alpha l_\alpha + (fr'_p - 1)(u^\alpha l_\alpha)^2 \}\bar{p} + (rf)'_S(u^\alpha l_\alpha)^2\bar{S} \simeq 0.$$

Eliminons $\bar{S}$ entre les relations (21.12) et (21.13); il vient, compte tenu de l'équation (20.10) d'après laquelle le coefficient de $\bar{p}$ s'annule, et d'après (12.5):

$$(21.14)\quad \{ (a(\gamma_0 - 1) - b(\gamma_1 - 1)(u^\alpha l_\alpha)^4 + b(\gamma_0 - 1)l^\rho l_\rho(u^\alpha l_\alpha)^2 \} v^\beta\nabla_\beta\delta p$$
$$+ b(rf)'(rf)'_S l^\rho l_\rho(u^\alpha l_\alpha)^2 v^\beta\nabla_\beta\delta S \simeq 0.$$

Reprenons les relations (20.6) et (20.8) et éliminons $l_\beta\delta u^\beta$ entre elles; il vient:

$$(21.15)\quad \{ l^\rho l_\rho + (\gamma_0 - 1)(u^\alpha l_\alpha)^2 \}\delta p + (rf)'_S(u^\alpha l_\alpha)^2\delta S = 0$$

dont nous déduisons par dérivation

$$(21.16)\quad (rf)'_S(u^\alpha l_\alpha)^2\nabla_\beta\delta S + \{ l^\rho l_\rho + (\gamma_0 - 1)(u^\alpha l_\alpha)^2 \}\nabla_\beta\delta p \simeq 0.$$

En éliminant $\nabla_\beta\delta S$ entre (21.14) et (21.16) multipliée par v^β, nous obtenons

$$(21.17)\quad \{ (a(\gamma_0 - 1) - b(\gamma_1 - 1))(u^\alpha l_\alpha)^4 - b(l^\rho l_\rho)^2 \} v^\beta\nabla_\beta\delta p \simeq 0.$$

A partir de l'équation (20.10) nous obtenons

$$- b(l^\rho l_\rho)^2 = (a(\gamma_0 - 1) - b(\gamma_1 - 1))(u^\alpha l_\alpha)^4 + (a + b(\gamma_1 - 2))l^\rho l_\rho(u^\alpha l_\alpha)^2$$

ce qui permet d'écrire (21.17) sous la forme

$$(21.18)\quad \{ 2(a(\gamma_0 - 1) - b(\gamma_1 - 1))(u^\alpha l_\alpha)^2 + (a + b(\gamma_1 - 2))l^\rho l_\rho \}(u^\alpha l_\alpha)^2 v^\beta\nabla_\beta\delta p \simeq 0,$$

ou bien compte tenu de (20.13), nous obtenons

$$N^\beta\nabla_\beta\delta p \simeq 0.$$

D'où:

THÉORÈME 8. — *Les distributions δp, δS, δu^λ et δq^λ a supports sur l'onde* *hydrodynamique* Σ *se propagent le long des rayons associés selon les systèmes différentiels*

$$N^{\beta}\nabla_{\beta}\delta p \simeq 0, \quad N^{\beta}\nabla_{\beta}\delta S \simeq 0, \quad N^{\beta}\nabla_{\beta}\delta u^{\lambda} \simeq 0, \quad N^{\beta}\nabla_{\beta}\delta q^{\lambda} \simeq 0,$$

où le symbole $\simeq 0$ *veut dire modulo des termes proportionnels par exemple a* δp.

e) Nous avons vu au paragraphe 19 *a*) que l'application δ définit une dérivation. Dans cette dérivation nous avons sous les hypothèses faites sur la métrique et sur φ ($\varphi = 0$ étant l'équation locale de l'onde Σ)

$$\delta g^{\alpha\beta} = 0, \qquad \delta l_{\alpha} = 0. \tag{21.19}$$

En écrivant l'équation $\nabla_{\alpha}T^{\alpha\beta} = 0$ de part et d'autre de Σ et retranchant nous obtenons

$$l_{\alpha}\delta T^{\alpha\beta} = 0$$

et compte tenu de (21.19)

$$\delta(T^{\alpha\beta}l_{\alpha}) = 0\,; \tag{21.20}$$

nous obtenons ainsi l'invariance par δ du vecteur

$$W^{\beta} = rf(u^{\alpha}l_{\alpha})u^{\beta} - pl^{\beta}$$

qui s'écrit encore

$$W^{\beta} = rf(u^{\alpha}l_{\alpha})v^{\beta} + \left(rf\,\frac{(u^{\alpha}l_{\alpha})^{2}}{l^{\alpha}l_{\alpha}} - p\right)l^{\beta}, \tag{21.21}$$

dont les composantes tangentielle et normale par rapport à Σ sont invariantes par δ ; nous en déduisons en particulier

$$\delta\,\{\, rf(u^{\alpha}l_{\alpha})v^{\beta}\,\} = 0. \tag{21.22}$$

Ainsi la direction de N^{β} qui est, d'après (20.13), celle de v^{β}, est invariante par la dérivation δ.

D'où :

THÉORÈME 9. — *La direction des rayons associés à l'onde hydrodynamique* Σ *est invariante par l'opérateur de discontinuité infinitésimale* δ.

ANNEXE

Nous avons étudié les discontinuités infinitésimales des variables thermodynamiques, du vecteur vitesse et du vecteur courant de chaleur dans les cas où le fluide relativiste conducteur de chaleur est décrit par les schémas suivants :

1° Schéma de Landau et Lifchitz avec équation de Fourier [4].
2° Schéma d'Eckart avec équation de Fourier.
3° Schéma d'Eckart avec équation de Cattaneo-Vernotte.

Dans les trois cas les rayons associés aux ondes hydrodynamiques mises en évidence présentent encore la même propriété : les discontinuités des variables se propagent le long des rayons ; nous ne retrouvons pas dans tous les cas l'invariance de la direction des rayons associés à ces ondes.

a) Dans le premier cas nous trouvons que la température propre du fluide est uniforme :

$$\delta\theta = 0$$

et nous mettons en évidence des ondes de compression définies par l'équation

$$\mathrm{P}(l) \equiv (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta + ((rf)'_p - 1)(u^\alpha l_\alpha)^2 = 0$$

où la dérivée par rapport à p est prise à θ constant. Il leur correspond les rayons associés définis par le champ de vecteurs tangents à ces ondes

$$\mathrm{N}^\beta = l^\beta + ((rf)'_p - 2)(u^\alpha l_\alpha) u^\beta = ((rf)'_p - 2)(u^\alpha l_\alpha) v^\beta .$$

Les discontinuités des variables se propagent le long de ces rayons et la direction de ces rayons est invariante par l'opérateur δ.

b) Dans le deuxième cas nous mettons en évidence les ondes hydrodynamiques définies par l'équation

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(l) \equiv \{ r^2 f'_p + rfr'_p - 2r + \theta(rr'_p f'_\theta - rf'_p r'_\theta + 2r'_\theta) \} (u^\alpha l_\alpha)^4 \\ - (r^2 f'_p + rfr'_p - 3r + \theta r'_\theta) l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha)^2 + 2r'_p l^\rho l_\rho (q^\beta l_\beta)(u^\alpha l_\alpha) - r(l^\rho l_\rho)^2 = 0 \end{aligned}$$

correspondant à un cône du 4ᵉ ordre qui n'est pas de révolution comme celui correspondant aux ondes hydrodynamiques du système (S). Il leur correspond les rayons définis par le champ de vecteurs tangents

$$\begin{aligned} \mathrm{N}^\beta = \{ 2(r^2 f'_p + rfr'_p - 2r + \theta(rr'_p f'_\theta - rf'_p r'_\theta + 2r'_\theta))(u^\alpha l_\alpha)^3 \\ - (r^2 f'_p + rfr'_p - 3r + \theta r'_\theta) l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha) + r'_p l^\rho l_\rho (q^\alpha l_\alpha) \} v^\beta + r'_p l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha) k^\beta , \end{aligned}$$

ou v^β et k^β sont les composantes tangentielles à l'onde respectivement de la vitesse et du courant de chaleur.

Nous avons encore la même propriété de propagation des discontinuités des variables le long de ces rayons. La direction de ces rayons n'est pas conservée par l'opérateur δ.

c) Dans le troisième cas, nous considérons le schéma d'Eckart décrit par le tenseur d'énergie

$$\mathrm{T}^{\alpha\beta} = rfu^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} - u^\alpha q^\beta - u^\beta q^\alpha$$

où q^α est la composante spatiale du vecteur courant de chaleur Q^α :

$$\mathrm{Q}^\alpha = \bar{q} u^\alpha + q^\alpha \quad , \quad \bar{q} = \mathrm{Q}^\alpha u_\alpha \quad , \quad q^\alpha = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\mathrm{Q}_\beta ,$$

avec l'équation de conduction de la chaleur suivante :

$$Q^{\alpha} + \kappa u^{\beta}\nabla_{\beta}Q^{\alpha} + \chi(g^{\alpha\beta} - u^{\alpha}u^{\beta})(\partial_{\beta}\theta - \theta u^{\gamma}\nabla_{\gamma}u_{\beta}) = 0.$$

Nous établissons le système d'évolution du fluide considéré : c'est un système quasi-linéaire régulier. Sous certaines hypothèses faites sur l'équation d'état du fluide, nous pouvons ramener son polynome caractéristique à ses facteurs irréductibles ; le critère de Mme Choquet-Bruhat et le théorème de Leray-Ohya s'appliquent alors : nous montrons que le système admet relativement au problème de Cauchy une solution unique dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha = 7/6$, puis, après simplification, dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha = 2$.

Nous avons aussi la propagation des discontinuités des variables le long des rayons mais la direction de ceux-ci n'est pas conservée.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la direction de M. André LICHNEROWICZ. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués et le soutien moral et matériel que j'ai trouvé auprès de lui. Je remercie vivement Mme Yvonne CHOQUET-BRUHAT qui s'est intéressée à mon travail et m'a aidé à en éclaircir certains poi difficiles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. MAHJOUB, Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **14**, Sect. A, 1971, p. 113-137.
[2] A. LICHNEROWICZ, Propagateurs et commutateurs en Relativité Générale, Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, n° 10, 1961, Paris.
[3] A. LICHNEROWICZ, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **7** A, 1967, p. 271-302.
[4] B. MAHJOUB, *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **267** A, 1968, p. 668-671.

(Manuscrit reçu le 15 octobre 1970).