ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

Étude systématique du rayonnement gravitationnel 4-polaire. Énergie-impulsion et moment cinétique du rayonnement

Annales de l'I. H. P., section A, tome 14, nº 1 (1971), p. 79-95
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_1_79_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 1, 1971, p. 79-95.

Section A :
Physique théorique.

Étude systématique du rayonnement gravitationnel 4-polaire. Énergie-impulsion et moment cinétique du rayonnement

par

A. PAPAPETROU

Institut Henri Poincaré.
Laboratoire de Physique Théorique Associé au C. N. R. S.

RÉSUMÉ. — Ce travail contient l'étude systématique du rayonnement gravitationnel 4-polaire en première approximation. On détermine la totalité des termes réellement 4-polaires, après réduction à l'aide de la loi de conservation d'énergie-impulsion, et on déduit les formules pour l'énergie-impulsion et le moment cinétique du rayonnement correspondant.

SUMMARY. — The present work contains a systematic study of the gravitational 4-pole radiation in the linear approximation. All terms which are effectively of the 4-pole type, after reduction by means of the conservation law of energy-momentum, are determined and the formulae for the energy-momentum and angular momentum of the corresponding radiation are established.

1. INTRODUCTION

Le rayonnement gravitationnel 4-polaire a déjà fait l'objet d'un grand nombre de publications. Dans ce travail nous entreprenons une étude systématique de ce rayonnement en tenant compte de tous les termes de forme 4-polaire. Cette étude est faite comme d'habitude dans le cadre de la première approximation en coordonnées harmoniques et sous l'hypothèse que la condition permettant le développement en multipoles est satisfaite. Nous montrerons dans le paragraphe 2 qu'on peut dans ce cas utiliser le formalisme de Newman-Penrose [*1*] et nous calculerons à l'aide de ce formalisme l'énergie, l'impulsion et le moment cinétique du rayonnement. Ces calculs montrent que le formalisme de Newman-Penrose est particulièrement efficace pour la discussion de questions concernant le rayonnement gravitationnel, aussi en première approximation.

2. RAPPEL DES FORMULES POUR LA PREMIÈRE APPROXIMATION ET LE DÉVELOPPEMENT EN MULTIPOLES

Nous considérons un champ gravitationnel faible,

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + {}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu} \quad , \quad |{}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu}| \ll 1,$$

$\eta_{\mu\nu}$ étant la métrique minkowskienne diagonale, $\eta_{\mu\nu} = (1; -1, -1, -1)$. En imposant la condition de coordonnées harmoniques,

$$ {}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{2.1}$$

on trouve pour ${}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ l'équation du champ linéarisée

$$\eta^{\alpha\beta}{}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}\tau^{\mu\nu}. \tag{2.2}$$

G est la constante de gravitation newtonienne et $\tau^{\mu\nu}$ le tenseur de matière dans l'approximation d'ordre zéro, donc satisfaisant à la loi de conservation de la relativité restreinte :

$$\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{2.3}$$

La solution retardée de (2.2) est

$${}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu}(t; x^i) = \frac{4G}{c^4}\int \frac{1}{R}\tau^{\mu\nu}(T; X^i)d^3X; \tag{2.4}$$

$$T = t - R \quad , \quad R^2 = (x^i - X^i)(x^i - X^i). \tag{2.4 a}$$

Dans les calculs suivants nous allons supprimer le facteur $\frac{4G}{c^4}$. Nous l'introduirons de nouveau dans les formules finales.

En posant

$$r^2 = x^i x^i \quad ; \quad \xi^i = \frac{x^i}{r} \tag{2.5}$$

on déduit de (2.4 *a*) :

$$R = r - \xi^i X^i + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad , \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{2.6}$$

En remarquant que seuls les termes de l'ordre $\frac{1}{r}$ sont importants pour le rayonnement nous écrirons (2.4) sous la forme :

$$ {}_1g^{\mu\nu} = \frac{1}{r} \int \tau^{\mu\nu}(\mathrm{T}; \mathrm{X}^i) d^3\mathrm{X} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{2.7} $$

Les intégrales qui entrent dans (2.7) sont des intégrales sur le cône passé du point $(t; x^i)$. On peut les transformer en intégrales sur des hyperplans $t = \text{const}$ si on suppose que $\tau^{\mu\nu}$ est développable en série de Taylor par rapport à la variable T. En effet, en posant

$$ \mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + \delta\mathrm{T} \quad ; \quad \mathrm{T}_0 = t - r \quad , \quad \delta\mathrm{T} = r - \mathrm{R} = \xi^i \mathrm{X}^i + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.8} $$

on trouve :

$$ \begin{aligned} \tau^{\mu\nu}(\mathrm{T}; \mathrm{X}^i) &= \tau^{\mu\nu}(\mathrm{T}_0; \mathrm{X}^i) \\ &\quad + \tau^{\mu\nu}{}_{,0}(\mathrm{T}_0; \mathrm{X}^i)(r - \mathrm{R}) + \tau^{\mu\nu}{}_{,00}(\mathrm{T}_0; \mathrm{X}^i)\frac{(r-\mathrm{R})^2}{2} + \dots \end{aligned} \tag{2.9} $$

Rappelons que ce développement est effectivement utile si la longueur d'onde λ du rayonnement gravitationnel est grande par rapport à la longueur l caractérisant les dimensions linéaires de la distribution matérielle qui est la source de ce rayonnement,

$$ \lambda / l \gg 1. $$

Avec le développement (2.9) la relation (2.7) devient

$$ \begin{aligned} r\,{}_1g^{\mu\nu} &= \int \tau^{\mu\nu} d^3\mathrm{X} + \xi^k \int \tau^{\mu\nu}{}_{,0} \mathrm{X}^k d^3\mathrm{X} \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi^k \xi^l \int \tau^{\mu\nu}{}_{,00} \mathrm{X}^k \mathrm{X}^l d^3\mathrm{X} + \dots + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r}\right), \end{aligned} \tag{2.10} $$

les intégrations étant effectuées sur l'hyperplan $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 = \text{const}$. En effet dans les intégrales de (2.10) t et x^i ont des valeurs données et par conséquent t et r, donc aussi $t - r$ sont des constantes.

Les termes successifs du deuxième membre de (2.10) ont respectivement la forme 1-polaire, 2-polaire, 4-polaire, etc. Cependant la loi de conservation (2.3) permet de réduire certains de ces multipoles en multipoles d'ordre supérieur. Cette réduction, que nous allons effectuer dans le paragraphe 4, nous permettra d'obtenir tous les termes réellement 4-polaires.

3. LE PASSAGE AU FORMALISME DE NEWMAN-PENROSE

Écrivons

$$(3.1)\qquad {}_1g^{\mu\nu} = \frac{1}{r} f^{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

La condition harmonique (2.1) conduit à la relation

$$(3.2)\qquad f^{\mu\nu}{}_{,0}\xi_\nu = 0 \quad ; \quad \xi^\nu \equiv (1\,;\,\xi^i), \quad \text{donc} \quad \xi_\nu = (1\,;\,-\,\xi^i).$$

Ceci signifie que

$$(3.3)\qquad \dot{a}^\mu = 0 \quad , \quad a^\mu \equiv f^{\mu\nu}\xi_\nu.$$

Posons :

$$(3.3\,a)\qquad \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^0 - a^s\xi_s & a^i \\ a^i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} - \tilde{F}^{\mu\nu}.$$

On a alors :

$$(3.4)\qquad \tilde{F}^{\mu\nu}{}_{,0} = 0 \quad , \quad F^{\mu\nu}\xi_\nu = 0.$$

Le seul terme qui intervient dans le calcul du rayon est le terme $F^{\mu\nu}$. Or ce terme satisfait d'après (3.4) à la condition d'orthogonalité qui est la condition de coordonnées caractérisant le tenseur métrique dans le formalisme de Newman-Penrose [*2*]. Il est par conséquent permis d'utiliser pour ce calcul les relations données par ce formalisme.

Nous écrivons ici deux de ces formules qui joueront dans la suite un rôle fondamental [*1*] :

$$(3.5)\qquad \Psi_4 = -\,R_{\alpha\beta\mu\nu}n^\alpha\overline{m}^\beta n^\mu\overline{m}^\nu \quad ; \quad \Psi_4^0 = -\,\ddot{\overline{\sigma}}{}^0.$$

Les vecteurs isotropes réel n^α et complexe m^α forment, avec le premier vecteur isotrope $l^\alpha \equiv \xi^\alpha$, le repère de base. Le scalaire Ψ_4 commence avec un terme de l'ordre $\frac{1}{r}$ et Ψ_4^0 est le coefficient de ce terme :

$$\Psi_4 = \frac{1}{r}\Psi_4^0 + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Le scalaire

$$\sigma = l_{\mu;\nu}m^\mu m^\nu$$

commence avec un terme de l'ordre $\frac{1}{r^2}$:

$$\sigma = \frac{1}{r^2}\sigma^0 + O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

En coordonnées harmoniques le tenseur linéarisé de Riemann est donné par

$$\text{(3.6)} \qquad R_{\alpha\beta\mu\nu} = 2\eta_{\varkappa[\mu} \, {}_1g^{\rho\sigma}{}_{,\nu][\alpha}\eta_{\beta]\lambda}\left(\delta^{\varkappa}_{\rho}\delta^{\lambda}_{\sigma} - \frac{1}{2}\eta^{\varkappa\lambda}\eta_{\rho\sigma}\right).$$

De cette formule on déduit :

$$\text{(3.6 } a\text{)} \qquad R_{\alpha\beta\mu\nu} = 2{}_1g^{\rho\sigma}{}_{,00}\eta_{\varkappa[\mu}\xi_{\nu]}\xi_{[\alpha}\eta_{\beta]\lambda}\left(\delta^{\varkappa}_{\rho}\delta^{\lambda}_{\sigma} - \frac{1}{2}\eta^{\varkappa\lambda}\eta_{\rho\sigma}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

En introduisant cette expression dans la première de (3.5) et en tenant compte des relations

$$\text{(3.7)} \qquad l_\mu n^\mu = 1 \quad ; \quad l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = m_\mu m^\mu = 0$$

on trouve :

$$\Psi_4^0 = - \ddot{\bar{\sigma}}^0 = \frac{1}{2}\ddot{F}^{\rho\sigma}\bar{m}_\rho\bar{m}_\sigma.$$

Dans l'approximation linéaire on a, quand on utilise les angles polaires θ et φ de l'espace euclidien à 3 dimensions :

$$\text{(3.8)} \qquad \sqrt{2}m^\rho = \{\, 0; \cos\theta\cos\varphi - i\sin\varphi, \cos\theta\sin\varphi + i\cos\varphi, -\sin\theta \,\}.$$

On aura donc

$$\ddot{\bar{\sigma}}^0 = -\frac{1}{2}\ddot{F}^{ik}\bar{m}_i\bar{m}_k = -\frac{1}{2}\ddot{F}^{ik}\overline{m^i}\,\overline{m^k}.$$

On déduit de cette relation :

$$\text{(3.9)} \qquad \sigma^0 = -\frac{1}{2}F^{ik}m^i m^k$$

en omettant les termes qui sont indépendants de t ou linéaires par rapport à t, de tels termes étant sans intérêt pour le rayonnement. On remarquera que d'après (3.9) on n'a besoin que des composantes $\mu = i$, $\nu = k$ de $F^{\mu\nu}$.

4. LES MULTIPOLES RÉDUITS

Nous commençons avec le premier terme du deuxième membre de (2.10) qui a la forme monopolaire. La loi de conservation (2.3) conduit à la relation

$$\text{(4.1)} \qquad \tau^{ik} = \left\{ X^{(i}\tau^{k)s} + \frac{1}{2}X^iX^k\tau^{0s}{}_{,0} \right\}_{,s} + \frac{1}{2}X^iX^k\tau^{00}{}_{,00}.$$

Les sources matérielles du champ occupant par hypothèse une région finie de l'espace à 3 dimensions il s'ensuit par intégration de (4.1) sur l'hyperplan $T = T_0 = \text{const}$:

$$\int \tau^{ik} d^3X = \frac{1}{2} \ddot{d}^{ik}; \tag{4.2}$$

$$d^{ik} \equiv \int \tau^{00} X^i X^k d^3X. \tag{4.2 a}$$

Le premier terme de (2.10) est donc en réalité le terme 4-polaire du type « électrique ».

Il y a 6 composantes indépendantes d^{ik}. Mais on voit immédiatement que ces composantes ne sont pas toutes nécessaires pour le calcul du rayonnement. En effet, la dernière relation (3.7) qui exprime que m^μ est un vecteur isotrope,

$$m_\mu m^\mu = 0, \tag{4.3}$$

montre qu'il suffit de considérer les 5 composantes indépendantes du tenseur sans trace

$$D^{ik} = d^{ik} - \frac{1}{3} \delta^{ik} d^{ss}. \tag{4.4}$$

La prochaine quantité à considérer est l'intégrale apparemment 2-polaire $\int \tau^{ik} X^l d^3X$. La relation

$$\tau^{ik} X^l = \left\{ \tau^{s(i} X^{k)} X^l - \frac{1}{2} \tau^{sl} X^i X^k \right\}_{,s} + \tau^{0(i}{}_{,0} X^{k)} X^l - \frac{1}{2} \tau^{0l}{}_{,0} X^i X^k \tag{4.5}$$

est une conséquence immédiate de (2.3). En intégrant cette relation sur l'hyperplan $T = T_0 = \text{const}$ on trouve :

$$\int \tau^{ik} X^l d^3X = \dot{d}^{ikl}, \tag{4.6}$$

d^{ikl} étant des quantités 4-polaires « magnétiques » :

$$d^{ikl} = \int \left\{ \tau^{0(i} X^{k)} X^l - \frac{1}{2} \tau^{0l} X^i X^k \right\} d^3X. \tag{4.7}$$

Il y a $6 \times 3 = 18$ composantes d^{ikl}, qui cependant ne sont pas toutes des quantités 4-polaires indépendantes. En effet l'équation (2.3) a encore la conséquence

$$\tau^{(ik}X^{l)} = \left\{ \frac{1}{2}\tau^{s(i}X^kX^{l)} + \frac{1}{6}\tau^{s0}{}_{,0}X^iX^kX^l \right\}_{,s} + \frac{1}{6}\tau^{00}{}_{,00}X^iX^kX^l. \tag{4.8}$$

En intégrant sur $T = T_0 = \text{const}$ on trouve

$$\int \tau^{(ik}X^{l)}d^3X = \frac{1}{6}\int \tau^{00}{}_{,00}X^iX^kX^l d^3X, \tag{4.9}$$

ce qui montre que les quantités $d^{(ikl)}$ sont en réalité des quantités 8-polaires. Il sera donc nécessaire d'introduire les nouvelles quantités

$$\tilde{d}^{ikl} = d^{ikl} - d^{(ikl)} \tag{4.10}$$

qui sont caractérisées par la propriété

$$\tilde{d}^{(ikl)} = 0. \tag{4.11}$$

La relation (4.11) ayant 10 composantes essentielles on voit qu'il y a $18 - 10 = 8$ quantités indépendantes $\tilde{d}^{ikl}$.

Les quantités $\tilde{d}^{ikl}$ sont encore réductibles à cause de la condition (4.3). On doit en effet chercher des quantités D^{ikl} ayant les mêmes propriétés de symétrie que $\tilde{d}^{ikl}$.

$$D^{ikl} = D^{kil} \quad , \quad D^{(ikl)} = 0, \tag{4.12}$$

et satisfaisant aussi à

$$D^{ssl} = 0. \tag{4.12 a}$$

On trouve sans difficulté que D^{ikl} est donné par la relation suivante :

$$D^{ikl} = \tilde{d}^{ikl} - \frac{1}{2}\delta^{ik}\tilde{d}^{ssl} + \frac{1}{4}(\delta^{il}\tilde{d}^{ssk} + \delta^{kl}\tilde{d}^{ssi}). \tag{4.13}$$

Il y a $8 - 3 = 5$ quantités indépendantes D^{ikl}, par exemple les quantités D^{112}, D^{223}, D^{331}, D^{231} et D^{312}. Les autres composantes D^{ikl} sont alors :

$$D^{332} = -2D^{323} = -D^{112} = 2D^{121} \quad , \quad D^{113} = -2D^{131} = \dots,$$
$$D^{221} = -2D^{212} = \dots \; ; \; D^{123} = -(D^{231} + D^{312}) \; ; \; D^{111} = D^{222} = D^{333} = 0.$$

A l'aide des relations (4.6), (4.10) et (4.13) on écrira :

$$\left\{ \begin{aligned} \int \tau^{ik}X^l d^3X &= \dot{\tilde{d}}^{ikl} + \int \tau^{(ik}X^{l)}d^3X \\ &= \dot{D}^{ikl} + \frac{1}{2}\delta^{ik}\dot{\tilde{d}}^{ssl} - \frac{1}{4}(\delta^{il}\dot{\tilde{d}}^{ssk} + \delta^{kl}\dot{\tilde{d}}^{ssi}) + \int \tau^{(ik}X^{l)}d^3X. \end{aligned} \right. \tag{4.14}$$

Les termes de cette relation qui contiennent comme facteur δ^{ik}, δ^{il} ou δ^{kl} disparaissent dans (3.9) à cause des conditions (3.7) et (4.3) et le dernier terme est d'après (4.8) un terme 8-polaire. Il suffit donc pour la discussion du rayonnement 4-polaire de remplacer dans (3.9) $\int \tau^{ik} X^l d^3X$ par $\dot{D}^{ikl}$.

La dernière quantité que nous avons à considérer est l'intégrale

$$d^{iklm} = \int \tau^{ik} X^l X^m d^3X. \tag{4.15}$$

Cette intégrale n'est pas complètement réductible à des quantités d'ordre supérieur au 4-pôle. En effet, considérons la relation suivante qui est une conséquence de (2.3):

$$\left\{\begin{aligned} &(A\tau^{is}X^kX^lX^m + B\tau^{ks}X^lX^mX^i + C\tau^{ls}X^mX^iX^k + D\tau^{ms}X^iX^kX^l)_{,s} \\ &-(A\tau^{is}{}_{,s}X^kX^lX^m + B\tau^{ks}{}_{,s}X^lX^mX^i + C\tau^{ls}{}_{,s}X^mX^iX^k + D\tau^{ms}{}_{,s}X^iX^kX^l) \\ &=(A+B)\tau^{ik}X^lX^m + (A+C)\tau^{il}X^mX^k + (A+D)\tau^{im}X^kX^l \\ &+(B+C)\tau^{lk}X^iX^m + (B+D)\tau^{mk}X^iX^l + (C+D)\tau^{lm}X^iX^k. \end{aligned}\right. \tag{4.16}$$

Il n'est pas possible de choisir les constantes A, B, C et D de manière qu'il ne reste au deuxième membre de cette relation que le premier terme: les conditions

$$A + C = A + D = B + C = B + D = C + D = 0$$

ont la conséquence

$$A = B = C = D = 0.$$

Ceci signifie qu'on ne peut pas exprimer $\tau^{ik}X^lX^m$ sous la forme

$$(\ldots)_{,s} + A\tau^{i0}{}_{,0}X^kX^lX^m + \ldots,$$

c'est-à-dire que d^{iklm} n'est pas complètement réductible à des termes 8-polaires.

Pour trouver les quantités 4-polaires indépendantes contenues dans d^{iklm} nous considérons deux cas particuliers de (4.16):

1) Pour $A = B = C = D = \frac{1}{2}$ on a

$$\tau^{(ik}X^lX^{m)} = \frac{1}{2}\{\tau^{s(i}X^kX^lX^{m)}\}_{,s} + \frac{1}{2}\tau^{0(i}{}_{,0}X^kX^lX^{m)}. \tag{4.17}$$

2) Pour $A = B = -C = -D = \frac{1}{2}$ on a

$$\left\{\begin{aligned} \tau^{ik}X^lX^m - \tau^{lm}X^iX^k &= \{\tau^{s(i}X^{k)}X^lX^m - \tau^{s(l}X^{m)}X^iX^k\}_{,s} \\ &+ \tau^{0(i}{}_{,0}X^{k)}X^lX^m - \tau^{0(l}{}_{,0}X^{m)}X^iX^k. \end{aligned}\right. \tag{4.18}$$

On vérifie sans difficulté que ces relations sont les seules indépendantes : les autres relations de cette forme qu'on déduit de (4.16) avec d'autres valeurs de A, B, C et D ne sont que des combinaisons de (4.17) et (4.18).

Posons

$$\tau^{iklm} = \frac{1}{2}(\tau^{ik}X^lX^m + \tau^{lm}X^iX^k) - \tau^{(ik}X^lX^{m)}. \tag{4.19}$$

Nous avons les propriétés de symétrie suivantes :

$$\tau^{iklm} = \tau^{kilm} = \tau^{ikml} = \tau^{lmik}; \tag{4.20}$$

$$\tau^{(iklm)} = 0. \tag{4.20 a}$$

La relation élémentaire

$$\tau^{ik}X^lX^m = \frac{1}{2}(\tau^{ik}X^lX^m + \tau^{lm}X^iX^k) + \frac{1}{2}(\tau^{ik}X^lX^m - \tau^{lm}X^iX^k)$$

nous conduit à la formule :

$$\tau^{ik}X^lX^m = \tau^{iklm} + \tau^{(ik}X^lX^{m)} + \frac{1}{2}(\tau^{ik}X^lX^m - \tau^{lm}X^iX^k). \tag{4.21}$$

En intégrant cette relation sur l'hyperplan $t - r = \text{const}$ nous trouvons :

$$d^{iklm} = \tilde{d}^{iklm} + \int \tau^{(ik}X^lX^{m)}d^3X + \frac{1}{2}\int (\tau^{ik}X^lX^m - \tau^{lm}X^iX^k)d^3X; \tag{4.22}$$

$$\tilde{d}^{iklm} \equiv \int \tau^{iklm}d^3X. \tag{4.23}$$

La quantité $\tilde{d}^{iklm}$ a les propriétés de symétrie déduites de (4.20) et (4.20 a). Les deux derniers termes de (4.22) sont, d'après (4.17) et (4.18), 8-polaires : Pour la discussion systématique du rayonnement 4-polaire il suffit de remplacer d^{iklm} par $\tilde{d}^{iklm}$.

Il ne nous reste qu'à étudier la structure détaillée du tenseur $\tilde{d}^{iklm}$. D'après les conditions de symétrie (4.20) il y a $6 + \frac{1}{2}(6^2 - 6) = 21$ composantes $\tilde{d}^{iklm}$ indépendantes. D'autre part il y a 15 conditions (4.20 *a*). Le nombre final de composantes indépendantes $\tilde{d}^{iklm}$ est donc égal à $21 - 15 = 6$. L'étude plus détaillée de ce tenseur montre qu'il peut être écrit sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{d}^{iklm} = {} & \delta^{ik}\tilde{d}^{sslm} + \delta^{lm}\tilde{d}^{ssik} - \frac{1}{2}(\delta^{il}\tilde{d}^{sskm} + \delta^{im}\tilde{d}^{sskl} + \delta^{kl}\tilde{d}^{ssim} \\ & + \delta^{km}\tilde{d}^{ssil}) - \frac{1}{2}\left(\delta^{ik}\delta^{lm} - \frac{1}{2}\delta^{il}\delta^{km} - \frac{1}{2}\delta^{im}\delta^{kl}\right)\tilde{d}^{ssqq}. \end{aligned}\right. \tag{4.24}$$

Les 6 quantités indépendantes sont donc les $\tilde{d}^{ssik}$. Ces quantités n'ont pas d'analogue électromagnétique.

La formule (3.9) contient la quantité $\ddot{d}^{iklm}$ multipliée par $m^i m^k \xi^l \xi^m$. En multipliant (4.24) par $m^i m^k \xi^l \xi^m$ on voit qu'à cause des conditions d'orthogonalité (3.7) et (4.3) il ne reste finalement que le terme

$$\delta^{lm} \ddot{\tilde{d}}^{ssik} \xi^l \xi^m m^i m^k = \ddot{\tilde{d}}^{ssik} m^i m^k.$$

Il suffit donc pour l'étude du rayonnement 4-polaire de remplacer dans (2.10) la quantité $\xi^l \xi^m \int \tau^{ik}{}_{,00} X^l X^m d^3X$ par $\ddot{\tilde{d}}^{ssik}$.

Une dernière réduction est imposée par la condition d'orthogonalité (4.3) : on doit passer des 6 quantités $\tilde{d}^{ssik}$ aux 5 composantes du tenseur sans trace

$$\text{(4.25)} \qquad D^{ssik} = \tilde{d}^{ssik} - \frac{1}{3} \delta^{ik} \tilde{d}^{ssqq}.$$

En utilisant les résultats obtenus dans ce chapitre on déduit de (2.10) et (3.9):

$$\text{(4.26)} \qquad (\sigma^0)_{4\text{-pol.}} = -\frac{1}{2} m^i m^k \left\{ \frac{1}{2} (\ddot{D}^{ik} + \ddot{D}^{ssik}) + \ddot{D}^{ikl} \xi^l \right\}.$$

Dans cette formule les quantités D^{ik}, D^{ssik} et D^{ikl} ne dépendent que du temps retardé $t - r$, tandis que les quantités m^i et ξ^i sont fonctions des angles polaires θ et φ. On remarquera que les quantités D^{ik} et D^{ssik} n'entrent dans (4.26) que par la combinaison additive $D^{ik} + D^{ssik}$. Pour alléger les formules nous écrirons dans la suite seulement D^{ik} au lieu de $D^{ik} + D^{ssik}$.

Pour les calculs suivants il est avantageux d'exprimer σ^0 comme fonction de θ et φ à l'aide des fonctions harmoniques de spin ${}_2Y_l^m$ [3]. Ceci demande quelques calculs intermédiaires. En partant de (3.8) ainsi que des formules

$$\xi^1 = \sin\theta \cos\varphi \quad , \quad \xi^2 = \sin\theta \sin\varphi \quad , \quad \xi^3 = \cos\theta$$

on trouve :

$$(m^1)^2 = \frac{1}{4}(A_+^2 - A^0) \quad , \quad m^1 m^3 = \frac{1}{2} A_-^1,$$
$$(m^2)^2 = -\frac{1}{4}(A_+^2 + A^0) \quad , \quad m^2 m^3 = -\frac{i}{2} A_+^1,$$
$$m^1 m^2 = -\frac{i}{4} A_-^2 ;$$

$$(\xi^2 m^1 - \xi^1 m^2) m^1 = (\xi^3 m^2 - \xi^2 m^3) m^3 = \frac{i}{2} A^1_- ,$$

$$(\xi^2 m^1 - \xi^1 m^2) m^2 = (\xi^1 m^3 - \xi^3 m^1) m^3 = \frac{1}{2} A^1_+ ,$$

$$(\xi^3 m^1 - \xi^1 m^3) m^1 = (\xi^2 m^3 - \xi^3 m^2) m^2 = -\frac{1}{4} A^2_- ;$$

$$(\xi^3 m^2 - \xi^2 m^3) m^1 = \frac{i}{4} (A^2_+ - A^0),$$

$$(\xi^3 m^1 - \xi^1 m^3) m^2 = \frac{i}{4} (A^2_+ + A^0).$$

Les $A^2_\pm$, $A^1_\pm$ et A^0 sont les combinaisons suivantes des fonctions ${}_2Y^m_2$ non normalisées :

$$A^2_\pm = {}_2Y^2_2 \pm {}_2Y^{-2}_2,$$
$$A^1_\pm = {}_2Y^1_2 \pm {}_2Y^{-1}_2,$$
$$A^0 = {}_2Y^0_2,$$

ces fonctions étant données par

$$(4.27) \quad \begin{cases} {}_2Y^{\pm 2}_2 = \dfrac{1}{2}(1 \mp \cos\theta)^2 e^{\pm 2i\varphi}, \\ {}_2Y^{\pm 1}_2 = \dfrac{1}{2}(1 \mp \cos\theta) \sin 0 e^{\pm i\varphi}, \\ {}_2Y^0_2 = \sin^2\theta. \end{cases}$$

Le résultat final est :

$$(4.28) \qquad (\sigma^0)_{4\text{-pol.}} = \sum_m B_{m2} Y^m_2 \quad , \quad -2 \leqslant m \leqslant 2 ;$$

$$(4.29) \quad \begin{cases} B_{\pm 2} = \dfrac{1}{16}(\ddot{D}^{22} - \ddot{D}^{11}) \mp \dfrac{1}{4}\ddot{D}^{223} + \dfrac{i}{8}(\pm \ddot{D}^{12} - 2\ddot{D}^{123}), \\ B_{\pm 1} = \mp \dfrac{1}{4}\ddot{D}^{31} - \dfrac{1}{2}\ddot{D}^{331} + \dfrac{i}{4}(\ddot{D}^{23} \mp 2\ddot{D}^{112}), \\ B_0 = -\dfrac{3}{16}\ddot{D}^{33} + \dfrac{i}{4}(\ddot{D}^{231} - \ddot{D}^{312}). \end{cases}$$

On remarquera dans cette formule que la quantité $(\sigma^0)_{4\text{-pol.}}$ ne contient que les fonctions ${}_2Y^m_l$ avec $l = 2$, comme on pourrait d'ailleurs s'y attendre.

5. L'ÉNERGIE-IMPULSION DU RAYONNEMENT *4*-POLAIRE

Pour l'énergie-impulsion du rayonnement gravitationnel nous avons la formule [*3*]:

$$(5.1)\quad \frac{dP_\mu}{dx^0} = \int \dot{\sigma}^0 \overline{\dot{\sigma}^0} \frac{d\omega}{4\pi} \cdot \left\{ P_0 \,;\, -\frac{1}{2}(Y_1^1 + Y_1^{-1}),\, \frac{i}{2}(Y_1^1 - Y_1^{-1}),\, -P_1 \right\}.$$

Y_l^m sont les fonctions harmoniques ordinaires non normalisées:

$$(5.2)\quad Y_0^0 \equiv P_0 = 1 \quad , \quad Y_1^0 \equiv P_1 = \cos\theta \quad , \quad Y_1^{\pm 1} = \sin\theta e^{\pm i\varphi}.$$

La quantité $\dot{\sigma}^0 \overline{\dot{\sigma}^0}$ est d'après (4.28)

$$(5.3)\quad \dot{\sigma}^0 \overline{\dot{\sigma}^0} = \sum_{mm'} \dot{B}_m \overline{\dot{B}}_{m'} {}_2Y_2^m {}_2\overline{Y}_2^{m'}.$$

Elle a le poids de spin $s = 0$ et par conséquent elle peut être développée à l'aide des fonctions Y_l^m:

$$(5.3\,a)\quad \dot{\sigma}^0 \overline{\dot{\sigma}^0} = \sum_{lm} A_l^m Y_l^m.$$

Pour calculer les intégrales figurant dans (5.1) nous avons besoin des coefficients A_0^0, A_1^0 et $A_1^{\pm 1}$. On voit immédiatement que A_0^0 et A_1^0 proviennent des termes de (5.3) avec $m = m'$, tandis que pour $A_1^{\pm 1}$ on doit considérer les termes avec $m = m' \pm 1$.

On trouve par un calcul direct:

$$(5.4\,a)\quad \begin{cases} {}_2Y_2^{\pm 2}\, {}_2\overline{Y}_2^{\pm 2} = \dfrac{1}{4}(1 \mp \cos\theta)^4 = \dfrac{4}{5}P_0 \mp \dfrac{8}{5}P_1 + \ldots, \\[2ex] {}_2Y_2^{\pm 1}\, {}_2\overline{Y}_2^{\pm 1} = \dfrac{1}{4}\sin^2\theta(1 \mp \cos\theta)^2 = \dfrac{1}{5}P_0 \mp \dfrac{1}{5}P_1 + \ldots, \\[2ex] {}_2Y_2^0\, {}_2Y_2^0 = \sin^4\theta = \dfrac{8}{15}P_0 + \ldots; \end{cases}$$

$$(5.4\,b)\quad \begin{cases} {}_2Y_2^2\, {}_2\overline{Y}_2^1 = \dfrac{1}{4}e^{i\varphi}\sin\theta(1 - \cos\theta)^3 = \dfrac{2}{5}Y_1^1 + \ldots, \\[2ex] {}_2Y_2^1\, {}_2\overline{Y}_2^0 = \dfrac{1}{2}e^{i\varphi}\sin^3\theta(1 - \cos\theta) = \dfrac{2}{5}Y_1^1 + \ldots, \\[2ex] {}_2Y_2^0\, {}_2\overline{Y}_2^{-1} = \dfrac{1}{2}e^{i\varphi}\sin^3\theta(1 + \cos\theta) = \dfrac{2}{5}Y_1^1 + \ldots, \\[2ex] {}_2Y_2^{-1}\, {}_2\overline{Y}_2^{-2} = \dfrac{1}{4}e^{i\varphi}\sin\theta(1 + \cos\theta)^2 = \dfrac{2}{5}Y_1^1 + \ldots \end{cases}$$

A l'aide de ces formules on déduit de (5.3):

$$(5.4)\quad \begin{cases} A_0^0 = \frac{4}{5}(\dot{B}_2\dot{\bar{B}}_2 + \dot{B}_{-2}\dot{\bar{B}}_{-2}) + \frac{1}{5}(\dot{B}_1\dot{\bar{B}}_1 + \dot{B}_{-1}\dot{\bar{B}}_{-1}) + \frac{8}{15}\dot{B}_0\dot{\bar{B}}_0, \\ A_1^0 = \frac{8}{5}(-\dot{B}_2\dot{\bar{B}}_2 + \dot{B}_{-2}\dot{\bar{B}}_{-2}) + \frac{1}{5}(-\dot{B}_1\dot{\bar{B}}_1 + \dot{B}_{-1}\dot{\bar{B}}_{-1}), \\ A_1^1 = \frac{2}{5}(\dot{B}_2\dot{\bar{B}}_1 + \dot{B}_1\dot{\bar{B}}_0 + \dot{B}_0\dot{\bar{B}}_{-1} + \dot{B}_{-1}\dot{\bar{B}}_{-2}). \end{cases}$$

En remarquant que $\dot{\sigma}^0\dot{\bar{\sigma}}^0$ est réel et que $\bar{Y}_1^1 = Y_1^{-1}$ on trouve encore

$$(5.4\,a)\qquad A_1^{-1} = \bar{A}_1^1.$$

En introduisant les expressions (4.29) dans (5.4) on trouve:

$$(5.5)\quad \begin{cases} A_0^0 = \frac{1}{80}\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kl} + \frac{1}{30}\dddot{D}^{klm}\dddot{D}^{klm}, \\ A_1^0 = \frac{1}{40}\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kl3}, \\ A_1^{\pm 1} = \frac{1}{20}\dddot{D}^{kl}(\dddot{D}^{kl1} \mp i\dddot{D}^{kl2}). \end{cases}$$

La relation (5.1) nous donne alors:

$$(5.6)\quad \frac{dP_\mu}{dx^0} = \left\{\frac{1}{80}\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kl} + \frac{1}{30}\dddot{D}^{klm}\dddot{D}^{klm}\,;\ -\frac{1}{30}\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kli}\right\} \quad i = 1, 2, 3.$$

Dans cette formule nous avons à réintroduire les facteurs $\frac{G}{c^4}$ qui figurent dans la relation (2.4) ainsi que dans la quantité P_μ de la relation (5.1). Le résultat final est:

$$(5.7)\qquad \frac{dP_\mu}{dt} = \frac{G}{5c^5}\left\{\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kl} + \frac{8}{3}\dddot{D}^{klm}\dddot{D}^{klm}\,;\ -\frac{8}{3}\dddot{D}^{kl}\dddot{D}^{kli}\right\}.$$

Dans cette dernière formule nous avons mis $\dot{(\,.\,)} = \frac{d}{dt}(\,.\,)$ et remplacé $\tau^{\mu\nu}$ par $\frac{\tau^{\mu\nu}}{c^2}$ dans les intégrales (4.2 *a*), (4.7) et (4.15).

6. LE MOMENT CINÉTIQUE DU RAYONNEMENT

L'étude du formalisme de Newman-Penrose en coordonnées cartésiennes [*2*] a montré que la composante J_z du moment cinétique est déterminée par la partie imaginaire $i\beta_0$ du coefficient de ${}_1Y_1^0$ dans le développement du scalaire de courbure Ψ_1^0 :

$$\Psi_1^0 = i\beta_0 \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} + \dots \tag{6.1}$$

Plus exactement on a

$$\beta_0 = \frac{3G}{c^3} J_z. \tag{6.2}$$

L'équation du mouvement pour la quantité Ψ_1^0 est :

$$\dot{\Psi}_1^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\eth} \Psi_2^0 + \sqrt{2}\sigma^0 \bar{\eth} \dot{\bar{\sigma}}^0. \tag{6.3}$$

On détermine d'abord Ψ_2^0 en intégrant l'équation du mouvement correspondante,

$$\dot{\Psi}_2^0 = -\frac{1}{2} \bar{\eth}^2 \dot{\bar{\sigma}}^0 - \sigma^0 \ddot{\bar{\sigma}}^0,$$

sous l'hypothèse que le champ était initialement stationnaire. En introduisant dans (6.3) cette valeur de Ψ_2^0 on trouve :

$$\dot{\Psi}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\eth} \left\{ 3\sigma^0 \dot{\bar{\sigma}}^0 + \frac{1}{2} \bar{\eth}^2 (\bar{\sigma}^0)_u - \frac{1}{2} \bar{\eth}^2 (\bar{\sigma}^0)_{u=0} - \int_0^u \dot{\sigma}^0 \dot{\bar{\sigma}}^0 du \right\} - \sqrt{2} \bar{\sigma}^0 \eth \sigma^0. \tag{6.4}$$

On voit sans difficulté que σ^0 ayant dans le cas général la forme

$$\sigma^0 = \sum_{lm} \alpha_{lm}(u) \cdot {}_2Y_l^m \quad , \quad l \geqslant 2, \tag{6.5}$$

il sera

$$\bar{\eth}^2 \bar{\sigma}^0 = \sum_{lm} \beta_{lm} Y_l^m \qquad , \quad l \geqslant 2,$$

et par conséquent le deuxième et troisième termes du deuxième membre de (6.4) ne contribuent pas aux termes de Ψ_1^0 qui sont proportionnels à ${}_1Y_1^m$. D'autre part $\int \dot{\sigma}^0 \dot{\bar{\sigma}}^0 du$ est réel et pour cette raison ne contribue pas à la partie imaginaire du coefficient de ${}_1Y_1^0$. Dans le cas que nous considérons ici σ^0 a d'après (4.28) la forme (6.5) avec $l = 2$. Ceci a la conséquence

$$\bar{\eth} \sigma^0 = 0.$$

L'équation (6.4) se réduit donc à la forme

$$(6.6) \qquad \dot{\Psi}_1^0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \tilde{c}(\sigma^0 \dot{\bar{\sigma}}^0) + \ldots,$$

les termes omis étant sans importance pour notre problème.

De (4.28) on déduit

$$(6.7) \qquad \sigma^0 \dot{\bar{\sigma}}^0 = \sum_{mm'} B_m \dot{\bar{B}}_{m'\,2} Y_2^m \,{}_2\overline{Y_2^{m'}}.$$

Écrivons

$$(6.7\,a) \qquad \sigma^0 \dot{\bar{\sigma}}^0 = \sum_{lm} \tilde{A}_l^m Y_l^m$$

et rappelons que dans l'équation (6.6) nous sommes intéressés au terme de Ψ_1^0 qui est proportionnel à ${}_1Y_1^0$. Nous avons donc à calculer dans le deuxième membre de (6.7 *a*) le coefficient $\tilde{A}_1^0$. Ce coefficient contient les termes de la somme (6.7) ayant $m = m'$. En utilisant les formules (5.4 *a*) nous trouvons :

$$(6.8) \qquad \tilde{A}_1^0 = \frac{8}{5^u}(-B_2 \dot{\bar{B}}_2 + B_{-2} \dot{\bar{B}}_{-2}) + \frac{1}{5}(-B_1 \dot{\bar{B}}_1 + B_{-1} \dot{\bar{B}}_{-1}).$$

En introduisant les expressions (4.29) dans (6.8) nous trouvons

$$(6.9) \quad \tilde{A}_1^0 = \ldots + \frac{i}{40}\{(\dddot{D}^{k1}\ddot{D}^{k2} - \dddot{D}^{k2}\ddot{D}^{k1}) + 8(\dddot{D}^{kl1}\ddot{D}^{kl2} - \dddot{D}^{kl2}\ddot{D}^{kl1})\}.$$

La partie réelle de $\tilde{A}_1^0$ ne nous intéresse pas ici et n'a pas été calculée. La relation (6.6) nous donne alors, avec (6.1):

$$(6.10) \quad \dot{\beta}_0 = \frac{3}{40}\{(\dddot{D}^{k1}\ddot{D}^{k2} - \dddot{D}^{k2}\ddot{D}^{k1}) + 8(\dddot{D}^{kl1}\ddot{D}^{kl2} - \dddot{D}^{kl2}\ddot{D}^{kl1})\}.$$

En réintroduisant les facteurs $\frac{G}{c^4}$ nous trouvons finalement :

$$(6.11) \quad \frac{dJ_z}{dt} = \frac{2G}{5c^5}\{(\dddot{D}^{k1}\ddot{D}^{k2} - \dddot{D}^{k2}\ddot{D}^{k1}) + 8(\dddot{D}^{kl1}\ddot{D}^{kl2} - \dddot{D}^{kl2}\ddot{D}^{kl1})\}.$$

La notation utilisée dans cette formule est la même comme dans (5.7).

J_z étant la composante dans la direction O*z* du moment cinétique total du système matériel qui est la source du rayonnement, nous aurons :

$$(6.12) \qquad \left(\frac{dJ_z}{dt}\right)_{\text{rayon.4-pol.}} = -\frac{dJ_z}{dt}.$$

Pour arriver à des équations du type (6.11) pour les composantes J_x et J_y on devrait d'après [2] considérer les termes de Ψ_1^0 proportionnels à ${}_1Y_1^{\pm 1}$. Mais ce calcul n'est pas nécessaire à cause de l'équivalence des 3 coordonnées spatiales x^i en coordonnées cartésiennes. En effet, le résultat (6.11) suggère immédiatement la généralisation :

$$(6.13) \qquad \frac{dJ^{ik}}{dt} = \frac{2G}{5c^5}\left\{(\ddot{D}^{li}\dddot{D}^{lk} - \ddot{D}^{lk}\dddot{D}^{li}) + 8(\dddot{D}^{lmi}\ddot{D}^{lmk} - \dddot{D}^{lmk}\ddot{D}^{lmi})\right\}$$

où $\vec{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12})$ est le moment cinétique total du système considéré.

7. QUELQUES REMARQUES SUR LES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

Les formules (5.7) et (6.13) contiennent les 10 quantités D^{lm} et D^{lmn}. Ceci correspond au fait que la quantité $(\sigma^0)_{\text{4-pol.}}$ est de la forme (6.5) avec $l = 2$ et par conséquent elle ne peut contenir que 5 coefficients complexes. Rappelons que les quantités D^{lm} représentent en réalité les sommes $D^{lm} + D^{sslm}$. Pour avoir une expression courte nous désignerons dans la suite ces sommes comme les composantes 4-polaires électriques.

L'énergie du rayonnement est la somme de deux termes qui proviennent séparément des 4-pôles électrique et magnétique. Chacun de ces termes est homogène-quadratique dans les composantes correspondantes et défini-positif. Le moment cinétique est aussi composé de deux termes provenant séparément des 4-pôles électrique et magnétique. Par contre l'impulsion contient un seul terme qui est bilinéaire dans les composantes électriques et magnétiques.

Le premier terme de l'énergie se réduit, quand on met $D^{sslm} = 0$, à l'expression calculée par Einstein [4]. L'expression qui donne l'impulsion du rayonnement a été calculée pour le cas $D^{sslm} = 0$ par Peres [5] et Papapetrou [6] ; elle y est donnée sous une forme un peu plus compliquée à cause de l'utilisation de $\tilde{d}^{klm}$ au lieu de D^{klm}. Un cas particulier était étudié précédemment par Bonnor et Rotenberg [7]. Le moment cinétique du rayonnement a été calculé récemment par Cooperstock et Booth [8]. Le premier terme de la formule obtenue dans [8] est identique au premier terme de (6.13) quand on met $D^{sslm} = 0$. Le deuxième terme de la formule de [8] est essentiellement plus compliqué que celui de (6.13) à cause de l'utilisation de $\tilde{d}^{klm}$ au lieu de D^{klm}.

Rappelons que dans le cas où les mouvements dans la matière, qui est la source du rayonnement, sont non relativistes les quantités D^{ik} sont prépondérantes. Un exemple typique de ce cas est constitué par l'oscillation longitudinale d'une barre élastique. Soit ρ la densité, l la longueur et S la section de la barre; soit encore a l'amplitude de l'oscillation et λ la longueur d'onde du rayonnement gravitationnel émis. On trouve alors (1):

$$D^{ik} \sim \rho l^2 Sa \quad , \quad D^{ikl} \sim \rho l^2 Sa \cdot \frac{l}{\lambda} \quad , \quad D^{ssik} \sim \rho l^2 a \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 .$$

La présence des facteurs $\frac{l}{\lambda}$ et $\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$ signifie que les quantités 4-polaires magnétiques D^{ikl} contribuent au rayonnement au même ordre que les composantes du 2^3-pôle de masse, tandis que les quantités D^{ssik} contribuent à l'ordre du 2^4-pôle de masse. C'est seulement dans le cas de mouvements relativistes que les formules que nous avons déduit dans ce travail pourraient éventuellement être utiles.

REFERENCES

[1] E. T. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Physics*, t. **3**, 1962, p. 566.
[2] A. PAPAPETROU, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **9**, 1969, p. 251.
[3] E. T. NEWMAN et R. PENROSE, *Proc. Roy. Soc. (London)*, t. **305 A**, 1968, p. 175.
[4] A. EINSTEIN, *Berliner Berichte*, 1918, p. 154.
[5] A. PERES, *Phys. Rev.*, t. **128**, 1962, p. 2471.
[6] A. PAPAPETROU, *C. R. Acad. Sci.*, t. **255**, 1962, p. 1578.
[7] W. B. BONNOR et M. ROTENBERG, *Proc. Roy. Soc. (London)*, t. **265 A**, 1961, p. 109.
[8] F. I. COOPERSTOCK et D. J. Booth, *Nuovo Cimento*, t. **62 B**, 1969, p. 163. Voir aussi T. A. MORGAN et A. PERES, *Phys. Rev.*, t. **131**, 1963, p. 494; P. C. PETERS, *Phys. Rev.*, t. **136**, 1964, p. 1224.

(Manuscrit reçu le 13 mai 1970).

(1) D^{ik} contient aussi un terme de l'ordre $\rho l^3 S$. Mais ce terme est indépendant du temps et par conséquent sans importance pour le rayonnement.

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1795*a*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6156. 2-1971.