ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. SURDIN

L'état fondamental de l'oscillateur harmonique est-il un cycle limite ?

Annales de l'I. H. P., section A, tome 13, nº 4 (1970), p. 363-370

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__13_4_363_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIII, n° 4, 1970, p. 363-370.

Section A :
Physique théorique.

L'état fondamental de l'oscillateur harmonique est-il un cycle limite ?

par

M. SURDIN

Faculté des Sciences de Bordeaux, 33-Talence.

On montre que l'action du champ de zéro de Wheeler et Feynman sur un oscillateur harmonique conduit à un cycle limite. Ce cycle limite n'est pas incompatible avec l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

INTRODUCTION

Il a déjà été envisagé d'introduire dans les équations décrivant des systèmes quantiques des termes non linéaires, en vue d'assimiler les transitions quantiques à des passages brusques d'un cycle limite à un autre [*1*] [*2*] [*3*] [*4*].

Andrade E. Silva et coll. [*3*] ont fait une étude très générale des conditions qui permettent d'obtenir, pour un système régi par des équations non linéaires, des mouvements stationnaires et les mouvements transitoires de passage vers un mouvement stationnaire.

En introduisant un terme non linéaire dans l'équation de Schrödinger, ils ont montré, à titre d'exemple, dans des cas simples, comment on peut retrouver des résultats équivalents à ceux de la mécanique quantique.

Plus récemment Leiter [*5*], qui semble ignorer les travaux d'Andrade E. Silva et coll., a introduit dans l'équation de Schrödinger un champ de force *ad hoc* rendant cette équation non linéaire. Il a obtenu des cycles limites correspondant aux fonctions propres de l'atome d'hydrogène. Cette façon d'opérer lui a permis de décrire les transitions entre différents états.

La présente étude, faite dans le cadre de l'électrodynamique stochastique, adopte délibérément une approche classique. Basée sur une extension de la théorie de l' « absorbeur » de Wheeler et Feynman [6], l'électrodynamique stochastique considère, à la température de zéro absolu, l'existence d'un champ électromagnétique fluctuant. Le spectre énergétique de ce « champ de zéro » se déduit de l'application à ce champ de l'invariance de Lorentz.

L'étude de l'action du champ de zéro sur l'oscillateur harmonique et sur le mouvement d'un électron libre dans un champ magnétique uniforme a permis d'obtenir de nombreux résultats rappelant ceux de la mécanique quantique [7].

Dans ce qui suit on se propose, dans une première partie, d'étudier l'interaction du champ de zéro avec un oscillateur harmonique. On cherche à définir la manière dont le champ de zéro dépend de la coordonnée x et de ses dérivées par rapport au temps $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, ... Dans la deuxième partie de ce travail, on cherche les conditions d'existence d'un cycle limite. Chemin faisant, on note la possibilité d'une configuration polycyclique. Pour terminer, dans la troisième partie, on montre que l'expression complète, celle qui comprend le terme relativiste, du champ de zéro donnée par Wheeler et Feynman conduit à un cycle limite stable. Ce cycle limite n'est pas incompatible avec l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

RECHERCHE DE L'EXPRESSION DU CHAMP DE ZÉRO

Considérons l'équation de l'oscillateur harmonique

$$-\frac{2e^2}{3c^3}\cdot\dddot{x} + m\cdot\ddot{x} + kx = e\mathrm{E} \tag{1}$$

où E est la composante électrique du champ de zéro.

On pose

$$\frac{2e^2}{3mc^3} = \tau, \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{e}{m}\cdot\mathrm{E} = f$$

où f est une fonction de x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, ... dont on recherche la forme. L'équation (1) devient

$$-\tau\cdot\dddot{x} + \ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ldots) \tag{2}$$

Multiplions (2) par $\dot{x}$, il vient

$$-\tau\cdot\dddot{x}\cdot\dot{x} + \ddot{x}, \dot{x} + \omega_0^2 x\cdot\dot{x} = \dot{x}\cdot f$$

et

$$-\tau\frac{d}{dt}\cdot(\ddot{x}\cdot\dot{x}) + \tau\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \omega_0^2\cdot x^2) = \dot{x}\cdot f \tag{3}$$

Prenant la moyenne par rapport au temps, on obtient

$$-\tau\frac{d}{dt}\langle \ddot{x}, \dot{x}\rangle + \tau\langle \ddot{x}^2\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\langle \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2\rangle = \langle \dot{x}\cdot f\rangle \tag{4}$$

le champ de zéro, ainsi que x et ses dérivées par rapport au temps, sont des grandeurs aléatoires stationnaires, leurs moyennes par rapport au temps sont indépendantes du temps, d'où

$$\tau\cdot\langle \ddot{x}^2\rangle = \langle \dot{x}\cdot f\rangle \tag{5}$$

L'interprétation physique de l'équation (5) est la suivante : l'énergie moyenne rayonnée par l'oscillateur harmonique $m\tau\cdot\langle\ddot{x}^2\rangle$ est exactement compensée par l'énergie cédée à l'oscillateur, $m\langle \dot{x}\cdot f\rangle$, par le champ de zéro. C'est aussi la condition nécessaire pour l'existence d'un état stationnaire.

Pour la détermination de la forme de $f(x, \dot{x}, \dots)$ l'équation (5) est encore trop générale. On peut restreindre les conditions sur f en notant que pour un oscillateur harmonique soumis à un champ fluctuant, l'analyse de Fourier montre que la moyenne par rapport au temps sur un cycle du produit d'une dérivée de x, $x^{(n)}$, par sa propre dérivée $x^{(n+1)}$ est nulle, soit $\langle x^{(n)}\cdot x^{(n+1)}\rangle = 0$.

On peut alors développer $f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \dots)$ en série entière de x et de ses dérivées successives. Tenant compte de la remarque précédente et en ne conservant que les termes du développement qui multipliés par $\dot{x}$ ont une moyenne non nulle [voir équation (5)], on a

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \dots) = {} & \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}x^{2i}\dot{x}^{2j+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} B_{kl}x^{2k}\dddot{x}^{2l+1} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}\ddot{x}^{2m}\dot{x}^{2n+1} + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} D_{st}\ddot{x}^{2s}\dddot{x}^{2t+1} \\ & + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} F_{uvw}x^{2u}\ddot{x}^{2v}\dot{x}^{2w+1} + \dots \end{aligned} \tag{6}$$

où $i, j, k, \ldots$ sont des entiers positifs, puisque f est finie pour $x = 0$, $\mathring{x} = 0$, $\overset{\circ\circ}{x} = 0, \ldots$

L'interprétation physique, du moins pour les premiers termes du développement (6), sera donnée plus bas. Comme, actuellement, l'interprétation physique des termes d'ordre supérieur n'est pas connue, la convergence de la série n'a pas été considérée.

CONDITIONS POUR L'EXISTENCE D'UN CYCLE LIMITÉ

Considérons le cas particulier où

$$f(x, \mathring{x}, \overset{\circ\circ}{x}, \overset{\circ\circ\circ}{x}, \ldots) = \mathrm{A}\mathring{x} + \mathrm{C}\overset{\circ\circ}{x}^{2}, \mathring{x} \tag{7}$$

Ce cas présente un intérêt spécial, puisque le champ de zéro de Wheeler et Feynman a cette forme (voir le paragraphe suivant).

Soit

$$\frac{\mathrm{A}}{\tau} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{C}}{\tau} = \gamma,$$

l'équation (2) devient

$$\overset{\circ\circ}{x} + \omega_0^2 x = \tau(\overset{\circ\circ\circ}{x} + \alpha\mathring{x} + \gamma\overset{\circ\circ}{x}^{2}, \mathring{x}) \tag{8}$$

le deuxième membre est considéré comme une faible perturbation de sorte que

$$\tau\omega_0 \ll 1 \quad , \quad \tau\alpha \ll \omega_0 \qquad \text{et} \qquad \tau\gamma \mathrm{R}_2^2 \cdot \omega_0^3 \ll 1 \tag{9}$$

où R_2 est la valeur de R pour le cycle limite.

Pour obtenir les conditions d'existence d'un cycle limite on utilise la méthode de variation des constantes, soit

$$x = \mathrm{R} \cdot \cos\psi \quad , \quad \psi = \omega_0 t + \varphi$$

$\mathrm{R}(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions du temps t lentement variables au voisinage du cycle limite. On a

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt} = \left\langle \frac{d\mathrm{R}}{dt} \right\rangle \qquad \text{et} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle$$

où

$$\left\langle \frac{d\mathrm{R}}{dt} \right\rangle \qquad \text{et} \qquad \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle$$

sont les valeurs moyennes pour un cycle.

De l'équation (8), on obtient :

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad , \quad \varphi = \text{const.} \tag{10}$$

la vitesse angulaire pour le cycle limite est ω_0.

$$(b) \qquad \frac{d\mathrm{R}}{dt} = \mathring{\mathrm{R}} = \frac{\tau\mathrm{R}}{2}\left(\frac{\gamma\mathrm{R}^2\omega_0^4}{4} + \alpha - \omega_0^2\right) \tag{11}$$

Pour un cycle limite $\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} = 0$, d'où

$$\mathrm{R}_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_2^2 = -\frac{4(\alpha - \omega_0^2)}{\gamma\omega_0^4} \tag{12}$$

Le cycle limite est stable si

$$\left(\frac{d\mathring{\mathrm{R}}}{d\mathrm{R}}\right)_2 = \frac{\tau}{2}\cdot\left(\frac{3\cdot\gamma\cdot\mathrm{R}_2^2\omega_0^4}{4} + \alpha - \omega_0^2\right) < 0 \tag{13}$$

Les équations (12) et (13) donnent $\alpha - \omega_0^2 > 0$. Cette condition et $\tau\alpha \ll \omega_0$ impliquent $\tau\omega_0 \ll 1$ et $\tau\cdot\gamma\cdot\mathrm{R}_2^2\cdot\omega_0^3 \ll 1$.

Comme $\mathrm{R}_2^2 > 0$, de l'équation (12) on tire $\gamma < 0$.

Si on prend en considération les termes d'ordre supérieur à ceux envisagés dans l'équation (7), une configuration polycyclique [*8*] pourrait être obtenue. Pour tous les cycles limites, correspondant aux différentes valeurs de R_n, la vitesse angulaire est la même, à savoir ω_0. Il n'en serait pas de même pour l'atome d'hydrogène.

LE CYCLE LIMITE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE DANS LE CHAMP DE ZÉRO DE WHEELER ET FEYNMAN

L'équation du mouvement d'un électron libre dans le vide, donnée en notation tensorielle par Wheeler et Feynman [*6*] (leur équation (44)), s'écrit :

$$m\ddot{a}_i = e\cdot\sum_k \mathrm{F}^k_{ij\,\mathrm{rec}}a^{ij} + \frac{2e^2}{3}(\dot{a}_i\dddot{a}_j - \dddot{a}_i\dot{a}_j)\dot{a}^j + e\mathrm{F}_{ij\,\mathrm{inc}}\cdot\dot{a}^j \tag{14}$$

où k est relatif aux charges de l'absorbeur.

Suivant ces auteurs :

1° Le premier terme du second membre est nul puisqu'il n'y a pas d'autres particules que l'électron considéré.

2° Le deuxième terme comprend deux parties : la première est généralement négligée dans la formulation non relativiste, la deuxième correspond au freinage non relativiste dû au rayonnement de l'oscillateur harmonique.

3° Le troisième terme, le « champ incident » dépendant du mouvement de l'électron, est tel qu'il compense la perte d'énergie émise par l'électron.

Dans ce qui suit, on conserve les deux parties du deuxième terme ainsi que le troisième terme du second membre. Écrivant l'équation (14) pour un oscillateur harmonique, il vient :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = -\frac{\tau \ddot{x}^2 \cdot \dot{x}}{c^2} + \tau \dddot{x} + A\dot{x} = \tau\left(\dddot{x} + \alpha\dot{x} - \frac{\ddot{x}^2 \dot{x}}{c^2}\right) \quad (15)$$

où, afin d'obtenir l'équation (8), $\frac{e}{m} F_{ij\,\text{inc.}}$ est remplacé par la constante A.

Comme on l'a vu plus haut, l'équation (15) a un cycle limite stable si $\alpha - \omega_0^2 > 0$. Pour le cycle limite on a

$$R_2^2 = \frac{4c^2(\alpha - \omega_0^2)}{\omega_0^4} \quad (16)$$

Braffort et coll. [9] ont montré que pour un oscillateur harmonique on a

$$k\langle x^2 \rangle = \frac{K \cdot \omega_0}{2} \text{ [10]}, \quad (17)$$

la comparaison avec le cycle limite donne

$$k\langle x^2 \rangle = \frac{kR_2^2}{2} = \frac{k}{2} \cdot \frac{4c^2(\alpha - \omega_0^2)}{\omega_0^4} = \frac{K \cdot \omega_0}{2} \quad (18)$$

d'où

$$\alpha = \omega_0^2\left(1 + \frac{K \cdot \omega_0}{4mc^2}\right) \quad (19)$$

La constante de temps θ, relative à la stabilité orbitale [8] du cycle limite, est

$$\frac{1}{\theta} = -\left(\frac{d\dot{R}}{dR}\right)_2 = \tau(\alpha - \omega_0^2) = \frac{\tau K \cdot \omega_0^3}{4mc^2} \quad (20)$$

REMARQUES

a) De la condition d'existence d'un cycle limite, $\frac{dR}{dt} = 0$, on déduit deux valeurs pour R : $R_1 = 0$ et

$$R_2^2 = -\frac{4(\alpha - \omega_0^2)}{\gamma\omega_0^4}.$$

Le cycle limite est stable si $\left(\frac{d\mathring{R}}{dR}\right)_2 < 0$, ce qui entraîne $\alpha - \omega_2^0 > 0$. Dans ces conditions, la solution $R_1 = 0$ est instable puisuqe

$$\left(\frac{d\mathring{R}}{dR}\right)_1 = \alpha - \omega_0^2 > 0.$$

En d'autres termes, pour un oscillateur harmonique ayant un cycle limite, la position $R_1 = 0$ est instable. L'action du champ de zéro est telle qu'un oscillateur partant du repos atteint une configuration de cycle limite stable.

b) Le terme relativiste de l'atténuation $-\frac{\tau \overset{\circ\circ}{x}{}^2 \cdot \mathring{x}}{c^2}$ étant très petit est généralement négligé. La considération de ce terme dans l'équation (15) lui confère son caractère non linéaire et, partant, la possibilité d'existence d'un cycle limite.

c) La comparaison des résultats obtenus pour le cycle limite avec l'état fondamental de l'oscillateur harmonique (équation (17)) ne conduit pas à des incompatibilités. On peut alors affirmer que le cycle limite trouvé peut décrire l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

RÉFÉRENCES

[1] F. CAP, *Il Nuovo Cim.*, X, t. **3**, suppl. 1956, p. 418.

[2] J. ANDRADE E SILVA, F. FER, Ph. LERUSTE et G. LOCHARK, *Cahier de Physique*, nº 129, 1961, p. 209-224.

[3] J. ANDRADE E SILVA, F. FER, Ph. LERUSTE et G. LOCHAK, *Cahier de Physique*, nº 137, 1962, p. 1-15.

[4] Louis DE BROGLIE, *Ondes électromagnétiques et Photons*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[5] D. LEITER, *Il Nuovo Cim.*, X, t. **60** B, 1969, p. 107-113.

[6] J. A. WHEELER et R. P. FEYNMAN, *Rev. Mod. Phys.*, t. **17**, 1945, p. 157-181.

[7] P. BRAFFORT, M. SURDIN et A. TARONI, *C. R. Ac. Sc.* (Paris), t. **261**, p. 4339-4341.
P. BRAFFORT et A. TARONI, *C. R. Ac. Sc.* (Paris), t. **264**, série B, 1967, 1437-1440.

M. Surdin, P. Braffort et A. Taroni, *Nature*, t. **210**, 1966, p. 405-406.
M. Surdin, *C. R. Ac. Sc.* (Paris), t. **270**, série B, 1970, p. 193-196.
[*8*] N. Minorsky, *Non-linear Oscillations*, D. Van Nostrand, 1962.
[*9*] P. Braffort, M. Surdin et A. Taroni, *loc. cit.*
[*10*] La constante K s'introduit dans l'expression du spectre énergétique du champ de zéro. Si on veut identifier les résultats de l'électrodynamique stochastique à ceux de la mécanique quantique, on doit poser $K \equiv \hbar$.

(Manuscrit reçu le 27 mai 1970).