

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

Les équations supplémentaires dans le formalisme de Newman-Penrose

Annales de l'I. H. P., section A, tome 13, n° 4 (1970), p. 271-286

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__13_4_271_0

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Les équations supplémentaires dans le formalisme de Newman-Penrose

par

A. PAPAPETROU

Institut Henri Poincaré,
Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.

RÉSUMÉ. — Si on écrit les équations de Newman-Penrose sous la forme $(\dots) = 0$, il y a un nombre d'identités satisfaites par les premiers membres de ces équations. Ces identités permettent de séparer les équations de Newman-Penrose en équations principales, supplémentaires et triviales. Dans la première partie de ce travail on détermine la séparation des équations pour le cas du champ combiné d'Einstein-Maxwell.

La deuxième partie contient une étude systématique des identités. On déduit trois identités pour le champ gravitationnel et une pour le champ électromagnétique.

SUMMARY. — If the equations of Newman-Penrose are written in the form $(\dots) = 0$, there is a number of identities satisfied by the left-hand sides of these equations. Using these identities one can separate the equations of Newman-Penrose into main, supplementary and trivial equations. In the first part of this paper we give this separation for the case of the combined Einstein-Maxwell field.

In the second part the identities are studied systematically. It is found that there are three identities for the gravitational and one for the electromagnetic field.

INTRODUCTION

L'étude du rayonnement gravitationnel par la méthode de Bondi [1] et Sachs [2] a montré que l'utilisation des coordonnées radiatives de Bondi

a une conséquence particulièrement intéressante : les équations du champ se trouvent séparées en équations principales, supplémentaires et triviales. Cette séparation est utile aussi du point de vue pratique : dans l'étude asymptotique du rayonnement gravitationnel où on suppose que toutes les quantités du champ sont développées en séries de puissances de $\frac{1}{r}$, les équations principales donnent des équations indépendantes à chaque ordre du développement. Quand on a déjà satisfait les équations principales, chacune des équations supplémentaires ne donne qu'une équation essentielle à un certain ordre du développement. Les équations triviales sont automatiquement satisfaites quand on a déjà satisfait les équations principales et supplémentaires.

La situation est la même dans la méthode développée par Newman et Penrose [3]. En effet nous allons montrer dans la suite qu'il y a un nombre d'équations supplémentaires et au moins une équation triviale. Nous y arriverons en utilisant certaines identités que nous allons établir dans ce travail. Dans la première partie nous allons chercher les équations supplémentaires ainsi que l'ordre de l'approximation auquel chacune de ces équations est essentielle. Dans la deuxième partie nous allons entreprendre une étude systématique des identités utilisées dans la première partie.

Le problème que nous allons traiter est celui du champ combiné d'Einstein-Maxwell. Nous ne considérons que le domaine extérieur aux sources matérielles de ces champs : le champ de Maxwell est supposé sans sources et le champ gravitationnel n'a comme source que le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique. Dans la première partie nous accepterons, pour abrégé les calculs, les simplifications du repère introduites par Newman et Penrose. C'est-à-dire nous accepterons, dans la notation de Newman et Penrose que nous allons utiliser dans ce travail, les relations

$$\kappa = \varepsilon = \pi = 0.$$

Il n'y aura pas de simplifications dans la deuxième partie.

1. LES ÉQUATIONS SUPPLÉMENTAIRES ET TRIVIALES

Nous écrirons d'abord les équations de Newman et Penrose groupées d'une manière adaptée à notre problème. Ceci devient possible parce que nous connaissons *a priori* quelles sont les équations principales. En effet, l'étude asymptotique des équations du champ nous a montré que les équations

tions qui donnent des équations indépendantes à chaque ordre de l'approximation sont celles qui contiennent l'opérateur de dérivation radiale D ainsi que celles qui contiennent la dérivée par rapport à u des quantités Ψ_0 et Φ_0 . D'autre part, les équations de Newman-Penrose pour le champ gravitationnel sont séparées en trois groupes. Le premier groupe contient des équations différentielles pour les coefficients de spin. Le deuxième groupe contient les équations différentielles pour les scalaires de courbure Ψ_λ . Dans le troisième groupe nous avons des équations différentielles pour les quantités ω , ξ^i , U et X^i ($i = 2, 3$) qui déterminent la liaison entre le repère de vecteurs (l^μ, n^μ, m^μ) et le système de coordonnées. En tenant compte de ces remarques nous écrirons les équations de Newman-Penrose sous la forme suivante :

Équations pour les coefficients de spin :

$$\begin{aligned}
 (A) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 (A1) & \equiv D\rho - \rho^2 - \sigma\bar{\sigma} - \Phi_{00} = 0, \\
 (A2) & \equiv D\sigma - 2\rho\sigma - \Psi_0 = 0, \\
 (A3) & \equiv D\tau - \rho\tau - \sigma\bar{\tau} - \Psi_1 - \Phi_{01} = 0, \\
 (A4) & \equiv D\alpha - \rho\alpha - \bar{\sigma}\beta - \Phi_{10} = 0, \\
 (A5) & \equiv D\beta - \rho\beta - \sigma\alpha - \Psi_1 = 0, \\
 (A6) & \equiv D\gamma - \alpha\tau - \beta\bar{\tau} - \Psi_2 - \Phi_{11} = 0, \\
 (A7) & \equiv D\lambda - \rho\lambda - \bar{\sigma}\mu - \Phi_{20} = 0, \\
 (A8) & \equiv D\mu - \rho\mu - \sigma\lambda - \Psi_2 = 0, \\
 (A9) & \equiv D\nu - \mu\bar{\tau} - \lambda\tau - \Psi_3 - \Phi_{21} = 0;
 \end{aligned} \right. \\
 (a) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 (a1) & \equiv \delta\rho - \bar{\delta}\sigma - \rho\tau + \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + \Psi_1 - \Phi_{01} = 0, \\
 (a2) & \equiv \delta\alpha - \bar{\delta}\beta - \rho\mu + \sigma\lambda - \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + 2\alpha\beta + \Psi_2 - \Phi_{11} = 0, \\
 (a3) & \equiv \delta\lambda - \bar{\delta}\mu - \mu\bar{\tau} - \lambda\bar{\alpha} + 3\lambda\beta + \Psi_3 - \Phi_{21} = 0, \\
 (a4) & \equiv \Delta\lambda - \bar{\delta}\nu + (\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda - 2\alpha\nu + \Psi_4 = 0, \\
 (a5) & \equiv \delta\nu - \Delta\mu - \mu(\mu + \gamma + \bar{\gamma}) - \lambda\bar{\lambda} + 2\nu\beta - \Phi_{22} = 0, \\
 (a6) & \equiv \delta\gamma - \Delta\beta - \mu\tau + \sigma\nu + \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) - \alpha\bar{\lambda} - \Phi_{12} = 0, \\
 (a7) & \equiv \delta\tau - \Delta\sigma - \rho\bar{\lambda} - \sigma(\mu + \bar{\gamma} - 3\gamma) - 2\beta\tau - \Phi_{02} = 0, \\
 (a8) & \equiv \Delta\rho - \bar{\delta}\tau + \rho(\bar{\mu} - \gamma - \bar{\gamma}) + \sigma\lambda + 2\alpha\tau + \Psi_2 = 0, \\
 (a9) & \equiv \Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma - \rho\nu + \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma}) + \Psi_3 = 0.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Équations pour les quantités Ψ_A :

$$\begin{aligned}
 (B) \left\{ \begin{aligned}
 (B1) &\equiv D\Psi_1 - \bar{\delta}\Psi_0 - 4\rho\Psi_1 + 4\alpha\Psi_0 + \bar{\Phi}_0\delta\Phi_0 - \bar{\Phi}_1 D\Phi_0 - 2\beta\Phi_{00} \\
 &\qquad\qquad\qquad + 2\sigma\Phi_{10} = 0, \\
 (B2) &\equiv D\Psi_2 - \bar{\delta}\Psi_1 - 3\rho\Psi_2 + 2\alpha\Psi_1 + \lambda\Psi_0 + \bar{\Phi}_0\Delta\Phi_0 - \bar{\Phi}_1\bar{\delta}\Phi_0 - 2\gamma\Phi_{00} \\
 &\qquad\qquad\qquad + 2\alpha\Phi_{01} + 2\tau\Phi_{10} - 2\rho\Phi_{11} = 0, \\
 (B3) &\equiv D\Psi_3 - \bar{\delta}\Psi_2 - 2\rho\Psi_3 + 2\lambda\Psi_1 + \bar{\Phi}_0\delta\Phi_2 - \bar{\Phi}_1 D\Phi_2 - 2\mu\Phi_{10} \\
 &\qquad\qquad\qquad + 2\beta\Phi_{20} = 0, \\
 (B4) &\equiv D\Psi_4 - \bar{\delta}\Psi_3 - \rho\Psi_4 - 2\alpha\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 + \bar{\Phi}_0\Delta\Phi_2 - \bar{\Phi}_1\bar{\delta}\Phi_2 \\
 &\qquad\qquad\qquad - 2(\nu\Phi_{10} - \lambda\Phi_{11} - \gamma\Phi_{20} + \alpha\Phi_{21}) = 0, \\
 (B5) &\equiv \delta\Psi_1 - \Delta\Psi_0 - (2\beta + 4\tau)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 + (4\gamma - \mu)\Psi_0 + \bar{\Phi}_1\delta\Phi_0 \\
 &\qquad\qquad\qquad - \bar{\Phi}_2 D\Phi_0 + 2(\sigma\Phi_{11} - \beta\Phi_{01}) = 0;
 \end{aligned} \right. \\
 (b) \left\{ \begin{aligned}
 (b1) &\equiv \delta\Psi_2 - \Delta\Psi_1 + 2\sigma\Psi_3 - 3\tau\Psi_2 + 2(\gamma - \mu)\Psi_1 + \nu\Psi_0 + \bar{\Phi}_1\Delta\Phi_0 - \bar{\Phi}_2\bar{\delta}\Phi_0 \\
 &\qquad\qquad\qquad + 2(\alpha\Phi_{02} - \gamma\Phi_{01} + \tau\Phi_{11} - \rho\Phi_{12}) = 0, \\
 (b2) &\equiv \delta\Psi_3 - \Delta\Psi_2 + \sigma\Psi_4 + 2(\beta - \tau)\Psi_3 - 3\mu\Psi_2 + 2\nu\Psi_1 + \bar{\Phi}_1\delta\Phi_2 \\
 &\qquad\qquad\qquad - \bar{\Phi}_2 D\Phi_2 + 2(\beta\Phi_{21} - \mu\Phi_{11}) = 0, \\
 (b3) &\equiv \delta\Psi_4 - \Delta\Psi_3 + (4\beta - \tau)\Psi_4 - (2\gamma + 4\mu)\Psi_3 + 3\nu\Psi_2 + \bar{\Phi}_1\Delta\Phi_2 - \bar{\Phi}_2\bar{\delta}\Phi_2 \\
 &\qquad\qquad\qquad + 2(\lambda\Phi_{12} - \nu\Phi_{11} + \gamma\Phi_{21} - \alpha\Phi_{22}) = 0.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Équations pour les quantités ω , ξ^i , U et X^i :

$$\begin{aligned}
 (C) \left\{ \begin{aligned}
 (C1)^i &\equiv D\xi^i - \rho\xi^i - \sigma\bar{\xi}^i = 0, \\
 (C2) &\equiv D\omega - \rho\omega - \sigma\bar{\omega} + \tau = 0, \\
 (C3)^i &\equiv DX^i - \tau\bar{\xi}^i - \bar{\tau}\xi^i = 0, \\
 (C4) &\equiv DU - \tau\bar{\omega} - \bar{\tau}\omega + \gamma + \bar{\gamma} = 0;
 \end{aligned} \right. \\
 (c) \left\{ \begin{aligned}
 (c1)^i &\equiv \delta\bar{\xi}^i - \bar{\delta}\xi^i + (\beta - \bar{\alpha})\bar{\xi}^i - (\bar{\beta} - \alpha)\xi^i = 0, \\
 (c2) &\equiv \delta\bar{\omega} - \bar{\delta}\omega + (\beta - \bar{\alpha})\bar{\omega} - (\bar{\beta} - \alpha)\omega + \bar{\mu} - \mu = 0, \\
 (c3)^i &\equiv \delta X^i - \Delta\xi^i + (\gamma - \bar{\gamma} - \mu)\xi^i - \bar{\lambda}\bar{\xi}^i = 0, \\
 (c4) &\equiv \delta U - \Delta\omega + (\gamma - \bar{\gamma} - \mu)\omega - \bar{\lambda}\bar{\omega} + \bar{\nu} = 0.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}
 (D) \left\{ \begin{aligned}
 (D1) &\equiv D\Phi_1 - \bar{\delta}\Phi_0 + 2\alpha\Phi_0 - 2\rho\Phi_1 = 0, \\
 (D2) &\equiv D\Phi_2 - \bar{\delta}\Phi_1 + \lambda\Phi_0 - \rho\Phi_2 = 0, \\
 (D3) &\equiv \delta\Phi_1 - \Delta\Phi_0 + (2\gamma - \mu)\Phi_0 - 2\tau\Phi_1 + \sigma\Phi_2 = 0;
 \end{aligned} \right. \\
 (d) \quad (d1) &\equiv \delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1 + \nu\Phi_0 - 2\mu\Phi_1 + (2\beta - \tau)\Phi_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Les équations (A), (B), (C) et (D) sont les équations principales. Rappelons encore que dans le cas des champs d'Einstein-Maxwell que nous considérons, on a

$$(1) \quad \Phi_{mn} = \Phi_m \bar{\Phi}_n \quad (m, n = 0, 1, 2)$$

et que l'équation (3,20) de [3] est vide.

Les opérateurs D, Δ et δ sont définis par les relations

$$(2) \quad \begin{cases} D\varphi = \partial_r \varphi, \\ \Delta\varphi = (\partial_u + U\partial_r + X^i \partial_i) \varphi, \\ \delta\varphi = (\omega\partial_r + \xi^i \partial_i) \varphi, \end{cases}$$

avec $\partial_u = \partial/\partial u$, $\partial_r = \partial/\partial r$ et $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Les quantités U et X^i sont réelles et les ω et ξ^i complexes. Il s'ensuit que D et Δ sont réels tandis que δ est complexe. Un calcul simple montre que les commutateurs de ces opérateurs ont les valeurs suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} (\Delta D - D\Delta)\varphi = \{ (\gamma + \bar{\gamma})D - \tau\bar{\delta} - \bar{\tau}\delta - (C4)\partial_r - (C3)^i \partial_i \} \varphi, \\ (\delta D - D\delta)\varphi = \{ \tau D - \sigma\bar{\delta} - \rho\delta - (C2)\partial_r - (C1)^i \partial_i \} \varphi, \\ (\delta\Delta - \Delta\delta)\varphi = \{ -\bar{\nu}D + \bar{\lambda}\bar{\delta} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta + (c4)\partial_r + (c3)^i \partial_i \} \varphi, \\ (\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\varphi = \{ (\bar{\mu} - \mu)D + (\beta - \bar{\alpha})\bar{\delta} + (\alpha - \bar{\beta})\delta - (c2)\partial_r - (c1)^i \partial_i \} \varphi. \end{cases}$$

Les expressions (C4), (C3), etc. qui entrent dans ces relations, ont été définies dans (C) et (c). Si les équations (C) et (c) ont été déjà satisfaites, les relations (3) se réduisent à

$$(3') \quad \begin{cases} (\Delta D - D\Delta)\varphi = \{ (\gamma + \bar{\gamma})D - \tau\bar{\delta} - \bar{\tau}\delta \} \varphi, \\ (\delta D - D\delta)\varphi = \{ \tau D - \sigma\bar{\delta} - \rho\delta \} \varphi, \\ (\delta\Delta - \Delta\delta)\varphi = \{ -\bar{\nu}D + \bar{\lambda}\bar{\delta} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta \} \varphi, \\ (\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\varphi = \{ (\bar{\mu} - \mu)D + (\beta - \bar{\alpha})\bar{\delta} + (\alpha - \bar{\beta})\delta \} \varphi. \end{cases}$$

L'application des opérateurs D, Δ et δ aux expressions qui figurent comme premiers membres des équations du champ conduit à un nombre d'identités qui permettent d'étudier la question des équations supplémentaires. Nous allons déterminer ces identités d'abord partiellement et dans l'ordre nécessaire pour l'étude des équations supplémentaires. Une discussion systématique de ces identités sera donnée dans la deuxième partie.

La première identité est obtenue par le calcul de la somme $D(a1) - \delta(A1)$

+ $\bar{\delta}(A2)$. Le résultat complet de ce calcul, qui ne présente aucune difficulté, est le suivant :

$$(4) \left\{ \begin{aligned} D(a1) - \delta(A1) + \bar{\delta}(A2) &\equiv 3\rho(a1) - \sigma(\bar{a1}) + (B1) - \rho(A3) - \sigma(\bar{A5}) + 3\sigma(A4) \\ &\quad + 4\alpha(A2) - 2\tau(A1) + \{ (C2)\partial_r + (C1)^i\partial_i \} \rho \\ &\quad - \{ (\bar{C2})\partial_r + (\bar{C1})^i\partial_i \} \sigma - \Phi_0(\bar{D1}). \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant que les équations principales ont été déjà satisfaites. L'identité (4) se réduit alors à

$$(4') \quad (D - 3\rho)(a1) + \sigma(\bar{a1}) = 0.$$

Dans l'étude asymptotique du champ on suppose que toutes les quantités sont développées en séries de puissances de $\frac{1}{r}$. Il s'ensuit que les expressions qui figurent dans les premiers membres des équations du champ sont aussi des séries du même type. On aura donc

$$(5) \quad (a1) = \frac{1}{r}(a1)_1 + \frac{1}{r^2}(a1)_2 + \frac{1}{r^3}(a1)_3 + \dots$$

En introduisant (5) dans (4') et en tenant compte du fait que ρ commence avec le terme $-\frac{1}{r}$ et σ avec un terme de l'ordre $\frac{1}{r^2}$ on déduit d'abord :

$$(a1)_1 = (a1)_2 = 0.$$

La relation (4') ne donne aucune condition pour le coefficient $(a1)_3$. Mais on voit immédiatement que si on choisit $(a1)_3 = 0$ on aura comme conséquence de la relation (4') :

$$(a1)_n = 0 \quad \text{pour tout } n > 3.$$

Ceci signifie que quand les équations principales sont satisfaites, on a l'équivalence

$$(6) \quad (a1)_3 = 0 \leftrightarrow (a1) = 0.$$

Pour arriver à l'identité suivante nous calculons la somme $D(a2) + \bar{\delta}(A5) - \delta(A4)$. Nous n'écrivons pas la forme complète de cette identité, qui est aussi plutôt longue, mais sa forme réduite par l'hypothèse que les équations principales sont déjà satisfaites :

$$(7) \quad (D - 2\rho)(a2) - \alpha(a1) + \beta(\bar{a1}) = 0.$$

Dans le cas où à côté des équations principales nous avons aussi satisfait (6), la relation (7) se réduit à

$$(7') \quad (D - 2\rho)(a2) = 0.$$

Un raisonnement analogue à celui que nous avons appliqué à la relation (4') nous montre maintenant que les équations principales jointes à (6) ont comme conséquence l'équivalence

$$(8) \quad (a2)_2 = 0 \leftrightarrow (a2) = 0.$$

Notons encore qu'une équation de la forme (7') peut être écrite sous une autre forme. En effet en combinant les équations du champ (C1)ⁱ et leurs conjuguées complexes on arrive à la relation

$$D(\xi^2 \bar{\xi}^3 - \bar{\xi}^2 \xi^3) = 2\rho(\xi^2 \bar{\xi}^3 - \bar{\xi}^2 \xi^3).$$

D'autre part, on déduit des équations (6,3) et (6,6) de [3] que

$$\det g^{\mu\nu} = (\xi^2 \bar{\xi}^3 - \bar{\xi}^2 \xi^3)^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} = |\xi^2 \bar{\xi}^3 - \bar{\xi}^2 \xi^3|.$$

On a donc dans les coordonnées du type que nous utilisons ici

$$\rho = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} D\sqrt{-g}$$

et la relation (7') s'écrit

$$(7'') \quad D\{\sqrt{-g}(a2)\} = 0.$$

Dans l'étude asymptotique du champ la quantité $\sqrt{-g}$ commence avec le terme $r^2 \sin \theta$ et la relation (7'') donne de nouveau le résultat (8).

Nous arrivons à l'identité suivante en calculant la somme $D(a3) - \delta(A7) + \bar{\delta}(A8)$. En supposant que les équations principales sont satisfaites, nous trouvons l'identité réduite

$$(9) \quad (D - 2\rho)(a3) - \lambda(a1) + \mu(\bar{a}1) = 0.$$

Cette relation montre que les équations principales jointes à l'équation (6) ont la conséquence :

$$(9') \quad (a3)_2 = 0 \leftrightarrow (a3) = 0.$$

Les deux identités suivantes correspondent aux sommes $D(a7) - \delta(A3) + \Delta(A2)$ et $D(a8) + \bar{\delta}(A3) - \Delta(A1)$. Elles ont les formes réduites

$$(10) \quad \begin{cases} (D - 2\rho)(a7) + \sigma \{ (a8) + (\bar{a}8) \} - \tau(a1) = 0, \\ (D - 2\rho)(a8) + (\sigma + \bar{\sigma})(a7) - \bar{\tau}(a1) = 0. \end{cases}$$

Si nous supposons que l'équation (6) est aussi satisfaite nous arrivons à deux équations qui ne contiennent que les expressions $(a7)$ et $(a8)$. En remarquant alors de nouveau que σ commence avec un terme de l'ordre $\frac{1}{r^2}$ nous déduisons de ces dernières relations que

$$(10') \quad (a7) = 0 = (a8) \leftrightarrow (a7)_2 = 0 = (a8)_2.$$

Pour la discussion des autres équations (a) nous aurons besoin de quelques résultats plus simples concernant les équations (c) . En effet le calcul de $D(c1)^i - \delta(\bar{C}1)^i + \bar{\delta}(C1)^i$ conduit à l'identité réduite suivante :

$$(11) \quad (D - 2\rho)(c1)^i + \bar{\xi}^i(a1) - \xi^i(\bar{a}1) = 0.$$

On déduit de cette relation que quand on a satisfait aussi l'équation (6), il est

$$(11') \quad (c1)^i = 0 \leftrightarrow (c1)_2^i = 0.$$

De la même manière le calcul de $D(c3)^i - \delta(C3)^i + \Delta(C1)^i$ conduit à l'identité réduite suivante :

$$(12) \quad (D - \rho)(c3)^i - \sigma(\bar{c}3)^i + \xi^i(\bar{a}8) - \bar{\xi}^i(a7) - \tau(c1)^i = 0.$$

On déduit de cette relation que les équations principales jointes à (10') et (11') ont la conséquence

$$(12') \quad (c3)^i = 0 \leftrightarrow (c3)_1^i = 0.$$

Finalement le calcul de $D(c2) - \delta(\bar{C}2) + \bar{\delta}(C2)$ conduit à l'identité

$$(13) \quad (D - 2\rho)(c2) + \omega(\bar{a}1) - \bar{\omega}(a1) - (\bar{a}2) + (a2) = 0.$$

De cette relation on déduit que les équations principales jointes à (6) et (8) ont la conséquence

$$(13') \quad (c2) = 0 \leftrightarrow (c2)_2 = 0.$$

Nous revenons maintenant à l'étude des équations (a) et nous calculons

d'abord les sommes $D(a6) - \delta(A6) + \Delta(A5)$ et $D(a9) - \Delta(A4) + \bar{\delta}(A6)$. Pour abrégier les formules que nous aurons à écrire nous admettrons dans la suite qu'avec les équations principales sont aussi satisfaites toutes les équations supplémentaires que nous avons discuté, c'est-à-dire à ce moment les équations (6), (8) et (9') à (13'). Les résultats simplifiés de cette manière sont donnés par les relations

$$(14) \quad \begin{cases} (D - \rho)(a6) + \sigma(a9) - (b1) = 0, \\ (D - \rho)(a9) + \bar{\sigma}(a6) + \bar{\Phi}_0(d1) = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations contiennent à côté des expressions (a6) et (a9) aussi les (b1) et (d1) et par conséquent elles ne suffisent pas seules pour nous renseigner sur les équations correspondantes.

Nous arrivons à une autre identité qui contient le terme $D(b1)$ en calculant la somme $D(b1) - \delta(B2) + \Delta(B1) - \bar{\delta}(B5)$. Dans ce calcul nous devons tenir compte du fait que l'équation (c4) = 0 n'a pas encore été discuté et par conséquent le terme contenant l'expression (c4) dans la troisième des relations (3) doit être retenu. Le résultat final est l'identité réduite

$$(15) \quad (D - 4\rho)(b1) - 2\bar{\Phi}_0(a6) + 4\Psi_0(a9) + 2\sigma\bar{\Phi}_0(d1) - \partial_r\bar{\Phi}_0 \cdot (\bar{d1}) - \partial_r\Psi_0 \cdot (\bar{c4}) = 0.$$

De même nous arrivons à une identité contenant le terme $D(d1)$ en calculant la somme $D(d1) + \Delta(D1) - \bar{\delta}(D3) - \delta(D2)$. La forme réduite de cette identité est

$$(16) \quad (D - 2\rho)(d1) - 2\bar{\Phi}_0(a9) - \partial_r\bar{\Phi}_0 \cdot (c4) = 0.$$

Finalement nous trouvons une identité avec le terme $D(c4)$ en calculant la somme $D(c4) - \delta(C4) + \Delta(C2)$:

$$(17) \quad (D - \rho)(c4) - \sigma(\bar{c4}) + (a6) - (\bar{a9}) = 0.$$

Les cinq équations (14) à (17) contiennent les cinq expressions (a6), (a9), (b1), (d1) et (c4). En tenant compte du fait que Ψ_0 et $\bar{\Phi}_0$ commencent respectivement avec des termes de l'ordre $\frac{1}{r^5}$ et $\frac{1}{r^3}$ et en appliquant à ces équations un raisonnement du type que nous avons déjà utilisé fréquemment nous déduisons que, quand les équations principales ainsi que toutes les équations supplémentaires que nous avons déjà discuté sont satisfaites, nous avons l'équivalence

$$(18) \quad (a6) = (a9) = (b1) = (d1) = (c4) = 0 \\ \leftrightarrow (a6)_1 = (a9)_1 = (b1)_4 = (d1)_2 = (c4)_1 = 0.$$

Il nous reste à étudier 2 équations (a) et 2 équations (b). Nous arrivons à deux identités contenant les expressions (a4) et (a5) en calculant les sommes $D(a4) - \Delta(A7) + \bar{\delta}(A9)$ et $D(a5) - \delta(A9) + \Delta(A8)$. En supposant qu'à côté des équations principales sont aussi satisfaites toutes les équations supplémentaires que nous avons déjà étudié nous arrivons aux relations

$$(19) \quad \begin{cases} (D - \rho)(a4) + \bar{\sigma}(a5) = 0, \\ (D - \rho)(a5) + \sigma(a4) - (b2) = 0. \end{cases}$$

Ces relations contiennent aussi l'expression (b2). Nous avons donc besoin d'une troisième identité contenant le terme $D(b2)$. Cette relation est obtenue par le calcul de $D(b2) - \delta(B3) - \bar{\delta}(b1) + \Delta(B2)$. Dans ce calcul nous utilisons les formules simplifiées (3') car nous avons déjà satisfait l'équation (c4) = 0. Le résultat est :

$$(20) \quad (D - 3\rho)(b2) - \Psi_0(a4) - \Phi_{00}(a5) = 0.$$

En remarquant que σ , Ψ_0 et Φ_{00} commencent respectivement avec des termes de l'ordre $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^5}$ et $\frac{1}{r^6}$ nous déduisons des relations (19) et (20) l'équivalence

$$(21) \quad (a4) = (a5) = (b2) = 0 \leftrightarrow (a4)_1 = (a5)_1 = (b2)_3 = 0.$$

Il ne reste maintenant que la dernière des équations (b). Nous trouvons une identité pour l'expression (b3) en calculant la somme $D(b3) + \Delta(B3) - \bar{\delta}(b2) - \delta(B4)$. En supposant que les équations principales ainsi que toutes les équations supplémentaires déjà étudiées — c'est-à-dire toutes les équations de Newman-Penrose excepté la dernière de (b) — sont satisfaites nous arrivons à la relation particulièrement simple

$$(22') \quad (D - 2\rho)(b3) = 0.$$

Cette relation signifie que

$$(b3) = 0 \leftrightarrow (b3)_2 = 0.$$

Mais nous trouvons une relation encore plus simple en calculant l'expression $\Delta(a3) - \bar{\delta}(a5) - \delta(a4)$. Cette relation est

$$(22) \quad (b3) = 0.$$

Elle montre que la dernière des équations (b) est satisfaite automatiquement quand les autres équations sont satisfaites, c'est-à-dire elle est une équation triviale.

La question se pose si l'équation (22) est la seule triviale ou s'il y en a d'autres. Pour trouver la réponse à cette question, on doit étudier complètement la totalité des identités qui lient les premiers membres des équations du champ.

2. ÉTUDE SYSTÉMATIQUE DES IDENTITÉS

Les identités que nous avons établies et utilisées dans la première partie sont des composantes de 4 identités générales, chacune correspondant respectivement au groupe d'équations (A) et (a), (B) et (b), (C) et (c), (D) et (d). Nous allons déduire les 3 premières de ces identités en supposant qu'il n'y a que le champ gravitationnel : le cas du champ combiné d'Einstein-Maxwell ne présente pas des difficultés particulières, mais les calculs sont encore plus longs que dans le cas du champ gravitationnel pur. C'est seulement la quatrième identité correspondante au groupe d'équations (D) et (d), que nous allons déterminer pour le champ d'Einstein-Maxwell.

Rappelons que Newman et Penrose ont obtenu leurs équations en étudiant les champs gravitationnel et électromagnétique dans le cadre du calcul spinoriel avec le formalisme dyadique. C'est en effet dans ce cadre qu'on obtient la forme condensée de ces équations. C'est par conséquent dans ce même cadre que nous allons chercher à déterminer les identités correspondantes.

La forme condensée des équations (A) et (a) est l'équation (3,14) de [3]. Nous la récrivons ici sous la forme :

$$(23) \quad Y_{feiacdbi} = 0;$$

$$(23') \quad \left\{ \begin{aligned} Y_{feiacdbi} &\equiv \partial_{fe} \Gamma_{acdbi} - \partial_{db} \Gamma_{acfe} + \Gamma_{pafe'} \Gamma^p_{cdbi} - \Gamma_{padb} \Gamma^p_{cfe} \\ &+ \Gamma_{acpe} \Gamma^p_{fdbi} - \Gamma_{acpb} \Gamma^p_{dfe} + \Gamma_{acfs'} \bar{\Gamma}^{s'}_{eibrd} - \Gamma_{acds'} \bar{\Gamma}^{s'}_{bref} - \Psi_{acdf} \epsilon_{eibr} \end{aligned} \right.$$

Les équations (B) et (b) sont les composantes de (3,19) de [3] que nous allons récrire sous la forme

$$(24) \quad X_{abcd'} = 0;$$

$$(24') \quad X_{abcd'} \equiv \partial^p_{d'} \Psi_{abc p} - \Gamma^p_{q d'} \Psi_{abc p} - 3\Psi_{pq(ab} \Gamma_c)^{pq}_{d'}.$$

Nous avons mis dans (23') et (24')

$$\Phi_{acb'e'} = 0 = \Lambda$$

pour nous limiter à l'étude du champ gravitationnel pur.

Les équations (C) et (c) se déduisent de la relation (3.13) de [3] quand on y met successivement $\varphi = x^\Lambda$; $\Lambda = 1, 2, 3$; c'est-à-dire $x^\Lambda = (r, x^i)$, $i = 2, 3$. (Rappelons que l'équation correspondant à $\varphi = x^0 \equiv u$ est vide.) En posant

$$(25) \quad Z_{ab'cd'} = \partial_{ab'}\partial_{cd'} - \partial_{cd'}\partial_{ab'} + \Gamma_{pcb'}\partial^p_{d'} - \Gamma_{pcd'}\partial^p_{b'} \\ + \bar{\Gamma}_{s'd'b'a}\partial_c^{s'} - \bar{\Gamma}_{s'b'd'c}\partial_a^{s'}$$

nous écrivons les équations (C) et (c) sous la forme plus générale

$$(26) \quad Z_{ab'cd'} \cdot x^\Lambda \equiv Z_{ab'cd'} x^\Lambda = 0.$$

Les équations (D) et (d) sont les équations de Maxwell. La forme condensée de ces équations est

$$(27) \quad \Omega_{ab'} \equiv \partial_{pb'}\Phi_a^p + \Phi_{ap}\Gamma_{q b'}^p + \Phi^{ap}\Gamma_{aqpb'} = 0.$$

Rappelons que les quantités $\Phi_{pq} = \Phi_{qp}$ apparaissant dans (27) sont liées aux quantités Φ_m ($m = 0, 1, 2$) utilisées précédemment par les relations

$$\Phi_{00} = \Phi_0, \quad \Phi_{01} = \Phi_1, \quad \Phi_{11} = \Phi_2.$$

La relation (3.13) de [3] est la forme condensée des relations (3'). Nous avons remarqué dans la première partie que ces relations sont valables identiquement pour une fonction scalaire $\varphi(x^\mu)$ quelconque seulement sous l'hypothèse que les équations du champ (C) et (c) sont satisfaites. Dans la recherche des identités nous devons nous abstenir d'une telle hypothèse. Nous aurons donc à utiliser les vraies identités (3) au lieu de (3'). On voit sans difficulté que la forme condensée de (3) est la suivante :

$$(28) \quad Z_{ab'cd'}\varphi = Z_{ab'cd'} \cdot \partial_\lambda \varphi.$$

Cette relation joue un rôle important dans les calculs suivants. Il est à remarquer que les relations (25), (26) et (28) ne sont pas modifiées par la présence d'un champ électromagnétique.

La contraction de (28) avec $\varepsilon^{d'b'}$ conduit à la relation :

$$(29') \quad (\partial_a^{d'}\partial_{cd'} + \partial_c^{d'}\partial_{ad'})\varphi = 2 \{ \Gamma_{p(ac)d'}\partial^{pd'} + \bar{\Gamma}_{s'd'(c)d_a}^{s'} \} \varphi + Z_a^{d'} \cdot \partial_\lambda \varphi.$$

D'autre part on a la relation suivante

$$(29'') \quad (\partial_a^{d'}\partial_{cd'} - \partial_c^{d'}\partial_{ad'})\varphi = -\varepsilon_{ac}\partial_{sd'}\partial^{sd'}\varphi,$$

qui est une conséquence immédiate du fait que son premier membre est antisymétrique par rapport aux indices a et c . En ajoutant (29'') à (29') on trouve :

$$(29) \quad \partial_a^{d'}\partial_{cd'}\varphi = \left\{ \Gamma_{p(ac)d'}\partial^{pd'} + \bar{\Gamma}_{s'd'(c)d_a}^{s'} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ac}\partial_{sd'}\partial^{sd'} + \frac{1}{2}Z_a^{d'} \cdot \partial_\lambda \right\} \varphi.$$

On peut multiplier (28) aussi par ε^{ca} . Le résultat est :

$$(\partial^c_b \partial_{cd'} + \partial^c_d \partial_{cb'})\varphi = 2 \{ \Gamma_p^c c_{(d'} \partial^p_{b')} + \bar{\Gamma}_{s'(b'd')c} \partial^{cs'} \} \varphi + Z^c_{b'cd'} \lambda \cdot \partial_\lambda \varphi.$$

D'autre part on a une relation du type (29'') :

$$(\partial^c_b \partial_{cd'} - \partial^c_d \partial_{cb'})\varphi = -\varepsilon_{b'd'} \partial_{cs'} \partial^{cs'} \varphi.$$

En combinant les deux dernières relations on trouve

$$(30) \quad \partial^c_b \partial_{cd'} \varphi = \left\{ \Gamma_p^c c_{(b'} \partial^p_{d')} + \bar{\Gamma}_{s'(b'd')c} \partial^{cs'} - \frac{1}{2} \varepsilon_{b'd'} \partial_{cs'} \partial^{cs'} + \frac{1}{2} Z^c_{b'cd'} \lambda \cdot \partial_\lambda \right\} \varphi.$$

Remarquons que les expressions $Z_a^{d'} \lambda$ et $Z^c_{b'cd'} \lambda$, qui entrent dans (29) et (30), sont symétriques par rapport aux indices a, c ou b', d' .

Deux autres relations qui nous seront utiles découlent de la définition (23'). En contractant (23') avec $\varepsilon^{e'b'}$ on trouve :

$$(31) \quad Y_{fe'acd}{}^{e'} = 2 \{ \partial_{(f|e'} \Gamma_{ac|d)}{}^{e'} + \Gamma_{ap(d|e'} \Gamma_{c|}{}^p_{f)}{}^{e'} + \Gamma_{acpe'} \Gamma^p_{(df)}{}^{e'} + \Gamma_{ac(d|e'} \bar{\Gamma}{}^{e'}_{s'|}{}^s_{f)} - \Psi_{acdf} \}.$$

Il est à remarquer que cette relation est symétrique par rapport à chacun des paires d'indices a, c et d, f . En combinant (31) avec la relation

$$2\partial_{[f|e'} \Gamma_{ac|d]}{}^{e'} = \varepsilon_{fd} \partial_{se'} \Gamma_{ac}{}^{se'},$$

qui est une conséquence de l'antisymétrie par rapport à f et d , on a finalement

$$(32) \quad 2\partial_{fe'} \Gamma_{acd}{}^{e'} = Y_{fe'acd}{}^{e'} + \varepsilon_{fd} \partial_{se'} \Gamma_{ac}{}^{se'} + 2\Psi_{acdf} - \Sigma \Gamma \dots \Gamma \dots,$$

la dernière somme contenant les termes quadratiques en $\Gamma \dots$ figurant dans le deuxième membre de (31).

On peut aussi multiplier (23') par ε^{fd} . On trouve alors l'équation suivante, qui est symétrique par rapport à a, c ainsi que e', b' :

$$(33) \quad Y_{fe'ac}{}^f{}_{b'} = 2 \{ \partial_{f(e'} \Gamma_{|ac|}{}^f{}_{b')} - \Gamma_{ap}{}^f{}_{(b'} \Gamma^p_{|cf|e')} - \Gamma_{acp(b'} \Gamma^{pf}_{|f|e')} - \Gamma_{ac}{}^f{}_{s'} \bar{\Gamma}{}^{s'}_{(b'e')f} \}.$$

On a aussi

$$2\partial_{f[e'} \Gamma_{|ac|}{}^f{}_{b']} = \varepsilon_{e'b'} \partial_{fs'} \Gamma_{ac}{}^{fs'}.$$

En combinant ces deux relations on trouve :

$$(34) \quad 2\partial_{fe'} \Gamma_{ac}{}^f{}_{b'} = Y_{fe'ac}{}^f{}_{b'} + \varepsilon_{e'b'} \partial_{fs'} \Gamma_{ac}{}^{fs'} - \Sigma \Gamma \dots \Gamma \dots,$$

la somme contenant les termes quadratiques en $\Gamma \dots$ figurant dans le deuxième membre de (33).

Nous aurons encore besoin des relations conjuguées-complexes à (32) et (34) :

$$(35) \quad \begin{cases} 2\partial_{ef}\bar{\Gamma}_{a'c'd'}{}^e = \bar{Y}_{f'ea'c'd'}{}^e + \varepsilon_{f'd'}\partial_{es}\bar{\Gamma}_{a'c'}{}^{s'e} + 2\bar{\Psi}_{a'c'd'f'} - \Sigma\bar{\Gamma}\dots\bar{\Gamma}\dots; \\ 2\partial_{ef}\bar{\Gamma}_{a'c'}{}^{f'b} = \bar{Y}_{f'ea'c'}{}^{f'b} + \varepsilon_{eb}\partial_{sf'}\bar{\Gamma}_{a'c'}{}^{f's} - \Sigma\bar{\Gamma}\dots\bar{\Gamma}\dots \end{cases}$$

On arrivera à la première identité en appliquant l'opérateur $\partial^{ad'}$ à l'expression $X_{abcd'}$ définie par (24'). On trouve d'abord :

$$\partial^{ad'}X_{abcd'} = \partial^{ad'}\partial^p{}_d\Psi_{abc p} + \Sigma\{\Gamma\dots\partial^{ad'}\Psi\dots\} + \Sigma\{\Psi\dots\partial^{ad'}\Gamma\dots\},$$

chacune des sommes que nous n'avons pas écrite en détail contenant 4 termes. Le premier terme du deuxième membre se laisse transformer à l'aide de (29). Les autres termes se transforment à l'aide de (24') et (32) et après quelques calculs intermédiaires on trouve qu'il ne reste que des termes qui ont comme facteur une des expressions (23'), (24') ou (26). Le résultat final est l'identité suivante :

$$(36) \quad \begin{aligned} \partial^{ad'}X_{abcd'} &= (\Gamma^a{}_p{}^{pd'} - \bar{\Gamma}^{d's'}{}_s{}^a)X_{abcd'} + 2\Gamma_{(b}{}^{pqd}X_{c)pq d'} \\ &+ \Psi^{ap}{}_{bc}Y_{pe'ad}{}^{de'} - \Psi^{adf}{}_{(b}Y_{|fe'a|c)d}{}^{e'} + \frac{1}{2}Z^{ad'p}{}_{d'}{}^\lambda\partial_\lambda\Psi_{abc p}. \end{aligned}$$

On voit immédiatement que cette identité est symétrique en b et c et par conséquent elle a 3 composantes. Ces 3 identités ont été déduites sous forme réduite — mais avec champ électromagnétique — et utilisées dans la première partie de ce travail. Il s'agit des relations (15), (20) et (22').

La deuxième identité se déduit par l'application de l'opérateur $\partial^{fb'}$ à l'expression $Y_{fe'acdb'}$ définie par (23'). On trouve d'abord :

$$\partial^{fb'}Y_{fe'acdb'} = \partial^{fb'}(\partial_{fe'}\Gamma_{acdb'} - \partial_{ab'}\Gamma_{acfe'}) + \Sigma\{\Gamma\dots\partial^{fb'}\Gamma\dots\} + \partial^f{}_e\Psi_{acdf},$$

la somme que nous n'avons pas explicité contenant 12 termes. Les deux premiers termes du deuxième membre se transforment à l'aide de (30) et (29). Les termes du type $\Gamma\dots\partial^{fb'}\Gamma\dots$ sont transformés à l'aide des relations (32), (34) et (35) et le dernier terme est remplacé par ce que donne la relation (24'). Après un calcul intermédiaire assez long on trouve de nouveau qu'il ne reste que des termes qui ont comme facteur une des expressions (23'), (24') ou (26). Le résultat final est la deuxième identité :

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\partial^{fb'}Y_{fe'acdb'} &= 2X_{acde'} + \Gamma^{pq}{}_{qe'}Y_{ps'acd}{}^{s'} - 2\Gamma_{(a}{}^{pf}{}_{|e'}Y_{fs'|c)p d}{}^{s'} \\ &\quad - \Gamma_d{}^{pf}{}_{e'}Y_{fs'ac p}{}^s \\ &+ \Gamma_{ac}{}^p{}_{e'}Y_{ds'pf}{}^{fs'} + \Gamma_{ac}{}^{pb'}Y_{qb'pd}{}^q{}_{e'} + 2\Gamma_{(a|d}{}^{b'}Y_{qb'|p|c)}{}^q{}_{e'} \\ &+ \bar{\Gamma}^{s'}{}_{b'}{}_{d'}Y_{qs'ac}{}^q{}_{e'} + \bar{\Gamma}^{s'}{}_{e'}{}_{d'}Y_{qb'ac}{}^q{}_{s'} - \Gamma_{acd}{}^{s'}\bar{Y}_{e'qs'b'}{}^{b'q} \\ &- \Gamma_{ac}{}^{fq'}\bar{Y}_{s'fq'e'}{}^{s'}{}_d - Z^q{}_{s'qe'}{}^\lambda\partial_\lambda\Gamma_{acd}{}^{s'} + Z^s{}_{ds'}{}^\lambda\partial_\lambda\Gamma_{ac}{}^q{}_{e'}. \end{aligned} \right.$$

Cette identité est symétrique par rapport aux indices a, c et par conséquent elle a $3 \times 2 \times 2 = 12$ composantes. On voit sans difficulté que 9 de ces identités contiennent un terme avec l'opérateur D , appliqué successivement au premier membre de chacune des équations (a). Dans la première partie, nous avons déduit l'une de ces identités en tout détail, et même avec les termes provenant du champ électromagnétique : c'est l'identité (4). Les autres 8 identités de ce type ont été déduites sous forme réduite. Nous avons aussi utilisé l'une de 3 composantes de (37) qui ne contiennent pas l'opérateur D : c'est l'identité fortement réduite (22).

L'application de l'opérateur $\partial^{ad'}$ à l'expression $Z_{ab'cd'}^\lambda$ définie par (26) conduit à la troisième identité. Les calculs sont analogues à ceux qui ont été nécessaires pour la dérivation de (36) et (37). Le résultat final est le suivant :

$$(38) \left\{ \begin{aligned} 2\partial^{ad'}Z_{ab'cd'}^\lambda &= \Gamma_{pcb'}Z^{ad'p}_{d'}{}^\lambda - \Gamma^{pq}_{qb'}Z_p{}^{d'}{}_{cd'}{}^\lambda - \bar{\Gamma}_{s'b'd'}Z^{qd'}{}_{c'}{}^{s'\lambda} \\ &+ \bar{\Gamma}^{s'd'}{}_{d'}Z^q{}_{s'qb'}{}^\lambda + \sigma^\lambda{}_{b'} \cdot Y_{ce'pa}{}^{ae'} + \sigma^\lambda{}_{pd'} \cdot Y_{qd'pc}{}^q{}_{b'} - \sigma^\lambda{}_{c'} \cdot \bar{Y}_{b'qs'd'}{}^{d'q} \\ &- \sigma^\lambda{}_{as'} \cdot \bar{Y}_{d'as'b'}{}^{d'c} - Z^q{}_{s'qb'}{}^\mu \cdot \sigma^\lambda{}_{c'}{}^{s'}{}_{;\mu} + Z_q{}^{s'}{}_{cs'}{}^\mu \cdot \sigma^\lambda{}_{b'}{}^q{}_{;\mu} \end{aligned} \right.$$

L'expression figurant dans (38) a les deux indices spinoriels libres b, c' et l'indice tensoriel λ . Il s'ensuit que l'identité (38) a $2 \times 2 \times 4 = 16$ composantes. Les 9 de 12 composantes correspondant à $\lambda = 0$ contiennent un terme avec l'opérateur D : c'est l'opérateur D appliqué aux premiers membres des 6 équations (c) ainsi que des 3 équations qui sont les conjuguées complexes de $(c1)^i = 0$ et $(c2) = 0$. Ces identités ont été considérées et utilisées dans la première partie; elles ont donné les relations réduites (11), (12), (13) et (17). Les autres identités (38) n'ont pas été utilisées. L'utilisation de ces dernières identités sera indispensable dans la discussion de la question s'il y a d'autres équations triviales à côté de (22) ou non.

Tant qu'il n'y a pas un champ électromagnétique les équations (D) et (d) sont vides et la question de trouver l'identité correspondante ne se pose pas.

Quand il y a aussi un champ électromagnétique on doit d'abord introduire dans les définitions (23') et (24') les termes en $\Phi_{acb'd'}$ présents dans les équations (3,14) et (3,19) de [3]. On a pour un champ électromagnétique

$$\Phi_{abc'd'} = \Phi_{ab}\bar{\Phi}_{c'd'} \quad , \quad \Lambda = 0.$$

Avec les définitions (23') et (24') complétées de cette manière on doit reprendre les calculs qui ont conduit aux identités (36) et (37) pour déterminer la forme généralisée de ces identités. Ce calcul plutôt long n'a pas été fait. Mais on peut voir sans difficulté que la forme de la troisième iden-

tité (38) n'est pas modifiée par la présence d'un champ électromagnétique.

L'identité correspondant aux équations de Maxwell (D) et (d) est aussi facile à déduire et a la forme simple

$$(39) \quad \partial^{ab'} \Omega_{ab'} = (\Gamma_a^{q ab'} - \bar{\Gamma}^{b' s' a}) \Omega_{qb'} - \Phi^{ap} Y_{ae' pq}{}^{qe'} - \frac{1}{2} Z_a{}^{s' ps'}{}^\lambda \cdot \partial_\lambda \Phi^{ap}.$$

Cette identité n'a qu'une seule composante. Elle a été déterminée sous une forme réduite et utilisée dans la première partie : c'est la relation (16).

RÉFÉRENCES

- [1] H. BONDI, M. G. v. d. BURG et A. W. K. METZNER, *Proc. Roy. Soc. (London)*, t. **269 A**, 1962, p. 21.
 [2] R. K. SACHS, *Proc. Roy. Soc. (London)*, t. **270 A**, 1962, p. 103.
 [3] E. NEWMAN et R. PENROSE, *Journ. Math. Physics*, t. **3**, 1962, p. 566.

(Manuscrit reçu le 6 février 1970).