

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARIO CASTAGNINO

Champs de spin entier dans l'espace-temps de De Sitter

Annales de l'I. H. P., section A, tome 13, n° 3 (1970), p. 263-270

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__13_3_263_0

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Champs de spin entier dans l'espace-temps de De Sitter

par

Mario CASTAGNINO (*)

Démonstration de la coïncidence des trois théories sur ce sujet (celles de *Dirac* [3], Riemannienne [8], et issue de la théorie des groupes [4], [9], [1]). Développement d'une théorie unifiée basée sur l'équation unique $\Delta = 0$, et dans un système quelconque de coordonnées.

1. INTRODUCTION

Diverses théories ont été proposées pour les champs classiques libres dans l'espace-temps de *De Sitter* V_4 . On peut les classer selon les méthodes pour trouver les fonctions d'onde :

a) Les fonctions d'onde se prolongent hors l'espace-temps physique V_4 , dans l'espace pseudo-euclidien E_5 , comme fonctions homogènes de degré n . Dans E_5 elles satisfont la généralisation (de E_4 à E_5) des équations ordinaires [3].

b) Les équations qui satisfont les fonctions d'onde sont la généralisation des équations ordinaires (de E_4 à V_4) par la substitution du tenseur métrique plan η_{ij} par le tenseur métrique de V_4 , g_{ij} [8].

c) Les fonctions d'onde sont simplement les autofonctions de l'opérateur de *Casimir* de second ordre, I_1 , de $SO(4, 1)$ ([4], [9], [1]).

Dans ce travail on démontre que toutes ces tentatives sont seulement des aspects d'une théorie unifiée et, par conséquent, les fonctions d'onde sont les mêmes (L'équivalence des théories du type *a* et *c*, pour le cas

(*) Departamento de Física. Facultad de Ciencias. Universidad de Rosario. Av. Pellegrini, 250. Rosario. Argentina.

spin $\frac{1}{2}$, a déjà été démontrée [5]. Au contraire, l'article [1] nie l'équivalence

des théories du type *b* et *c*, ce qui est faux pour les champs bosoniques).

L'utilisation de la méthode de *Dirac* (type *a*) permet de développer la théorie dans un repère quelconque, fait qui simplifie les calculs. On trouve ainsi que la seule équation $\Delta = 0$ (dans E_5) implique l'équation d'onde, et l'annulation des traces et des divergences des tenseurs. On peut donc baser la théorie sur l'hypothèse que les champs de tenseurs soient « physiques », symétriques et qu'ils satisfassent $\Delta = 0$. Les équations obtenues sont satisfaites, en particulier, pour le champ métrique $\overset{\circ}{g}_{ij}$.

2. SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Considérons un espace pseudo-euclidien E_5 . Les coordonnées cartésiennes de E_5 seront indiquées $\{x^{\alpha'}\}$ ($\alpha', \beta', \dots = 0', \dots, 4'$). Le tenseur métrique $\eta_{\alpha'\beta'}$ est le tenseur diagonal, avec diagonal principal (1, -1, -1, -1, -1). Les points qui satisfassent l'équation :

$$(1) \quad \eta_{\alpha'\beta'} \overset{\circ}{x}^{\alpha'} \overset{\circ}{x}^{\beta'} = -R^2,$$

forment l'espace-temps de *De Sitter* V_4 .

Dans les voisinages ouverts de V_4 on introduit des systèmes de coordonnées quelconques $\{x^i\}$ ($i, j, \dots = 0, \dots, 3$). Nous appellerons $\{x^{\alpha'}\}$ ($\alpha, \beta, \dots = 0, \dots, 4$) système de coordonnées « polaires » dans E_5 ; tel que :

$$(2) \quad x^{\alpha'} = x^4 \overset{\circ}{x}^{\alpha'}(x^0, x^1, x^2, x^3).$$

$\xi^{\beta'} = (x^4 R)^{-1} x^{\beta'}$ est le vecteur radial unitaire, et $\delta_{\alpha'}^{\beta'} + \xi_{\alpha'} \xi^{\beta'}$ le projecteur \mathcal{P}_{τ} sur l'espace tangente τ_x à V_4 . On appelle *T* tenseur « physique » si $\mathcal{P}_{\tau} T = T$, c'est-à-dire toutes les coordonnées de *T* avec un indice $\alpha = 4$ sont zéro. Logiquement tous les champs à étudier sont « physiques ». Nous désignerons avec un super indice $\overset{\circ}$ tous les objets de V_4 : $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{V}_i$, $\overset{\circ}{\Delta}$, etc. Nous avons ainsi, pour le tenseur métrique de E_5 :

$$(3) \quad \begin{aligned} g_{ij} &= (x^4)^2 \overset{\circ}{g}_{ij} & ; & \quad g_{i4} = 0 ; \\ g_{4i} &= 0 & ; & \quad g_{44} = -R^2 ; \end{aligned}$$

et pour les symboles de *Christoffel* dans les coordonnées « polaires » de E_5

$$(4) \quad \begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k & ; & \quad \Gamma_{4j}^k = \Gamma_{j4}^k = \frac{1}{x^4} \delta_j^k ; \\ \Gamma_{ij}^4 &= \frac{x^4}{R^2} \overset{\circ}{g}_{ij} & ; & \quad \Gamma_{4j}^4 = \Gamma_{j4}^4 = \Gamma_{44}^k = \Gamma_{44}^4 = 0. \end{aligned}$$

3. REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SO(4, 1) ET DU SOUS-GROUPE SO(3, 1)

Soit $\{e_{\alpha'}\}$ une base de E_5 , $T^{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x)$ sont les coordonnées d'un champ tensoriel dans la base $\{e_{\alpha'_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha'_s}\}$.

A toute application $u: v^{\alpha'} \rightarrow \mu^{\alpha'}_{\beta'} \cdot v^{\beta'}$ on associe les applications :

$$\mu_A(T^{\alpha_1 \dots \alpha_s}) = \delta_{\beta'_1 \dots}^{\alpha'_1} \delta_{\beta'_A - 1}^{\alpha'_A - 1} \mu_{\beta'_A}^{\alpha'_A} \delta_{\beta'_A + 1}^{\alpha'_A + 1} \delta_{\beta'_s}^{\alpha'_s} T^{\beta'_1 \dots \beta'_s}$$

et à l'application $\mu: v^{\alpha' \beta'} \rightarrow \mu^{\alpha' \beta'}_{\gamma' \delta'} \cdot v^{\gamma' \delta'}$, les applications

$$\mu_{AB}(T^{\alpha_1 \dots \alpha_s}) = \delta_{\beta'_1 \dots}^{\alpha'_1} \delta_{\beta'_A - 1}^{\alpha'_A - 1} \delta_{\beta'_A + 1}^{\alpha'_A + 1} \delta_{\beta'_B - 1}^{\alpha'_B - 1} \delta_{\beta'_B + 1}^{\alpha'_B + 1} \delta_{\beta'_s}^{\alpha'_s} \mu_{\beta'_A \beta'_B}^{\alpha'_A \alpha'_B} T^{\beta'_1 \dots \beta'_s},$$

(où A, B, ... = 1, ..., s).

Les champs tensoriels engendrent une représentation du groupe SO(4, 1) de la façon suivante :

$$(5) \quad T^{\lambda_1 \dots \lambda_s}(x) \rightarrow \dot{T}^{\lambda_1 \dots \lambda_s}(x) = A_{\mu_1}^{\lambda_1}(g^{-1}) \dots A_{\mu_s}^{\lambda_s}(g^{-1}) T^{\mu_1 \dots \mu_s}[g(x)],$$

où $g \in SO(4, 1)$ et $A_{\beta'_A}^{\alpha'_A}$ sont les matrices de la représentation naturelle du groupe. La transformation $T \rightarrow \dot{T}$ correspond à placer, dans le point x , le tenseur qui se trouvait dans le point $g(x)$. $T[g(x)]$ serait ce tenseur transporté parallèlement de $g(x)$ à x ; les matrices A placent T dans la position définitive, au moyen de la rotation correspondante. Les générateurs de la représentation $T \rightarrow \dot{T}$ sont :

$$(6) \quad X_{\alpha' \beta'} = L_{\alpha' \beta'} - \sum_{A=1}^s S_{A \alpha' \beta'}$$

où $L_{\alpha' \beta'} = -x_{\alpha'} \partial_{\beta'} + x_{\beta'} \partial_{\alpha'}$,

et $(S_{A \alpha' \beta'})_{\mu'_A}^{\lambda'_A} = \delta_{\alpha'}^{\lambda'_A} \eta_{\beta' \mu'_A} - \delta_{\beta'}^{\lambda'_A} \eta_{\alpha' \mu'_A}$.

On trouve immédiatement que les $X_{\alpha' \beta'}$ commutent avec l'opérateur d'Euler $x^{\alpha'} \partial_{\alpha'}$ (et aussi avec l'opérateur $R^2 I_1^0 = \frac{1}{2} \eta^{\alpha' \gamma'} \eta^{\beta' \delta'} L_{\alpha' \beta'} L_{\gamma' \delta'}$). Donc, les représentations irréductibles doivent être engendrées par des fonctions homogènes des $x^{\alpha'}$, du degré n .

Envisageons maintenant la relation de cette façon de définir les représentations avec la méthode employée dans les travaux [9] et [1]. Pour

simplifier nous nous bornerons au champ vectoriel. Dans les coordonnées $\{x^\alpha\}$ on trouve

$$(7) \quad (X_{\alpha\beta})^4_i = 0,$$

donc les vecteurs « physiques » sont transformés en vecteurs « physiques ». Ainsi nous pouvons écarter l'indice 4 dans les transformations. Pour les indices « physiques » on a :

$$(8) \quad L_{ij} = 0 \quad ; \quad L_{4i} = R^2(x^4)^2 \overset{\circ}{V}_i \quad ; \quad (S_{ij})^h_k \neq 0 \quad ; \quad (S_{4i})^h_k = 0 ;$$

où les $(S_{ij})^h_k$ satisfont évidemment les règles de commutation de $SO(3, 1)$, puisque les $(S_{ij})^\alpha_\beta$ satisfont celles de $SO(4, 1)$. Ainsi on peut décomposer la rotation infinitésimale $\varepsilon^{\alpha\beta}$ en deux parties :

$$(9) \quad \varepsilon^{\alpha\beta}_R = \mathcal{P}_t \varepsilon^{\alpha\beta} \quad ; \quad \varepsilon^{\alpha\beta}_D = \varepsilon^{\alpha\beta} - \mathcal{P}_t \varepsilon^{\alpha\beta}.$$

Donc, on a :

$$(10) \quad (X_{\alpha\beta})^h_k \varepsilon^{\alpha\beta}_R = - (S_{\alpha\beta})^h_k \varepsilon^{\alpha\beta} ;$$

c'est une rotation avec x fixe, et :

$$(11) \quad (X_{\alpha\beta})^h_k \varepsilon^{\alpha\beta}_D = 2R^2(x^4)^2 \delta^h_k \varepsilon^{4i} \overset{\circ}{V}_i ;$$

c'est un déplacement parallèle. ε^{ij}_R sont les paramètres du groupe des rotations $SO(3, 1)$, et ε^{4i} correspond à un déplacement coordonné (On trouve donc que $V_4 = SO(4, 1)/SO(3, 1)$).

Si $\varepsilon^{\alpha\beta}_{D(x,x')}$ origine un déplacement infinitésimal $x \rightarrow x'$, et x_0 est un point infiniment approché à x et x' , on peut écrire :

$$(12) \quad \varepsilon^{\alpha\beta}_R = \varepsilon^{\alpha\beta} - \varepsilon^{\alpha\beta}_{D(x,x')} = \varepsilon^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta}_{D(x_0,x)} - \varepsilon^{\alpha\beta}_{D(x_0,x')}.$$

Par (10), (11) et (12) il vient :

$$(13) \quad \dot{T}^i(x) = [\delta^i_j - (S_{kh})^i_j \varepsilon^{kh} + \varepsilon^{kh}_{D(x_0,x)} - \varepsilon^{kh}_{D(x_0,x')}] [1 + 2(x^4)^2 R^2 \overset{\circ}{V}_i(\varepsilon^{4l})] T^j(x),$$

qui correspond dans le cas de rotation finie à :

$$(14) \quad \dot{T}^i(x) = \bar{A}^1_j(\bar{g}^1_{x_0 x'} \cdot g \cdot g_{x_0 x}) T^j[g(x)],$$

où $g_{x_0 x}$ sont déplacements parallèles de x_0 à x . Il est clair maintenant que

l'on peut considérer la représentation vectorielle dans V_4 comme le produit d'une matrice de la représentation naturelle du sous-groupe $SO(3, 1)$, rotation avec x_0 fixe, et un déplacement parallèle, élément de la représentation de $SO(4, 1)$ pour les scalaires, (« boost »), à l'usage des travaux [9] et [1].

4. OPÉRATEURS DE CASIMIR

Pour la représentation $T \rightarrow T'$ sur un champ tensoriel homogène, du degré n , l'opérateur de Casimir du second degré est :

$$(15) \quad R^2 I_1 = \frac{1}{2} \eta^{\alpha' \gamma'} \eta^{\beta' \delta'} X_{\alpha' \beta'} X_{\gamma' \delta'} = R^2 \Delta - n(n + 3) - 2s$$

$$+ 2 \sum_{A=1}^s (x^{\lambda_A} \partial_{\mu'_A})_A + \sum_{A \neq B} (g^{\lambda'_A \lambda'_B} g_{\mu'_A \mu'_B} - \delta_{\mu'_B}^{\lambda'_A} \delta_{\mu'_A}^{\lambda'_B})_{AB},$$

où $\Delta = -\eta^{\alpha' \beta'} \partial_{\alpha'} \partial_{\beta'}$. Si l'on veut que la représentation soit irréductible, dans le sous-groupe $SO(3, 1)$, on doit prendre T totalement symétrique et avec toutes ses traces nulles ; on peut parler donc d'un *spin pur* s . Si on veut, en plus, que la représentation soit irréductible, dans $SO(4, 1)$, I_1 doit être un multiple de la matrice unité, et puisque $R^2 I_0 = R^2 \Delta - n(n + 3)$ commute avec les $X_{\alpha' \beta'}$, on a

$$\sum_{A=1}^s (x^{\lambda_A} \partial_{\mu'_A})_A T^{\mu'_1 \dots \mu'_s} = N T^{\lambda_1 \dots \lambda_s}$$

qui donne, par contraction, avec $x_{\lambda_A} \partial_{\mu'_A} T^{\mu'_1 \dots \mu'_s} = 0$. Il en résulte :

$$(16) \quad R^2 I_1 = R^2 \Delta - n(n + 3) - s(s + 1).$$

Avec le même ensemble d'hypothèses l'opérateur de Casimir de quatrième degré vient :

$$(17) \quad R^2 I_2 = -\eta^{\alpha' \beta'} V_{\alpha'} V_{\beta'} = s(s + 1)[R^2 \Delta - n(n + 3) - 2],$$

où

$$V^{\alpha'} = \frac{1}{8} \varepsilon^{\alpha' \beta' \gamma' \delta' \varepsilon'} X_{\beta' \gamma'} X_{\delta' \varepsilon'}.$$

Dans les équations (15) et (17) on a fait $x^4 = 1$.

5. DÉRIVÉS ET LAPLACIENS

Le dérivé covariant dans V_4 est évidemment :

$$(18) \quad \mathring{\nabla}_\alpha T = \mathcal{P}_\tau \nabla_\alpha T.$$

Si on considère les champs « physiques » homogènes, du degré n , la formule inverse est :

$$(19) \quad \nabla_\alpha T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\gamma_1 \dots \gamma_q} = \mathring{\nabla}_\alpha T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\gamma_1 \dots \gamma_q} + \frac{1}{R x^4} \left\{ -n \xi_\alpha T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\gamma_1 \dots \gamma_q} \right. \\ \left. + \sum_{A=1}^p \xi_{\beta_A} T_{\beta_1 \dots \beta_{A-1} \alpha \beta_{A+1} \dots \beta_p}^{\gamma_1 \dots \gamma_q} + \sum_{B=1}^q \xi^{\gamma_B} T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\gamma_1 \dots \gamma_{B-1} \alpha \gamma_{B+1} \dots \gamma_q} \right\}.$$

Le dérivé du champ ξ^β est :

$$(20) \quad \nabla_\alpha \xi^\beta = \frac{1}{R x^4} (\delta_\alpha^\beta + \xi_\alpha \xi^\beta).$$

Avec (19) et (20) on obtient :

$$(21) \quad (\Delta T)_{i_1 i_2 \dots i_s} = -\mathring{g}^{hk} \mathring{\nabla}_h \mathring{\nabla}_k T_{i_1 i_2 \dots i_s} + \frac{1}{(R x^4)^2} [n(n+3) - s] T_{i_1 i_2 \dots i_s}, \\ (\Delta T)_{4 i_2 \dots i_s} = \frac{2}{x^4} \mathring{\nabla}_j T^j_{i_2 \dots i_s}, \text{ etc.}, \\ (\Delta T)_{44 i_3 \dots i_s} = -\frac{2}{(x^4)^2} T^j_{i_3 \dots i_s}, \text{ etc.}$$

tous les autres composants sont nuls.

Nous adoptons le laplacien introduit par *Lichnerowicz* [8], qui généralise le laplacien d'une forme au sens de *De Rahm* ; c'est-à-dire :

$$(22) \quad (\mathring{\Delta} T)_{i_1 \dots i_s} = -\mathring{g}^{hk} \mathring{\nabla}_h \mathring{\nabla}_k T_{i_1 \dots i_s} + \sum_{A=1}^s \mathring{R}_{i_A r} T_{i_1 \dots i_{A-1} r i_{A+1} \dots i_s} \\ - \sum_{A \neq B} \mathring{R}_{i_A r i_B l} T_{i_1 \dots i_{A-1} r i_{A+1} \dots i_{B-1} l i_{B+1} \dots i_s}.$$

Pour tout tenseur, satisfaisant l'ensemble d'hypothèses du paragraphe 4, on trouve :

$$\mathring{\Delta} T = \Delta T - \frac{1}{R^2} [n(n+3) + s(s+1)] T,$$

où nous avons fait $x^4 = 1$, comme nous ferons à la suite.

6. DISCUSSION ET CONCLUSION

De (16) et (23) il résulte $I_1 = \mathring{\Delta}$, les théories de type *b* et *c* sont donc identiques ; si on adopte le laplacien (22) (cette adoption est d'ailleurs justifiée par le principe d'équivalence [2]).

On peut prendre les autovaleurs des opérateurs de *Casimir* d'après l'article [7] :

$$(24) \quad \begin{aligned} R^2 I_1 &= R^2 \Delta - n(n + 3) - s(s + 1) = -e(e + 1) - f(f - 1) + 2 ; \\ R^2 I_2 &= s(s + 1)[R^2 \Delta - n(n + 3) - 2] = -e(e + 1)f(f - 1) \end{aligned}$$

d'où, on a immédiatement que $e = s$ puisque, d'ailleurs, e prend des valeurs entières et semi-entières seulement. Ainsi il vient

$$(25) \quad R^2 \Delta - n(n + 3) = -f(f - 1) + 2$$

Δ et n sont arbitraires, sauf pour le lien (25). On peut donc faire $\Delta = 0$ d'où

$$(26) \quad n = f - 2$$

Ainsi on peut interpréter e et f comme le spin et le degré d'homogénéité (moins deux). L'équation $\Delta = 0$ sur les champs des tenseurs « physiques » symétriques implique l'annulation des traces et des divergences (cfr. (21)) et l'équation d'onde. En plus, si on essaie de résoudre $\Delta = 0$ par séparation de variables on trouve le facteur $(x^4)^n$.

Pour $s = 1$, $I_1 = 0$ on a $n = -1$ (ou -2), qui est précisément l'homogénéité de la théorie de *Dirac* pour le champ électromagnétique. Les théories du type *a* coïncident donc avec celles du type *b* et *c*.

Les opérateurs de *Casimir* sont reliés par l'équation (qui a été déjà prévue dans l'article [1]) :

$$(27) \quad I_2 = s(s + 1)[I_1 + (R^{-2})(s^2 + s - 2)]$$

Notre théorie a comme limite la théorie ordinaire de l'espace-plan, si on fait la contraction $R \rightarrow \infty$ [6].

Toutes les séries des représentations du groupe $SO(4, 1)$ sont engendrées pour les champs tensoriels, sauf les séries D^+_{ef} et $C^{1/2}_{er}$ (mais cette dernière sera le sujet d'un autre travail).

Finalement, on peut voir que le champ métrique \mathring{g}_{ij} satisfait identiquement les équations correspondantes. En effet, on trouve :

$$(28) \quad \mathring{\Delta} g_{ij} = \mathring{R}_{ij}$$

Si T_{ij} est un tenseur symétrique de trace zéro et T un scalaire, les équations sont respectivement

$$(29) \quad \mathring{\Delta}T_{ij} = \mu^2 T_{ij} \quad ; \quad \mathring{\Delta}T = \mu^2 T.$$

Mais si T_{ij} est un tenseur symétrique avec trace $T \neq 0$, de l'équation :

$$(30) \quad \mathring{\Delta}\left(T_{ij} - \frac{1}{4} T \mathring{g}_{ij}\right) = \mu^2 \left(T_{ij} - \frac{1}{4} T \mathring{g}_{ij}\right),$$

la (28) et la (29₂), on trouve que T_{ij} doit satisfaire :

$$(31) \quad \mathring{\Delta}T_{ij} - \frac{1}{4} T \mathring{R}_{ij} = \mu^2 T_{ij}.$$

Ainsi \mathring{g}_{ij} , de trace $\mathring{g}^{ij}\mathring{g}_{ij} = 4$, satisfait l'équation (31) avec masse $\mu = 0$, en effet :

$$(32) \quad \mathring{\Delta}\mathring{g}_{ij} - \mathring{R}_{ij} = 0$$

RÉFÉRENCES

- [1] BÖRNER, G. et DÜRR, H. P., Classical and quantum fields, in *De Sitter space*. Preprint, June, 1969 et *Nuovo Cim.*, **44**, n° 3, 1969, p. 669.
- [2] CASTAGNINO, M., *Rend. Accad. Naz. Lincei*, **44**, 1968, p. 534.
- [3] DIRAC, P. A. M., *Ann. of Math.*, **36**, n° 3, 1935, p. 657.
- [4] GÜRSEY, F., *Les Houches*, 1963, p. 91. New York, 1964.
- [5] HANNABUSS, K. C., *J. Phys. A. (Gen. Phys.)*, **2**, 1969, p. 274.
- [6] INONU, E. et WIGNER, E. P., *Proc. Nat. Acc. Sci.*, **39**, 1953, p. 510.
- [7] KURIGAN, J. G. *et al.*, *Commun. Math. Phys.*, **8**, 1968, p. 204.
- [8] LICHNEROWICZ, A., *Inst. Haut. Ét. Sci. Publ. Math.*, n° 10, 1961.
- [9] NACHTMANN, O., *Commun. Math. Phys.*, **6**, 1967, p. 1.

Manuscrit reçu le 23 mars 1970.

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE
IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, n° 6122. 12-1970.

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1710a.