ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. LANGER

Couches simples à symétrie cylindrique en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 12, nº 4 (1970), p. 393-413
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__12_4_393_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XII, n° 4, 1970, p. 393-413.

Section A :
Physique théorique.

Couches simples à symétrie cylindrique en relativité générale

par

J. LANGER (*)

SUMMARY. — This work concerns surface layers with cylindric symmetry in General Relativity. The problem of joining two cylindrically symmetric metrics on a timelike hypersurface is solved. It is shown that if both metrics are static the hypersurface cannot represent the motion of a physically admissible surface layer except in the special case of a surface layer consisting of an ideal gaz of particles with zero proper mass. Finally the hypersurface is constructed representing a surface layer in an oscillatory motion. This hypersurface divides Space-Time in two regions; in the one which contains the axis of cylindric symmetry the metric is non-static, in the other one it is static.

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, on étudie des couches simples à symétrie cylindrique dans le cadre de la Relativité Générale. On résout le problème du raccordement sur une hypersurface de genre temps de deux métriques à symétrie cylindrique. En utilisant les résultats précédents dans le cas où les deux métriques sont statiques, on montre que l'hypersurface correspondant ne peut pas représenter le mouvement d'une couche simple de matière « physiquement acceptable », sauf dans le cas particulier où la couche est formée d'un gaz idéal de particules de masse propre nulle. Finalement on construit une hypersurface qui représente le mouvement oscillatoire d'une couche simple. Cette hypersurface divise l'espace-temps

(*) Ce travail a été effectué pendant le séjour de l'auteur au Laboratoire de Physique Théorique de l'Institut Henri Poincaré, Paris.
Adresse actuelle : Faculté de Mathématiques et Physique, Université Charles, Prague.

en deux régions; dans l'une d'elles, celle qui contient l'axe de symétrie cylindrique, la métrique est non statique alors que dans l'autre, elle est statique.

---

§ 1. INTRODUCTION

Le champ gravitionnel à symétrie cylindrique ne représente qu'une abstraction mathématique sans relation directe avec les champs qu'on trouve dans la nature. Néanmoins, il représente un cas limite de la symétrie axiale et on peut croire que son étude montrera quelques propriétés des systèmes assez proches de la réalité.

On connaît deux solutions décrivant le champ gravitationnel d'un cylindre infini de matière en mouvement radial. Marder [*1*] a étudié un cylindre qui produit un paquet d'ondes gravitationnelles. Le cylindre est initialement statique; au cours de la production du paquet d'ondes il a un petit mouvement radial au terme duquel il tend à redevenir statique asymptotiquement. Thorne [*2*] a trouvé une solution qui représente un nuage cylindrique de poussière d'abord en expansion, puis en contraction jusqu'à une singularité. Sans déterminer la forme explicite du champ extérieur il a montré que le rayonnement gravitationnel est présent.

Dans ce travail, nous étudierons des couches simples de matière ayant la symétrie cylindrique. Une couche simple (surface layer) représente la limite d'une couche simple dont l'épaisseur tend vers zéro. L'étude des couches simples a été faite initialement par Lanczos [*3*] [*4*]; récemment plusieurs auteurs ont développé le formalisme correspondant. Israel [*5*] utilise systématiquement la géométrie tridimensionnelle de l'hypersurface du genre temps qui représente le mouvement de la couche simple et utilise les résultats obtenus dans le cas d'une couche de poussière à symétrie sphérique. Kuchar [*6*] a généralisé la méthode d'Israel pour le cas du champ d'Einstein-Maxwell. Papapetrou et Hamoui [7] ont développé un formalisme quadridimensionnel en partant directement des équations d'Einstein. Ils ont exprimé le tenseur de matière de la couche à l'aide de la fonction δ et ont ainsi clarifié le sens physique du tenseur tridimensionnel de matière introduit « ad hoc » par Israel. En appliquant leurs résultats au cas de la couche sphérique ils ont complété la discussion d'Israel.

Pour introduire notre travail, nous allons rappeler quelques notions de la théorie des couches simples. Les détails peuvent être trouvés dans les travaux cités [*5*] [*7*].

Considérons une hypersurface Σ du genre temps divisant l'espace-temps V^4 en deux régions V^- et V^+ qui sont couvertes par les systèmes de coordonnées x_-^α et x_+^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$). L'hypersurface Σ, elle-même, est décrite par les coordonnées ξ^a ($a = 0, 1, 2$); ses équations, par rapport aux domaines V^- et V^+, sont les suivantes :

$$x_-^\alpha = x_-^\alpha(\xi^a)$$
$$x_+^\alpha = x_+^\alpha(\xi^a). \tag{1,1}$$

Les relations

$$e_{a\pm}^\alpha = \frac{\partial x_\pm^\alpha}{\partial \xi^a} \tag{1,2}$$

déterminent les composantes des trois vecteurs tangents à Σ. Si l'on prend encore un vecteur n^α, $n^\alpha n_\alpha = 1$, on obtient en chaque point de l'hypersurface un repère. Chaque tenseur $A^{\alpha\beta}$ peut être déterminé par ses composantes rapportées à ce repère :

$$A^{\alpha\beta} = A_{\perp\perp} n^\alpha n^\beta + A_\perp^a e_a^\alpha n^\beta + A_\perp^b n^\alpha e_b^\beta + A^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta \tag{1,3}$$

où

$$A_{\perp\perp} = A_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \qquad A_{a\perp} = A_{\alpha\beta} e_a^\alpha n^\beta$$
$$A_{\perp b} = A_{\alpha\beta} n^\alpha e_b^\beta \qquad A_{ab} = A_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta.$$

Les opérations d'abaissement et d'élévation des indices latins sont faites avec le tenseur métrique intrinsèque ${}^{(3)}g_{ab}$ de l'hypersurface Σ. Ce tenseur est obtenu par projection des métriques de V^+ et V^-

$${}^{(3)}g_{ab} = g_{\alpha\beta}^\pm e_{a\pm}^\alpha e_{b\pm}^\beta. \tag{1,4}$$

Les métriques induites par $g_{\alpha\beta}^+$ et $g_{\alpha\beta}^-$ sur Σ doivent être identiques; c'est une formulation de la condition de raccordement de deux métriques sur une hypersurface. Elle est équivalente à la condition bien connue selon laquelle un système de coordonnées doit exister dans un voisinage de Σ tel que le tenseur métrique soit continu à travers Σ. Evidemment la condition (1,4) étant satisfaite, on peut trouver un tel système de coordonnées x^α en choisissant : les trois coordonnées x^a identiques à ξ^a sur Σ et la quatrième x^3 étant une ligne quelconque normale à Σ; ainsi $g_{ab}^\pm = 0$ pour $\alpha = 3$ et la composante g_{33} devient continue pour une transformation $x^{3\prime} = x^{3\prime}(x^3)$.

Pour décrire la matière constituant la couche simple dont Σ est représentative, Israel a introduit [4] le tenseur tridimensionnel.

$$\text{(1,5 a)} \qquad S_{ab} = -\frac{1}{8\pi}([K_{ab}] - g_{ab}[K])$$

$$\text{(1,5 b)} \qquad [K_{ab}] = K^{+}_{ab} - K^{-}_{ab}, \qquad [K] = [K^{a}_{a}],$$

$$K^{\pm}_{ab} = -n^{\pm}_{\alpha}\frac{De^{\alpha}_{a}}{\partial\xi^{b}}.$$

Ici $\frac{De^{\alpha\pm}_{a}}{\partial\xi^{b}}$ représente la dérivée absolue de $e^{\alpha\pm}_{a}$ par rapport à ξ^{b} dans les métriques $g^{\pm}_{\alpha\beta}$. Nous supposons que les unités sont choisies de sorte que la vitesse de la lumière et la constante de Newton G soient égales à l'unité.

Les quantités S_{ab} et K_{ab} sont des tenseurs par rapport aux transformations de ξ^{a}. Le sens physique de S_{ab} a été clarifié par Papapetrou et Hamoui [7]. Supposons que les coordonnées sont choisies de manière telle que $g^{+}_{\mu\nu}$ et $g^{-}_{\mu\nu}$ soient continues à travers Σ qui est donnée par une relation

$$z(x^{\alpha}) = 0.$$

Si Σ décrit une couche simple de matière, les dérivées premières de $g_{\mu\nu}$ ont des discontinuités essentielles à travers Σ. Les équations d'Einstein impliquent que le tenseur de matière soit de la forme

$$\text{(1,6)} \qquad T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu}\delta(z) + \tilde{T}_{\mu\nu}$$

Dans le cas où la matière est située seulement sur Σ, le terme $\tilde{T}_{\mu\nu}$ est nul et $\tau_{\mu\nu}$ satisfait la condition

$$\text{(1,7)} \qquad \tau_{\mu\nu}n^{\nu} = 0.$$

Les relations (1,3) et (1,7) impliquent que $\tau_{\mu\nu}$ soit complètement déterminé par sa projection sur Σ,

$$h_{ab} = \tau_{\mu\nu}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b},$$

les composantes $\tau_{\perp\perp}$ et $\tau_{a\perp}$ étant nulles.

Le tenseur tridimensionnel S_{ab} est identique à un facteur scalaire près, à h_{ab}.

Supposons que les coordonnées ont été choisies de manière telle que l'hypersurface Σ soit donnée par $x^{3}_{\pm} - k = 0$ et $x^{a}_{\pm} = \xi^{a}$ sur Σ; dans ce cas

$$\tau_{ab} = h_{ab} = S_{ab}$$
$$\tau_{3b} = 0.$$

Dans ce travail, l'hypersurface Σ représentera le mouvement d'une couche simple à symétrie cylindrique, la région V^- contiendra l'axe de symétrie z et la région V^+ sera le complémentaire de V^- dans V^4. Les métriques de V^- et V^+ possèdent une symétrie cylindrique parfaite, c'est-à-dire qu'elles sont invariantes pour les translations $z \to z + a$, pour les rotations autour de l'axe de symétrie z et pour les transformations $\varphi \to -\varphi, z \to -z$. Dans des coordonnées cylindriques la forme la plus générale de telles métriques s'écrit [*8*] :

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\psi)}(dt^2 - d\rho^2) + e^{2\psi}dz^2 + \alpha^2 e^{-2\psi}d\varphi^2, \tag{1,8}$$

où les fonctions γ, ψ, α ne dépendent que de ρ et t. Dans la suite, nous allons identifier $x^0 = t$, $x^1 = z$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \rho$. Le choix de ces notations est inhabituel, mais nous verrons par la suite qu'il est en fait, ici, plus naturel. Dans le vide, les équations d'Einstein prennent la forme

$$\begin{aligned}
&\alpha_{,tt} - \alpha_{,\rho\rho} = 0\\
&\psi_{,tt} + (\alpha_{,t}/\alpha)\psi_{,t} - \psi_{,\rho\rho} - (\alpha_{,\rho}/\alpha)\psi_{,\rho} = 0\\
&\gamma_{,\rho} = (\alpha_{,\rho}^2 - \alpha_{,t}^2)^{-1}\{\alpha\alpha_{,\rho}(\psi_{,t}^2 + \psi_{,\rho}^2) - 2\alpha\alpha_{,t}\psi_{,t}\psi_{,\rho} + \alpha_{,\rho}\alpha_{,\rho\rho} - \alpha_{,t}\alpha_{,t\rho}\}\\
&\gamma_{,t} = (\alpha_{,\rho}^2 - \alpha_{,t}^2)^{-1}\{-\alpha\alpha_{,t}(\psi_{,t}^2 + \psi_{,\rho}^2) + 2\alpha\alpha_{,\rho}\psi_{,t}\psi_{,\rho} - \alpha_{,t}\alpha_{,tt} + \alpha_{,\rho}\alpha_{,t\rho}\}.
\end{aligned} \tag{1,9}$$

Dans le § 2, nous allons étudier la question suivante : sur quelle hypersurface un raccordement de deux métriques, de la forme (1,8), est-il possible ? Papapetrou et Hamoui ont montré que, dans le cas sphérique, le raccordement est possible sur n'importe quelle hypersurface à symétrie sphérique. Le cas cylindrique est beaucoup plus restrictif; en général il n'existe qu'une seule famille d'hypersurfaces, à symétrie cylindrique, sur lesquelles un raccordement soit possible. C'est seulement dans le cas où l'espace V^- ou V^+ possède une symétrie plus élevée que la symétrie cylindrique, qu'une seconde famille d'hypersurfaces existe.

Dans le § 3, nous utilisons ces résultats pour le cas de métriques statiques dans V^- et V^+.

Dans le § 4, nous présentons une solution qui représente une couche simple en mouvement oscillatoire.

§ 2. RACCORDEMENT DE DEUX MÉTRIQUES A SYMÉTRIE CYLINDRIQUE

Supposons que la métrique, dans le région V^+, soit de la forme (1,8), où les fonctions α, ψ, γ sont des fonctions données de ρ_+ et t_+. Dans V^+, l'hypersurface Σ est donnée par la relation $\rho_+ = R_+(t_+)$. Dans la région V^-

nous prenons d'abord une métrique minkowskienne exprimée dans des coordonnées cylindriques :

(2,1) $$ds^2 = -dt_-^2 + dz_-^2 + \rho_-^2 d\varphi_-^2 + d\rho_-^2.$$

Nous allons identifier ξ^a avec les coordonnées x_+^a sur Σ, c'est-à-dire

$$\xi^0 = t_+, \qquad \xi^1 = z_+, \qquad \xi^2 = \varphi_+.$$

Dans V^-, l'hypersurface Σ est déterminée par la relation

$$x_-^\alpha = x_-^\alpha(\xi^a).$$

La symétrie exige d'une part que $\varphi_+ = \varphi_-$ et d'autre part que z_- et t_- ne dépendent pas de φ_+. Il s'ensuit que :

(2,2) $$\begin{aligned} z_- &= f(z_+, t_+) \quad , \quad t_- = g(z_+, t_+) \\ \rho_- &= R_-(z_+, t_+). \end{aligned}$$

Une des conditions de raccordement (1,4) mène à

(2,3) $${}^{(3)}g_{22} = R_-^2 = \alpha_\Sigma e^{-2\psi_\Sigma},$$

l'indice Σ indique que l'on prend la valeur de la fonction sur l'hypersurface Σ, par exemple $\alpha_\Sigma = \alpha[R_+(t_+), t_+]$. Il résulte de (2,3) que R_- ne dépend que de t_-. Les autres conditions de raccordement mènent aux relations :

(2,4 *a*) $${}^{(3)}g_{11} = f_{,z}^2 - g_{,z}^2 = e^{2\psi_\Sigma} \equiv 2\Psi$$

(2,4 *b*) $${}^{(3)}g_{00} = f_{,t}^2 - g_{,t}^2 + \dot{R}_-^2 = (\dot{R}_+^2 - 1)e^{2(\gamma_\Sigma - \psi_\Sigma)}$$

(2,4 *c*) $${}^{(3)}g_{01} = f_{,t}f_{,z} - g_{,t}g_{,z} = 0,$$

où

$$\dot{R}_\pm = \frac{dR_+}{dt_+} \quad , \quad f_{,t} = \frac{\partial f}{\partial t_+} \quad , \quad f_{,z} = \frac{\partial f}{\partial z_+}.$$

Les autres composantes de ${}^{(3)}g_{ab}$ sont identiquement nulles. A l'aide de (2,3) on trouve :

(2,5) $$\dot{R}_- = (\dot{\alpha}_\Sigma - \dot{\psi}_\Sigma \alpha_\Sigma)e^{-\psi_\Sigma}.$$

En substituant cette expression dans (2,4*b*) on obtient :

(2,4 *b'*) $$\begin{aligned} f_{,t}^2 - g_{,t}^2 &= -(\dot{\alpha}_\Sigma - \dot{\psi}_\Sigma \alpha_\Sigma)e^{-2\psi_\Sigma} - (1 - \dot{R}_+^2)e^{2(\gamma_\Sigma - \psi_\Sigma)} \\ &\equiv -\Phi(R_+(t_+), \dot{R}(t_+), t_+]. \end{aligned}$$

Pour que ${}^{(3)}g_{00} < 0$ il est nécessaire que $1 > \dot{R}_+^2$, donc $\Phi > 0$. Pour réaliser le raccordement il faut donc trouver des fonctions f et g satisfaisant les équations (2,4 a, b', c); les fonctions qui se trouvent dans leur second membre dépendent de t_+ par l'intermédiaire de $R_+(t_+)$, qui n'est pas encore déterminé, et de t_+. Nous allons maintenant chercher des fonctions $R_+ = R_+(t_+)$ pour lesquelles les équations ont des solutions et ensuite nous présenterons la forme générale de ces solutions.

En prenant la dérivée de (2,4 a), par rapport à t_+ et de (2,4 b'), par rapport à z_+, on obtient :

$$f_{,z}f_{,zt} = g_{,z}g_{,zt} + \dot{\Psi}$$
$$f_{,t}f_{,tz} = g_{,t}g_{,tz}.$$

Ces relations conduisent à l'aide de (2,4 c) à :

$$\frac{g_{,z}g_{,zt} + \dot{\Psi}}{g_{,tz}g_{,t}} = \frac{f_{,z}}{f_{,t}} = \frac{f_{,z}^2}{g_{,t}g_{,z}}$$

En éliminant la fonction $f_{,z}^2$ à l'aide de (2,4 a) on trouve :

$$\frac{\dot{\Psi} + g_{,z}g_{,zt}}{g_{,zt}} = \frac{2\Psi + g_{,z}^2}{g_{,z}}$$

c'est-à-dire

(2,6) $$\frac{2\Psi}{g_{,z}} \quad \frac{\dot{\Psi}}{g_{,zt}}.$$

La relation (2,6) mène à

(2,7) $$\frac{\dot{\Psi}}{2\Psi} = \frac{g_{,zt}}{g_{,z}} = \frac{\partial}{\partial t_+}(\log g_{,z}).$$

En remplaçant le nouveau Ψ, compte tenu de (2,4 a) par $\frac{1}{2}e^{2\psi_\Sigma}$, on trouve, après une intégration par rapport à t_+ :

(2,8) $$g_{,z} = \bar{p}(z_+)e^{\psi_\Sigma},$$

où $\bar{p}$ est une fonction arbitraire de z_+. Une nouvelle intégration par rapport à z_+ donne

(2,9) $$g = p(z_+)e^{\psi_\Sigma} + r(t_+),$$

où $p(z_+)$ et $r(t_+)$ sont des fonctions arbitraires. De même, on obtient encore à partir de (2,4 a, b', c)

(2,10) $$\frac{\dot{\Psi}}{2\Psi} = \frac{\partial}{\partial t_+}(\log f_{,z})$$

(2,11) $$f = q(z_+)e^{\psi_\Sigma} + s(t_+).$$

$q(z_+)$ et $s(t_+)$ étant des fonctions arbitraires. Ainsi (2,9) et (2,11) représentent les solutions générales des équations (2,7) et (2,10) obtenues à partir du système d'équations (2,4 *a-c*). Ces dernières imposent encore des restrictions supplémentaires aux formes de f et g. En effet, les équations (2,4 *a*) et (2,4 *c*) imposent respectivement :

$$q'^2 - p'^2 = 1 \tag{2,12}$$

$$f_{,t}^2 q'^2 - g_{,t}^2 p'^2 = 0. \tag{2,13}$$

En tenant compte de (2,12), (2,4 *b'*) et (2,9) l'équation (2,13) s'écrit sous la forme :

$$\pm \Phi^{1/2} q' = \dot{\psi}_\Sigma e^{\psi_\Sigma} p + \dot{r}. \tag{2,14}$$

De la même manière, on a

$$\pm \Phi^{1/2} p' = \dot{\psi}_\Sigma e^{\psi_\Sigma} q + \dot{s}. \tag{2,15}$$

Les équations (2,14) et (2,15) mènent à l'équation :

$$q'' = \pm \Phi^{-1} \dot{\psi}_\Sigma^2 e^{2\psi_\Sigma} q + \Phi^{-1} \dot{\psi}_\Sigma e^{\psi_\Sigma} \dot{s}, \tag{2,16}$$

que l'on écrira avec des notations évidentes :

$$q'' = \mathrm{A}(t_+) q(z_+) + \mathrm{B}(t_+).$$

L'équation (2,16) ne possède une solution nontriviale que si $\mathrm{A}(t_+) = a$, $\mathrm{B}(t_+) = b$, a et b étant des constantes. Il y a deux possibilités qui mènent à deux familles d'hypersurfaces Σ :

I. — $a = 0$. Il en résulte immédiatement que $\dot{\psi}_\Sigma = 0$ et $b = 0$. La nullité de $\dot{\psi}_\Sigma$ entraîne que $\psi_\Sigma[\mathrm{R}_+(t_+), t_+] = \mathrm{M} = \text{const.}$, ce qui détermine R_+ comme fonction de t_+ (en exceptant le cas où ψ_Σ ne dépend pas de R_+).

On déduit facilement, de (2,9)-(2,15), que :

$$\begin{aligned} z_- &= f(z_+, t_+) = e^{\mathrm{M}} \mathrm{C} z_+ + s(t_+) \\ t_- &= g(z_+, t_+) = e^{\mathrm{M}} \mathrm{D} z_+ + r(t_+) \end{aligned} \tag{2,17}$$

où les fonctions s, r et les constantes C, D satisfont les relations :

$$\mathrm{C}^2 - \mathrm{D}^2 = 1 \tag{2,18 a}$$

$$\dot{s}^2 = \Phi(t_+) \mathrm{D}^2 \tag{2,18 b}$$

$$\dot{r}^2 = \Phi(t_+) \mathrm{C}^2. \tag{2,18 c}$$

La transformation (2,7) dépend de deux constantes C, D dont une est arbitraire, l'autre étant déterminée par (2,18 *a*). Deux autres constantes, qui représentent des changements d'origine du système x^a_-, apparaissent au cours de l'intégration de (2,18 *a*, *b*). En supposant $C = 1$, $D = 0$ on a

$$\text{(2,19)} \qquad \begin{aligned} z_- &= e^{M} z_+ \\ t_- &= r(t_+), \qquad \dot{r} = \Phi^{1/2}. \end{aligned}$$

En général, pour un autre choix des valeurs, $\bar{C}$ et $\bar{D}$, des constantes C et D on a :

$$\text{(2,20)} \qquad \begin{aligned} \bar{z}_- &= \bar{C} e^{M} z_+ + \bar{s}(t_+) = \bar{C} z_- + \sqrt{\bar{C}^2 - 1}\, t_- + \bar{z}_0 \\ \bar{t}_- &= \sqrt{\bar{C}^2 - 1}\, e^{M} z_+ + \bar{r}(t_+) = \sqrt{\bar{C}^2 - 1}\, z_- + \bar{C} t_- + \bar{t}_0, \end{aligned}$$

ainsi $(\bar{z}_-, \bar{t}_-)$ et (z_-, t_-) sont liés par une transformation de Lorentz. Donc il suffit de prendre $C = 1$, $D = 0$.

II. — $a \neq 0$. Pour $a < 0$, $b \neq 0$ la solution générale de l'équation (2,16) s'écrit

$$\text{(2,21)} \qquad q = C_1 \sin \sqrt{-a}(z_+ + z_0) - b/a$$

où z_0, C_1 sont des constantes arbitraires. En tenant compte de (2,21) la relation (2,15) mène à

$$p' = \pm \sqrt{-a}\, C_1 \sin \sqrt{-a}(z_+ + z_0),$$

donc la relation (2,12) ne peut être satisfaite.

Pour $a > 0$, $b \neq 0$ la solution générale de (2,16) s'écrit :

$$q = C_1 \sinh \sqrt{a} z_+ + C_2 \cosh \sqrt{a} z_+ - b/a$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires. La relation (2,15) donne alors :

$$p' = \pm \sqrt{a}(C_1 \sinh \sqrt{a} z_+ + C_2 \cosh \sqrt{a} z_+).$$

De (21,5) on déduit

$$a(C_1^2 - C_2^2) = 1$$

Compte tenu des résultats précédents les relations (2,9) et (2,11) conduisent à :

$$\text{(2,22 } a\text{)} \qquad z_- = f = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\psi_\Sigma} \sinh \sqrt{a}(z_+ + z_0) + s(t_+)$$

$$\text{(2,22 } b\text{)} \qquad t_- = g = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\psi_\Sigma} \cosh \sqrt{a}(z_+ + z_0) + r(t_+)$$

Substituant à f et g dans (2,4 c), les expressions (2,22 a, b) on a :

$$\dot{s}e^{\psi_\Sigma}\cosh\sqrt{a}(z_+ + z_0) = \dot{r}e^{\psi_\Sigma}\sinh\sqrt{a}(z_+ + z_0)$$

Donc $\dot{s} = \dot{r} = 0$ et par conséquent $s = \text{const.}$, $r = \text{const.}$ Dans (2,22 a) on doit choisir évidemment le signe $(+)$. Comme t_- doit être une fonction de t_+, d'une part, et que la fonction e^{ψ_Σ} est positive quel que soit t_+, d'autre part, on peut choisir signe $(+)$ ou signe $(-)$ dans (2,22 b); la fonction ψ_Σ devant être monotone en raison de l'exigence $g_{,t} > 0$ pour chaque valeur de t_+.

Pour ce raccordement de type II l'hypersurface Σ est déterminée par la condition

$$\Phi^{-1}[\mathrm{R}_+, \dot{\mathrm{R}}_+, t_+]\dot{\psi}_\Sigma[\mathrm{R}_+, t_+]e^{2\psi_\Sigma[\mathrm{R}_+, t_+]} = a. \tag{2,23}$$

Maintenant nous allons étudier le cas général pour lequel la métrique, dans la région V^- aussi bien que dans la région V^+, est du type (1,8); $\alpha^\pm$, $\psi^\pm$, $\gamma^\pm$ étant des fonctions arbitraires de $\rho_\pm$ et $t_\pm$. Ces métriques possèdent les vecteurs de Killing $\underset{(1)}{\eta^\alpha_\pm} = \delta^\alpha_1$, $\underset{(2)}{\eta^\alpha_\pm} = \delta^\alpha_2$. Nous allons montrer que si V^- n'a aucun autre vecteur de Killing, il n'existe que l'analogue du raccordement de type I (c'est-à-dire, $t_- = g(t_+)$, $z_- = f(z_+)$) sur une hypersurface du genre temps à symétrie cylindrique.

Nous prenons $\xi^a = x^a_+$ sur l'hypersurface Σ et nous supposons que Σ est déterminée par $\rho_+ = \mathrm{R}_+(t_+)$ dans V^+, tandis que dans V^- elle est donnée par les relations :

$$\begin{aligned} t_- &= g(z_+, t_+)\\ r_- &= f(z_+, t_+)\\ \varphi_- &= \varphi_+\\ \rho_- &= \mathrm{R}_-(z_+, t_+). \end{aligned}$$

Les vecteurs (1,2), tangents à l'hypersurface Σ, ont des composantes dans V^+ et V^-, ce sont respectivement :

$$\begin{aligned} e^\alpha_{+0} &= (1, 0, 0, \dot{\mathrm{R}}_+)\\ e^\alpha_{+a} &= \delta^\alpha_a \quad \text{pour} \quad a = 1, 2\\ e^\alpha_{-0} &= (g_{,t}, f_{,t}, 0, \mathrm{R}_{-,t})\\ e^\alpha_{-1} &= (g_{,z}, f_{,z}, 0, \mathrm{R}_{-,z})\\ e^\alpha_{-2} &= \delta^\alpha_2. \end{aligned}$$

Nous voyons que dans V^+ les vecteurs e^α_{+1}, e^α_{+2} sont identiques aux vecteurs de Killing $\underset{(1)}{\eta}{}^\alpha_+$, $\underset{(2)}{\eta}{}^\alpha_+$; par conséquent la métrique de Σ admet le groupe de mouvement G_2.

En supposant $g_{,z} \neq 0$, ou $R_{-,z} \neq 0$, montrons que $\underset{(1)}{\eta}{}^\alpha_-$ n'est pas tangent à Σ dans V^-. Les dérivées $g_{,z}$, $R_{-,z}$ n'étant pas toutes deux nulles, les vecteurs e^α_{-1}, e^α_{-2} et $\underset{(1)}{\eta}{}^\alpha_-$ sont indépendants et du genre espace. Nous supposons que Σ est du genre temps, donc dans Σ il ne peut exister trois vecteurs du genre espace indépendants. Alors, si nous supposons que l'une, au moins, des fonctions g, R_- dépend de z_+, l'espace admet le groupe de mouvement avec un vecteur de Killing $\underset{(1)}{\eta}{}^\alpha_-$ non tangent à Σ; par conséquent en chaque point de V^- passe une hypersurface ayant la même symétrie que Σ et dans ce cas e^α_{-1} représente un vecteur de Killing de V^-.

Si l'espace V^- ne possède pas d'autre vecteur de Killing que $\underset{(1)}{\eta}{}^\alpha = \delta^\alpha_1$, $\underset{(2)}{\eta}{}^\alpha = \delta^\alpha_2$, le vecteur $-\,e^\alpha_1$ doit être $-\,e^\alpha_1 = a\underset{(1)}{\eta}{}^\alpha$, où a est une constante arbitraire, donc $g_{,z} = R_{-,z} = 0$. Dans ce cas les conditions de raccordement (1,4) conduisent aux relations suivantes :

$$(2{,}24\,a) \qquad {}^{(3)}g_{00} = (\dot{R}^2_- - \dot{g}^2)e^{2(\gamma^-_\Sigma - \psi^-_\Sigma)} = (\dot{R}^2_+ - 1)e^{2(\gamma^+_\Sigma - \psi^+_\Sigma)}$$

$$(2{,}24\,b) \qquad {}^{(3)}g_{11} = a^2 e^{2\psi^-_\Sigma} = e^{2\psi^+_\Sigma}$$

$$(2{,}24\,c) \qquad {}^{(3)}g_{22} = (\alpha^-_\Sigma)^2 e^{-2\psi^-_\Sigma} = (\alpha^+_\Sigma)^2 e^{-2\psi^+_\Sigma}.$$

Les fonctions α^-_Σ, ψ^-_Σ, γ^-_Σ dépendent de $R_-(t_+)$, $g(t_+)$ et α^+_Σ, ψ^+_Σ, γ^+_Σ sont des fonctions de $R_+(t_+)$ et t_+. Remarquons que seule l'équation (2,24 *a*) est une équation différentielle, donc les trois équations (2,24 *a-c*) déterminent en général les fonctions R_+, R_-, g, uniquement à la constante a et à une constante d'intégration quelconque près.

Ainsi, on a montré que deux métriques de type (1,8) peuvent être raccordées sur une famille d'hypersurfaces à symétrie cylindrique déterminées par (2,24 *a-c*). Mais il n'est pas assuré que chaque hypersurface, déterminée par (2,24 *a-c*), est du genre temps. Dans le cas où l'espace V^- (ou V^+) admet un groupe de mouvement G_r, $r > 2$, d'autres hypersurfaces convenant pour le raccordement peuvent exister. Nous avons trouvé la famille de telles hypersurfaces pour la métrique de Minkowski dans V^-.

§ 3. LE CAS DU CHAMP STATIQUE

La solution statique générale des équations d'Einstein du vide, dans le cas de la symétrie cylindrique, peut être écrite sous la forme [2] :

$$(3,1) \quad ds^2 = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{4k(1+2k)} (d\rho^2 - dt^2) + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-4k} dz^2 + \rho^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{4k} d\varphi^2$$

où k et ρ_0 sont des constantes arbitraires. La métrique a une singularité physique en $\rho_0 = 0$ pour $k \neq 0$. La limite newtonienne est représentée par $0 < k \ll 1$, $\rho_0 = 1$, k étant dans ce cas la masse par unité de longueur de la couche cylindrique. Nous supposons que la matière est située uniquement sur une couche simple dont le mouvement est décrit par l'hypersurface Σ; il en résulte que la métrique dans V^- doit être minkowskienne ($k = 0$); dans V^+ nous prenons (3,1).

En appliquant à ce cas le raccordement du type I, étudié au § 2, nous obtenons la condition :

$$(3,2) \qquad \psi_\Sigma = \log (R_+/\rho_0) = \text{const.}$$

Donc l'hypersurface représente l'histoire d'un cylindre de rayon constant, ce cas a été étudié dans [7].

Nous avions remarqué dans § 2 que (3,2) ne détermine pas de façon unique une hypersurface dans le cas où ψ_Σ ne dépend pas de R_+. La métrique est alors :

$$(3,3) \qquad ds^2 = -dt_+^2 + dz_+^2 + A^2 \rho_+^2 d\varphi_+^2 + d\rho_+^2$$

avec $A = \text{const.}$ et φ variant dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Cette métrique est localement minskowkienne car une transformation $\overline{\varphi} = A\varphi$ réduit la métrique à la forme (2,1). Mais dans ce cas φ' varie dans l'intervalle $[0, A2\pi]$. La géométrie de la surface $z_+ = \text{const.}$, $t_+ = \text{const.}$ pour $A < 1$ est une géométrie identique à celle d'un cône. Un espace de ce type a été étudié par Marder [9] qui a construit une source statique pour un tel champ. Nous allons construire des sources nonstatiques du champ (3,3) de type couche simple.

Nous pourrions appliquer la procédure de raccordement que nous avions étudiée dans § 2. Néanmoins dans le cas présent il est préférable d'utiliser comme coordonnée ξ^0 le temps propre τ le long des courbes

$$\rho_+ = R_+(t_+), \qquad \varphi_+ = \text{const.}, \qquad z_+ = \text{const.}$$

(cela est possible car ces courbes doivent être du genre temps). Nous allons supposer donc que l'hypersurface Σ est déterminée par les relations :

(3,4) $x^0_\pm = x^0_\pm(\xi^0), \quad x^1_\pm = \xi^1, \quad x^2_\pm = \xi^2, \quad x^3 = \mathrm{R}_\pm(\xi^0), \quad \xi^0 = \tau$

dans V^- et V^+. De (3,3) et (2,1) on déduit

(3,5) $$\frac{dx^0_\pm}{d\xi^0} = \sqrt{1 + \dot{\mathrm{R}}^2_\pm} \qquad \text{où} \qquad \dot{\mathrm{R}}_\pm = \frac{d\mathrm{R}_\pm}{d\tau}.$$

En tenant compte de (3,4) et (3,5) on trouve les vecteurs (1,2) :

(3,6 *a*) $${}_\pm e^\alpha_0 = \left(\sqrt{1 + \dot{\mathrm{R}}^2_\pm}, 0, 0, \dot{\mathrm{R}}_\pm\right), \ {}_\pm e^\alpha_a = \delta^\alpha_a \quad \text{pour} \quad a = 1, 2$$

et les normales $\pm\, n^\alpha$:

(3,6 *b*) $${}_\pm n^\alpha = \left(\dot{\mathrm{R}}_\pm, 0, 0, \sqrt{1 + \dot{\mathrm{R}}^2_\pm}\right).$$

Les conditions de raccordement (1,4) sont satisfaites si $\mathrm{AR}_+ = \mathrm{R}_-$; dans ce cas la métrique tridimensionnelle de Σ s'écrit :

$${}^{(3)}g_{ab} = \mathrm{diag}\,(-1, 1, \mathrm{R}^2_-).$$

En substituant (3,6 *ab*) dans (1,5 *ab*) on obtient le tenseur de matière

$$\mathrm{S}^0_0 = -\frac{1}{8\pi\mathrm{R}_-}\left[(1 + \dot{\mathrm{R}}^2_-)^{1/2} - (\mathrm{A}^2 + \dot{\mathrm{R}}^2_-)^{1/2}\right]$$

$$\mathrm{S}^2_2 = -\frac{\ddot{\mathrm{R}}_-}{8\pi\mathrm{R}_-}\left[(1 + \dot{\mathrm{R}}^2_-)^{-1/2} - (\mathrm{A}^2 + \dot{\mathrm{R}}^2_-)^{-1/2}\right]$$

$$\mathrm{S}^1_1 = \mathrm{S}^0_0 + \mathrm{S}^2_2$$

$$\mathrm{S}^b_a = 0 \qquad \text{pour} \qquad a \neq b.$$

Pour $\mathrm{A} < 1$ la densité superficielle d'énergie $\varepsilon = -\,\mathrm{S}^0_0$ est positive ainsi que la composante S^2_2. Jusqu'ici la fonction $\mathrm{R}_-(\tau)$ n'est pas déterminée, on peut donc poser une condition sur la forme de S^b_a. On trouve facilement que l'on ne peut satisfaire en même temps les conditions :

(3,7) $$\mathrm{S}^0_0 < 0, \qquad \mathrm{S}^2_2 > 0, \qquad \mathrm{S}^1_1 > 0$$

et

$$\mathrm{S}^a_a < 0,$$

qui sont les conditions nécessaires pour que la matière soit du type gaz idéal à masse propre positive. Néanmoins, en posant la condition :

$$(3,8) \qquad 0 = S_a^a = 2(S_0^0 + S_2^2) = 2S_1^1$$

on peut interpréter la matière de la couche comme un « gaz idéal de photons », c'est-à-dire un gaz constitué par des particules de masse propre nulle. La composante S_0^2 étant nulle, il n'y a pas de mouvement global particulier parallèle au vecteur e_1^α. La composante S_0^2 étant nulle, le même nombre de particules se meut dans la direction du vecteur e_2^a et dans la direction opposée. La condition (3,8) implique l'équation :

$$(3,9) \qquad \ddot{R}_- = R_-^{-1}[1 + \dot{R}_-^2]^{1/2}[A^2 + \dot{R}_-^2]^{1/2}.$$

On voit que l'accélération $\ddot{R}_-$ décroît avec la constante A. En choisissant A suffisamment petit, on peut avoir pour $\dot{R} = 0$, la valeur de $\ddot{R}_-$ arbitrairement petite. Pour $A = 0$ et $\dot{R}_- = 0$ l'équation (3,9) implique $\ddot{R}_- = 0$. Mais dans ce cas l'expression de S_2^2 n'a pas de sens et la métrique (3,3) dégénère. Pour retrouver la métrique d'espace-temps dans V^+ dans le cas $A = 0$, il faut effectuer d'abord sur (3,3) une transformation :

$$\rho_+ = \left(\rho'_+ + \frac{b}{A}\right) \qquad \text{où} \qquad b = \text{const.}$$

et ensuite prendre la limite pour $A \to 0$. Dans ce cas la métrique (3,3) devient

$$ds^2 = -\,dt_+^2 + dz_+^2 + b^2 d\varphi_+^2 + d\rho_+^2$$

et la géométrie de la surface $z_+ = \text{const.}$, $t_+ = \text{const.}$, est la géométrie d'un cylindre de rayon b. Pour raccorder cette métrique avec (2,1) il faut écrire $R_- = b$ et l'on déduit de (1,5 a, b)

$$S_1^1 = S_0^0 = -\,\frac{1}{8\pi R_-}, \qquad S_2^2 = 0\,;$$

par conséquent la condition (3,8) ne peut être satisfaite.

Remarquons encore que pour $\dot{R} = 0$ la masse de la couche cylindrique par unité de la longueur

$$M = -\,2\pi R_- S_0^0 = \frac{1-A}{4}$$

reste la même si $R_- \to 0$, donc la « singularité conique » représente la matière sur l'axe.

Nous allons maintenant étudier le raccordement du type II de (2,1) et (3,1).

La métrique (3,1) est une métrique de la forme (1,8) avec :

$$\alpha = \rho^2$$
$$\psi = \log\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-2k}$$
$$\gamma = \log\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{4k^2}.$$

En substituant ces valeurs dans (2,23) nous obtenons une équation qu'il est possible de résoudre par rapport à $\dot{R}_+$:

(3,10)
$$\dot{R}_+ = \left[1 + \frac{4k^2}{\rho_0^2}\left(\frac{R_+}{\rho_0}\right)^{-8k^2-8k-2} - (2k+1)\left(\frac{R_+}{\rho_0}\right)^{-8k^2}\right]^{-1/2} \equiv F^{-1/2}(R_+)$$

(Nous avons choisi la constante $a = 1$ dans (2,23); un autre choix ne change pas essentiellement les résultats. Nous utilisons de nouveau le même choix que dans § 2, c'est-à-dire $\dot{R}_+ = \dfrac{dR_+}{dt_+}\Big)$.

De (3,10) il résulte que l'hypersurface est déterminée par

$$\pm \int dR_+ F^{1/2}(R_+) = t_+ + C \tag{3,11}$$

où C est une constante. L'hypersurface Σ doit être du genre temps, en conséquence la condition $|\dot{R}_+^2| < 1$ doit être satisfaite pour que la normale $n^\alpha \equiv (\dot{R}_+, 0, 0, 1)$ soit du genre espace. Pour toutes les valeurs de k et ρ_0 (à l'exception du cas où $k = -1/4$) il existe des points pour lesquels $F(R_+) < 1$ et donc $|\dot{R}_+| > 1$, ainsi l'hypersurface cesse d'être du genre temps. Ces points sont caractérisés par

$$\left(\frac{R_+}{\rho_0}\right) < \left[\frac{2k}{(2k+1)\rho_0}\right]^{\frac{2}{8k+2}} \qquad \text{pour} \qquad 8k+2>0$$
$$\left(\frac{R_+}{\rho_0}\right) > \left[\frac{2k}{(2k+1)\rho_0}\right]^{\frac{2}{8k+2}} \qquad \text{pour} \qquad 8k+2<0.$$

Il résulte de ce fait que l'hypersurface donnée par (3,11) ne peut représenter le mouvement d'une couche simple de matière au cours de son évolution complète.

Considérons maintenant le cas particulier $k = -\frac{1}{4}$; (3,11) donne alors

$$\int dR_+\left[1 + \left(\frac{1}{\rho_0} - 1\right)\frac{\rho_0^{1/4}}{4}\frac{1}{\sqrt{R_+}}\right]^{1/2} = \pm t_+ + C. \tag{3,12}$$

Après une intégration on a :

$$R_+^{1/4}[(R_+^{1/2} + A)^{3/2} - \frac{A}{2}(R_+^{1/2} + A)^{1/2}] - \frac{A^2}{2}\log[R_+^{1/4} + (R_+^{1/2} + A)^{1/2}] = \pm t_+ + C,$$

$$A = \left(\frac{1}{\rho_0} - 1\right)\frac{\rho_0^{1/4}}{4R_+^{1/2}}.$$

Le mouvement est soit une expansion illimitée, de $R_+ = 0$ jusqu'à $R_+ = \infty$, soit une contraction de $R_+ = \infty$ à $R_+ = 0$. Si $\rho_0 < 1$, l'hypersurface est du genre temps partout à l'exception de $R_+ = \infty$. Le champ pour $k = -\frac{1}{4}$ est répulsif. La composante S_0^0 du tenseur de matière est

$$S_0^0 = \frac{1}{8\pi(\rho_0 R_+)^{1/2}}\left[\frac{1}{(1 - \dot{R}_+^2)^{1/2}} - \frac{1 + \rho_0^{5/2}}{(1 - \rho_0)^{1/2}}\right].$$

Nous supposons $\rho_0 < 1$, donc le second terme entre les crochets est plus grand que 1. Pour $R_+ = 0$ on a $\dot{R}_+ = 0$, et pour $R_+ = \infty$, $\dot{R}_+ = 1$; ceci entraîne que S_0^0 est négatif pour R_+ suffisamment petit mais positif pour R_+ assez grand. En ce qui concerne les composantes S_1^1 et S_2^2 nous notons seulement qu'elles ne sont pas nulles.

On ne peut pas donner d'interprétation physique à ce tenseur de matière. Mais l'hypersurface d'équation (3,12) montre bien une propriété des hypersurfaces de raccordement du type II. Les relations (1,1) s'écrivent dans notre cas sous la forme :

$$z_- = \left(\frac{R_+(t_+)}{\rho_0}\right)^{1/2}\sinh z_+$$

$$t_- = \left(\frac{R_+(t_+)}{\rho_0}\right)^{1/2}\cosh z_+$$

$$\frac{R_-}{\rho_0} = \left(\frac{R_+(t_+)}{\rho_0}\right)^{1/2}.$$

Si l'on élimine les coordonnées x_+^α, on trouve

$$\left(\frac{R_-}{\rho_0}\right)^2 + z_-^2 = t_-^2 \ ;$$

c'est-à-dire, à un moment t_- donné la couche représente un ellipsoïde dans V^-, tandis qu'à un moment t_+ donné elle représente un cylindre infini dans V^+. Naturellement, cette propriété dépend du choix du système de coordonnées mais les deux systèmes utilisés sont, en un certain sens, privilégiés : le système, dans V^-, est minkowskien, tandis que dans V^+ il y a un système dans lequel la métrique (3,1) s'écrit sous une forme statique.

§ 4. UNE SOLUTION OSCILLATOIRE

Maintenant nous allons construire une hypersurface représentant une couche simple en mouvement oscillatoire. Nous supposons que la métrique dans V^+ est statique de la forme (3,1) et que la métrique dans V^- a la forme (1,8), avec les fonctions α, ψ, γ suivantes :

$$\begin{aligned}
&\alpha = \rho_- \\
&\psi = -\,AJ_0(\omega\rho_-)\cos\omega t_- \\
(4,1)\quad &\gamma = \frac{1}{2}A^2\omega\rho_-J_0(\omega\rho_-)J_0'(\omega\rho_-)\cos 2\omega t_- \\
&\qquad + \frac{1}{2}A^2\omega^2\rho_-^2[J_0'^2(\omega\rho_-) - J_0(\omega\rho_-)J_0''(\omega\rho_-)] + K.
\end{aligned}$$

Dans ces formules J_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro, A, ω et K sont des constantes arbitraires. C'est une solution trouvée par Rosen [*10*] représentant des ondes gravitationnelles stationnaires. Marder [*11*] a étudié la réflexion de ces ondes sur une couche rigide.

Montrons que la constante K indique l'existence d'une « singularité conique ». Si nous prenons le rapport des longueurs propres de la circonférence et du rayon d'un cercle centré sur l'axe z et appartenant à la surface $t_- = \text{const.}$, $z_- = \text{const.}$, nous constatons qu'il tend vers $e^{-2\gamma}\cdot 2\pi$ lorsque le rayon tend vers zéro. Les termes de γ_- qui dépendent de ρ_-, deviennent nuls pour $\rho_- = 0$. Nous avons déjà montré que la « singularité conique » représente une masse sur l'axe, par conséquent K doit être nul si nous supposons qu'il n'y a pas de matière hors de la couche.

L'hypersurface Σ étant donnée par la relation $\rho_- = R_-(t_-)$ dans V^-, nous identifions les coordonnées x_-^α avec ξ^a sur Σ et nous supposons qu'elles sont liées à x_+^α par les relations :

$$(4,2) \qquad t_+ = \beta(t_-), \qquad z_+ = az_-, \qquad \varphi_+ = \varphi_-, \qquad \rho_+ = R_+(t_-)$$

où a est une constante.

Les conditions de raccordement (2,24 *a-c*) ont la forme (nous avons échangé les rôles de x_-^α et x_+^α :

$$(4,3\,a) \qquad e^{2\psi_\Sigma} = e^{-2AJ_0(\omega R_-)\cos(\omega t_-)} = \left(\frac{R_+}{\rho_0}\right)^{-4k} a^2$$

$$(4,3\,b) \qquad R_-^2 e^{-2\psi_\Sigma} = R_+^2\left(\frac{R_+}{\rho_0}\right)^{4k}$$

$$(4,3\,c) \qquad (1-\dot{R}_-^2)e^{2(\gamma_\Sigma-\psi_\Sigma)} = (\dot{\beta}^2-\dot{R}_+^2)\left(\frac{R_+}{\rho_0}\right)^{4k(1+2k)}.$$

Ces conditions sont satisfaites lorsque l'on écrit :

$$(4,4) \qquad R_+ = \frac{1}{a}R_-$$

$$(4,5) \qquad \cos\omega t_- = \frac{2k\log\left(\dfrac{R_-}{a^n\rho_0}\right)}{AJ_0(\omega R_-)} \qquad \text{avec} \qquad n = \frac{1+2k}{2k}$$

la fonction β est déterminée par (4,5 *c*). Dans la suite on omet l'indice $(-)$. La relation (4,5) ne permet pas la détermination de R comme fonction de t; néanmoins il est possible de trouver les dérivées de R par rapport à t comme fonction de R. Par exemple $\dot{R}$ s'écrit

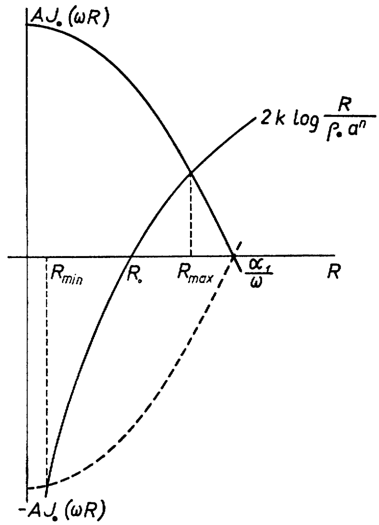
$$(4,6) \qquad \dot{R} = -\frac{ARJ_0^2\omega\sin\omega t}{2kJ_0 - J_0'R\omega\log\left(\dfrac{R}{\rho_0 a^n}\right)} = -\varepsilon\frac{RJ_0\omega\left[A^2J_0^2-\log\left(\dfrac{R}{\rho_0a^n}\right)\right]^{1/2}}{2kJ_0 - J_0'R\omega\log\left(\dfrac{R}{\rho_0 a^n}\right)}$$

où

$$\varepsilon = \frac{\sin\omega t}{|\sin\omega t|}.$$

Pour que l'hypersurface soit du genre temps, la condition $\dot{R}^2 < 1$ doit être satisfaite. Dans (4,5) il y a cinq paramètres : k_0, ρ_0, A, ω, a; la forme de l'hypersurface varie selon le choix de ces paramètres.

Si ωR_0 n'est pas un zéro de la fonction de Bessel J_0, le second membre de l'équation (4,5) est nul pour $R = R_0 \equiv \rho_0 a^n$, donc R prend cette valeur pour $t = \pi/2\omega,\ \pi/\omega,\ \ldots$ Les valeurs maximale et minimale de R sont données par la relation



$$2k \log \left(\frac{R}{\rho_0 a^n}\right) = \pm\ AJ_0(\omega R).$$

La figure représente les fonctions $J_0(\omega R)$ et $2k \log (R/a^n\rho_0)$ en supposant que $\omega R_0 = \omega a^n \rho_0 < \alpha_1, \alpha_1$ étant le premier zéro de la fonction J_0. On voit que pour $A \to \infty$ et $\omega = \text{const.}$, on a $R_{min} \to 0$, $R_{max} \to \alpha_1/\omega$. Pour $A = \text{const.}$, et $\omega \to 0$, R_{min} tend vers $a^n \rho_0 e^{-A/2k}$, $|\dot{R}| \to 0$. Il s'ensuit qu'en choisissant convenablement les valeurs de A et ω nous pouvons obtenir des mouvements avec R_{min} arbitrairement petit et $\dot{R}^2 < 1$ pour toutes les valeurs de t en laissant R_0 fixé.

Les relations (1,5) donnent pour le tenseur de matière

$$S_0^0 = -\frac{1}{8\pi}\frac{e^{\psi-\gamma}}{(1-\dot{R}^2)^{1/2}}\left\{\frac{1-\dot{\beta}a}{R}\right\}$$

$$S_1^1 = -\frac{1}{8\pi}\frac{e^{\psi-\gamma}}{(1-\dot{R}^2)^{1/2}}\left\{\frac{1+4k+4k^2}{R}\dot{\beta}a - \frac{(\dot{R}\ddot{\beta}-\dot{\beta}\ddot{R})a}{a^2\dot{\beta}^2-\dot{R}^2} - \frac{1}{R}\right.$$
$$\left. + 2\psi_{,\rho} + 2\psi_{,t}\frac{\dot{R}}{a} - \gamma_{,\rho} - \gamma_{,t}\frac{\dot{R}}{a} - \frac{\ddot{R}}{1-\dot{R}^2}\right\}$$

$$S_2^2 = -\frac{1}{8\pi}\frac{e^{\psi-\gamma}}{(1-\dot{R}^2)^{1/2}}\left\{\frac{4k^2}{R}\dot{\beta}a - \gamma_{,\rho} - \gamma_{,t}\frac{\dot{R}}{a} - \frac{(\dot{R}\ddot{\beta}-\dot{\beta}\ddot{R})a}{a^2\dot{\beta}^2-\dot{R}^2} - \frac{\ddot{R}}{1-\dot{R}^2}\right\},$$

où les valeurs de toutes les fonctions sont prises sur Σ. Les autres composantes S_a^b sont nulles.

Il nous reste à montrer que le tenseur de matière est physiquement admissible.

La densité superficielle d'énergie $\varepsilon = - S_0^0$ doit être positive, on a donc

$$1 - \dot{\beta} a > 0$$

A partir de (4,2) on voit que $\dot{\beta}$, de même que a doivent être positifs. De (4,3 c) on déduit

$$\dot{\beta}^2 a^2 = \dot{R}^2 + (1 - \dot{R}^2) e^{2\gamma} \left(\frac{R}{\rho_0 a^n} \right)^{-8k^2} a^{-4k}$$

Puisque R varie dans un intervalle fini et $\dot{R}$ satisfait l'inégalité $\dot{R}^2 < 1$, on peut choisir pour $k \neq 0$ les valeurs de a et de ρ_0 de sorte que $\dot{\beta}^2 a^2 < 1$ pour chaque t, sans que ceci change $R_0 = a^n \rho_0$.

L'analyse plus détaillée de la structure de S_a^b montre que, en supposant $0 < 2k + 2k^2 < 1$, on peut choisir les autres paramètres de sorte que les conditions

$$| S_0^0 | > | S_1^1 |, \qquad | S_0^0 | > | S_2^2 |$$

soient satisfaites. Ces conditions assurent que la vitesse du son ne dépasse pas la vitesse de la lumière. Par un autre choix des paramètres on peut satisfaire les conditions plus fortes (3,7 a, b), nécessaires pour que la matière se compose de particules soumises seulement à l'action de leur champ gravitationnel. En même temps on peut avoir R_{min} arbitrairement petit et $| \dot{R} |_{max}$ comparable à 1.

Notre solution représente un cas très spécial, cependant elle montre une différence profonde entre les solutions à symétrie sphérique et à symétrie cylindrique. En effet dans notre cas, R_{min} peut être arbitrairement petit et S_0^0 peut devenir arbitrairement grand; une situation analogue ne peut pas exister pour une solution à symétrie sphérique, à cause de l'existence de la pseudo-singularité de Schwarzschild.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude à Mme Tonnelat, qui m'a accueilli dans son laboratoire de Physique Théorique.

J'exprime ma vive reconnaissance à M. Papapetrou pour les remarques fructueuses qu'il a bien voulu me faire tout au long de la préparation de ce travail.

J'exprime mes vifs remerciements à mes collègues A. Hamoui et B. Léauté pour d'intéressantes discussions.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] L. MARDER, *Proc. Roy. Soc. (London)*, t. **244** A, 1958, p.524.
[*2*] K. S. THORNE, Ph. D. Thesis, Princeton, 1965.
[*3*] C. LANCZOS, *Phys. Letters*, t. **23**, 1929, p. 538.
[*4*] C. LANCZOS, *Ann. de Phys.*, t. **74**, 1924, p. 518.
[*5*] W. ISRAEL, *Nuovo Cimento*, t. **44** B, 1966, p. 1.
ERRATA, *Nuovo Cimento*, t. **48** B, 1967, p. 463.
[*6*] K. KUCHAR, *Czech. J. Phys.*, t. **18** B, 1968, p. 435.
[*7*] A. PAPAPETROU et A. HAMOUI, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. IX, 1968, p. 179.
[*8*] J. LANGER, *Czech. J. Phys.*, t. **19** B, 1969, p. 807.
[*9*] L. MARDER, *Proc. Roy. Soc. (London)*, t. **252** A, 1959, p. 45.
[*10*] N. ROSEN, *Bull. Res. Cains. Israël*, t. **3**, p. 328.
[*11*] L. MARDER, *Proc. Roy. Soc. (London)*, t. **246** A, 1959, p. 133.

(Manuscrit reçu le 15 décembre 1969).