ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

RENÉ-LOUIS CLERC

Résolution des équations aux connexions du cas antisymétrique de la théorie unitaire hypercomplexe. Application à un principe variationnel

Annales de l'I. H. P., section A, tome 12, n° 4 (1970), p. 343-364

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__12_4_343_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XII, n° 4, 1970, p. 343-364. *Physique théorique.*

Résolution des équations aux connexions du cas antisymétrique de la théorie unitaire hypercomplexe. Application à un principe variationnel

par

René-Louis CLERC
(Faculté des Sciences de Toulouse).

RÉSUMÉ. — Nous nous proposons d'utiliser la théorie unitaire complexe hyperbolique ([*1*], [*2*], [*3*]) pour résoudre les classiques équations aux connexions d'Einstein-Schrödinger lorsque le tenseur fondamental de la variété usuelle V_4 (espace-temps à quatre dimensions) est antisymétrique.

Ce tenseur est ici déterminé localement par un quadrivecteur de V_4 en fonction duquel nous obtiendrons une connexion symétrique particulière de la variété satisfaisant aux équations étudiées.

Compte tenu des résultats de cette résolution, nous écrivons alors un principe variationnel, les seules variables indépendantes considérées étant les composantes antisymétriques $k^{\alpha\beta}$; nous en déduisons des équations de champ du cas antisymétrique. De nombreuses simplifications liées essentiellement à des propriétés de symétrie et d'antisymétrie des divers éléments utilisés nous conduisent à des relations élémentaires et le caractère symplectique de notre variété nous permet de conclure à l'invariance d'un scalaire caractéristique de la théorie.

ABSTRACT. — Let us use the hyperbolic complex theory ([*1*], [*2*], [*3*]) to solve the classical connections equations of Einstein-Schrödinger when the fundamental tensor of the ordinary manifold V_4 (four-dimensional space-time) is antisymmetric.

This tensor is here locally determined by a four-vector of V_4 thanks to which we are going to obtain a particular symmetric connection of the manifold satisfying the equations studied. Using the results of this solution, we shall then write a variational principle, the only independant variables used being the antisymmetric components $k^{\alpha\beta}$; from that we deduct the field equations of the antisymmetric case.

A great number of simplifications essentially related to the symmetric and antisymmetric proprieties of the different elements used lead us to elementary relations and the symplectic character of our manifold enable us to conclude the invariance of a scalar characteristic of the theory.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé 343
I. Rappels sur la théorie unitaire hypercomplexe 345
II. Expression du système fondamental (6)-(7)-(8) dans le cas antisymétrique. Premières remarques 347
III. Résolution des équations aux connexions du cas antisymétrique 350
IV. Application à un principe variationnel 356
Conclusion 363
Bibliographie 363

SYNOPSIS

Solution of the Einstein-Schrodinger connections equations in the antisymmetric case. Application to a variational principle.

Abstract 343
I. Recalls on the hypercomplex unitary theory 345
II. Expression of the fundamental system (6)-(7)-(8) in the antisymmetric case. First remarks 347
III. Solution of connections equations in the antisymmetric case 350
IV. Application to a variational principle 356
Conclusion 363
References 363

I. RAPPELS SUR LA THÉORIE UNITAIRE HYPERCOMPLEXE

Comme dans la théorie relativiste de la gravitation et de l'électromagnétisme, l'élément primitif est constitué par une variété espace-temps V_4 à quatre dimensions, qui sera douée ici d'une structure de variété différentiable C^∞ telle que la définit A. Lichnerowicz [*4*].

Par la suite, lorsque nous parlerons de variété, il s'agira de variété réelle différentiable C^∞ dont la dimension sera précisée par un indice inférieur *n*.

On interprète la variété V_4 comme la sous-variété diagonale du produit V_8 de deux variétés identiques W_4 :

$$V_8 = W_4 \times W_4.$$

Cette construction de V_8 lui confère la structure de variété complexe hyperbolique. On sait en effet [*2*] que la donnée d'une variété V_8 à structure hypercomplexe équivaut à celle du produit de deux variétés réelles identiques de dimension quatre. Pour montrer ceci, on utilise tout d'abord une extension quadratique H de l'anneau R des réels : l'anneau non intègre des éléments de la forme

$$z = x + \varepsilon y,$$

avec $x, y \in \mathrm{R}$ et $\varepsilon^2 = +1$.

On définit ensuite sur V_8 une structure différentiable H-complexe : il en est ainsi s'il existe un ensemble de cartes H-complexes dont les domaines recouvrent la variété V_8. Une carte locale H-complexe associe à tout point p de V_8 quatre nombres H-complexes (z^α)

$$z^\alpha = x^\alpha + \varepsilon x^{\alpha^*}, \qquad \alpha \text{ et } \alpha^* = 1, 2, 3, 4,$$

qui sont les coordonnées de p dans la carte considérée.

Si l'on prend dans le R-module H au lieu de la base $(1, \varepsilon)$ précédente

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad e_2 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon),$$

nous avons des coordonnées « produits » sur V_8, notées $(\xi^\alpha \; \xi^{\alpha^*})$ telles que

$$z^\alpha = e_1 \xi^\alpha + e_2 \xi^{\alpha^*},$$

et

$$x^\alpha = \frac{\xi^\alpha + \xi^{\alpha^*}}{2} \quad , \quad x^{\alpha^*} = \frac{\xi^\alpha - \xi^{\alpha^*}}{2}.$$

Nous parlerons des coordonnées « adaptées » (z^α, z^{α^*}) et des coordonnées « diagonales associées » (x^α, x^{α^*}).

Remarquons que l'espace-temps V_4 s'identifie à la sous-variété fermée

$$x^{\alpha^*} = 0, \qquad (\text{ou } \xi^\alpha = \xi^{\alpha^*}).$$

Sur l'espace fibré des repères diagonaux naturels de la variété V_8 on considère les connexions telles que

$$\text{(1)} \qquad L^r_{st} = L^{r^*}_{t^*s} \quad , \quad r, s, t, r^*, \ldots = 1, 2, 3, 4\,;$$

on détermine ainsi sur V_4 une connexion $\mathfrak{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ et un tenseur $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ [*1*] en posant en repères diagonaux naturels sur V_4 :

$$\text{(2)} \qquad L^\alpha_{\beta\gamma} = L^{\alpha^*}_{\gamma^*\beta} = L^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = L^{\alpha^*}_{\gamma\beta^*} = \mathfrak{L}^\alpha_{\beta\gamma},$$

$$\text{(3)} \qquad L^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\gamma^*\beta} = L^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma^*} = L^\alpha_{\gamma\beta^*} = \Lambda^\alpha_{\beta\gamma}.$$

En outre, on identifie sur V_4 le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ à certaines composantes d'un tenseur symétrique $\mathcal{G}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 8)$ de V_8 tel que, toujours en repères diagonaux :

$$\text{(4)} \qquad \widehat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta} = \widehat{\mathcal{G}}_{\alpha^*\beta^*} = 0,$$

$$\text{(5)} \qquad g_{\alpha\beta} = \widehat{\mathcal{G}}_{\alpha^*\beta} = \widehat{\mathcal{G}}_{\beta^*\alpha},$$

le $\frown$ indiquant la restriction à V_4.

On généralise enfin le théorème de Ricci en postulant que pour tout chemin de V_4, la dérivée covariante [1] du tenseur $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ est nulle

$$\nabla\mathcal{G}_{\alpha\beta^*} = \nabla\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \nabla\mathcal{G}_{\alpha^*\beta^*} = 0.$$

On obtient ainsi le système fondamental de la théorie qui s'écrira dans V_4 :

$$\text{(6)} \qquad \partial_\rho g_{\alpha\beta} - \mathfrak{L}^\sigma_{\alpha\rho} g_{\sigma\beta} - \mathfrak{L}^\sigma_{\rho\beta} g_{\alpha\sigma} = 0,$$

$$\text{(7)} \qquad \Lambda^\sigma_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} + \Lambda^\sigma_{\rho\beta} g_{\sigma\alpha} = 0,$$

$$\text{(8)} \qquad \Lambda^\sigma_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} + \Lambda^\sigma_{\beta\rho} g_{\alpha\sigma} = 0.$$

Nous nous proposons de considérer ces équations (6)-(7)-(8) dans le cas

---

(1) Dans cette étude comme dans la théorie de A. Crumeyrolle, on utilise la dérivation covariante (+) :

$$\nabla_\rho V^\alpha = \partial_\rho V^\alpha + \mathfrak{L}^\alpha_{\sigma\rho} V^\sigma.$$

où le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est antisymétrique et de déterminer les connexions solutions du système (6); pour cela, nous utiliserons essentiellement la théorie des nombres complexes hyperboliques et les divers repères introduits plus haut [2].

II. EXPRESSION DU SYSTÈME FONDAMENTAL (6)-(7)-(8) DANS LE CAS ANTISYMÉTRIQUE. PREMIÈRES REMARQUES

Le tenseur fondamental sera noté ici $k_{\alpha\beta}$ et ses composantes contravariantes seront définies de façon usuelle par

$$k_{\alpha\beta}k^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\gamma.$$

Nous pouvons exprimer les équations (7)-(8) en faisant intervenir explicitement les parties symétrique et antisymétrique du tenseur $\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ et obtenir ainsi, grâce à l'antisymétrie de $k_{\alpha\beta}$, des équations en $\Lambda_{(\beta\gamma)}^\alpha$ et d'autres en $\Lambda_{[\beta\gamma]}^\alpha$. Le système étudié se présente donc sous la forme

$$\partial_\rho k_{\alpha\beta} - \mathfrak{L}_{\alpha\rho}^\sigma k_{\sigma\beta} - \mathfrak{L}_{\rho\beta}^\sigma k_{\alpha\sigma} = 0, \tag{9}$$

$$\Lambda_{[\alpha\rho]}^\sigma k_{\beta\sigma} + \Lambda_{[\beta\rho]}^\sigma k_{\alpha\sigma} = 0, \tag{10}$$

$$\Lambda_{(\alpha\rho)}^\sigma k_{\beta\sigma} + \Lambda_{(\beta\rho)}^\sigma k_{\alpha\sigma} = 0, \tag{11}$$

où α et tout indice grec varient de 1 à 4.

Formons à partir des équations (11) la combinaison algorithmique qui définit en géométrie riemanienne les symboles de Christoffel; comme il est légitime de supposer que le déterminant k, positif, des composantes $k_{\alpha\beta}$ est non nul, nous obtenons facilement

$$\Lambda_{(\alpha\rho)}^\sigma = 0.$$

Quant aux relations (10) elles conduisent à poser

$$\Lambda_{[\alpha\rho]}^\sigma = \sqrt{k}k^{\sigma\beta}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\gamma}U^\gamma,$$

où les coefficients U^γ représentent les composantes contravariantes d'un vecteur arbitraire de la variété V_4 et $\varepsilon_{\beta\alpha\rho\gamma}$ l'indicateur classique de permutation.

Ces deux résultats déterminent entièrement le tenseur $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ que l'on notera

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} = k^{\alpha\sigma}\eta_{\sigma\beta\gamma\tau}U^{\tau},$$

où $\eta_{\sigma\beta\gamma\tau}$ est le tenseur antisymétrique de Levi-Civita.

Les équations aux connexions (9) entraînent directement par permutation circulaire et addition la propriété remarquable suivante des dérivées premières des composantes $k_{\alpha\beta}$:

$$\partial_{\rho}k_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}k_{\beta\rho} + \partial_{\beta}k_{\rho\alpha} = 0. \tag{12}$$

Si nous appelons Ω la forme différentielle extérieure quadratique de coefficients $k_{\alpha\beta}$

$$\Omega = k_{\alpha\beta}dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta},$$

les relations (12) expriment simplement que la différentielle extérieure de Ω est nulle. La réciproque du théorème de Poincaré permet alors d'affirmer que localement la deux-forme fermée Ω est la différentielle extérieure d'une une-forme ω :

$$\Omega = d\omega;$$

nous définissons ainsi localement sur V_4 un vecteur de composantes F_{α} tel que

$$\boxed{k_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}F_{\beta} - \partial_{\beta}F_{\alpha}}. \tag{13}$$

On peut appeler F_{α} un potentiel-vecteur généralisé ou un superpotentiel local.

La donnée sur V_4 de la forme différentielle extérieure quadratique Ω, différentiable, de rang quatre en tout point de V_4 et fermée, définit sur V_4 une structure de variété symplectique [5].

En outre, il existe un système (C) de coordonnées (x^{α}) suivant lequel la forme de Pfaff ω prend une forme canonique qui nous fournit pour Ω l'expression

$$\Omega = dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3.$$

A partir de cette décomposition on peut déterminer facilement les composantes $k_{\alpha\beta}$ dans le système (C) :

$$(k_{\alpha\beta})_C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe bien sûr d'autres systèmes de coordonnées suivant lesquels les composantes $k_{\alpha\beta}$ sont des constantes [*6*], mais c'est ce dernier (C) qui est le plus intéressant.

Dans le système (C) certaines équations en $k_{\alpha\beta}$ auront donc des expressions simples qui pourront induire, sous réserve d'un critère de tensorialité, des relations intrinsèques [Cf. paragraphe IV].

Les composantes $k_{\alpha\beta}$ étant supposées données, nous pouvons aussi déterminer immédiatement à partir des équations (9), l'expression des composantes symétriques contractées de la connexion de V_4 :

$$\mathfrak{L}^{\sigma}_{(\rho\sigma)} = \frac{1}{2} k^{\alpha\beta}\partial_{\rho}k_{\alpha\beta} \equiv \gamma_{\rho}, \tag{14}$$

en posant de façon classique [*4*]

$$\gamma_{\rho} = \frac{1}{2} k^{\alpha\beta}\partial_{\rho}k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} k_{\alpha\beta}\partial_{\rho}k^{\alpha\beta} = \frac{\partial_{\rho}\sqrt{k}}{\sqrt{k}}.$$

Formons enfin la combinaison algorithmique classique déjà utilisée, mais cette fois à partir des équations (9) :

$$\frac{1}{2}(\partial_{\rho}k_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}k_{\beta\rho} - \partial_{\beta}k_{\rho\alpha}) = \mathfrak{L}^{\sigma}_{\rho\beta}k_{\alpha\sigma} + \mathfrak{L}^{\sigma}_{\beta\alpha}k_{\sigma\rho} ;$$

on déduit alors les propriétés suivantes pour la partie antisymétrique de la connexion :

$$\mathfrak{L}^{\sigma}_{[\rho\beta]}k_{\alpha\sigma} + \mathfrak{L}^{\sigma}_{[\beta\alpha]}k_{\sigma\rho} = 0,$$

et l'on est ainsi conduit à poser

$$\mathfrak{L}^{\sigma}_{[\rho\beta]} = k^{\sigma\alpha}A_{[\rho\beta\alpha]}, \tag{15}$$

où les quantités

$$A_{[\rho\beta\alpha]} = \mathfrak{L}^{\sigma}_{[\rho\beta]}k_{\sigma\alpha} = \mathfrak{L}^{\sigma}_{[\rho\beta]}(\partial_{\sigma}F_{\alpha} - \partial_{\alpha}F_{\sigma})$$

sont des coefficients tensoriels arbitraires complètement antisymétriques que l'on peut encore exprimer par

$$A_{[\rho\beta\alpha]} = \eta_{\rho\beta\alpha\gamma}V^{\gamma},$$

V^{γ} représentant un vecteur arbitraire de la variété V_4.

Nous introduirons aussi le vecteur de torsion de la connexion

$$S_{\rho} \equiv \mathfrak{L}^{\sigma}_{[\rho\sigma]} = k^{\sigma\gamma}A_{[\rho\sigma\gamma]},$$

pour montrer que, compte tenu de l'expression de $A_{[\rho\beta\alpha]}$ et de la relation classique [8]

$$k_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\eta_{\nu\rho\alpha\sigma}k^{\alpha\sigma},$$

nous avons encore

$$S_\rho = 2V_\rho,$$

en définissant

$$V_\rho = k_{\rho\nu}V^\nu.$$

On conclura alors qu'il y a équivalence stricte [9] entre vecteur de torsion nul et connexion symétrique :

$$\boxed{S_\rho = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{L}^\alpha_{\beta\gamma} = \mathfrak{L}^\alpha_{\gamma\beta}}\,.$$

Pour résoudre complètement les équations (9), il nous reste à déterminer la partie symétrique $\mathfrak{L}^\alpha_{(\beta\gamma)}$ de notre connexion.

III. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS AUX CONNEXIONS DU CAS ANTISYMÉTRIQUE

Nous allons, pour cela, nous replacer dans la variété hypercomplexe V_8 et utiliser la théorie des nombres hyperboliques.

Rappelons l'expression des coordonnées adaptées (z^α, z^{α^*}) en fonction des coordonnées associées (x^α, x^{α^*}) :

$$z^\alpha = x^\alpha + \varepsilon x^{\alpha^*}, \qquad \varepsilon^2 = +1.$$

Il est possible d'introduire sur V_8, du moins localement, un tenseur symétrique réel de composantes covariantes

$$\gamma_{\alpha\beta},\ \gamma_{\alpha^*\beta^*},\ \gamma_{\alpha\beta^*} \quad \text{en coordonnées} \quad (z^\alpha, z^{\alpha^*}),$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta},\ \mathcal{G}_{\alpha^*\beta^*},\ \mathcal{G}_{\alpha\beta^*} \quad \text{en coordonnées} \quad (x^\alpha, x^{\alpha^*})\,;$$

c'est avec ces dernières composantes que nous avons écrit les relations (4) et (5) qui définissent le tenseur $g_{\alpha\beta}$ sur V_4 dans le cas général. Notons que les $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ sont des fonctions différentiables au sens classique des coordonnées x^α, x^{α^*}.

Avant de tenir compte de l'antisymétrie de $k_{\alpha\beta}$, séparons les différentes composantes tensorielles en repères adaptés, en parties « réelles » et « imaginaires » sur l'anneau H des nombres hyperboliques :

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \varphi_{\alpha\beta} + \varepsilon\mu_{\alpha\beta}, \\ \gamma_{\alpha^*\beta^*} &= \varphi_{\alpha^*\beta^*} + \varepsilon\mu_{\alpha^*\beta^*}, \\ \gamma_{\alpha\beta^*} &= \varphi_{\alpha\beta^*} + \varepsilon\mu_{\alpha\beta^*}\ ; \end{aligned}$$

un calcul simple nous permet alors d'exprimer les composantes correspondantes en repères associés :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\alpha\beta} &= 2(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta^*}) \quad , \quad \mathcal{G}_{\alpha\beta^*} = 2(\mu_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha^*\beta}), \\ \mathcal{G}_{\alpha^*\beta^*} &= 2(\varphi_{\alpha\beta} - \varphi_{\alpha\beta^*}) \quad , \quad \mathcal{G}_{\alpha^*\beta} = 2(\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha^*\beta}). \end{aligned}$$

Les conditions (5) postulées dans le cas général entraînent ici (le $\frown$ indiquant toujours la restriction à V_4)

$$(16) \qquad \widehat{\varphi}_{\alpha\beta} = \widehat{\varphi}_{\alpha\beta^*} = 0.$$

Par restriction à V_4, les diverses composantes introduites plus haut se réduisent dans notre cas particulier à

$$(17) \qquad \widehat{\gamma}_{\alpha\beta} = \varepsilon\widehat{\mu}_{\alpha\beta},$$

$$(18) \qquad \widehat{\gamma}_{\alpha\beta^*} = \varepsilon\widehat{\mu}_{\alpha\beta^*},$$

$$(19) \qquad \widehat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta^*} = \widehat{\mathcal{G}}_{\beta^*\alpha} = k_{\alpha\beta} \quad \text{ou encore} \quad \widehat{\mathcal{G}}_{\alpha^*\beta} = \widehat{\mathcal{G}}_{\beta\alpha^*} = -\,k_{\alpha\beta}.$$

D'autre part, les diverses propriétés de symétrie et d'antisymétrie des termes contenus dans les relations précédentes conduisent à

$$(20) \qquad \widehat{\mu}_{\alpha\beta} = 0,$$

$$(21) \qquad \widehat{\mu}_{\alpha\beta^*} = -\frac{1}{2}k_{\alpha\beta} \quad , \quad \widehat{\mu}_{\alpha^*\beta} = \frac{1}{2}k_{\alpha\beta},$$

c'est-à-dire encore

$$(22) \qquad \widehat{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \widehat{\gamma}_{\alpha^*\beta^*} = 0,$$

$$(23) \qquad \widehat{\gamma}_{\alpha\beta^*} = -\frac{\varepsilon}{2}k_{\alpha\beta} \quad , \quad \widehat{\gamma}^{\alpha\beta^*} = -\,2\varepsilon k^{\alpha\beta},$$

en définissant les composantes contravariantes $\gamma^{\alpha\beta^*}$ par les relations classiques

$$\gamma_{\alpha\sigma^*}\gamma^{\alpha\beta^*} = \delta^{\beta^*}_{\sigma^*}.$$

Les conditions postulées pour généraliser le théorème de Ricci s'écrivent en repères adaptés

$$\nabla_k \gamma_{ij} = 0 \qquad (i, j, k = 1, \dots, 8)$$

et s'explicitent dans le cas antisymétrique en [9]

$$W^{\sigma^*}_{\alpha\rho} \gamma_{\sigma^*\beta} + W^{\sigma^*}_{\beta\rho} \gamma_{\alpha\sigma^*} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta^*}}{\partial z^\rho} - W^{\sigma}_{\alpha\rho} \gamma_{\sigma\beta^*} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial z^{\rho^*}} = 0, \text{ (et formules « complexes » conjuguées)}, \tag{26}$$

où les quantités $W^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont les coefficients, en repères adaptés, de la connexion L^r_{st} de V_8.

Quant aux propriétés (1) de cette connexion, elles se notent en repères adaptés [2] :

$$W^{\alpha}_{\beta\gamma} = W^{\alpha}_{\gamma\beta}, \tag{27}$$

$$W^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = - W^{\alpha}_{\gamma^*\beta^*}, \tag{28}$$

$$W^{\alpha}_{\beta^*\gamma} = W^{\alpha}_{\beta\gamma^*} = 0. \tag{29}$$

Les relations (25) et (27) nous fournissent aisément

$$W^{\sigma}_{\alpha\rho} = \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\beta^*} \left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta^*}}{\partial z^\rho} + \frac{\partial \gamma_{\rho\beta^*}}{\partial z^\alpha} \right), \tag{30}$$

cependant que les équations (24) caractérisent des propriétés d'antisymétrie.

Il nous suffit maintenant de remarquer que par restriction à la variété espace-temps V_4 les composantes (27) et (28) se décomposent sur l'anneau H des nombres hyperboliques en [2]

$$\widehat{W}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathfrak{L}^{\alpha}_{(\beta\gamma)} + \varepsilon \Lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)}, \tag{31}$$

$$\widehat{W}^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = \mathfrak{L}^{\alpha}_{[\beta\gamma]} + \varepsilon \Lambda^{\alpha}_{[\beta\gamma]} ; \tag{32}$$

d'autre part les relations indiquées plus haut entre les bases des divers repères utilisés entraînent les identités formelles

$$\frac{\partial}{\partial z^\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^{\rho^*}} \right).$$

Explicitons alors les équations (30) en passant aux restrictions :

$$\widehat{W}^{\sigma}_{\alpha\rho} = -\varepsilon k^{\sigma\beta}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\widehat{\varphi}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\widehat{\varphi}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\rho^*}} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\widehat{\mu}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\rho}} + \frac{1}{2}\frac{\partial\widehat{\mu}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\rho^*}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial\widehat{\varphi}_{\rho\beta^*}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\widehat{\varphi}_{\rho\beta^*}}{\partial x^{\alpha^*}} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\widehat{\mu}_{\rho\beta^*}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2}\frac{\partial\widehat{\mu}_{\rho\beta^*}}{\partial x^{\alpha^*}}\right),$$

c'est-à-dire en utilisant les résultats (21) et en notant $\partial_{\rho^*} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^{\rho^*}}$:

$$\widehat{W}^{\sigma}_{\alpha\rho} = \frac{k^{\sigma\beta}}{4}(\partial_{\rho}k_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}k_{\rho\beta}) - \frac{k^{\sigma\beta}}{2}(\partial_{\rho^*}\widehat{\varphi}_{\alpha\beta^*} + \partial_{\alpha^*}\widehat{\varphi}_{\rho\beta^*})$$
$$- \frac{\varepsilon}{2}k^{\sigma\beta}\left(\partial_{\rho}\widehat{\varphi}_{\alpha\beta^*} + \partial_{\alpha}\widehat{\varphi}_{\rho\beta^*} - \frac{1}{2}\partial_{\rho^*}k_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\partial_{\alpha^*}k_{\rho\beta}\right). \tag{33}$$

D'après les relations (16), (20) et (26) nous avons

$$\partial_{\rho}\widehat{\varphi}_{\alpha\beta} = \partial_{\rho}\widehat{\varphi}_{\alpha\beta^*} = \partial_{\rho^*}\widehat{\mu}_{\alpha\beta} = 0, \tag{34}$$

de plus, la résolution des équations (10)-(11) nous a conduit en particulier à $\Lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0$; par conséquent, la comparaison des expressions (31) et (33) nous fournit nécessairement

$$\partial_{\rho^*}k_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha^*}k_{\rho\beta} = 0$$

et ainsi les coefficients connectifs se réduisent sur V_4 à

$$\widehat{W}^{\sigma}_{\alpha\rho} = \frac{k^{\sigma\beta}}{4}(\partial_{\rho}k_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}k_{\rho\beta}) + k^{\sigma\beta}B_{(\alpha\rho)\beta},$$

où nous avons posé

$$B_{(\alpha\rho)\beta} = -\frac{1}{2}(\partial_{\rho^*}\widehat{\varphi}_{\alpha\beta^*} + \partial_{\alpha^*}\widehat{\varphi}_{\rho\beta^*}). \tag{35}$$

La partie symétrique de la connexion cherchée de V_4 peut donc s'écrire :

$$\mathfrak{L}^{\sigma}_{(\alpha\rho)} = \frac{k^{\sigma\beta}}{4}(\partial_{\rho}k_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}k_{\rho\beta}) + k^{\sigma\beta}B_{(\alpha\rho)\beta} \tag{36}$$

où les quantités $B_{(\alpha\rho)\beta}$ sont symétriques en leurs deux premiers indices mais ne sont pas de nature tensorielle.

Il nous reste à préciser ces coefficients : pour cela, nous pouvons porter l'expression générale

$$\mathfrak{L}^{\sigma}_{\alpha\rho} = \frac{k^{\sigma\beta}}{4}(\partial_{\rho}k_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}k_{\rho\beta}) + k^{\sigma\beta}B_{(\alpha\rho)\beta} + k^{\sigma\beta}A_{[\alpha\rho\beta]} \tag{37}$$

de la connexion dans les équations (9). Il vient ainsi pour les quantités $B_{(\alpha\rho)\beta}$ les conditions suivantes :

$$B_{(\alpha\rho)\beta} - B_{(\rho\beta)\alpha} = \frac{1}{4}\partial_\rho k_{\alpha\beta}, \tag{38}$$

ou encore compte tenu de (12)

$$B_{(\alpha\rho)\beta} - B_{(\rho\beta)\alpha} = \frac{1}{4}\partial^2_{\rho\alpha}F_\beta - \frac{1}{4}\partial^2_{\rho\beta}F_\alpha. \tag{39}$$

Par conséquent, contrairement aux coefficients tensoriels complètement antisymétriques $A_{[\alpha\rho\beta]}$, les quantités $B_{(\alpha\rho)\beta}$ ne sont pas totalement indéterminées : elles sont liées par les relations (38).

Il est clair qu'une solution particulière de nos équations (9) sera par exemple une connexion symétrique; pour déterminer une telle solution, nous pouvons choisir des coefficients $B_{(\alpha\rho)\beta}$ tels que

$$B_{(\alpha\rho)\beta} = \frac{1}{4}\partial^2_{\rho\alpha}F_\beta + T_{(\alpha\rho\beta)}, \tag{40}$$

les $T_{(\alpha\rho\beta)}$ étant des coefficients tensoriels arbitraires totalement symétriques.

Une solution symétrique particulière sera donc

$$\bar{\mathfrak{L}}^\sigma_{\alpha\rho} = \frac{k^{\sigma\gamma}}{4}(\partial_\rho k_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha k_{\rho\gamma} + \partial^2_{\rho\alpha}F_\gamma), \tag{41}$$

c'est-à-dire d'après (13)

$$\boxed{\bar{\mathfrak{L}}^\sigma_{\alpha\rho} = \frac{k^{\sigma\gamma}}{4}(3\partial^2_{\rho\alpha}F_\gamma - \partial^2_{\rho\gamma}F_\alpha - \partial^2_{\alpha\gamma}F_\rho)}\ ; \tag{42}$$

quant aux autres solutions symétriques correspondant au choix (40) pour les quantités $B_{(\alpha\rho)\beta}$, elles peuvent se noter

$$\mathfrak{L}^\sigma_{(\alpha\rho)} = \frac{k^{\sigma\gamma}}{4}(3\partial^2_{\rho\alpha}F_\gamma - \partial^2_{\rho\gamma}F_\alpha - \partial^2_{\alpha\gamma}F_\rho) + k^{\sigma\gamma}T_{(\alpha\rho\gamma)}. \tag{43}$$

La solution générale (37) peut ainsi s'écrire, compte tenu de (40) :

$$\mathfrak{L}^\sigma_{\alpha\rho} = \frac{k^{\sigma\gamma}}{4}(3\partial^2_{\rho\alpha}F_\gamma - \partial^2_{\rho\gamma}F_\alpha - \partial^2_{\alpha\gamma}F_\rho) + k^{\sigma\gamma}K_{\alpha\rho\gamma}, \tag{44}$$

où

$$K_{\alpha\rho\gamma} = T_{(\alpha\rho\gamma)} + A_{[\alpha\rho\gamma]}$$

est un tenseur arbitraire mais décomposable en partie symétrique $T_{(\alpha\rho\gamma)}$ et antisymétrique $A_{[\alpha\rho\gamma]}$.

En résumé, nous pouvons dresser le tableau suivant des solutions de notre système (9)-(10)-(11).

Solutions du système fondamental (9)-(10)-(11).

Équations (10)-(11)	$\Lambda^{\sigma}_{[\alpha\rho]}k_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{[\beta\rho]}k_{\alpha\sigma} = 0$ $\Lambda^{\sigma}_{(\alpha\rho)}k_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{(\beta\rho)}k_{\alpha\sigma} = 0$
Solutions :	$\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} = k^{\alpha\sigma}\eta_{\sigma\beta\gamma\tau}U^{\tau}$ U^{τ} vecteur arbitraire de V_4 $\Rightarrow \Lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0, \quad \Lambda^{\rho}_{\rho\alpha} = -\Lambda^{\rho}_{\alpha\rho} = -2k_{\alpha\sigma}U^{\sigma} = -2U_{\alpha}$
Équations (9)	$\partial_{\rho}k_{\alpha\beta} - \mathfrak{L}^{\sigma}_{\alpha\rho}k_{\sigma\beta} - \mathfrak{L}^{\sigma}_{\rho\beta}k_{\alpha\sigma} = 0$
Solutions :	$\mathfrak{L}^{\sigma}_{\alpha\rho} = \frac{k^{\sigma\gamma}}{4}\left(3\partial^{2}_{\alpha\rho}F_{\gamma} - \partial^{2}_{\rho\gamma}F_{\alpha} - \partial^{2}_{\alpha\gamma}F_{\rho}\right) + k^{\sigma\gamma}K_{\alpha\rho\gamma}$ avec : $\begin{cases} \partial_{\alpha}F_{\beta} - \partial_{\beta}F_{\alpha} = k_{\alpha\beta} & (F_{\alpha} \text{ vecteur arbitraire}) \\ K_{\alpha\rho\gamma} = T_{(\alpha\rho\gamma)} + A_{[\alpha\rho\gamma]} & (T \text{ et } A \text{ tenseurs arbitraires}) \end{cases}$
ou encore :	$\mathfrak{L}^{\sigma}_{\alpha\rho} = \frac{k^{\sigma\gamma}}{4}(\partial_{\alpha}k_{\rho\gamma} + \partial_{\rho}k_{\alpha\gamma}) + k^{\sigma\gamma}B_{(\alpha\rho)\gamma} + k^{\sigma\gamma}A_{[\alpha\rho\gamma]}$ avec : $B_{(\alpha\rho)\gamma} - B_{(\gamma\rho)\alpha} = \frac{1}{4}\partial_{\rho}k_{\alpha\gamma}$ ($B_{(\alpha\rho)\gamma}$ coefficients non tensoriels)
Remarque :	$\mathfrak{L}^{\sigma}_{[\alpha\rho]} = k^{\sigma\gamma}A_{[\alpha\rho\gamma]} = S^{\sigma}_{\alpha\rho}$ tenseur de torsion de V_4 $S_{\rho} = \mathfrak{L}^{\sigma}_{[\rho\sigma]} = k^{\sigma\gamma}A_{[\rho\sigma\gamma]}$ vecteur de torsion de V_4

Le caractère complexe hyperbolique de la théorie de A. Crumeyrolle nous a donc permis de donner une résolution des équations aux connexions d'Einstein-Schrödinger dans le cas d'un tenseur $g^{\alpha\beta}$ antisymétrique. Il est à remarquer que la solution particulière symétrique (41) ne peut s'exprimer en fonction des $k_{\alpha\beta}$ seuls, mais par contre, est simplement déterminée au moyen des dérivées du vecteur local F_α. D'autre part, la nature tensorielle du terme $k^{\sigma\gamma}K_{\alpha\rho\gamma}$ est très avantageuse pour lever l'indétermination qui intervient dans l'expression (44); enfin, la propriété du tenseur $K_{\alpha\rho\gamma}$ nous permet de bien séparer les expressions des parties symétrique et antisymétrique de la connexion.

Nous allons maintenant utiliser ces résultats pour écrire un principe variationnel sur V_4 avec comme variables de champ les composantes $k^{\alpha\beta}$ ([*9*] [*10*]).

IV. APPLICATION A UN PRINCIPE VARIATIONNEL

A partir du tenseur de courbure R^i_{jkl} $(i, j, k, l = 1, 2, ..., 8)$ de la connexion de la variété V_8 utilisée, on détermine [*1*] par contraction et restriction à V_4 deux tenseurs du type de Ricci qui s'écrivent

$$(45)\qquad P_{\alpha\beta} = \partial_\lambda \mathfrak{L}^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\beta \mathfrak{L}^\lambda_{\alpha\lambda} + \mathfrak{L}^\lambda_{\rho\lambda}\mathfrak{L}^\rho_{\alpha\beta} - \mathfrak{L}^\lambda_{\rho\beta}\mathfrak{L}^\rho_{\alpha\lambda} + \Lambda^\lambda_{\lambda\rho}\Lambda^\rho_{\alpha\beta} - \Lambda^\lambda_{\beta\rho}\Lambda^\rho_{\alpha\lambda},$$

$$(46)\qquad Q_{\alpha\beta} = \partial_\lambda \Lambda^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Lambda^\lambda_{\alpha\lambda} + \mathfrak{L}^\lambda_{\lambda\rho}\Lambda^\rho_{\alpha\beta} - \mathfrak{L}^\lambda_{\beta\rho}\Lambda^\rho_{\alpha\lambda} + \Lambda^\lambda_{\rho\lambda}\mathfrak{L}^\rho_{\alpha\beta} - \Lambda^\lambda_{\rho\beta}\mathfrak{L}^\rho_{\alpha\lambda}.$$

On peut en déduire par pseudo-hermiticité les tenseurs $\overline{P}_{\alpha\beta}$ et $\overline{Q}_{\alpha\beta}$; d'après le principe de pseudo-hermiticité introduit par Einstein [*7*] les équations du champ doivent demeurer invariantes quand on remplace $\mathfrak{L}^\alpha_{\beta\gamma}$, $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$, $g_{\alpha\beta}$ respectivement par

$$\overline{\mathfrak{L}}^\alpha_{\beta\gamma} = \mathfrak{L}^\alpha_{\gamma\beta} \quad , \quad \overline{\Lambda}^\alpha_{\beta\gamma} = \Lambda^\alpha_{\gamma\beta}, \qquad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}.$$

Ainsi, nous aurons

$$(47)\qquad \overline{P}_{\beta\alpha} = \partial_\lambda \mathfrak{L}^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \mathfrak{L}^\lambda_{\lambda\beta} + \mathfrak{L}^\lambda_{\lambda\rho}\mathfrak{L}^\rho_{\alpha\beta} - \mathfrak{L}^\lambda_{\alpha\rho}\mathfrak{L}^\rho_{\lambda\beta} + \Lambda^\lambda_{\rho\lambda}\Lambda^\rho_{\alpha\beta} - \Lambda^\lambda_{\rho\alpha}\Lambda^\rho_{\lambda\beta},$$

$$(48)\qquad \overline{Q}_{\beta\alpha} = \partial_\lambda \Lambda^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \Lambda^\lambda_{\lambda\beta} + \mathfrak{L}^\lambda_{\rho\lambda}\Lambda^\rho_{\alpha\beta} - \mathfrak{L}^\lambda_{\rho\alpha}\Lambda^\rho_{\lambda\beta} + \Lambda^\lambda_{\lambda\rho}\mathfrak{L}^\rho_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\rho}\mathfrak{L}^{\lambda\rho}_{\lambda\beta}.$$

Dans le lagrangien on introduira avec A. Crumeyrolle [*3*]

$$\sqrt{k}\,k^{\alpha\beta}\left[\frac{P_{\alpha\beta} + \overline{P}_{\beta\alpha} + \theta(Q_{c\beta} + \overline{Q}_{\beta\alpha})}{2}\right],$$

θ étant une fonction scalaire dépendant seulement des coordonnées x^α de la variété V_4.

Puisque nous nous proposons d'écrire un principe variationnel à partir des variables $k^{\alpha\beta}$, il nous reste à préciser les conditions imposées à ces composantes par nos équations fondamentales (9)-(10)-(11).

Dans la théorie hypercomplexe [3] comme dans la théorie d'Einstein-Schrödinger ([4] [8]), on postule sur le tenseur $g_{\alpha\beta}$ le plus général (c'est-à-dire ne possédant *a priori* aucune propriété de symétrie) les conditions

$$\partial_\rho(\sqrt{|g|}\, g^{[\rho\alpha]}) = 0, \tag{49}$$

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) \neq 0. \tag{50}$$

Ici nous avons vu que les équations aux connexions (9) entraînaient, pour les composantes $k_{\alpha\beta}$, les relations (12)

$$\partial_\rho k_{\alpha\beta} + \partial_\alpha k_{\beta\rho} + \partial_\beta k_{\rho\alpha} = 0\ ;$$

d'autre part, un résultat classique [4] reliant les composantes covariantes et contravariantes du tenseur fondamental

$$k^{\lambda\sigma} k^{\rho\mu} \frac{\partial k_{\rho\sigma}}{\partial u} = -\frac{\partial k^{\lambda\mu}}{\partial u} \tag{51}$$

(les $k_{\alpha\beta}$ étant des fonctions différentiables d'une variable u), nous permet [9] de déduire de (12)

$$\partial_\rho k^{\rho\alpha} + \gamma_\rho k^{\rho\alpha} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\partial_\rho(\sqrt{k}\, k^{\rho\alpha}) = 0. \tag{52}$$

Réciproquement, les relations (52) entraînent (12). Par conséquent, dans le cas antisymétrique il y a équivalence entre les conditions classiques (52) et les relations (12) déduites des équations aux connexions. Ainsi, le principe variationnel sera appliqué à partir d'un lagrangien ([1], [10])

$$\boxed{\mathrm{L} = \sqrt{k}\, k^{\alpha\beta}\left(\frac{\mathrm{P}_{\alpha\beta} + \overline{\mathrm{P}}_{\beta\alpha}}{2} + \theta\, \frac{\mathrm{Q}_{\alpha\beta} + \overline{\mathrm{Q}}_{\beta\alpha}}{2}\right) - 2\sigma_\alpha \partial_\rho(\sqrt{k}\, k^{\alpha\rho})} \tag{53}$$

où les σ_α sont les classiques multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions (12) équivalentes à (52).

D'autre part, dans les théories générales classiques ([1] [4]), les relations (49) sont équivalentes à la nullité du vecteur de torsion et entraînent

$$\partial_\alpha \mathfrak{L}^\rho_{\beta\rho} = \partial_\beta \mathfrak{L}^\rho_{\rho\alpha}\ ;$$

dans le cas antisymétrique, ces résultats ne sont plus valables. Les équations (52) n'ont aucune incidence sur le vecteur de torsion S_ρ de notre variété V_4 qui est *a priori* non nul; pour les coefficients de la connexion nous avons alors simplement :

(54) $$\partial_\beta \mathfrak{L}^\rho_{\rho\alpha} = \partial_\alpha \mathfrak{L}^\rho_{\beta\rho} - \partial_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha,$$

relations déduites des équations

$$\partial_\alpha \gamma_\beta = \partial_\beta \gamma_\alpha,$$

elles-mêmes directement obtenues à partir des formules usuelles de dérivation (51).

A partir d'ici, nous utiliserons la résolution du paragraphe précédent, c'est-à-dire les expressions (15) et (36) pour les coefficients connectifs; nous ne devons pas, en effet, tenir compte de l'existence du vecteur F_α ou des relations (12) dans le principe variationnel : ces équations (12) ou (52) représentant des conditions postulées *a priori* sur les $k_{\alpha\beta}$.

D'après (45) et (47)

$$\frac{P_{\alpha\beta} + \bar{P}_{\beta\alpha}}{2} = R_{\alpha\beta} + \Lambda^\rho_{\alpha\beta}\Lambda^\lambda_{(\lambda\rho)} - \Lambda^\lambda_{\beta\rho}\Lambda^\rho_{\alpha\lambda} - S_\rho \mathfrak{L}^\rho_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha S_\beta + \partial_\beta S_\alpha),$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci usuel de la connexion $\mathfrak{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ de V_4 :

(55) $$R_{\alpha\beta} = \partial_\lambda \mathfrak{L}^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\beta \mathfrak{L}^\lambda_{\alpha\lambda} + \mathfrak{L}^\rho_{\alpha\beta}\mathfrak{L}^\lambda_{\rho\lambda} - \mathfrak{L}^\lambda_{\rho\beta}\mathfrak{L}^\rho_{\alpha\lambda}\,;$$

mais d'après les résultats du paragraphe précédent (cf. tableau), on a :

$$\Lambda^\lambda_{(\lambda\rho)} = 0,$$
$$\Lambda^\lambda_{\beta\rho}\Lambda^\rho_{\alpha\lambda} \qquad \text{symétrique en } \alpha,\ \beta.$$

De plus, les relations classiques [8]

(56) $$k^{\lambda\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{k}}\varepsilon^{\lambda\gamma\nu\rho}k_{\nu\rho}, \qquad k_{\nu\rho} = \frac{\sqrt{k}}{2}\varepsilon_{\nu\rho\lambda\gamma}k^{\lambda\gamma},$$

et (15) conduisent à

$$\mathfrak{L}^\rho_{[\alpha\beta]}S_\rho = \frac{\sqrt{k}}{2}k^{\rho\sigma}k^{\mu\nu}S_\mu S_\rho \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\nu} \equiv 0.$$

Compte tenu de l'antisymétrie des composantes $k^{\alpha\beta}$ il vient simplement

$$k^{\alpha\beta}\frac{P_{\alpha\beta} + \bar{P}_{\beta\alpha}}{2} = k^{\alpha\beta}R_{[\alpha\beta]}.$$

En outre, les termes (46) et (48) se combinent en

$$\frac{Q_{\alpha\beta}+\bar{Q}_{\beta\alpha}}{2}=\partial_\lambda\Lambda^\lambda_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(\partial_\beta\Lambda^\lambda_{\alpha\lambda}+\partial_\alpha\Lambda^\lambda_{\lambda\beta})+\Lambda^\rho_{\alpha\beta}\mathcal{L}^\lambda_{(\lambda\rho)}$$
$$-(\Lambda^\lambda_{\alpha\rho}\mathcal{L}^\rho_{(\beta\lambda)}+\Lambda^\lambda_{\rho\beta}\mathcal{L}^\rho_{(\lambda\alpha)})+\mathcal{L}^\rho_{\alpha\beta}\Lambda^\lambda_{(\lambda\rho)}\,;$$

la multiplication contractée par les composantes $k^{\alpha\beta}$ montre immédiatement que l'expression

$$\Lambda^\lambda_{\alpha\rho}\mathcal{L}^\rho_{(\beta\lambda)}k^{\alpha\beta}=\sqrt{k}k^{\lambda\mu}k^{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\alpha\rho\sigma}U^\sigma\mathcal{L}^\rho_{(\beta\lambda)}$$

est identiquement nulle par raison de symétrie.

On aboutit ainsi à

$$\theta\sqrt{k}k^{\alpha\beta}\frac{Q_{\alpha\beta}+\bar{Q}_{\beta\alpha}}{2}=\theta(\partial_\lambda\Lambda^\lambda_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\partial_\alpha\Lambda^\lambda_{\lambda\beta}-\frac{1}{2}\,\partial_\beta\Lambda^\lambda_{\alpha\lambda}+\Lambda^\rho_{\alpha\beta}\gamma_\rho),$$

et par conséquent, le lagrangien L se réduit à

$$\text{(57)}\quad L=\sqrt{k}k^{\alpha\beta}\left[R_{[\alpha\beta]}+\theta\left(\partial_\lambda\Lambda^\lambda_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\partial_\alpha\Lambda^\lambda_{\lambda\beta}-\frac{1}{2}\partial_\beta\Lambda^\lambda_{\alpha\lambda}+\Lambda^\rho_{\alpha\beta}\gamma_\rho\right)\right]$$
$$-2\sigma_\alpha\partial_\rho(\sqrt{k}k^{\alpha\rho}),$$

avec d'après (55)

$$\text{(58)}\quad R_{[\alpha\beta]}=\partial_\lambda\mathcal{L}^\lambda_{[\alpha\beta]}-\frac{1}{2}(\partial_\beta\mathcal{L}^\lambda_{\alpha\lambda}-\partial_\alpha\mathcal{L}^\lambda_{\beta\lambda})+\mathcal{L}^\rho_{[\alpha\beta]}\mathcal{L}^\lambda_{\rho\lambda}-(\mathcal{L}^\lambda_{[\rho\beta]}\mathcal{L}^\rho_{(\alpha\lambda)}-\mathcal{L}^\lambda_{[\rho\alpha]}\mathcal{L}^\rho_{(\beta\lambda)}).$$

Les résultats (15) et (36), les propriétés des symboles de Levi-Civita, et diverses symétries permettent d'écrire successivement :

$$k^{\alpha\beta}R_{[\alpha\beta]}=k^{\lambda\sigma}k^{\alpha\beta}\partial_\lambda A_{\alpha\beta\sigma}+\frac{1}{2}k^{\alpha\beta}(\partial_\alpha S_\beta-\partial_\beta S_\alpha)+S_\gamma(\partial_\rho k^{\rho\gamma}+\gamma_\rho k^{\rho\gamma})$$
$$-k^{\alpha\beta}[k^{\lambda\sigma}A_{\rho\beta\sigma}\mathcal{L}^\rho_{(\alpha\lambda)}-k^{\lambda\sigma}A_{\rho\alpha\sigma}\mathcal{L}^\rho_{(\beta\lambda)}],$$
$$k^{\alpha\beta}R_{[\alpha\beta]}=\frac{1}{2}\,k^{\lambda\sigma}k^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\nu}\partial_\lambda(\sqrt{k}k^{\mu\nu}S_\mu)-(\partial_\rho S^\rho+\gamma_\rho S^\rho)-2k^{\alpha\beta}k^{\lambda\sigma}A_{\rho\beta\sigma}\mathcal{L}^\rho_{(\alpha\lambda)},$$

c'est-à-dire

$$\text{(59)}\qquad \sqrt{k}k^{\alpha\beta}R_{[\alpha\beta]}=-2\partial_\rho(\sqrt{k}S^\rho),$$

et nous obtenons ainsi une divergence.

Il est à remarquer que nous n'avons pas eu à utiliser l'expression détaillée de (36) et ce, grâce à l'antisymétrie du tenseur fondamental $k^{\alpha\beta}$.

Par suite, si l'on fait varier de façon classique l'intégrale d'action $\int_C L d\tau$, les seules variables du champ étant les $k^{\alpha\beta}$, la contribution, dans la variation, du terme (59) est nulle par application du théorème de Stokes et compte tenu du fait que les variations $\delta k^{\alpha\beta}$ sont astreintes à s'annuler sur le bord ∂C de la chaîne différentiable C.

Enfin, l'expression du tenseur $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et les relations (56) nous permettent d'aboutir à [9]

$$\theta \frac{Q_{\alpha\beta} + \overline{Q}_{\beta\alpha}}{2} \sqrt{k} k^{\alpha\beta} = -4\theta\sqrt{k}(\partial_\rho U^\rho + \gamma_\rho U^\rho). \tag{60}$$

Pour déterminer la contribution de ce dernier terme dans la variation, nous choisirons le vecteur U^ρ sous la forme

$$U^\rho = \sqrt{k}^q v^\rho, \tag{61}$$

où q et v^ρ sont localement des fonctions scalaires des coordonnées x^α seulement (et qui sont donc invariantes lors de la variation).

On utilisera alors les résultats usuels

$$\delta\sqrt{k} = -\frac{\sqrt{k}}{2} k_{\alpha\beta}\delta k^{\alpha\beta},$$

$$\delta k^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} = -k^{\alpha\beta}\delta k_{\alpha\beta},$$

$$\delta k^{\alpha\beta}\partial_\rho k_{\alpha\beta} = \delta k_{\alpha\beta}\partial_\rho k^{\alpha\beta},$$

$$\delta\gamma_\rho = \frac{1}{2}\delta k^{\alpha\beta}\partial_\rho k_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}k^{\alpha\beta}\partial_\rho \delta k_{\alpha\beta},$$

puis on montrera [9] que

$$\delta U^\rho = -\frac{q}{2} U^\rho k_{\alpha\beta}\delta k^{\alpha\beta},$$

pour obtenir après simplification

$$\sqrt{k}\delta k^{\alpha\beta}[-2(q+1)U^\rho\partial_\rho\theta k_{\alpha\beta}].$$

La variation du terme $-2\sigma_\alpha\partial_\rho(\sqrt{k}k^{\alpha\rho})$ étant simplement

$$\sqrt{k}\delta k^{\alpha\beta}\left[\partial_\beta\sigma_\alpha - \partial_\alpha\sigma_\beta + \frac{1}{2}k_{\alpha\beta}k^{\mu\eta}(\partial_\mu\sigma_\eta - \partial_\eta\sigma_\mu)\right],$$

les équations de champ du cas antisymétrique de la théorie hypercomplexe sont donc, avec le choix (61),

$$\sigma_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}k^{\mu\eta}\sigma_{\mu\eta}k_{\alpha\beta} - 2(q+1)U^\rho\partial_\rho\theta k_{\alpha\beta} = 0, \tag{62}$$

où l'on a posé

$$\sigma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \sigma_\beta - \partial_\beta \sigma_\alpha .$$

Par multiplication contractée de (61) par $k^{\alpha\beta}$ on détermine le scalaire $k^{\mu\eta}\sigma_{\mu\eta}$ et par suite on obtient

$$\boxed{\sigma_{\alpha\beta} - 2(q + 1)\mathrm{U}^\rho \partial_\rho \theta k_{\alpha\beta} = 0} . \tag{63}$$

Par différentiation extérieure, (63) nous fournit les équations de champ suivantes (d'après (12)) :

$$\sum_{\text{p. c.}} k_{\alpha\beta} \partial_\gamma [(q + 1)\mathrm{U}^\rho \partial_\rho \theta] = 0. \tag{64}$$

Utilisons alors le caractère symplectique de notre variété et écrivons les relations (64) dans le système (C) introduit au paragraphe II :

$$(\partial_\gamma [(q + 1)\mathrm{U}^\rho \partial_\rho \theta])_{\mathrm{C}} = 0, \qquad \gamma = 1, 2, 3, 4 ;$$

la nature tensorielle de ces derniers termes nous permet de déduire la propriété intrinsèque

$$\boxed{(q + 1)\mathrm{U}^\rho \partial_\rho \theta = \mathrm{C^{te}}} \quad (^1) \tag{65}$$

Pour un vecteur U^ρ de la forme (61), (65) représente l'équation de champ de la théorie.

Naturellement nous pourrions écrire diverses équations de champ correspondant à plusieurs choix pour le vecteur arbitraire U^ρ; nous nous limitons cependant ici à la forme (61) qui conduit dans le cas symétrique de la théorie hyperbolique au schéma classique du fluide parfait relativiste [*3*].

Néanmoins nous pouvons remarquer que la variation du terme (60) s'écrit sans préciser le vecteur U^ρ :

$$4\delta \mathrm{U}^\rho \sqrt{k} \partial_\rho \theta - 2\delta k^{\alpha\beta} \sqrt{k} k_{\alpha\beta} \mathrm{U}^\rho \partial_\rho \theta,$$

---

(1) Dans nos travaux antérieurs ([*9*] [*10*]) les équations (63) contenaient le terme supplémentaire $\frac{3}{8}(\partial_\beta \mathrm{S}_\alpha - \partial_\alpha \mathrm{S}_\beta)$; ceci est dû au fait que nous n'avions pas fait le calcul global (59). Le résultat final, c'est-à-dire l'équation (65), était bien sûr le même [*10*] puisqu'on prend la différentielle extérieure de (63) pour éliminer les termes « parasites » σ_α.

et que, par conséquent, quelle que soit l'expression de U^ρ, les équations de champ se mettront sous la forme

$$\sigma_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}{}^{\rho}\partial_{\rho}\theta = 0.$$

Par suite, si l'on simplifie le lagrangien en considérant la fonction θ constante, on n'obtient aucune équation utilisable : on peut simplement affirmer que les composantes σ_α sont celles d'un gradient.

Le fait d'obtenir un système de champ réduit à une seule équation est dû aux nombreuses propriétés de symétrie que nous avons rencontrées, ainsi qu'à la structure symplectique de notre variété (conséquence de la relation (12)); quant à la disparition de cette unique équation pour une fonction θ constante, elle résulte de l'expression (59) évanescente par variation des composantes $k_{\alpha\beta}$; ce dernier résultat est indépendant du vecteur U^ρ puisque celui-ci n'intervient dans L (53) qu'avec le facteur θ.

Il est bien sûr un peu décevant de ne pas aboutir à des équations plus riches qui exprimeraient la partie antisymétrique $R_{[\alpha\beta]}$ du tenseur de Ricci de la connexion $\mathfrak{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ de V_4.

Si nous avions calculé selon la méthode de A. Lichnerowicz [*4*] la contribution dans la variation du terme $\sqrt{k}k^{\alpha\beta}\delta R_{[\alpha\beta]}$, nous aurions obtenu :

$$\delta\gamma_\alpha\sqrt{k}k^{\alpha\sigma}S_\sigma,$$

ce qui nous aurait conduit aux équations

$$R_{[\alpha\beta]} - \sigma_{\alpha\beta} = -2(q+1)U^\rho\partial_\rho\theta k_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}k^{\sigma\rho}(\partial_\sigma S_\rho - \partial_\rho S_\sigma)k_{\alpha\beta}\,;$$

mais un calcul simple nous permet d'exprimer (58) :

$$\boxed{R_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{4}k^{\sigma\rho}(\partial_\sigma S_\rho - \partial_\rho S_\sigma)k_{\alpha\beta}}\,,$$

ce qui nous ramène au système (63).

Par conséquent, compte tenu de la résolution du paragraphe III, le principe variationnel que nous avons utilisé nous fournit une équation de champ explicite (c'est-à-dire indépendante des multiplicateurs de Lagrange σ_α) qui s'écrit sous la forme (65) pour un vecteur U^ρ donné par (61).

CONCLUSION

Nous ne reviendrons pas sur la première partie de ce travail qui est résumée par le tableau du paragraphe III. Retenons simplement qu'elle nous fournit la résolution complète du système fondamental de la théorie et en particulier les solutions des classiques équations aux connexions d'Einstein-Schrödinger dans le cas d'un tenseur $g^{\alpha\beta}$ antisymétrique.

Quant au principe variationnel que nous avons utilisé, il conduit à des équations de champ (63) qui s'explicitent très bien grâce à la structure symplectique de la variété et fournissent le résultat simple (65); celui-ci met en évidence l'invariance d'un scalaire caractéristique de notre étude auquel cependant il est difficile de donner une signification précise.

La structure symplectique de notre variété V_4 introduit de nombreuses propriétés remarquables que nous n'avons pas citées, à l'exception de celles qui nous ont permis d'obtenir le scalaire invariant de la théorie, mais qu'il serait intéressant de préciser dans le cadre d'une étude géométrique de notre problème.

Nous aurions pu aussi établir des identités de conservation propres à notre étude, mais mis à part quelques cas particuliers simples, ces identités ne semblent pas pouvoir être écrites sous une forme remarquable.

Enfin, il est bon de noter que les résultats obtenus dans cet article sont distincts de ceux que l'on peut déduire de la théorie générale de A. Crumeyrolle [1] en faisant tendre, après application d'un principe variationnel, les composantes symétriques $g_{(\alpha\beta)}$ vers zéro. Cette comparaison reste cependant à étudier plus systématiquement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Crumeyrolle, Sur quelques interprétations physiques et théoriques des équations du champ unitaire d'Einstein-Schrödinger, I. *Riv. Mat. Univ. Parma (2)*, t. **3**, 1962, p. 331-391; II. *Riv. Mat. Univ. Parma (2)*, t. **5**, 1964, p. 85-132.

[2] A. Crumeyrolle, Variétés différentiables à coordonnées hypercomplexes, *Ann. Fac. Sc., Toulouse*, 4e série, t. XXVI, année 1962 (1964), p. 105-137.

[3] A. Crumeyrolle, *C. R. A. Sc.*, t. **262**, 1966, p. 315-318.

[4] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, 1955.

---

(1) *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, t. XXIX, année 1965 (1967).

[5] C. Ehresmann, Sur la théorie des espaces fibrés, *Coll. Top. Ag. C. N. R. S.*, Paris, 1947; Sur les variétés presque complexes, *Proc. Inter. Cong. Math.*, 1950, p. 412.
[6] Hwa-Chung-Lee, A kind of even-dimensional differential geometry and its application to exterior calculus, *Ann. J. of Math.*, Vol. LXV, 1943, p. 433-438.
[7] A. Einstein, *The meaning of relativity*, Methuen.
[8] M. A. Tonnelat, *La théorie du champ unifié d'Einstein*, 1955, Gauthier-Villars.
[9] R. Clerc, Thèse 3ᵉ cycle 1967, Toulouse.
[10] R. Clerc, *C. R. A. Sc.*, t. **265**, 1967, p. 122-124.

(Manuscrit reçu le 12 novembre 1969).