ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LUIS BEL

Dynamique des systèmes de N particules ponctuelles en relativité restreinte

Annales de l'I. H. P., section A, tome 12, nº 3 (1970), p. 307-321

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__12_3_307_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XII, n° 3, 1970, p. 307-321. *Physique théorique.*

Dynamique des systèmes de N particules ponctuelles en relativité restreinte

par

Luis BEL

Laboratoire de Physique Théorique.
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, Paris-V^e.

SUMMARY. — In section I we consider systems of differential equations of the following type:

$$\frac{dv_a^i}{dt} = \mu_a^i(x_b^j, v_c^k) \quad , \quad \frac{dx_a^i}{dt} = v_a^i \quad (i, j, k = 1, 2, 3\,; a, b, c = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

We give a precise definition of Poincaré invariant systems and we derive the necessary and sufficient conditions that the functions μ_a^i of invariant systems must satisfy. In section II we consider systems of N point-like particles which motion can be obtained by integrating an invariant system. We approach the problem of obtaibing the total energy-momentum, the total angular momentum and the center-of-mass formula. We derive, for the case $\mathrm{N} = 2$, a new formulation of the necessary and sufficient conditions which insure the existence of invariant systems.

RÉSUMÉ. — Dans la première partie nous considérons des systèmes d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dv_a^i}{dt} = \mu_a^i(x_b^j, v_c^k) \quad , \quad \frac{dx_a^i}{dt} = v_a^i \quad (i, j, k = 1, 2, 3\,; a, b, c = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

Nous donnons une définition précise de systèmes invariants par le groupe de Poincaré et nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes

que les fonctions μ^i_a doivent satisfaire pour que le système soit invariant. Dans la deuxième partie nous considérons des systèmes de N particules ponctuelles dont le mouvement résulte de l'intégration de systèmes d'équations invariants. Nous abordons le problème de la détermination de l'énergie-impulsion totales, du moment angulaire total et du centre de masse. Dans le cas $N = 2$ nous donnons une formulation nouvelle des conditions nécessaires et suffisantes qui assurent l'existence de systèmes invariants.

PREMIÈRE PARTIE

1. DÉFINITION DES SYSTÈMES INVARIANTS PAR LE GROUPE DE POINCARÉ

Considérons un système d'équations différentielles de la forme

$$(1) \quad \frac{dv^i_a}{dt} = \mu^i_a(x^j_b, v^k_c) \quad , \quad \frac{dx^i_a}{dt} = v^i_a \quad (i, j, k = 1, 2, 3 \,; a, b, c = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

et soit $x^i_a = \varphi^i_a(\underset{0}{x}^j_b, \underset{0}{v}^k_c \,; t)$ le système d'intégrales telles que :

$$(2) \qquad \varphi^i_a(\underset{0}{x}^j_b, \underset{0}{v}^k_c \,; 0) = \underset{0}{x}^i_a \quad ; \quad \frac{d\varphi^i_a}{dt}(\underset{0}{x}^j_b, \underset{0}{v}^k_c \,; 0) = \underset{0}{v}^i_a$$

Soient Λ^{I} ($\mathrm{I, J, K}, \ldots = 0, 1, 2, \ldots, 9$) les paramètres d'une paramétrisation quelconque du groupe de Poincaré telle que l'élément neutre corresponde à $\Lambda^{\mathrm{I}} = 0$. Tout élément du groupe de Poincaré étant par définition un couple $(\mathrm{L}^{\alpha'}_{\beta}, \mathrm{A}^{\gamma})$, ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 0, 1, 2, 3$) où $\mathrm{L}^{\alpha'}_{\beta}$ est une matrice du groupe de Lorentz et A^{γ} un point de R_4 nous utiliserons souvent pour désigner une fonction $\mathrm{F}(\Lambda^{\mathrm{I}})$ la notation $\mathrm{F}(\mathrm{L}^{\alpha'}_{\beta}, \mathrm{A}^{\gamma})$, ou $\mathrm{F}(\mathrm{L}^{\alpha'}_{\beta}, \mathrm{A}^0, \mathrm{A}^i)$.

DÉFINITION I. — Nous dirons que le système d'équations différentielles (1) est invariant par le groupe de Poincaré s'il existe des fonctions

$$(3) \qquad \begin{aligned} \underset{0}{x}'^i_a &= f^i_a(\underset{0}{x}^j_b, \underset{0}{v}^k_c \,; \mathrm{L}^{\alpha'}_{\beta}, \mathrm{A}^{\gamma}) \equiv f^i_a(\underset{0}{x}, \underset{0}{v} \,; \Lambda) \\ \underset{0}{v}'^i_a &= g^i_a(\underset{0}{x}^j_b, \underset{0}{v}^k_c \,; \mathrm{L}^{\alpha'}_{\beta}, \mathrm{A}^{\gamma}) \equiv g^i_a(\underset{0}{x}, \underset{0}{v} \,; \Lambda) \end{aligned}$$

telles que l'on ait

$$\begin{aligned}(4)\quad \varphi^i_a[\underset{0}{x}{}'^j_b, \underset{0}{v}{}'^k_c ; \mathrm{L}^{0'}_0(t - \mathrm{A}^0) + \mathrm{L}^{0'}_r(\varphi^r_a(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c ; t) - \mathrm{A}^r)]\\ = \mathrm{L}^{i'}_0(t - \mathrm{A}^0) + \mathrm{L}^{i'}_r(\varphi^r_a(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c ; t) - \mathrm{A}^r)\end{aligned}$$

pour tout t et tout élément du groupe de Poincaré.

Soit M_4 l'espace-temps de Minkowski et soit $(0, \vec{e}_\alpha)$ un repère orthonormé d'origine 0. Au système d'intégrales φ^i_a satisfaisant aux conditions (2) nous pouvons associer, pour chaque ensemble de conditions initiales $(\underset{0}{x}, \underset{0}{v})$ le système de N trajectoires d'équations paramétriques :

$$(5)\qquad x^0_a = t \quad , \quad x^i_a = \varphi^i_a(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c ; t)$$

x^0 et x^i désignant les coordonnées des points de M_4 dans le système de référence choisi. Nous supposerons (1) que $v^i_a v_{ai} < 1$ de sorte que ces trajectoires seront orientées dans le temps.

Soit $(0', \vec{e}_{\beta'})$ un deuxième repère orthonormé d'origine $0'$, tels que

$$(6)\qquad \vec{00'} = \mathrm{A}^\alpha \vec{e}_\alpha \quad , \quad \vec{e}_\alpha = \mathrm{L}^{\beta'}_\alpha \vec{e}_{\beta'}$$

et soient $x^{0'}$ et $x^{i'}$ les coordonnées des points de M_4 dans le nouveau système de référence.

Considérons les équations paramétriques du système de trajectoires (5), dans le nouveau système de référence, obtenues en rapportant chaque trajectoire au paramètre commun $x^{0'}$ que nous appelons encore t :

$$(7)\qquad x^{0'}_a = t \quad , \quad x^{i'}_a = \psi^i_a(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c ; t)$$

Les relations (4) sont équivalentes à celles-ci :

$$(8)\qquad \varphi^i_a(\underset{0}{x}{}'^j_b, \underset{0}{v}{}'^k_c ; t) = \psi^i_a(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c ; t)$$

En d'autres mots : si le système (1) est invariant par le groupe de Poincaré la représentation paramétrique (5) est elle-même invariante, dans un sens évident, par changement de système de référence. Et si $(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c)$ est un ensemble de conditions initiales pour le premier système de coordonnées, $(\underset{0}{x}{}'^j_b, \underset{0}{v}{}'^k_c)$ est l'ensemble de conditions initiales, pour le deuxième

(1) Les indices latins i, j, k ... seront placés indistinctement dans la position covariante ou contravariante de sorte que soit respectée la convention de sommation. La vitesse de la lumière dans le vide est prise égale à 1. La signature de M_4 est telle que :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - dt^2 + \Sigma(dx^i)^2$$

système de coordonnées, qui correspondent au même système de trajectoires. Ceci donne l'interprétation de la définition de système invariant proposée et des fonctions (3) qui y figurent.

2. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR QU'IL EXISTE DES SYSTÈMES INVARIANTS

Nous avons démontré les lemmes suivants :

LEMME 1. — Si le système (1) est invariant les fonctions (3) sont une réalisation du groupe de de Poincaré. Plus précisément si $\underset{1}{\Lambda}^{\mathrm{I}}$ et $\underset{2}{\Lambda}^{\mathrm{J}}$ sont deux éléments quelconques du groupe de Poincaré nous avons :

$$(9) \qquad \begin{aligned} f_a^i[f_b^j(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{1}{\Lambda}), g_c^k(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{1}{\Lambda}); \underset{2}{\Lambda}] &= f_a^i(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{3}{\Lambda}) \\ g_a^i[f_b^j(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{1}{\Lambda}), g_c^k(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{1}{\Lambda}); \underset{2}{\Lambda}] &= g_a^i(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{3}{\Lambda}) \end{aligned}$$

avec :

$$(10) \qquad \underset{3}{\Lambda}^{\mathrm{K}} = \Phi^{\mathrm{K}}(\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda})$$

si Φ^{K} est la fonction de composition dans le groupe. Ou avec d'autres notations :

$$(11) \qquad \begin{aligned} f_a^i[f_b^j(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{1}{\mathrm{L}}, \underset{1}{\mathrm{A}}), g_c^k(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{1}{\mathrm{L}}, \underset{1}{\mathrm{A}}); \underset{2}{\mathrm{L}}, \underset{2}{\mathrm{A}}] &= f_a^i(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{3}{\mathrm{L}}, \underset{3}{\mathrm{A}}) \\ g_a^i[f_b^j(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{1}{\mathrm{L}}, \underset{1}{\mathrm{A}}), g_c^k(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{1}{\mathrm{L}}, \underset{1}{\mathrm{A}}); \underset{2}{\mathrm{L}}, \underset{2}{\mathrm{A}}] &= g_a^i(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \underset{3}{\mathrm{L}}, \underset{3}{\mathrm{A}}) \end{aligned}$$

avec :

$$(12) \qquad \underset{3}{\mathrm{L}}{}^{\alpha''}_{\beta} = \underset{2}{\mathrm{L}}{}^{\alpha''}_{\rho'} \underset{1}{\mathrm{L}}{}^{\rho'}_{\beta} \quad , \quad \underset{3}{\mathrm{A}}{}^{\gamma} = \underset{1}{\mathrm{A}}{}^{\gamma} + \underset{1}{\mathrm{L}}{}^{\gamma}_{\rho'} \underset{2}{\mathrm{A}}{}^{\rho'} \qquad (\underset{1}{\mathrm{L}}{}^{\alpha'}_{\rho} \underset{1}{\mathrm{L}}{}^{\rho}_{\beta'} = \delta^{\alpha}_{\beta})$$

Les fonctions f et g sont donc l'intégrale générale d'un système d'équations complètement intégrable de la forme :

$$(13) \qquad \frac{\partial f_a^i}{\partial \Lambda^{\mathrm{K}}} = \xi^i_{a\mathrm{L}}(f_b^j, g_c^m)\mathrm{B}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{K}}(\Lambda^{\mathrm{I}}) \quad , \quad \frac{\partial g_a^i}{\partial \Lambda^{\mathrm{K}}} = \theta^i_{a\mathrm{L}}(f_b^j, g_c^m)\mathrm{B}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{K}}(\Lambda^{\mathrm{I}})$$

satisfaisant aux conditions initiales :

$$(14) \qquad f_a^i(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c; 0) = \underset{0}{x}{}^i_a \quad , \quad g_a^i(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c; 0) = \underset{0}{v}{}^i_a$$

ou :

$$(15) \qquad f_a^i(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c; \delta^{\alpha}_{\beta}, 0) = \underset{0}{x}{}^i_a, \quad g_a^i(\underset{0}{x}{}^j_b, \underset{0}{v}{}^k_c; \delta^{\alpha}_{\beta}, 0) = \underset{0}{v}{}^i_a$$

$B_K^L(\Lambda)$ est une matrice qui ne dépend que de la paramétrisation du groupe de Poincaré choisie et est définie par [*1*] :

$$(16) \qquad B_K^{-1L}(\Lambda) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \underset{2}{\Lambda}^K} \Phi^L(\Lambda, \underset{2}{\Lambda}) \right\}_{\underset{2}{\Lambda}^J = 0}$$

Celemme exprime que si le système (1) est invariant, le groupe de Poincaré opère, comme groupe, sur la variété des conditions initiales V_{6N}.

LEMME 2. — Si nous posons :

$$(17) \quad X_a^r \equiv L_{i'}^r(\Lambda) f_a^i(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \Lambda) + A^r(\Lambda) \quad , \quad X_a^0 \equiv L_{i'}^0(\Lambda) f_a^i(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}; \Lambda) + A^0(\Lambda)$$

nous avons :

$$(18) \qquad X_a^i = f_a^i(\underset{0}{x}{}_b^j, \underset{0}{v}{}_c^k ; \delta_\beta^\alpha, X_a^0, 0)$$

et par conséquent nous avons aussi :

$$(19) \qquad \frac{\partial X_a^i}{\partial \Lambda^I} \frac{\partial X_a^0}{\partial \Lambda^J} - \frac{\partial X_a^i}{\partial \Lambda^J} \frac{\partial X_a^0}{\partial \Lambda^I} = 0$$

Ce lemme exprime que l'application du groupe de Poincaré dans M_4 définie par : $x^i = X_a^i$, $x^0 = X_a^0$ est une ligne pour tout a et tout ensemble de valeurs $(\underset{0}{x}, \underset{0}{v})$.

Nous avons aussi démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — S'il existe des fonctions f et g satisfaisant aux conditions de groupe (9) et aux relations (18), alors il existe des systèmes invariants (1).

Il est tout d'abord évident, compte tenu de l'interprétation des fonctions f et g, que s'il existe des systèmes invariants (1) associés à des fonctions f et g données, le système d'intégrales (2) sera :

$$(20) \qquad x_a^i = \varphi_a^i(\underset{0}{x}{}_b^j, \underset{0}{v}{}_c^k ; t) = f_a^i(\underset{0}{x}{}_b^j, \underset{0}{v}{}_c^k ; \delta_\beta^\alpha, t, 0)$$

D'ailleurs nous avons aussi :

$$(21) \qquad v_a^i = \frac{d\varphi_a^i}{dt}(\underset{0}{x}{}_b^j, \underset{0}{v}{}_c^k ; t) = g_a^i(\underset{0}{x}{}_b^j, \underset{0}{v}{}_c^k ; \delta_\beta^\alpha, t, 0)$$

Pour démontrer le théorème il faut donc démontrer que les fonctions φ_a^i ainsi définies satisfont bien les relations (4), ce qui est le cas.

3. LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUE DOIVENT SATISFAIRE LES FONCTIONS μ_a^i

Toute transformation de Lorentz (6) peut s'écrire sous la forme [*2*] :

$$(22)\quad \vec{e}_0 = \Gamma(\vec{e}_{0'} - V^j R_j^{k'} e_{k'}) \quad , \quad \vec{e}_i = -\Gamma V_i \vec{e}_{0'} + \left(\delta_i^j + \frac{\Gamma^2 V_i V^j}{\Gamma + 1}\right) R_j^{k'} \vec{e}_{k'}$$

où $\Gamma = (1 - V^i V_i)^{-1/2}$ et $R_j^{k'}$ est une matrice du groupe de rotations qui peut être paramétrisé sous la forme [*3*] :

$$(23)\quad R_j^{k'} = (1 - 2\gamma^2)\delta_j^k + 2\sqrt{1-\gamma^2}\,\eta^k{}_{\cdot jm}\gamma^m + 2\gamma^k\gamma_j \qquad (\gamma^2 = \gamma^i\gamma_i)$$

η_{kjm} étant le tenseur élément de volume d'espace.

V^i est la vitesse du deuxième système de référence par rapport au premier.

$R_j^{k'}$ est la rotation qui fait passer les vecteurs d'espace du deuxième système de référence sur des vecteurs d'espace d'un système de référence ayant même vitesse V^i et des axes d'espace parallèles à ceux du premier système de référence. γ^k est un vecteur dont la direction indique l'axe de rotation et dont le module vaut :

$$\gamma = \sin\frac{\varphi}{2},$$

φ étant l'angle de rotation.

Nous avons choisi la paramétrisation suivante du groupe de Poincaré

$$(24)\quad \Lambda^\alpha = A^\alpha \quad , \quad \Lambda^{3+r} = V^r \quad , \quad \Lambda^{6+r} = \gamma^r$$

Pour cette paramétrisation les constantes de structure strictes non nulles sont :

$$(25)\quad \begin{array}{lll} C^0_{3+i,j} = \delta_{ij} & C^k_{3+i,0} = \delta_i^k & C^k_{6+i,j} = 2\eta^k_{\cdot ij} \\ C^{3+k}_{6+i,3+j} = 2\eta^k_{\cdot ij} & C^{6+k}_{3+i,3+j} = -\dfrac{1}{2}\eta^k_{\cdot ij} & C^{6+k}_{6+i,6+j} = 2\eta^k_{\cdot ij} \end{array}$$

D'après le paragraphe précédent il est clair que pour qu'il existe des systèmes invariants il faut et il suffit qu'il existe des fonctions $\xi^i_{a\mathrm{K}}(f, g)$ et $\theta^i_{a\mathrm{K}}(f, g)$ telles que le système (13) soit complètement intégrable et telles que si $f^i_a(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}\,; \Lambda)$ et $g^i_a(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}\,; \Lambda)$ est l'intégrale générale correspondant aux conditions intiales (14) on ait (18). Or, compte tenu de (20), les relations (19) sont équivalentes à (18) et par conséquent nous nous bornerons à considérer les premières.

Avant de procéder au calcul de (19) faisons la remarque suivante :

Remarque. — Supposons que des fonctions $\xi^i_{aK}(f, g)$ et $\theta^i_{aK}(f, g)$ satisfaisant les hypothèses ci-dessus existent. Alors les fonctions (20) seront l'intégrale générale d'un système invariant du type (1). Or pour la paramétrisation choisie nous avons $B^K_L(0) = \delta^K_L$ et par conséquent de (13) et (14) il vient :

$$(26) \qquad \left\{ \frac{\partial f^i_a}{\partial A^0} \right\}_{\Lambda^J=0} = \xi^i_{a0}(\underset{0}{x}^j_b, \underset{0}{v}^k_c) \quad , \quad \left\{ \frac{\partial g^i}{\partial A^0} \right\}_{\Lambda^J=0} = \theta^i_{a0}(\underset{0}{x}^j_b, \underset{0}{v}^k_c)$$

Mais d'après (20) et (21) :

$$(27) \qquad \left\{ \frac{\partial f^i_a}{\partial A^0} \right\}_{\Lambda^J=0} = \underset{0}{v}^i_a \quad , \quad \left\{ \frac{\partial g^i_a}{\partial A^0} \right\}_{\Lambda^J=0} = \mu^i_a(\underset{0}{x}^j_b, \underset{0}{v}^k_c)$$

Puisque ξ^i_{a0} et θ^i_{a0} ne dépendent pas des éléments du groupe de Poincaré nous obtenons donc en général :

$$(28) \qquad \xi^i_{a0} = g^i_a \qquad \theta^i_{a0} = \mu^i_a(f^j_b, g^k_c)$$

Le calcul des conditions (19) se simplifie compte tenu de la remarque et du lemme suivants :

Remarque. — D'après l'interprétation des fonctions f et g et de la paramétrisation (24) il est clair que ces fonctions sont de la forme :

$$(29) \qquad f^r_a = R^r_i \hat{f}^i_a(\underset{0}{x}^j_b - A^j, \underset{0}{v}^k_c ; V^m, A^0) \quad , \quad g^r_a = R^r_i \hat{f}^i_a(\underset{0}{x}^j_b - A^j, \underset{0}{v}^k_c ; V^m, A^0)$$

Cette remarque permet d'obtenir immédiatement :

$$(30) \qquad \begin{aligned} \xi^i_{aj} &= -\delta^i_j & \theta^i_{aj} &= 0 \\ \xi^i_{a6+j} &= 2\eta^i{}_{\cdot kj} f^k_a & \theta^i_{a6+j} &= 2\eta^i{}_{\cdot kj} g^k_a \end{aligned}$$

et réduit le calcul des conditions (19) au calcul de celles pour lesquelles

$$I, J, \ldots = 0, 1, 2, \ldots, 6.$$

LEMME 3. — Si f et g satisfont à des relations de groupe (9) et si les conditions (19) sont satisfaites pour $\Lambda^I = 0$, alors elles sont satisfaites pour tout Λ^I.

Ce lemme permet d'exploiter les conditions (19) en se bornant à les considérer pour $\Lambda^I = 0$, ce qui nécessite seulement la connaissance de la matrice $B^K_L(0) = \delta^K_L$. On obtient ainsi :

$$(31) \qquad \xi^i_{a3+j} = g^i_a f_{aj}$$

Introduisons la notation [1] :

$$\mathscr{L}_{\mathrm{K}} \equiv \xi^s_{a\mathrm{K}} \frac{\partial}{\partial f^s_a} + \theta^s_{a\mathrm{K}} \frac{\partial}{\partial g^s_a} \tag{32}$$

Les conditions de complète intégrabilité du système d'équations (13) se décompose en deux groupes :

$$\mathscr{L}_{\mathrm{K}}\xi^i_{b\mathrm{L}} - \mathscr{L}_{\mathrm{L}}\xi^i_{b\mathrm{K}} = \mathrm{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{KL}}\xi^i_{b\mathrm{I}} \quad , \quad \mathscr{L}_{\mathrm{K}}\theta^i_{b\mathrm{L}} - \mathscr{L}_{\mathrm{L}}\theta^i_{b\mathrm{K}} = \mathrm{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{KL}}\theta^i_{b\mathrm{I}} \tag{33}$$

Le premier groupe donne, compte tenu de (28), (30) et (31) :

$$\theta^i_{a3+j} = -\delta^i_j + g^i_a g_{aj} + \mu^i_a f_{aj} \tag{34}$$

Le deuxième groupe donne, compte tenu de (28), (30), (31) et (34) :

$$\varepsilon_a \frac{\partial \mu^i_b}{\partial f^j_a} = 0 \qquad (\varepsilon_a = 1) \tag{35}$$

$$\eta^s{}_{\cdot kr}\left(f^k_a \frac{\partial \mu^i_b}{\partial f^s_a} + g^k_a \frac{\partial \mu^i_b}{\partial g^s_a} \right) = \eta^i{}_{\cdot kr}\mu^k_b \tag{36}$$

$$g^s_a(f_{ar} - f_{br}) \frac{\partial \mu^i_b}{\partial f^s_a} + [g^s_a g_{ar} + \mu^s_a(f_{ar} - f_{br}) - \varepsilon_a \delta^s_r] \frac{\partial \mu^i_b}{\partial g^s_a} = 2\mu^i_b g_{br} + g^i_b \mu_{br} \tag{37}$$

S'il existe des fonctions μ^i_b solutions de ce système d'équations différentielles alors il existe des systèmes invariants. D'où le théorème :

THÉORÈME 2. — Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système d'équations différentielles (1) soit invariant par le groupe de Poincaré sont les équations (35), (36), (37).

Les équations (35) expriment que les fonctions μ^i_b sont invariantes par le groupe de translations d'espace :

$$\mathscr{L}_r \mu^i_b = 0 \tag{38}$$

Les équations (36) expriment que μ^i_b sont des fonctions vectorielles de variables vectorielles par rapport au groupe de rotations :

$$\mathscr{L}_{6+r}\mu^i_b = 2\eta^i{}_{\cdot kr}\mu^k_b \tag{39}$$

Les équations (37) sont liées aux transformations de Lorentz pures, qui ne sont pas un sous-groupe, et au déplacement temporel. Elles peuvent s'écrire :

$$\mathscr{L}_{3+r}\mu^i_b - f_{br}\mathscr{L}_0\mu^i_b = 2\mu^i_b g_{br} + g^i_b \mu_{br} \tag{40}$$

---

(1) Nous appliquons aussi la convention de sommation aux indices latins a, b, c.

Mais alors que les opérateurs $\mathscr{L}_r$ et $\mathscr{L}_{6+r}$ sont indépendants des fonctions « dynamiques » μ^i_a, les opérateurs $\mathscr{L}_{3+r}$ et $\mathscr{L}_0$ dépendent de ces fonctions et dans ce sens, compte tenu de (38) et (39), les équations (40) sont liées au groupe de Poincaré tout entier.

Comme il fallait s'y attendre nous avons le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — Si N = 1, la seule solution de (35), (36), (37) est $\mu^i = 0$. Par contre dès que N = 2 des solutions existent.

Exemple :

$$\mu^j_2 = 0$$

$$(41) \quad \mu^j_1 = \Gamma^2(1 - v^i_2 v_{1i})^2 \{ a\chi^l[\delta^j_l + \Gamma^2 v_{2l}(v^j_2 - v^j_1)] - b\Gamma(v^j_2 - v^j_1)] \}$$

où

$$(42) \qquad \Gamma = (1 - v^2_2)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad \chi^i = x^i_1 - x^i_2$$

et où a et b sont des fonctions arbitraires des variables :

$$(43) \quad \chi^2 + \Gamma^2(\chi^i v_{2i})^2 \quad , \quad \frac{\chi^j v_{1j}}{\Gamma(1 - v^i_2 v_{1i})} - \Gamma\chi^j v_{2j} \quad , \quad \frac{v^2_1 - 1}{\Gamma^2(1 - v^i_2 v_{1i})^2}$$

Cette solution ne tranche pas cependant la question de savoir si des solutions typiquement à deux particules existent. Elle représente en effet un système constitué d'une particule d'épreuve dans le champ d'une deuxième particule en mouvement libre. Physiquement elle est donc encore, dans un sens, une solution à une particule. Mais elle n'en prouve pas moins que la définition de systèmes invariants que nous avons donnée est non vide.

D'autre part on peut voir facilement en utilisant les relations

$$(44) \quad \begin{aligned} \mathscr{L}_r\mathscr{L}_m - \mathscr{L}_m\mathscr{L}_r &= 0 \\ \mathscr{L}_r\mathscr{L}_{6+m} - \mathscr{L}_{6+m}\mathscr{L}_r &= 2\eta^k_{\cdot rm}\mathscr{L}_k \\ \mathscr{L}_{6+r}\mathscr{L}_{6+m} - \mathscr{L}_{6+m}\mathscr{L}_{6+r} &= 2\eta^k_{\cdot rm}\mathscr{L}_{6+k} \end{aligned}$$

et les relations :

$$(45) \quad \begin{aligned} &(\mathscr{L}_{3+r} - f_{br}\mathscr{L}_0)\mathscr{L}_m - \mathscr{L}_m(\mathscr{L}_{3+r} - f_{br}\mathscr{L}_0) = 0 \\ &(\mathscr{L}_{3+r} - f_{br}\mathscr{L}_0)\mathscr{L}_{6+m} - \mathscr{L}_{6+m}(\mathscr{L}_{6+r} - f_{br}\mathscr{L}_0) = 2\eta^k_{\cdot rm}(\mathscr{L}_{3+k} - f_{br}\mathscr{L}_0) \\ &(\mathscr{L}_{3+r} - f_{br}\mathscr{L}_0)(\mathscr{L}_{6+m} - f_{bm}\mathscr{L}_0) - (\mathscr{L}_{6+m} - f_{bm}\mathscr{L}_0)(\mathscr{L}_{6+r} - f_{br}\mathscr{L}_0) \\ &\qquad = -\frac{1}{2}\eta^k_{\cdot rm}\mathscr{L}_{6+k} + f_{br}\mathscr{L}_m - f_{bm}\mathscr{L}_r \end{aligned}$$

qui sont une conséquence de (38), (39), (40), que les « conditions d'intégrabilité » de ces dernières sont satisfaites. Ceci devrait à notre avis pouvoir servir de base à une démonstration rigoureuse d'un théorème d'existence dans le cas général.

Note. — Le système d'équations (35), (36), (37) figure déjà dans deux articles de D. G. Currie [*4*] et R. N. Hill [*5*] à qui l'on doit d'avoir introduit le nouveau point de vue, dont nous nous sommes inspirés, pour l'étude des systèmes différentiels en Relativité Restreinte. Notre approche est cependant très différente et malgré l'affirmation contraire des auteurs, leur calcul élémentaire ne permet de prouver que le caractère nécessaire du système (35), (36), (37).

DEUXIÈME PARTIE

1. LES SYSTÈMES DE N PARTICULES LIBRES

Le lecteur aura déjà compris que l'étude des systèmes d'équations différentielles du type (1) invariants par le groupe de Poincaré vise à l'établissement d'une théorie, enfin cohérente, des systèmes de N particules ponctuelles en interaction en Relativité Restreinte. Nous aurons donc dorénavant présents à l'esprit les systèmes de N particules ponctuelles dont le mouvement résulte de l'intégration de systèmes invariants par le groupe de Poincaré du type (1). Commençons par le cas le plus simple.

Trivialement le système d'équations (35), (36), (37) admet la solution $\mu^i_a = 0$, ce qui correspond au cas de N particules libres. On peut facilement obtenir les fonctions f et g pour les particules libres. Ainsi nous avons :

$$
(46\quad
\begin{aligned}
f^k_a &= \frac{\mathrm{L}^{k'}_0 + \mathrm{L}^{k'}_i \underset{0}{v}{}^i_a}{\mathrm{L}^{0'}_0 + \mathrm{L}^{0'}_s \underset{0}{v}{}^s_a}\left(\mathrm{L}^{0'}_a \mathrm{A}^\alpha - \mathrm{L}^{0'}_r \underset{0}{x}{}^r_a\right) + \mathrm{L}^{k'}_i\left(\underset{0}{x}{}^i_a - \mathrm{A}^i\right) - \mathrm{L}^{k'}_0 \mathrm{A}^0 \\
g^k_a &= \frac{\mathrm{L}^{k'}_0 + \mathrm{L}^{k'}_i \underset{0}{v}{}^i_a}{\mathrm{L}^{0'}_0 + \mathrm{L}^{0'}_s \underset{0}{v}{}^s_a}
\end{aligned}
$$

Sous cette forme ces formules sont indépendantes de la paramétrisation du groupe de Poincaré $(\mathrm{L}^{\alpha'}_\beta, \mathrm{A}^\gamma)$.

Si nous avons N particules libres l'énergie et impulsion totales à un instant donné et pour un système de référence donné, se définissent par :

$$
(47)\qquad \underset{0}{\mathrm{E}} = \varepsilon^a \underset{0}{e}_a \quad , \quad \underset{0}{\mathrm{P}}{}^i = \varepsilon^a \underset{0}{p}{}^i_a \qquad (\varepsilon^a = 1)
$$

où

$$
(48)\qquad \underset{0}{e}_a = \frac{m_a}{\sqrt{1 - \underset{0}{v}{}^2_a}} \qquad \underset{0}{p}{}^i_a = \frac{m_a \underset{0}{v}{}^i_a}{\sqrt{1 - \underset{0}{v}{}^2_a}}
$$

et nous savons bien que si nous posons $P^0 = E$ nous avons :

$$P^\alpha(g^i_a) = L^{\alpha'}_\beta P^\beta(\underset{0}{v}^i_a) \equiv L^{\alpha'}_\beta \underset{0}{P}^\beta \tag{49}$$

Le moment angulaire total et le centre de masse se définissent par :

$$\begin{aligned} &\underset{0}{J}_s = \frac{1}{2}\eta_{sij}\underset{0}{J}^{ij} \quad , \quad \underset{0}{J}^{ij} = \varepsilon^a(\underset{0}{x}^i_a \underset{0}{p}^j_a - \underset{0}{x}^j_a \underset{0}{p}^i_a) \equiv J^{ij}(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}) \\ &\underset{0}{R}^i = \underset{0}{E}^{-1}\underset{0}{C}^i \qquad \underset{0}{C}^i = \varepsilon^a \underset{0}{e}_a \underset{0}{x}^i_a \equiv C^i(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}) \end{aligned} \tag{50}$$

Calculons, compte tenu de (46) :

$$J'^{ij} = J^{ij}(f^k_a, g^r_b) \quad , \quad C'^i = C^i(f^k_a, g^r_b) \tag{51}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} J'^{ij} &= L^{i'}_k L^{j'}_r[\underset{0}{J}^{kr} - (A^k \underset{0}{P}^r - A^r \underset{0}{P}^k)] + (L^{i'}_k L^{j'}_0 - L^{i'}_0 L^{j'}_k)[\underset{0}{C}^k - (A^k \underset{0}{E} - A^0 \underset{0}{P}^k)] \\ C'^i &= L^{i'}_k L^{0'}_r[\underset{0}{J}^{kr} - (A^k \underset{0}{P}^r - A^r \underset{0}{P}^k)] + (L^{i'}_k L^{0'}_0 - L^{i'}_0 L^{0'}_k)[\underset{0}{C}^k - (A^k \underset{0}{E} - A^0 \underset{0}{P}^k)] \end{aligned} \tag{52}$$

Si nous introduisons un tenseur antisymétrique $H^{\alpha\beta}$ tel que :

$$H^{ij} = J^{ij} \quad , \quad H^{i0} = C^i \tag{53}$$

nous voyons que les deux formules (52) nous disent que :

$$H^{\alpha\beta}(f, g) = L^{\alpha'}_\rho L^{\beta'}_\sigma[\underset{0}{H}^{\rho\sigma} - (A^\rho \underset{0}{P}^\sigma - A^\sigma \underset{0}{P}^\rho)] \tag{54}$$

La méthode qui nous a permis d'obtenir (49) et (54) est en quelque sorte l'inverse de celle de J. L. Synge [6] et est mieux orientée à l'esprit de cet article.

2. ÉNERGIE-IMPULSION TOTALES. MOMENT ANGULAIRE TOTAL ET CENTRE DE MASSE DES SYSTÈMES EN INTERACTION

Revenons au cas général des systèmes non triviaux de particules décrits par des systèmes invariants. Nous nous sommes posé le problème suivant :

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des fonctions $P^\alpha(f, g)$ et $H^{\alpha\beta}(f, g)$ telles que l'on ait :

$$\begin{aligned} &P^\alpha(f, g) = L^{\alpha'}_\beta P^\beta(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}), \\ &H^{\alpha\beta}(f, g) = L^{\alpha'}_\rho L^{\beta'}_\sigma[H^{\rho\sigma}(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}) - (A^\rho P^\sigma(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}) - A^\sigma P^\rho(\underset{0}{x}, \underset{0}{v}))] \end{aligned} \tag{55}$$

Remarque. — Si de telles fonctions existent alors $P^\alpha(x^i_a, v^j_b)$, $H^{ij}(x^k_a, v^r_b)$ et $\frac{d}{dt} H^{i0}(x^k_a, v^r_b) = P^i$ sont des intégrales premières du système invariant (1). On peut le voir en écrivant les formules (55) pour $L^{\alpha'}_\beta = \delta^\alpha_\beta$, $A^0 = t$, $A^i = 0$.

Compte tenu de (13), il est facile de prouver que si des fonctions P^α et $H^{\alpha\beta}$ existent elles doivent être solutions du système d'équations :

$$(56) \quad \mathscr{L}_K P^\alpha = M^\alpha_{\rho K} P^\rho \quad , \quad \mathscr{L}_K H^{\alpha\beta} = (M^\alpha_{\mu K}\delta^\beta_\nu + M^\beta_{\nu K}\delta^\alpha_\mu)H^{\mu\nu} + P^\alpha N^\beta_K - P^\beta N^\alpha_K$$

où nous avons posé :

$$(57) \qquad M^\alpha_{\beta K} = \left\{ \frac{\partial L^{\alpha'}_\beta}{\partial \Lambda^K} \right\}_{\Lambda^I = 0} \quad , \quad N^\alpha_K = \left\{ \frac{\partial A^\alpha}{\partial \Lambda^K} \right\}_{\Lambda^I = 0}$$

Compte tenu de la paramétrisation utilisée nous avons donc :

$$(58) \quad \begin{matrix} M^\alpha_{\rho\gamma} = 0 & M^\alpha_{\rho 3+i} = \eta_{\rho 0}\delta^\alpha_i - \eta_{\rho i}\delta^\alpha_0 & M^\alpha_{\rho 6+i} = -2\eta^{0\alpha}_{\cdot\cdot\rho i} \\ N^\alpha_\gamma = \delta^\alpha_\gamma & N^\alpha_{3+i} = 0 & N^\alpha_{6+i} = 0 \end{matrix}$$

$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ étant le tenseur élément de volume de M_4 ($\eta_{0123} = 1$).

Pour démontrer que les équations (56) sont suffisantes introduisons les quantités Ξ^α et $\Psi^{\alpha\beta}$ qui sont respectivement la différence des premier et deuxième membres des deux équations (55). Compte tenu de (13) et (56) on voit facilement que l'on a :

$$(59) \qquad \frac{\partial \Xi^\alpha}{\partial \Lambda^J} = M^\alpha_{\rho K} B^K_J \Xi^\rho \quad , \quad \frac{\partial \Psi^{\alpha\beta}}{\partial \Lambda^J} = (M^\alpha_{\mu K}\delta^\beta_\nu + M^\beta_{\nu K}\delta^\alpha_\mu) B^K_J \Psi^{\mu\nu}$$

Étant donné que pour $\Lambda^I = 0$ nous avons, compte tenu de (14), $\Xi^\alpha = 0$, $\Psi^{\mu\nu} = 0$, nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — Pour qu'il existe des fonctions P^α et $H^{\mu\nu}$ se transformant suivant les formules (55) il faut et il suffit qu'elles soient solutions du système d'équations (56).

Il est clair que l'énergie-impulsion totales d'une part, et le moment angulaire total ainsi que la formule du centre de masse d'autre part, des systèmes de particules doivent se trouver parmi les solutions de (56) (Il y en a toujours). Mais il est clair aussi que des spécifications physiques plus contraignantes sont nécessaires pour définir univoquement toutes ces quantités. On peut s'en rendre compte en remarquant que pour des particules libres à côté des fonctions P^α et $H^{\alpha\beta}$ définies dans le paragraphe précédent, le système (56) admet bien d'autres solutions. Nous touchons là le problème crucial de la spécification du « type d'interaction » envisagé.

Nous laissons au lecteur la tâche instructive d'expliciter, compte tenu de (28), (30), (31), (34) et (58), les équations (56) et d'interpréter les résultats obtenus.

3. LE CAS DE DEUX PARTICULES

Nous allons considérer avec plus d'attention le cas de deux particules. Supposons que des solutions de (56) existent telles qu'il existe une relation de la forme [1] :

(60) $$\Phi(f_a^i, P^\alpha, J_s) = 0$$

et telles que l'on ait :

(61) $$\text{rang de} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P^\alpha}{\partial g_a^i} \\ \dfrac{\partial J_s}{\partial g_a^i} \end{vmatrix} = 6$$

dans un voisinage de $\Phi = 0$. Nous pourrons dans ce cas exprimer g_a^i et C^s comme fonctions des f_b^j, P^α et J_r :

(62) $$g_a^i = h_a^i(f_b^j, P^\alpha, J_r) \quad , \quad C^s(f_b^j, P^\alpha, J_r)$$

En faisant opérer tous les $\mathscr{L}_K$ sur g_a^i on obtient, compte tenu de (56) :

(63) $$\mu_a^i = h_b^j \frac{\partial h_a^i}{\partial f_b^j}$$

(64) $$\varepsilon_b \frac{\partial h_a^i}{\partial f_b^r} + \eta_{srk} P^k \frac{\partial h_a^i}{\partial J_s} = 0$$

(65) $$\eta^i_{\cdot kr} h_a^k = \eta^s_{\cdot kr}\left(\frac{\partial h_a^i}{\partial f_b^s} f_b^k + \frac{\partial h_a^i}{\partial P^s} P^k + \frac{\partial h_a^i}{\partial J^s} J^k\right)$$

(66) $$-\delta_r^i + h_a^i h_{ar} + \frac{\partial h_a^i}{\partial f_b^j} h_b^j f_{ar} = \frac{\partial h_a^i}{\partial f_b^j} h_b^i f_{br} - \frac{\partial h_a^i}{\partial P^a}(E\delta_r^\alpha + P_r \delta_0^a) + \frac{\partial h_a^i}{\partial J_s} \eta_{srk} C^k$$

Équations auxquelles il convient d'adjoindre celles pour C^s :

(67) $$P^i = h_b^j \frac{\partial C^i}{\partial f_b^j}$$

---

[1] Pour deux particules libres cette fonction est :

$$\Phi = \eta_{ijk} P^i f_1^j f_2^k - J_i(f_1^i - f_2^i)$$

(68) $$\mathrm{E}\delta^i_r = \varepsilon_b \frac{\partial \mathrm{C}^i}{\partial f^r_b} + \eta_{srk}\mathrm{P}^k \frac{\partial \mathrm{C}^i}{\partial \mathrm{J}_s}$$

(69) $$\eta^{i}_{\cdot rk}\mathrm{C}^k = \eta^{s}_{\cdot kr}\left(\frac{\partial \mathrm{C}^i}{\partial f^s_b} f^k_b + \frac{\partial \mathrm{C}^i}{\partial \mathrm{P}^s}\mathrm{P}^k + \frac{\partial \mathrm{C}^i}{\partial \mathrm{J}^s}\mathrm{J}^k\right)$$

(70) $$\eta^{i}_{\cdot kr}\mathrm{J}^k = \frac{\partial \mathrm{C}^i}{\partial f^j_b} h^j_b f_{br} - \frac{\partial \mathrm{C}^i}{\partial \mathrm{P}^\alpha}(\mathrm{E}\delta^\alpha_r + \mathrm{P}_r\delta^\alpha_0) + \frac{\partial \mathrm{C}^i}{\partial \mathrm{J}_s}\eta_{srk}\mathrm{C}^k$$

Et celles pour Φ :

(71) $$h^j_b \frac{\partial \Phi}{\partial f^j_b} = 0$$

(72) $$\varepsilon_b \frac{\partial \Phi}{\partial f^r_b} + \eta_{srk}\mathrm{P}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{J}_s} = 0$$

(73) $$\eta^{s}_{\cdot kr}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial f^s_b} f^k_b + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{P}^s}\mathrm{P}^k + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{J}^s}\mathrm{J}^k\right) = 0$$

(74) $$\frac{\partial \Phi}{\partial f^j_b} h^j_b f_{br} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{P}^\alpha}(\mathrm{E}\delta^\alpha_r + \mathrm{P}_r\delta^\alpha_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{J}_s}\eta_{srk}\mathrm{C}^k = 0$$

Réciproquement. Supposons que des solutions de (64)-(74) existent, telles que :

(75) $$\text{dét.}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial h^i_a}{\partial \mathrm{P}^\alpha} & \dfrac{\partial h^i_a}{\partial \mathrm{J}_s} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{P}^\alpha} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{J}_s} \end{vmatrix} \neq 0$$

dans un voisinage de $\Phi = 0$. Nous pourrons alors exprimer P^α et J_s en fonction des f et g en résolvant (60) et (62), et en posant $\Phi = 0$. Nous pourrons exprimer les fonctions μ^i_a, supposées définies par l'équation (63), en fonction des f et g.

Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — Sous les hypothèses ci-dessus le système d'équations (1), dont les fonctions μ^i_a sont définies par les équations (63), est un système invariant.

La démonstration se fait en deux étapes. On démontre tout d'abord que les fonctions P^α, J_s et C^i exprimées en fonction des f et g satisfont les équations (56). Ensuite que les fonctions μ^i_a sont solutions du système d'équations (35), (36), (37).

Note. — Les équations (64), (65), (66) généralisent des équations obtenues par E. H. Kerner [7] dans le cas d'une seule dimension. Kerner considère aussi le cas à trois dimensions mais le procédé employé ignore complètement le problème du moment angulaire et du centre de masse.

Note. — Nous avons démontré plusieurs résultats qui s'énonçaient (lemme 3) ou auraient pu s'énoncer (théorèmes 2, 3, 4) essentiellement ainsi : si f et g satisfont à des relations de groupe, et si une certaine propriété est satisfaite pour $\Lambda^{\mathrm{I}} = 0$, alors cette propriété est satisfaite pour tout Λ^{I}. Ce genre de résultats rappellent des résultats très connus, et ont en fait la même origine. Citons les conditions nécessaires et suffisantes qui assurent, par exemple, l'invariance d'une fonction ou d'un champ de tenseurs sous l'action d'un groupe opérant sur une variété. Toutefois un examen attentif convaincra le lecteur que nos résultats ne sont pas identiques à ces résultats connus et par conséquent rien ne nous dispensait de les démontrer. Exemple : la formule (55) exprime l'invariance du vecteur P^{α}. Mais P^{α} n'est pas un vecteur de la variété des conditions initiales V_{6N}. P^{α} est un vecteur de la représentation fondamentale du groupe de Lorentz qui se transforme en fonction de la réalisation du groupe de Poincaré opérant sur V_{GN}.

REMERCIEMENTS

Je me suis intéressé à ce sujet pendant que j'étais Visiting Professor à Brown University. Providence. R. I. Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude aux membres du Physics Dept. en compagnie desquels j'ai fait un aussi agréable séjour.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. P. EISENHART, *Continuous groups of transformations*. Dover Publications Inc., New York, 1961.
[2] C. MOLLER, *The theory of relativity*. Oxford University Press, 1962.
[3] F. D. MURNAGHAN, *The theory of group representations*. Dover Publications, 1963.
[4] D. G. CURRIE, *Phys. Rev.*, **142**, 1966, p. 817.
[5] R. N. HILL, *Journ. of Math. Phys.*, vol. **8**, n° 2, 1967, p. 201.
[6] J. L. SYNGE, *Relativity. The special theory*. North-Holland Publishing Company. 2nd Ed., Amsterdam, 1965.
[7] E. H. KERNER, *Journ. of Math. Phys.*, vol. **9**, n° 2, 1968, p. 223.

Manuscrit reçu le 4 novembre 1969.

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1710*a*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6021. 5-1970.