ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE TEYSSANDIER

Contribution à l'étude des masses quasi-sphériques tournantes en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 12, n° 3 (1970), p. 263-283
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__12_3_263_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XII, n° 3, 1970, p. 263-283. *Physique théorique.*

Contribution à l'étude des masses quasi-sphériques tournantes en Relativité Générale

par

Pierre TEYSSANDIER

RÉSUMÉ. — Le champ gravitationnel à l'extérieur et à l'intérieur d'une enveloppe sphérique creuse tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire constante ω est étudié systématiquement au premier et au second ordre par rapport à ω. Notre méthode d'approximations successives nous conduit à faire des réserves sur les hypothèses faites par Brill et Cohen ainsi qu'à modifier légèrement les résultats énoncés par Thirring, Bach et Bass-Pirani.

SUMMARY. — The gravitational field outside and inside a thin spherical shell spinning with a constant angular velocity ω is systematically considered in first and second order of approximation with respect to ω. Our method of successive approximations leads us to reconsider the hypothesis made by Brill-Cohen and to modify the results enonced by Thirring, Bach and Bass-Pirani.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des effets gravitationnels engendrés par la rotation sur elle-même d'une enveloppe sphérique creuse de grande masse. Pour de telles enveloppes, il paraît nécessaire d'abandonner l'approximation des champs faibles et de considérer la métrique comme une perturbation stationnaire à symétrie axiale d'un ds^2 statique à symétrie sphérique.

Par analogie avec la perturbation envisagée par Thirring [*16*] [*17*], on peut d'abord supposer que la métrique est de la forme suivante (Brill et Cohen [*4*]) :

$$(1) \quad ds^2 = -\psi^4(r)\{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta[d\varphi - \Omega(r)dt]^2\} + V^2(r)dt^2$$

Toutefois, un tel choix ne nous semble pas justifié. Nous avons montré en effet que tout ds^2 du type (1) satisfaisant aux équations d'Einstein du vide se réduit nécessairement au ds^2 de Schwarzschild et ne peut donc représenter adéquatement le champ d'un corps sphérique tournant [*15*]. En conséquence, au lieu de postuler *a priori* la forme de la métrique, nous proposons d'effectuer d'abord une étude générale du champ dans le vide des masses en équilibre tournant autour d'un axe de symétrie et d'appliquer ensuite systématiquement cette méthode au problème des sources quasi-sphériques en rotation.

L'exposé de cette méthode générale constitue le premier chapitre. Nous rappelons les équations du champ à l'extérieur des masses tournant uniformément autour d'un axe de symétrie avec la vitesse angulaire ω, puis nous montrons comment ces équations peuvent être résolues par approximations successives lorsqu'on développe les coefficients de la métrique en séries de puissances entières de ω.

Par définition, nous appelons « sources quasi-sphériques tournantes » des masses dont la métrique écrite à l'ordre d'approximation zéro par rapport à ω se réduit à un ds^2 statique à symétrie sphérique. On sait qu'un tel ds^2 peut se ramener soit à un ds^2 de Schwarzschild à constante de masse non nulle, soit à un ds^2 de Minkowski. Nous considérons les solutions des équations d'Einstein correspondant à chacun de ces cas respectivement comme le champ à l'extérieur et le champ à l'intérieur d'une couche simple quasi-sphérique tournante.

Le chapitre II contient l'étude détaillée de la structure de ces champs au premier et au second ordres par rapport à ω. En conclusion de chacune des parties qui constituent ce chapitre, nous comparons nos résultats avec ceux de Thirring [*16*] [*17*] et Bass-Pirani [*2*] ainsi qu'avec ceux de Bach [*1*] et Brill-Cohen [*4*].

I. — ÉTUDE GÉNÉRALE DU CHAMP DES MASSES TOURNANTES

§ 1. Les hypothèses

1° Précisons tout d'abord nos hypothèses d'un point de vue physique :

a) La source du champ étudié tourne en bloc autour d'un axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω. L'axe de rotation conserve une direction fixe par rapport au système de coordonnées envisagé.

b) On admet qu'il y a régime d'équilibre et qu'il ne se produit pas d'échanges énergétiques entre la source et le reste de l'Univers.

c) La source peut être constituée soit par une enveloppe creuse très mince (Source de type I), soit par une masse pleine (Source de type II). Les champs correspondants seront appelés respectivement « champ de type I » et « champ de type II ».

2° La traduction mathématique de ces hypothèses est la suivante :

a) On postule que le ds^2 de l'espace-temps V_4 est une métrique stationnaire à symétrie axiale pouvant s'écrire sous la forme suivante (Van Stockum [*14*]).

$$ds^2 = \underset{\{A,B\}=\{1,2\}}{g_{AB}(x^1, x^2)dx^A dx^B} + \underset{\{m,n\}=\{3,4\}}{g_{mn}(x^1, x^2)dx^m dx^n} \tag{2}$$

On assimilera x^3 à un angle azimuthal φ et x^4 à une époque t.

b) On admet que le quadrivecteur vitesse unitaire d'une particule de la source est de la forme (Boyer [*3*]) :

$$u^\mu = U(x^1, x^2)(0, 0, \omega, 1),$$

ω étant une constante ayant la dimension d'une vitesse angulaire autour de l'axe de symétrie.

c) L'espace-temps V_4 est asymptotiquement minkowskien à l'infini.

d) Une source de type I est schématisée par une couche simple de matière répartie sur une hypersurface Σ d'équation :

$$S(x^1, x^2) = 0$$

On admet que le tenseur impulsion-énergie correspondant est de la forme :

$$T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu}\delta_\Sigma,$$

δ_Σ étant la distribution de Dirac de support Σ et les $\tau_{\mu\nu}$ des fonctions des coordonnées univoquement définies sur Σ.

e) Une source de type II est schématisée par un tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ dont les composantes sont des fonctions ordinaires des coordonnées x^1, x^2 (par exemple, schéma matière incohérente ou fluide parfait [*13*], [*14*]).

§ 2. Les équations du champ

1° Avant d'expliciter les équations du champ, il est indispensable de faire quelques commentaires en relation avec la classification des sources en deux types.

Dans le cas d'une source de type I, on admettra que les équations du champ sont :

(3) $$S_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi \tau_{\mu\nu} \delta_\Sigma,$$

ces équations devant être interprétées comme des égalités de distributions.

Un calcul simple montre que si les $g_{\mu\nu}$ sont continus sur Σ et de classe C^2 en dehors de Σ, les composantes du tenseur d'Einstein sont des distributions de la forme (Papapetrou-Hamoui [*12*]) :

(4) $$S_{\mu\nu} \equiv \tilde{S}_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \delta_\Sigma.$$

Les $\tilde{S}_{\mu\nu}$ sont assimilables à des fonctions ordinaires des coordonnées, en général discontinues sur Σ, tandis que les quantités $\sigma_{\mu\nu}$ sont calculables en chaque point de la couche simple dès que l'on connaît le saut des $g_{\mu\nu,\rho}$ à travers Σ au point considéré [*12*].

En rapprochant les identités (4) de (3), on obtient les équations du champ :

(5) $$\tilde{S}_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \tilde{R}_{\mu\nu} \equiv \tilde{S}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{S} g_{\mu\nu} = 0$$

(6) $$\sigma_{\mu\nu} = \chi \tau_{\mu\nu}$$

Les équations (5) s'écrivent exactement de la même façon que les équations du vide dans le cas des masses pleines (sources de type II). En conséquence, nous les expliciterons dans la suite sans préciser le type des sources.

D'autre part, les conditions (6) déterminent l'état élastique d'une couche simple Σ susceptible de créer un champ de type I solution des équations (5) et continu sur Σ.

2° On sait que dans les régions de V_4 vides d'énergie où la métrique est régulière, il est toujours possible de choisir un système de coordonnées admissibles r, z, φ, t tel que le $ds^2(2)$ s'écrive

(7) $$ds^2 = -e^{2(\psi-\lambda)}(dr^2 + dz^2) - (r^2 - m^2)e^{-2\lambda}d\varphi^2 - 2m\,d\varphi\,dt + e^{2\lambda}dt^2,$$

les quantités λ, ψ et m ne dépendant que de r et z seulement (Lewis [*8*]).

Si on pose (Papapetrou [*11*]) :

(8) $$\mu(r, z) = e^{-2\lambda(r,z)} m(r, z),$$

le ds^2 (7) s'écrit sous la forme :

(7′) $$ds^2 = -e^{2(\psi-\lambda)}(dr^2 + dz^2) - r^2 e^{-2\lambda} d\varphi^2 + e^{2\lambda}(dt - \mu\,d\varphi)^2$$

Les équations du champ sont [6] :

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} + \left(4\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\frac{\partial\mu}{\partial r} + 4\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0 \tag{9,1}$$

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r} = -\frac{e^{4\lambda}}{2r^2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right] \tag{9,2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = r\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{e^{4\lambda}}{4r}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right] \tag{9,3}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 2r\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial r}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial z} - \frac{e^{4\lambda}}{2r}\frac{\partial\mu}{\partial r}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial z} \tag{9,4}$$

On vérifie aisément que les équations (9,1) et (9,2) sont les conditions d'intégralité de (9,3) et (9,4).

Dans les paragraphes suivants, nous aurons besoin de l'équation satisfaite par m :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial m}{\partial r}& \\ - 2\left\{\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + 2\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right\}m &= 0\end{aligned} \tag{9',1}$$

qui est strictement équivalente à (9,1), eu égard à la définition (8).

§ 3. Méthode d'intégration par approximations successives

Nous allons chercher à déterminer des solutions du système (9) sous forme de séries entières de puissances positives de ω à coefficients dépendant de r et de z.

1° Nous postulons tout d'abord qu'il existe $\omega_0 > 0$ tel qu'en tout point situé en dehors de la source, les fonctions λ, ψ et μ admettent les développements suivants, convergents pour tout $\omega \in]-\omega_0, +\omega_0[$:

$$\lambda(r, z, \omega) = \underset{0}{\lambda}(r, z) + \sum_{n\geq 1} \omega^{2n}\underset{2n}{\lambda}(r, z) \tag{10,1}$$

$$\psi(r, z, \omega) = \underset{0}{\psi}(r, z) + \sum_{n\geq 1} \omega^{2n}\underset{2n}{\psi}(r, z) \tag{10,2}$$

$$\mu(r, z, \omega) = \omega\underset{1}{\mu}(r, z) + \sum_{n\geq 1} \omega^{2n+1}\underset{2n+1}{\mu}(r, z) \tag{10,3}$$

a) On admet la parité du développement de λ parce que $e^{\lambda}dt$ mesure un intervalle de temps propre pour un observateur $r =$ cte, $z =$ cte, $\varphi =$ cte et peut par conséquent être supposé indépendant du sens de la rotation.

b) Il semble naturel d'admettre que la déviation d'un rayon lumineux partant de l'axe change de signe lorsque ω devient $-\omega$. On suppose donc que μ est impaire par rapport à ω.

c) Il résulte immédiatement des équations du champ que ψ est paire par rapport à ω.

2° D'après la théorie des séries entières, la fonction $e^{4\lambda}$ admet aussi en tout point situé hors des sources un développement en série de puissances entières de ω convergent pour $\omega \in]-\omega_0, +\omega_0[$:

$$e^{4\lambda(r,z,\omega)} = \sum_{n \geqslant 0} \omega^{2n} \underset{2n}{\mathrm{K}}(r, z) \tag{11}$$

La fonction $\underset{2n}{\mathrm{K}}$ peut être calculée explicitement si on connaît $\underset{0}{\lambda}, \underset{2}{\lambda}, \ldots, \underset{2n}{\lambda}$. Ceci se démontre par récurrence grâce aux formules :

$$\underset{0}{\mathrm{K}}(r, z) = e^{4\underset{0}{\lambda}(r,z)} \tag{12,0}$$

$$\underset{2n}{\mathrm{K}}(r, z) = 4 \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{n-p}{n} \underset{2(n-p)}{\lambda}(r, z) \underset{2p}{\mathrm{K}}(r, z) \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1 \tag{12,2n}$$

3° D'après les hypothèses faites ci-dessus, la fonction $m(r, z, \omega)$ admet un développement en série semblable à celui de $\mu(r, z, \omega)$, avec les mêmes conditions de convergence :

$$m(r, z, \omega) = \omega \underset{1}{m}(r, z) + \sum_{n \geqslant 1} \omega^{2n+1} \underset{2n+1}{m}(r, z) \tag{13}$$

La fonction m est en effet égale au produit de μ par $e^{2\lambda}$, toutes les deux développables en séries entières convergentes dans $]-\omega_0, +\omega_0[$ donc absolument convergentes dans le même intervalle : il suffit dès lors d'appliquer le théorème de Cauchy relatif à la multiplication terme à terme de deux séries absolument convergentes.

4° On admet d'autre part que les dérivées partielles de λ, ψ et μ (ou m) des deux premiers ordres sont obtenues en dérivant terme à terme les séries (10). On peut donc écrire :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = \sum_{n \geqslant 0} \omega^{2n} \frac{\partial \underset{2n}{\lambda}}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} = \sum_{n \geqslant 0} \omega^{2n} \frac{\partial^2 \underset{2n}{\lambda}}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \sum_{n \geqslant 0} \omega^{2n} \frac{\partial \underset{2n}{\lambda}}{\partial z}, \text{ etc.} \tag{14}$$

On suppose que les développements ainsi obtenus convergent en tout point situé hors des sources lorsque $\omega \in] -\omega_0, +\omega_0[$. Le théorème de Cauchy permet d'effectuer le produit de deux séries choisies de façon quelconque parmi (10), (11), (13) et (14) et d'obtenir ainsi une série convergente dans $] -\omega_0, +\omega_0[$ représentant le produit des fonctions définies par les séries initiales. On aura par exemple :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r}\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \sum_{n \geqslant 0} \omega^{2n} \left[\sum_{p=0}^{p=n} \frac{\partial \underset{2p}{\lambda}}{\partial r} \frac{\partial \underset{2(n-p)}{\lambda}}{\partial z} \right]$$

5° Avec de telles hypothèses, le système (9) se décompose en une infinité de systèmes que nous écrirons sous la forme :

$$(15,0,1) \qquad \frac{\partial^2 \underset{0}{\lambda}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \underset{0}{\lambda}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial r} = 0$$

$$(15,0,2) \qquad \frac{\partial \underset{0}{\psi}}{\partial r} = r\left[\left(\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$(15,0,3) \qquad \frac{\partial \underset{0}{\psi}}{\partial z} = 2r\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial z}$$

$$(15,1) \qquad \frac{\partial^2 \underset{1}{\mu}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \underset{1}{\mu}}{\partial z^2} + \left(4\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial r} + 4\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial z}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial z} = 0$$

$$(15,2,1) \qquad \frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial r} = -\frac{e^{4\underset{0}{\lambda}}}{2r^2}\left[\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$(15,2,2) \qquad \frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial r} = 2r\left(\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial r}\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial r} - \frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial z}\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial z}\right) - \frac{e^{4\underset{0}{\lambda}}}{4r}\left[\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$(15,2,3) \qquad \frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial z} = 2r\left(\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial r}\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial z} + \frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial z}\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial r}\right) - \frac{e^{4\underset{0}{\lambda}}}{2r}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial r}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial z}$$

$$(15,3) \qquad \frac{\partial^2 \underset{3}{\mu}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \underset{3}{\mu}}{\partial z^2} + \left(4\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\frac{\partial \underset{3}{\mu}}{\partial r} + 4\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial z}\frac{\partial \underset{3}{\mu}}{\partial z} = -4\left[\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial r}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial r} + \frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial z}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial z}\right]$$

. . . .

$$(15{,}2n-1)\quad \frac{\partial^2 \underset{2n-1}{\mu}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \underset{2n-1}{\mu}}{\partial z^2} + \left(4\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\frac{\partial \underset{2n-1}{\mu}}{\partial r} + 4\frac{\partial \underset{0}{\lambda}}{\partial z}\frac{\partial \underset{2n-1}{\mu}}{\partial z}$$

$$= -4\sum_{p=1}^{p=n-1}\left[\frac{\partial \underset{2p}{\lambda}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \underset{2(n-p)+1}{\mu}}{\partial r} + \frac{\partial \underset{2p}{\lambda}}{\partial z}\cdot\frac{\partial \underset{2(n-p)+1}{\mu}}{\partial z}\right]$$

$$(15{,}2n{,}1)\quad \frac{\partial^2 \underset{2n}{\lambda}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \underset{2n}{\lambda}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \underset{2n}{\lambda}}{\partial r} = -\frac{1}{2r^2}\sum_{p=0}^{p=n-1}\underset{2(n-1-p)}{\mathrm{K}}$$

$$\left\{\sum_{q=0}^{q=p}\left[\frac{\partial \underset{2q+1}{\mu}}{\partial r}\,\frac{\partial \underset{2(p-q)+1}{\mu}}{\partial r} + \frac{\partial \underset{2q+1}{\mu}}{\partial z}\,\frac{\partial \underset{2(p-q)+1}{\mu}}{\partial z}\right]\right\}$$

$$(15{,}2n{,}2)\quad \frac{\partial \underset{2n}{\psi}}{\partial r} = r\sum_{p=0}^{p=n}\left[\frac{\partial \underset{2p}{\lambda}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \underset{2(n-p)}{\lambda}}{\partial r} - \frac{\partial \underset{2p}{\lambda}}{\partial z}\cdot\frac{\partial \underset{2(n-p)}{\lambda}}{\partial z}\right]$$

$$-\frac{1}{4r}\sum_{p=0}^{p=n-1}\underset{2(n-1-p)}{\mathrm{K}}\left[\sum_{q=0}^{q=p}\frac{\partial \underset{2q+1}{\mu}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \underset{2(p-q)+1}{\mu}}{\partial r} - \frac{\partial \underset{2q+1}{\mu}}{\partial z}\cdot\frac{\partial \underset{2(p-q)+1}{\mu}}{\partial z}\right]$$

$$(15{,}2n{,}3)\quad \frac{\partial \underset{2n}{\psi}}{\partial z} = 2r\sum_{p=0}^{p=n}\frac{\partial \underset{2p}{\lambda}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \underset{2(n-p)}{\lambda}}{\partial z}$$

$$-\frac{1}{2r}\sum_{p=0}^{p=n-1}\underset{2(n-1-p)}{\mathrm{K}}\left[\sum_{q=0}^{q=p}\frac{\partial \underset{2q+1}{\mu}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \underset{2(p-q)+1}{\mu}}{\partial z}\right]$$

. . . .

Le tableau ci-dessus montre quelles équations il faudra successivement résoudre pour obtenir une solution à l'approximation désirée. En effet, avec l'ordre adopté dans notre écriture, outre la fonction que l'on cherche à calculer, chaque équation d'un système $(15{,}k)$ ne contient que des quantités solutions des équations qui la précèdent. On a donc un procédé de calcul par récurrence de la solution en général unique satisfaisant à des conditions aux limites données à chaque ordre d'approximation.

a) Considérons d'abord le système d'ordre zéro (15,0); (15,0,1) est l'équation de Laplace dans le cas de la symétrie axiale. Désignons par ϖ la grandeur angulaire définie par:

$$\sin\varpi = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}, \qquad \cos\varpi = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

On peut proposer des solutions de (15,0,1) du type :

$$\underset{0}{\lambda} = -\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{\sin^{n+1}\varpi}{r^{n+1}} \mathrm{P}_n(\cos\varpi)$$

les P_n désignant les polynômes de Legendre et les a_n des constantes arbitraires qui seront déterminées en fonction des conditions aux limites formulées à l'ordre zéro.

Les solutions correspondantes de (15,0,2) et (15,0,3) qui s'annulent à l'infini sont alors (Marek [*10*]) :

$$\underset{0}{\psi} = -\sum_{l,m\geqslant 0}\sum a_l a_m \frac{(l+1)(m+1)}{l+m+2}\frac{\sin^{l+m+2}\varpi}{r^{l+m+2}} [\mathrm{P}_l(\cos\varpi)\mathrm{P}_m(\cos\varpi) - \mathrm{P}_{l+1}(\cos\varpi)\mathrm{P}_{m+1}(\cos\varpi)]$$

b) Connaissant $\underset{0}{\lambda}$, on pourra essayer de résoudre l'équation (15,1). Si on y parvient, on connaitra le second membre de (15,2,1) et on pourra alors tenter de calculer des solutions $\underset{2}{\lambda}$ et $\underset{2}{\psi}$ du système (15,2) ; le même mécanisme se poursuit indéfiniment.

c) Supposons qu'on ait trouvé une solution de chacun des systèmes (15,0), (15,1), ..., (15,2(n − 1)). La connaissance de $\underset{0}{\lambda}, \ldots, \underset{2(n-1)}{\lambda}$ et $\underset{1}{\mu}, \ldots, \underset{2n-3}{\mu}$ permet d'expliciter complètement le système (15,2n − 1). L'obtention d'une solution $\underset{2n-1}{\mu}$ de cette équation détermine complètement le système (15,2n). En effet, pour calculer les $\underset{2(n-1-p)}{\mathrm{K}}$ $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$, il suffit de connaître $\underset{0}{\lambda}, \ldots, \underset{2(n-1)}{\lambda}$, d'après les formules (12).

II. — LE CHAMP DES ENVELOPPES QUASI-SPHÉRIQUES EN ROTATION

A l'aide de la méthode élaborée dans le premier chapitre, nous nous proposons maintenant d'étudier jusqu'au second ordre par rapport à ω la structure du champ des enveloppes quasi-sphériques en rotation. Nous appelons ainsi toute enveloppe tournant autour d'un axe de symétrie dont la métrique écrite à l'ordre d'approximation zéro, à savoir :

(16) $$\underset{0}{ds^2} = -e^{2(\underset{0}{\psi}-\underset{0}{\lambda})}(dr^2+dz^2) - r^2e^{-2\underset{0}{\lambda}}d\varphi^2 + e^{2\underset{0}{\lambda}}dt^2,$$

présente la caractéristique d'être à symétrie sphérique (On suppose que les coefficients de la métrique admettent des développements en série de puissances entières de ω du type explicité dans le chapitre I).

Deux cas sont à distinguer :

Cas I : Le ds^2 (16) peut se ramener au ds^2 de Schwarzschild avec constante de masse non nulle : nous le considérons comme l'approximation d'ordre zéro du champ à l'extérieur de l'enveloppe tournante.

Cas II : Le ds^2 (16) peut se ramener au ds^2 de Schwarzschild avec constante de masse nulle, i. e. à un ds^2 de Minkowski : nous le considérons alors comme l'approximation d'ordre zéro du champ à l'intérieur de l'enveloppe.

Nous allons examiner chacun de ces cas d'une façon plus détaillée.

Cas I. Le champ à l'extérieur de l'enveloppe

§ 1. Le choix de λ_0

Introduisons les coordonnées elliptiques spéciales x, y définies par la transformation conforme (Chazy, [5]) :

$$r + iz = a \operatorname{sh}(x + iy) \qquad \text{avec} \qquad a > 0. \tag{17}$$

Weyl a montré [*18*] que le ds^2 (16) se ramène à un ds^2 de Schwarzschild à constante de masse non nulle si on choisit comme solution de l'équation (15,0,1) la fonction :

$$\underset{0}{\lambda} = \operatorname{Log} \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| . \tag{18}$$

En effet, si on intègre les équations (15,0,2) et (15,0,3) pour cette valeur de $\underset{0}{\lambda}$ et si on effectue la nouvelle transformation de coordonnées [*7*] :

$$\rho = 2a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - y, \tag{19}$$

on constate que le ds^2 (16) s'écrit :

$$\underset{0}{ds^2} = - \frac{d\rho^2}{1 - \dfrac{2a}{\rho}} - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2a}{\rho}\right)dt^2$$

On retrouve ainsi la métrique de Schwarzschild sous sa forme habituelle.

Dans notre analyse du cas I, nous allons désormais utiliser les coordonnées sphériques ρ, θ, φ, t. Nous ferons tous les calculs en supposant que ρ est strictement supérieur à $2a$ afin d'éviter la singularité du type Schwarzschild.

§ 2. Les équations du champ au premier et au second ordres

1° La fonction $\underset{0}{\lambda}$ étant déterminée par la formule (18), les équations auxquelles satisfont $\underset{1}{m}$, $\underset{2}{\lambda}$ et $\underset{2}{\psi}$ sont :

$$\rho(\rho-2a)\frac{\partial^2 \underset{1}{m}}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 \underset{1}{m}}{\partial\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial \underset{1}{m}}{\partial\theta}+\frac{4a}{\rho}\underset{1}{m}=0 \tag{20,1}$$

$$\rho(\rho-2a)\frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial\theta^2}+2(\rho-a)\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial\theta} = -\frac{\rho-2a}{2\rho^3\sin^2\theta}\left[\rho(\rho-2a)\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\theta}\right)^2\right] \tag{20,2,1}$$

$$\frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho(\rho-2a)+a^2\sin^2\theta}\left[2a(\rho-a)\sin^2\theta\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial\rho}+2a\sin\theta\cos\theta\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial\theta}\right] -\frac{(\rho-2a)^2}{4\rho^2[\rho(\rho-2a)+a^2\sin^2\theta]}\left\{\frac{\rho-a}{\rho(\rho-2a)}\left[\rho(\rho-2a)\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\theta}\right)^2\right]+2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\rho}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\theta}\right\} \tag{20,2,2}$$

$$\frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial\theta}=\frac{1}{\rho(\rho-2a)+a^2\sin^2\theta}\left[-2a\rho(\rho-2a)\sin\theta\cos\theta\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial\rho}+2a(\rho-a)\sin^2\theta\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial\theta}\right] -\frac{(\rho-2a)^2}{4\rho^2[\rho(\rho-2a)+a^2\sin^2\theta]}\left\{2(\rho-a)\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\rho}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[\rho(\rho-2a)\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial\theta}\right)^2\right]\right\} \tag{20,2,3}$$

La relation entre $\underset{1}{m}$ et $\underset{1}{\mu}$ est, d'après la définition de μ:

$$\underset{1}{m} = e^{2\overset{\lambda}{_0}}\underset{1}{\mu} = \left(1 - \frac{2a}{\rho}\right)\underset{1}{\mu}$$

L'équation vérifiée par $\underset{1}{\mu}$ est donc:

$$\rho(\rho - 2a)\frac{\partial^2 \underset{1}{\mu}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \underset{1}{\mu}}{\partial \theta^2} + 4a\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial \rho} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial \theta} = 0 \tag{20,1'}$$

On remarquera qu'à un changement de notation près, l'équation (20,1) a déjà été explicitée par R. Bach [*1*].

2° Pour essayer de traiter le problème avec le plus de généralité possible, on pourrait rechercher des solutions du système (20) sous forme de développements au voisinage de l'infini du type suivant:

$$\underset{1}{m}(\rho, \theta) = \sum_{n \geqslant 1} \underset{1,n}{m}(\theta)\frac{1}{\rho^n}; \qquad \underset{2}{\lambda}(\rho, \theta) = \sum_{n \geqslant 1} \underset{2,n}{\lambda}(\theta)\frac{1}{\rho^n}; \qquad \underset{2}{\psi}(\rho, \theta) = \sum_{n \geqslant 1} \underset{2,n}{\psi}(\theta)\frac{1}{\rho^n}$$

En substituant dans les équations auxquelles satisfont ces quantités et en regroupant les termes facteurs de ρ^{-n}, on obtiendrait une infinité de systèmes permettant théoriquement de déterminer de proche en proche $\underset{1,n}{m}(\theta)$, $\underset{2,n}{\lambda}(\theta)$ et $\underset{2,n}{\psi}(\theta)$.

En pratique, les calculs sont compliqués et nous allons expliciter une solution particulière susceptible de coïncider au premier ordre en ω avec la forme de métrique trouvée par Thirring [*16*].

§ 3. Exemple de solution au premier et au second ordres

1° *La fonction* $\underset{1}{m}$.

L'équation (20,1) admet comme solution la plus générale de la forme $\frac{f(\theta)}{\rho}$:

$$\underset{1}{m}(\rho, \theta) = \left[\underset{1,1}{a}\left(\sin^2\theta \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| - \cos\theta\right) - \underset{1,1}{b}\sin^2\theta\right]\frac{1}{\rho},$$

$\underset{1,1}{a}$ et $\underset{1,1}{b}$ étant des constantes d'intégration.

Si on suppose que la source du champ est symétrique par rapport au plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ (plan équatorial), l'expression ci-dessus se réduit nécessairement à:

$$\underset{1}{m}(\rho, \theta) = -\underset{1,1}{b}\frac{\sin^2\theta}{\rho}.$$

Un tel résultat a déjà été proposé par R. Bach [*1*] et il peut coïncider avec celui de MM. Brill et Cohen [*4*] en choisissant convenablement $\underset{1,1}{b}$. Nous adoptons cette expression de $\underset{1}{m}$ dans toute la suite. On a évidemment

$$(21') \qquad \underset{1}{\mu}(\rho, \theta) = -\underset{1,1}{b}\,\frac{\sin^2\theta}{\rho - 2a}$$

Avec un tel choix, les équations du champ à l'approximation du second ordre sont :

$$(22,1) \quad \rho(\rho - 2a)\frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial \theta^2} + 2(\rho - a)\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial \theta} = \underset{1,1}{b^2}\,\frac{3\rho - 8a}{2\rho^3(\rho - 2a)^2}\sin^2\theta - \underset{1,1}{b^2}\,\frac{2}{\rho^3(\rho - 2a)}$$

$$(22,2) \quad \frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial \rho} = \frac{2a\sin\theta}{\rho(\rho - 2a) + a^2\sin^2\theta}\left[(\rho - a)\sin\theta\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial \rho} + \cos\theta\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial \theta}\right] - \underset{1,1}{b^2}\,\frac{\sin^2\theta}{4\rho^3(\rho - 2a)^2[\rho(\rho - 2a) + a^2\sin^2\theta]}\left[(9\rho^2 - 21a\rho + 8a^2)\sin^2\theta - 4(\rho - 2a)(2\rho - a)\right]$$

$$(22,3) \quad \frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial \theta} = \frac{2a\sin\theta}{\rho(\rho - 2a) + a^2\sin^2\theta}\left[-\rho(\rho - 2a)\cos\theta\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial \rho} + (\rho - a)\sin\theta\frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial \theta}\right] + \underset{1,1}{b^2}\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{4\rho^2(\rho - 2a)[\rho(\rho - 2a) + a^2\sin^2\theta]}\left[3(3\rho - 4a)\sin^2\theta - 4(\rho - 2a)\right]$$

Nous allons d'abord chercher les solutions de (22,1) pouvant s'écrire sous la forme $\underset{2}{\lambda}(\rho, \theta) = \underset{2}{K}(\rho)\sin^2\theta + \underset{2}{L}(\rho)$, puis nous calculerons les intégrales de (22,2) et (22,3).

2° *La fonction* $\underset{2}{\lambda}$.

Pour que $\underset{2}{K}(\rho)\sin^2\theta + \underset{2}{L}(\rho)$ soit solution de (22,1), il faut et il suffit que les fonctions $\underset{2}{K}$ et $\underset{2}{L}$ vérifient les conditions suivantes :

$$(23) \qquad \rho(\rho - 2a)\underset{2}{K}'' + 2(\rho - a)\underset{2}{K}' - 6\underset{2}{K} = \underset{1,1}{b^2}\,\frac{3\rho - 8a}{2\rho^3(\rho - 2a)^2}$$

$$(24) \qquad \rho(\rho - 2a)\underset{2}{L}'' + 2(\rho - a)\underset{2}{L}' + 4\underset{2}{K} = -\underset{1,1}{b^2}\,\frac{2}{\rho^3(\rho - 2a)}$$

En effectuant deux quadratures, on montre que l'intégrale générale de (24) correspondant à une fonction $\underset{2}{K}$ solution de (23) est de la forme :

$$(25)\quad \underset{2}{L}(\rho) = -\frac{2}{3}\underset{2}{K}(\rho) - \underset{1,1}{b}^{2}\,\frac{3\rho(\rho-a)-2a^2}{24a^3\rho^2(\rho-2a)} + \frac{1}{2a}\left(\underset{2}{B} - \frac{1}{8a^3}\underset{1,1}{b}^{2}\right)\operatorname{Log}\left(1-\frac{2a}{\rho}\right) + \underset{2}{B}^{*},$$

$\underset{2}{B}$ et $\underset{2}{B}^{*}$ étant deux constantes d'intégration.

D'autre part, on vérifie directement que la solution générale de (23) est :

$$(26)\quad \underset{2}{K}(\rho) = -\underset{1,1}{b}^{2}\,\frac{1}{4a\rho^2(\rho-2a)} + \underset{2}{A}\left\{\left[\rho(\rho-2a)+\frac{2}{3}a^2\right]\operatorname{Log}\left(1-\frac{2a}{\rho}\right) + 2a(\rho-a)\right\} + \underset{2}{A}^{*}\left[\rho(\rho-2a)+\frac{2}{3}a^2\right],$$

$\underset{2}{A}$ et $\underset{2}{A}^{*}$ étant deux constantes d'intégration.

Eu égard à la formule (25), l'intégrale générale de (24) correspondant à (26) est donnée par :

$$(27)\quad \underset{2}{L}(\rho) = -\underset{1,1}{b}^{2}\,\frac{\rho+a}{8a^3\rho^2} - \frac{2}{3}\underset{2}{A}\left[\rho(\rho-2a)\operatorname{Log}\left(1-\frac{2a}{\rho}\right) + 2a(\rho-a)\right] + \frac{1}{2a}\left[\underset{2}{B} - \frac{1}{8a^3}\left(\underset{1,1}{b}^{2} + \frac{64a^6}{9}\underset{2}{A}\right)\right]\operatorname{Log}\left(1-\frac{2a}{\rho}\right) - \frac{2}{3}\underset{2}{A}^{*}\left[\rho(\rho-2a)+\frac{2}{3}a^2\right] + \underset{2}{B}^{*}$$

3° *La fonction* $\underset{2}{\psi}$.

Les formules (26) et (27) explicitent la solution la plus générale de (22,1) susceptible de s'écrire sous la forme $\underset{2}{\lambda} = \underset{2}{K}\sin^2\theta + \underset{2}{L}$. En calculant $\dfrac{\partial\underset{2}{\lambda}}{\partial\rho}$ et $\dfrac{\partial\underset{2}{\lambda}}{\partial\theta}$ à partir de ces formules et en portant les expressions ainsi trouvées dans (22,2) et (22,3), on trouve les équations vérifiées par $\dfrac{\partial\underset{2}{\psi}}{\partial\rho}$ et $\dfrac{\partial\underset{2}{\psi}}{\partial\theta}$.

L'intégration de (22,3) fournit $\underset{2}{\psi}(\rho,\theta)$ à une fonction $\underset{2}{\Phi}(\rho)$ près que l'on détermine en comparant $\dfrac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial \rho}$ calculée à l'aide de l'expression de $\underset{2}{\psi}$ ainsi obtenue avec $\dfrac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial \rho}$ donnée par (22,2).

Le résultat définitif est:

$$(28)\quad \underset{2}{\psi}(\rho, \theta) = \sin^2\theta \left[\!\!\left[- \underset{1,1}{b^2} \frac{1}{8a^2\rho(\rho - 2a)} + \frac{4a}{3}\left\{ \underset{2}{\mathrm{A}}\left[(\rho - a)\,\mathrm{Log}\left(1 - \frac{2a}{\rho}\right) + 2a\right] + \underset{2}{\mathrm{A}}^{*}(\rho - a)\right\}\right]\!\!\right] - \frac{1}{a}\left[\underset{2}{\mathrm{B}} - \frac{1}{8a^3}\left(\underset{1,1}{b^2} + \frac{64a^6}{9}\underset{2}{\mathrm{A}}\right)\right]\mathrm{Log}\left[1 + a^2\frac{\sin^2\theta}{\rho(\rho - 2a)}\right] + \underset{2}{\mathrm{C}},$$

$\underset{2}{\mathrm{C}}$ étant une constante d'intégration.

En conclusion, nous remarquerons qu'il ne faut pas retenir dans toute leur généralité les solutions données par (26), (27) et (28). En effet, si on veut satisfaire le postulat selon lequel l'espace-temps est asymptotiquement minkowskien à l'infini, il faut imposer à $\underset{2}{\mathrm{K}}(\rho)$, $\underset{2}{\mathrm{L}}(\rho)$ et $\underset{2}{\psi}(\rho, \theta)$ de tendre vers zéro lorsque ρ tend vers l'infini. Cette condition implique que les constantes $\underset{2}{\mathrm{A}}^{*}$, $\underset{2}{\mathrm{B}}^{*}$ et $\underset{2}{\mathrm{C}}$ sont nulles.

Par conséquent, on peut adopter comme champ à l'extérieur d'une enveloppe quasi-sphérique tournante les solutions suivantes des équations (22):

$$(29)\quad \underset{2}{\lambda}(\rho, \theta) = \left[\!\!\left[- \underset{1,1}{b^2}\frac{1}{4a\rho^2(\rho - 2a)} + \underset{2}{\mathrm{A}}\left\{\left[\rho(\rho - 2a) + \frac{2}{3}a^2\right]\mathrm{Log}\left(1 - \frac{2a}{\rho}\right) + 2a(\rho - a)\right\}\right]\!\!\right]\sin^2\theta \cdot - \underset{1,1}{b^2}\frac{\rho + a}{8a^3\rho^2} - \frac{2}{3}\underset{2}{\mathrm{A}}\left[\rho(\rho - 2a)\,\mathrm{Log}\left(1 - \frac{2a}{\rho}\right) + 2a(\rho - a)\right] + \frac{1}{2a}\left[\underset{2}{\mathrm{B}} - \frac{1}{8a^3}\left(\underset{1,1}{b^2} + \frac{64a^6}{9}\underset{2}{\mathrm{A}}\right)\right]\mathrm{Log}\left(1 - \frac{2a}{\rho}\right)$$

$$(30)\quad \underset{2}{\psi}(\rho, \theta) = \left\{ - \underset{1,1}{b^2}\frac{1}{8a^2\rho(\rho - 2a)} + \frac{4a}{3}\underset{2}{\mathrm{A}}\left[(\rho - a)\,\mathrm{Log}\left(1 - \frac{2a}{\rho}\right) + 2a\right]\right\}\sin^2\theta - \frac{1}{a}\left[\underset{2}{\mathrm{B}} - \frac{1}{8a^3}\left(\underset{1,1}{b^2} + \frac{64a^6}{9}\underset{2}{\mathrm{A}}\right)\right]\mathrm{Log}\left[1 + \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho(\rho - 2a)}\right]$$

Les résultats ci-dessus diffèrent de ceux qu'a obtenus R. Bach à l'approximation du deuxième ordre par rapport à ω [1]. En effet, selon cet auteur, $\underset{2}{\lambda}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underset{2}{\lambda}(\rho, \theta) = \left(\sum_{n \geqslant 1} \underset{2,n}{k} \frac{1}{\rho^n} \right) \sin^2 \theta + \sum_{n \geqslant 1} \underset{2,n}{l} \frac{1}{\rho^n},$$

avec $\underset{2,n}{k}$ et $\underset{2,n}{l}$ tous les deux nuls à partir d'un certain rang. Il en est de même de la fonction $\underset{2}{\psi}$. Or, les formules (29) et (30) n'admettent pas de développements de ce type.

Cas II. Le champ à l'intérieur de l'enveloppe

Dans le cas statique, on admet généralement que l'espace-temps est plat à l'intérieur d'une couche simple sphérique. En conséquence, nous faisons l'hypothèse qu'à l'ordre zéro le ds^2 à l'intérieur d'une enveloppe quasi-sphérique en rotation est minkowskien.

§ 1. Choix de $\underset{0}{\lambda}$ et de $\underset{0}{\psi}$. Équations du champ au premier et au second ordres

1° Modulo un changement d'échelle, la condition précédente est réalisée si nous prenons $\underset{0}{\lambda}(r, z) \equiv$ cte. Les équations du champ d'ordre zéro impliquent en effet que la fonction $\underset{0}{\psi}$ est elle-même une constante. On ne restreint pas la généralité en posant pour simplifier les calculs ultérieurs

$$(31) \qquad \begin{cases} \underset{0}{\lambda}(r, z) \equiv \text{cte} = \underset{0}{l} \\ \underset{0}{\psi}(r, z) \equiv 0 \end{cases}$$

2° Les équations du champ d'ordres un et deux ont alors la forme suivante :

$$(32,1) \qquad \frac{\partial^2 \underset{1}{\mu}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \underset{1}{\mu}}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial r} = 0$$

$$(32,2,1) \qquad \frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial r} = - \frac{e^{4\underset{0}{l}}}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial r} = -\frac{e^{4\underset{0}{l}}}{4r}\left[\left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial z}\right)^2\right] \tag{32,2,2}$$

$$\frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial z} = -\frac{e^{4\underset{0}{l}}}{2r}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial r}\frac{\partial \underset{1}{\mu}}{\partial z} \tag{32,2,3}$$

On vérifie immédiatement que (32,1) est la condition d'intégrabilité des équations (32,2,2) et (32,2,3).

§ 2. **La métrique au premier et au second ordres**

1° L'équation (32,1) admet une infinité de solutions bornées sur l'axe de la forme [9]:

$$\underset{1}{\mu}(r, z) = -e^{-2\underset{0}{l}}\sum_{k\geqslant 1} \underset{1,k}{\beta}\, r^2(r^2 + z^2)^{\frac{k-1}{2}} \mathrm{P}'_k\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right), \tag{33}$$

les $\underset{1,k}{\beta}$ étant des constantes arbitraires et P'_k désignant la dérivée du polynôme de Legendre de degré k.

2° Plus généralement, toute solution $\underset{1}{\mu}(r, z)$ de (32,1) suffisamment régulière et bornée à l'origine vérifie les propriétés suivantes au voisinage de l'axe de rotation:

a) Les valeurs de $\underset{1}{\mu}$ sur l'axe de rotation ($r = 0$) dépendent linéairement de la cote z:

$$\underset{1}{\mu}(0, z) = \underset{1}{\alpha} z + \underset{1}{\alpha}^*$$

b) La fonction $\underset{1}{\mu}$ est complètement déterminée au voisinage de l'axe si on fixe les constantes $\underset{1}{\alpha}$, $\underset{1}{\alpha}^*$ et si on se donne arbitrairement les valeurs de sa dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 \underset{1}{\mu}}{\partial r^2}$ sur l'axe.

Posons en effet que $\underset{1}{\mu}(r, z)$ admet le développement suivant:

$$\underset{1}{\mu}(r, z) = \underset{1,0}{\mu}(z) + r^2 \underset{1,2}{\mu}(z) + \ldots + r^{2n} \underset{1,2n}{\mu}(z) + \ldots$$

Nous n'introduisons que les puissances paires de r car le phénomène étudié est de révolution autour de Oz: il est le même pour r et $-r$.

Par substitution dans (32,1), on montre qu'un tel développement est nécessairement de la forme :

$$\underset{1}{\mu}(r, z) = \underset{1}{\alpha} z + \underset{1}{\alpha}^* + r^2 \underset{1}{\bar{\mu}}(z) + \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!} r^{2(n+1)} \underset{1}{\bar{\mu}}^{(2n)}(z),$$

$\underset{1}{\alpha}$ et $\underset{1}{\alpha}^*$ étant des constantes arbitraires et $\underset{1}{\bar{\mu}}(z)$ étant une fonction arbitraire indéfiniment dérivable de la variable z. Ceci démontre les propriétés *a*) et *b*). Les quantités $\underset{1}{\bar{\mu}}^{(2n)}(z)$ désignent les dérivées d'ordre $2n$ de $\underset{1}{\bar{\mu}}(z)$.

Si on postule que la source est symétrique par rapport au plan $z = 0$ (plan équatorial), il faut annuler $\underset{1}{\alpha}$ et choisir la fonction $\underset{1}{\bar{\mu}}(z)$ paire par rapport à z. De même, dans la formule (33), il faut annuler toutes les constantes $\underset{1,k}{\beta}$ lorsque k est pair.

La solution de ce type la plus simple est :

$$\underset{1}{\mu}(r, z) = -e^{-2\underset{0}{l}} \underset{1,1}{\beta} r^2 \tag{34}$$

Cette solution est classique : elle correspond en effet aux résultats de Thirring, Bass-Pirani ainsi que Brill-Cohen. Nous allons donc retenir (34) comme expression de $\underset{1}{\mu}$ et montrer qu'à l'approximation du second ordre, la métrique correspondante est :

$$\begin{aligned} ds^2 = -e^{-2\underset{0}{l}} \left\{ 1 - 2\omega^2 \left[\underset{2}{\lambda}(r, z) + \frac{1}{2} \underset{1,1}{\beta}^2 r^2 \right] \right\} (dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2) \\ + 2\omega \underset{1,1}{\beta} r^2 d\varphi dt + e^{2\underset{0}{l}} [1 + 2\omega^2 \underset{2}{\lambda}(r, z)] dt^2, \end{aligned} \tag{35}$$

la fonction $\underset{2}{\lambda}(r, z)$ étant astreinte à être une solution bornée de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \underset{2}{\lambda}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underset{2}{\lambda}}{\partial r} = -2 \underset{1,1}{\beta}^2 \tag{36}$$

En effet si $\underset{1}{\mu}$ est donné par (34), l'équation (32,2,1) s'écrit sous la forme (36) et les équations (32,2,2) et (32,2,3) deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial r} &= -\underset{1,1}{\beta}^2 r \\ \frac{\partial \underset{2}{\psi}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right.$$

L'intégration de ce système donne immédiatement :

$$\underset{2}{\psi}(r, z) = -\frac{1}{2}\underset{1,1}{\beta}^2 r^2 + \underset{2}{\kappa},$$

$\underset{2}{\kappa}$ étant une constante d'intégration que nous poserons égale à zéro.

La formule (35) est déduite de ces résultats, eu égard aux relations :

$$\begin{cases} e^{\pm 2\lambda(r,z)} = e^{\pm 2\underset{0}{l}}[1 \pm 2\omega^2 \underset{2}{\lambda}(r, z) + 0(\omega^4)] \\ e^{2(\psi - \lambda)} = e^{-2\underset{0}{l}}[1 - 2\omega^2 \underset{2}{\lambda}(r, z) - \underset{1,1}{\beta}^2 \omega^2 r^2 + 0(\omega^4)] \end{cases}$$

§ 3. La structure du champ de force à l'intérieur de l'enveloppe

Introduisons des coordonnées x, y définies par :

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi.$$

Dans le repère quasi-cartésien 0, x, y, z, t, l'accélération d'une particule isolée circulant à une vitesse $v \ll c$ est dans le champ décrit par le ds^2 (35) :

$$\vec{\gamma} = 2e^{2\underset{0}{l}}\underset{1,1}{\beta}\,\vec{\omega} \wedge \vec{v} - e^{4\underset{0}{l}}\omega^2\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\underset{2}{\lambda} \tag{37}$$

1° Le terme en $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ montre l'existence d'un champ de « force de Coriolis » tout à fait semblable à celui qui a été mis en évidence par Thirring [*16*].

2° Le terme en $\omega^2\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\underset{2}{\lambda}$ est susceptible de présenter quelque analogie avec le champ de « forces centrifuges » étudié par Thirring [*17*] et Bass-Pirani [*2*] s'il existe des solutions de l'équation (36) de la forme :

$$\underset{2}{\lambda}(r, z) = \alpha r^2 + \beta z^2 + \gamma$$

En substituant dans (36), on trouve que les solutions de ce type s'écrivent nécessairement de la façon suivante :

$$\underset{2}{\lambda}(r, z) = -\frac{1}{2}(\underset{2}{\eta} + \underset{1,1}{\beta}^2)r^2 + \underset{2}{\eta}z^2 + \underset{2}{\theta}, \tag{38}$$

où $\underset{2}{\eta}$ et $\underset{2}{\theta}$ sont des constantes d'intégration.

Les équations différentielles du mouvement d'une particule d'épreuve sont alors:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2e^{2l_0}\underset{1,1}{\beta}\,\omega\frac{dy}{dt} + e^{4l_0}(\underset{2}{\eta} + \underset{1,1}{\beta}^2)\omega^2 x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= +2e^{2l_0}\underset{1,1}{\beta}\,\omega\frac{dx}{dt} + e^{4l_0}(\underset{2}{\eta} + \underset{1,1}{\beta}^2)\omega^2 y \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \qquad\qquad -2e^{4l_0}\underset{2}{\eta}\,\omega^2 z \end{aligned}\right.$$

Ces formules montrent que les composantes du champ de « forces centrifuges » ne peuvent jamais coïncider exactement avec les expressions correspondantes calculées par Thirring et Bass-Pirani sous l'hypothèse des champs faibles. En effet, une telle coïncidence ne pourrait se réaliser qu'en faisant $\underset{1,1}{\beta}$ égal à zéro (champ de Coriolis identiquement nul), ce qui reviendrait à supposer que la masse de l'enveloppe est rigoureusement nulle.

L'expression de $\vec{\gamma}$ donnée par (37) montre qu'il existe toujours des effets en ω^2 à l'intérieur de l'enveloppe tournante. En effet, d'après (36), $\overrightarrow{\text{grad}}\,\underset{2}{\lambda}$ ne peut s'annuler partout sans impliquer que $\underset{1,1}{\beta} = 0$. Par conséquent, même si on choisit d'autres solutions $\underset{2}{\lambda}$ que (38) on ne peut retrouver le résultat de Bass-Pirani énonçant que pour un certain type de distribution de matière dans l'enveloppe on pourrait voir disparaître complètement le champ des « forces centrifuges » [*2*].

Avant de clore ce chapitre, nous signalerons que si les métriques calculées ci-dessus représentent bien à l'approximation du second ordre le champ d'une enveloppe quasi-sphérique tournante, il est possible de déterminer les constantes $\underset{1,1}{b}$, $\underset{1,1}{\beta}$, $\underset{2}{A}$, $\underset{2}{B}$, $\underset{2}{\eta}$ et $\underset{2}{\theta}$ d'une part au moyen des conditions de raccordement relatives à des potentiels de couche simple et d'autre part au moyen de certaines hypothèses relatives à la structure du tenseur impulsion-énergie. Toutefois, nous n'approfondirons pas cette question dans le présent travail.

CONCLUSION

Nous avons développé une méthode d'approximation pour étudier le problème des masses quasi-sphériques en rotation, ce qui nous a permis de faire une synthèse des travaux antérieurs.

Nous avons appliqué cette méthode au problème de l'enveloppe sphérique tournante. Au premier ordre, nous avons obtenu des résultats analogues à ceux de R. Bach et de Brill-Cohen. Par contre, au second ordre, nous avons été amenés à rejeter la forme de métrique proposée par ces auteurs et à modifier les résultats concernant la force centrifuge énoncés par Thirring et Bass-Pirani.

Nous pensons que cette méthode d'approximation sera sans doute très utile dans l'étude des figures d'équilibre des corps tournants.

RÉFÉRENCES

[1] R. BACH, *Math. Zeit.*, **13**, 1922, p. 119.
[2] L. BASS et F. A. E. PIRANI, *Phil. Mag.*, **46**, 1955, p. 850.
[3] R. H. BOYER, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **61**, 1965, p. 527.
[4] D. R. BRILL et J. M. COHEN, *Phys. Rev.*, **143**, 1966, p. 1011.
[5] J. CHAZY, *Bull. Soc. Math. France*, **52**, 1924, p. 17.
[6] V. DE LA CRUZ et W. ISRAEL, *Phys. Rev.*, **170**, 1968, p. 1187.
[7] G. DARMOIS, *Les équations de la gravitation einsteinienne*. Paris, Gauthier-Villars, 1955.
[8] T. LEWIS, *Proc. Roy Soc. London*, A **136**, 1932, p. 176.
[9] L. LÉVY et W. J. ROBINSON, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **60**, 1964, p. 279.
[10] J. J. J. MAREK, *Phys. Rev.*, **163**, 1967, p. 1373.
[11] A. PAPAPETROU, *Ann. Physik*, **12**, 1953, p. 309.
[12] A. PAPAPETROU et A. HAMOUI, *Ann. Inst. H. Poincaré*, A **IX**, 1968, p. 179.
[13] W. J. VAN STOCKUM, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **57**, 1937, p. 135.
[14] W. J. VAN STOCKUM, *Proc. Roy. Soc. Irish Acad.*, A **44**, 1938, p. 109.
[15] P. TEYSSANDIER, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **266**, 1968, p. 185.
[16] H. THIRRING, *Phys. Zeit.*, **19**, 1918, p. 33.
[17] H. THIRRING, *Phys. Zeit.*, **22**, 1921, p. 29.
[18] H. WEYL, *Ann. Physik*, **54**, 1917, p. 117.

Manuscrit reçu le 28 juillet 1969.