ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MICHEL CHEVALIER

L'équation de Kirchhoff généralisée

Annales de l'I. H. P., section A, tome 12, nº 1 (1970), p. 71-115

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__12_1_71_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XII, n° 1, 1970, p. 71-115. *Physique théorique.*

L'équation de Kirchhoff généralisée (*)

par

Michel CHEVALIER (**)

(Laboratoire de Physique Mathématique du Collège de France, Paris).

ABSTRACT. — This paper is concerned with Kirchhoff's equation which is satisfied by every regular solution of a second order linear partial differential equation of the normal hyperbolic type on a space-time of General Relativity.

The parametrix and diffusion kernels of the Laplace operators for tensors and spinors are calculated as functions of space-time geometry. As an application, Colleau's formulas, connecting the diffusion kernels for tensors and spinors of different orders, are proven.

For the special case of space-times of constant curvature, the parametrix and diffusion kernels of the Laplace operators for scalars, vectors, tensors of order two and spinors of order one are obtained and three operators with zero diffusion kernel are given. Finally, we solve explicitly the Cauchy problem for Maxwell's equations on a space-time of constant curvature.

INTRODUCTION

Nous nous intéressons aux solutions du système différentiel linéaire hyperbolique du second ordre :

$$\text{(A)} \qquad f_{\mathrm{R}} = \mathrm{L}(u_{\mathrm{R}}) = g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}u_{\mathrm{R}} + \mathrm{B}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{S},\mu}\partial_{\mu}u_{\mathrm{S}} + \mathrm{C}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{S}}u_{\mathrm{S}}.$$

(*) Article recouvrant en partie la thèse de doctorat ès Sciences Mathématiques, enregistrée au C. N. R. S. sous le numéro A. O. 3372.

(**) 25 rue de la République, 60, Pont-Ste-Maxence.

En imposant au système de coordonnées les deux conditions

— (x^i), $i = 1, 2, 3$ peuvent être choisis comme paramètres sur $\Gamma_{x'}^-$, le demi-conoïde caractéristique rétrograde de sommet x',

— le repère naturel en x' est orthonormé (x' fixé), plus des hypothèses de différentiabilité sur les coefficients de l'opérateur, S. L. Sobolev et Y. Choquet-Bruhat ont montré que toute solution régulière de $L(u) = f$ vérifie l'équation intégrale :

$$\text{(K)} \qquad 4\pi u_{S'}(x') = \iiint_{V_0} [u_R L^R_{S'} - \sigma^R_{S'} f_R] dx^1 dx^2 dx^3 - \iint_S E^i_{S'} n_i dS.$$

Dans cette formule, V_0 est un domaine de $\Gamma_{x'}^-$ contenant x' et de frontière S, n_i un vecteur normal à S considérée comme plongée dans $\Gamma_{x'}^-$. $\sigma^R_{S'}$ et $L^R_{S'}$, appelées respectivement paramétrix et noyau de diffusion, sont des fonctions définies sur $\Gamma_{x'}^-$ dépendant uniquement des coefficients de l'opérateur, enfin $E^i_{S'}$ dépend de l'inconnue u_R, de ses dérivées premières et des coefficients $g^{\lambda\mu}$, $B^{S,\mu}_R$.

Dans le cas particulier de l'équation d'onde sur un espace de Minkowski ($B^{S,\mu}_R$, C^S_R égaux à zéro, $g = \eta$), $L^R_{S'}$ est identiquement nul et (K) se réduit à l'équation de Kirchhoff habituelle donnant directement la solution par potentiels retardés.

Dans le cas général, nous considérons d'abord les solutions à support compact vers le futur. Si le conoïde caractéristique est suffisamment régulier, un choix convenable de V_0 permet d'annuler $(E^i_{S'})_S$; avec cette restriction, la résolution par itération de (K) fournit la solution élémentaire retardée $E^{-R}_{S'}$ relative à l'opérateur :

$$u_{S'}(x') = \langle E^{-R}_{S'}(x', x), f_R(x) \rangle.$$

Elle se compose de deux parties ; la première (terme de front) est la couche simple $-\sigma$ de support $\Gamma_{x'}^-$; la seconde (terme de diffusion ou terme de queue) provient des itérées successives du terme de front composé avec le noyau L, son support est l'émission rétrograde de x'. Ainsi, la nullité du noyau de diffusion entraîne l'absence de terme de diffusion.

Supposons maintenant u de support quelconque mais donnons-nous par ailleurs u_R et ses dérivées premières sur une 3-surface d'espace Σ coupant $\Gamma_{x'}^-$. En fixant $S = \Sigma \cap \Gamma_{x'}^-$, l'intégrale étendue à S du second membre de (K) est connue et la même itération donne la solution du problème de Cauchy relatif à $(u_R)_\Sigma$, $(\partial_\lambda u_R)_\Sigma$ et au second membre f_R.

L'objet de ce travail est l'étude détaillée de l'équation (K) appelée, par analogie avec le cas plat, équation de Kirchhoff généralisée.

Le premier chapitre établit (K). La démonstration se trouve simplifiée en introduisant un système de coordonnées normales géodésiques d'origine x' ; un tel système, d'importance fondamentale, est constamment utilisé dans la suite.

En nous restreignant aux opérateurs laplaciens tensoriels et spinoriels issus d'une métrique donnée, nous explicitons au chapitre II les paramétrix et noyaux de diffusion en fonction d'éléments attachés à la géométrie riemannienne.

Pour le laplacien scalaire $\nabla^\rho \nabla_\rho u$, le calcul, d'ailleurs sans difficultés, s'effectue en coordonnées normales. Des expressions trouvées, on déduit l'équation intégrale (I) vérifiée, en coordonnées quelconques, par toute solution à support compact vers le futur de $\nabla^\rho \nabla_\rho u = f$. Si $s(x', x)$ désigne la longueur de la géodésique, supposée unique, joignant x' et x, nous notons par g le déterminant de la métrique en x, par g' la quantité analogue en x' et par J le déterminant de Hadamard associé à $\widehat{x'x}$

$$\mathrm{J} = \det \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\varepsilon}{2} s^2 \right)$$

(ε est égal à $+1$ si s positif, à -1 si s négatif).

En introduisant, d'une part la forme de Leray ω du demi-conoide $\Gamma_{x'}^-$ d'équation $\frac{\varepsilon}{2} s^2 = 0$, d'autre part le biscalaire en x' et x

$$\tau = |\mathrm{J}|^{\frac{1}{2}} (gg')^{-\frac{1}{4}},$$

(I) s'écrit sous forme invariante :

$$\text{(I)} \qquad 4\pi u(x') = \iiint_{\Gamma_{x'}^-} [u \nabla^\rho \nabla_\rho \tau - f\tau] \omega.$$

Le cas du laplacien tensoriel $\nabla^\rho \nabla_\rho \mathrm{T}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ nécessite quelques considérations préliminaires. Le système de coordonnées étant fixé, un théorème dû à J. Colleau permet de comparer les paramétrix et noyaux de diffusion du système différentiel vérifié par les composantes du p-tenseur en repère mobile quelconque avec les quantités analogues pour un autre repère : il exprime que paramétrix et noyaux de diffusion se comportent comme des bi-p-tenseurs, covariants en x', contravariants en x. Nous profitons de cette propriété pour effectuer le calcul dans le repère mobile adapté aux coordonnées normales ; le résultat, généralisation naturelle du cas scalaire, s'obtient en remplaçant τ par $\tau t^{\alpha_1}_{\rho'_1} \ldots t^{\alpha_p}_{\rho'_p}$ dans l'équation intégrale (I) ($t^{\alpha}_{\rho'}(x', x)$ est le bitenseur de transport parallèle relatif à $\widehat{x'x}$), ce qui explique rétrospectivement l'utilisation du repère mobile adapté.

En considérant uniquement les repères mobiles orthonormés, une situation semblable se présente pour les laplaciens p-spinoriels $\nabla^\rho \nabla_\rho \psi^{a_1 \dots a_p}$: il suffit de remplacer $t^\alpha_{\rho'}$ par le bispineur de transport parallèle $\tau^{r'}_a$.

Enfin, dans le dernier paragraphe, nous utilisons les expressions précédentes pour retrouver les formules de J. Colleau liant les noyaux de diffusion tensoriels et spinoriels des différents ordres.

Le chapitre III étudie les paramétrix et noyaux de diffusion sur un espace à courbure constante. Le calcul, indépendant du chapitre II, s'effectue soit en coordonnées normales (laplacien scalaire), soit en repère mobile adapté.

Le tenseur de courbure étant complètement déterminé, une méthode d'E. Cartan permet d'obtenir la restriction à $\Gamma^-_{x'}$ des quantités suivantes : métrique et symboles de Christoffel, coefficients de rotation du repère mobile adapté ainsi que leurs dérivées, bitenseur de transport parallèle.

A partir de ces éléments, nous calculons les paramétrix et noyaux de diffusion des laplaciens scalaire, vectoriel, 2-tensoriel et 1-spinoriel. Il est facile d'en déduire les quantités correspondantes pour les laplaciens de De Rham-Lichnerowicz formés en ajoutant aux laplaciens ordinaires des termes linéaires en l'inconnue à coefficients fonction du tenseur de courbure.

Comme application nous donnons trois opérateurs, sur les scalaires, sur les 2-formes, sur les 1-spineurs, ayant un noyau de diffusion nul sur tout espace à courbure constante.

Le chapitre IV est consacré aux équations de Maxwell sur un espace à courbure constante. Toute 2-forme solution de $d\mathrm{F} = 0$, $\delta\mathrm{F} = \mathrm{J}$ est aussi solution du système différentiel de type (A)

$$(d\delta + \delta d)\mathrm{F} = d\mathrm{J} ;$$

$\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ vérifie donc une équation de Kirchhoff généralisée de la forme (K).

Mais ici se présente une particularité : en tenant compte des équations de Maxwell, il est possible de transformer l'intégrale du terme $[u_\mathrm{R} \mathrm{L}^\mathrm{R}_{\mathrm{S}'}]$, qui n'est pas nul, en la somme d'une intégrale étendue à V_0 d'une fonction du vecteur courant J et d'une intégrale étendue à S d'une fonction du champ F.

On obtient donc sans itération le champ électromagnétique au point x' en fonction du vecteur courant et de ses dérivées sur $\Gamma^-_{x'}$ et des données de Cauchy $(\mathrm{F})_\Sigma$, $(\partial\mathrm{F})_\Sigma$ sur $\Sigma \cap \Gamma^-_{x'}$. Une telle situation résulte au fond de la covariance conforme des équations de Maxwell et du caractère localement conforme euclidien des espaces à courbure constante.

CHAPITRE PREMIER

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES HYPERBOLIQUES

Sur un espace-temps V_4, muni d'une métrique hyperbolique normale $g_{\lambda\mu}$ de signature $(+ - - -)$, considérons l'opérateur différentiel du second ordre :

(A) $$L(u_R) = g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}u_R + B_R^{S,\mu}\partial_\mu u_S + C_R^S u_S.$$

L'étude de cet opérateur sur le conoïde caractéristique de sommet x' va montrer que toute solution u_R de l'équation $L(u_R) = f_R$ vérifie une équation intégrale, généralisation de l'équation de Kirchhoff, dont la résolution par itération fournit les noyaux élémentaires avancés et retardés ainsi que la solution du problème de Cauchy relatifs à cet opérateur.

1. RAPPELS

Ce paragraphe expose des résultats connus de caractère local *[4]*, *[10]*; les démonstrations correspondantes seront effectuées en coordonnées normales aux paragraphes 2, 3, 4.

a) Dans un système de coordonnées (x^α), $\alpha = 0, 1, 2, 3$ où x^0 désigne une coordonnée de temps et (x^i), $i = 1, 2, 3$ des coordonnées d'espace, notons par p'_α les composantes covariantes du vecteur tangent aux géodésiques isotropes issues d'un point fixé x' et tel que $p'_0 = 1$. Sur le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$ de sommet x', les dx^α sont liés par :

(1.1) $$dx^0 + p'_i dx^i = 0.$$

Ainsi, (x^i) constitue un système de coordonnées sur $\Gamma_{x'}^-$, le demi-conoïde caractéristique rétrograde de sommet x' ($\Gamma_{x'}^-$ est la portion de $\Gamma_{x'}$ telle qu'au voisinage du sommet $x^0 < (x^0)'$).

Par définition, λ est le paramètre sur $\Gamma_{x'}$ nul en x' et tel qu'en se déplaçant le long des géodésiques isotropes :

(1.2) $$dx^\alpha = p'^\alpha d\lambda.$$

En désignant par $[\varphi](x^i)$ la restriction à $\Gamma_{x'}^-$ d'une fonction quelconque $\varphi(x^\alpha)$, on a d'après (1.1):

$$\partial_i[\varphi] = [\partial_i\varphi - p_i'\partial_0\varphi]\,; \tag{1.3}$$

soit en répétant l'opération:

$$[\partial_{i0}\varphi] = \partial_i[\partial_0\varphi] + [p_i'\partial_{00}\varphi], \tag{1.4}$$

$$[\partial_{ij}\varphi] = \partial_{ij}[\varphi] + \partial_i[\partial_0\varphi][p_j'] + \partial_j[\partial_0\varphi][p_i'] + [\partial_0\varphi]\partial_i[p_j'] + [p_i'p_j'][\partial_{00}\varphi]. \tag{1.5}$$

b) Soient $[\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}]$ des fonctions auxiliaires pour l'instant quelconques mais qui seront particularisées dans la suite; l'introduction par (1.3), (1.4), (1.5) des dérivations intrinsèques au conoïde donne la décomposition fondamentale

$$[\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}\mathrm{L}(u_{\mathrm{R}})] = \partial_i[\mathrm{E}^i_{\mathrm{S}'}] + [u_{\mathrm{R}}\mathrm{L}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}] - [\mathrm{D}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}][\partial_0 u_{\mathrm{R}}]\,; \tag{1.6}$$

avec:

$$[\mathrm{E}^i_{\mathrm{S}'}] = [g^{ij}\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}]\partial_j[u_{\mathrm{R}}] - [u_{\mathrm{R}}]\partial_j[g^{ij}\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}] + [2p'^i\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}\partial_0 u_{\mathrm{R}}] + [\mathrm{B}^{\mathrm{T},i}_{\mathrm{R}}u_{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}], \tag{1.7}$$

$$[\mathrm{L}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}] = \partial_{ij}[g^{ij}\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}] - \partial_i[\mathrm{B}^{\mathrm{R},i}_{\mathrm{T}}\sigma^{\mathrm{T}}_{\mathrm{S}'}] + [\sigma^{\mathrm{T}}_{\mathrm{S}'}\mathrm{C}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{T}}], \tag{1.8}$$

$$[\mathrm{D}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}] = [\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}]\{2\partial_i[p'^i] - [g^{ij}]\partial_i[p_j']\} - [\mathrm{B}^{\mathrm{R},\alpha}_{\mathrm{T}}p_\alpha'\sigma^{\mathrm{T}}_{\mathrm{S}'}] + 2[p'^i]\partial_i[\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}]. \tag{1.9}$$

Nous fixons dorénavant $[\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}]$ par les deux conditions

$$[\mathrm{D}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}] = 0, \tag{1.10$_a$}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}[\lambda\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}] = \delta^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}\,; \tag{1.10$_b$}$$

$(1.10)_a$ est une équation différentielle ordinaire le long des bicaractéristiques issues de x', $(1.10)_b$ la condition initiale correspondante.

Définition. — On appelle paramétrix (relative à l'opérateur différentiel (A)) la solution unique $[\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}]$ du système (1.10); elle dépend des deux points x' et x. Les fonctions $[\mathrm{L}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}]$ qui en résultent à l'aide de (1.8) constituent le noyau de diffusion.

c) Soit V_ε la portion de $\Gamma_{x'}^-$, supposée régulière, comprise entre une 2-surface donnée S et la 2-surface S_ε d'équation $x^0 = (x^0)' - \varepsilon$. Par intégration de (1.6) dans ce domaine on obtient, compte tenu de (1.10) et du théorème de Stokes:

$$\iiint_{\mathrm{V}_\varepsilon}[\sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}f_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{R}}\mathrm{L}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}'}]dx^1dx^2dx^3 = \iint_{\mathrm{S}_\varepsilon}\mathrm{E}^i_{\mathrm{S}'}n_i d\mathrm{S} - \iint_{\mathrm{S}}\mathrm{E}^i_{\mathrm{S}'}n_i d\mathrm{S}.$$

Le terme $(n_i d\mathrm{S})$ ainsi que l'orientation de S et S_ε seront précisés aux § 3 et 4. Nous cherchons maintenant la limite de cette équation lorsque ε

tend vers zéro. En supposant le repère naturel en x' orthonormé, on montrera au § 4 que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S_\varepsilon} E^i_{S'} n_i dS = -4\pi u_{S'}(x').$$

Les fonctions $[\sigma^R_{S'}]$ et par suite $[L^R_{S'}]$ étant singulières en x', il faut s'assurer ensuite de l'existence d'une limite pour l'intégrale de volume ; d'après le § 3, c il suffit pour cela que

$$\lambda^2[\sigma^R_{S'} f_R - u_R L^R_{S'}]$$

soit continu borné au voisinage de x'. C'est évident pour le premier terme et on démontre [4] qu'il en est de même pour $[\lambda^2 u_R L^R_{S'}]$; dans le cas particulier des opérateurs laplaciens, cette propriété découlera directement de l'expression de $[L^R_{S'}]$ donnée au chapitre II.

Toute solution régulière de l'équation $L(u_R) = f_R$ vérifie donc l'équation intégrale :

$$(1.11) \qquad 4\pi u_{S'}(x') = \iiint_{V_0} [u_R L^R_{S'} - \sigma^R_{S'} f_R] d^3x - \iint_S E^i_{S'} n_i dS.$$

d) Soit Σ une hypersurface d'espace sur laquelle on se donne u_R et ses dérivées premières ; en posant $S = \Sigma \cap \Gamma^-_{x'}$, les quantités $(E^i_{S'})_S$ sont connues d'après la formule (1.7) ; on peut calculer de cette manière $\iint_S E^i_{S'} n_i dS$ pour tout point x' dans le futur et au voisinage de Σ. D'après (1.11), u_R vérifie donc une équation intégrale dont le noyau, de support V_0, est représenté par $L^R_{S'}$. La résolution par itération de cette équation fournit localement la solution du problème de Cauchy relatif à $(u_R)_\Sigma$, $(\partial_\alpha u_R)_\Sigma$ et au second membre f_R.

De façon indépendante, supposons que u_R (et par conséquent f_R) soient à support compact vers le futur ; l'intersection de ce support avec l'émission rétrograde $\mathscr{E}^-(x')$ étant compacte par définition, un choix convenable de V_0 permet d'annuler l'intégrale de surface. Le résultat de l'itération s'écrit ici

$$u_{S'}(x') = \langle E^{-R}_{S'}(x', x), f_R(x) \rangle,$$

ce qui détermine $E^{-R}_{S'}(x', x)$, solution élémentaire retardée de l'opérateur $L(u)$ [8]. Par construction, le support de $E^{-R}_{S'}$ pour x' fixé est inclus dans l'ensemble $\mathscr{E}^-(x')$ formé de $\Gamma^-_{x'}$ et de son intérieur.

e) Sur un espace de Minkowski M_4 rapporté à un système de coordonnées cartésiennes pour lequel

$$g^{\lambda\mu} = \eta^{\lambda\mu} \qquad (\eta^{00} = 1,\ \eta^{ii} = -1,\ \eta^{\alpha\beta} = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta),$$

nous considérons l'opérateur $L(u_R)$ tel que $B_R^{S,\mu}$ et C_R^S soient nuls. On voit facilement que

$$\sigma_{S'}^R = \lambda^{-1}\delta_{S'}^R \quad , \quad L_{S'}^R = 0$$

et (1.11) se réduit à l'équation de Kirchhoff habituelle donnant la solution par potentiels retardés. Le support de $E_{S'}^{-R}$ est alors constitué uniquement par $\Gamma_{x'}^-$.

2. COORDONNÉES NORMALES GÉODÉSIQUES

a) V_4 étant rapportée à un système de coordonnées quelconques (y^α), soit $R_{x'} = \{ e_\alpha \}$ un repère au point x' tel que les produits scalaires $e_\alpha . e_\rho = \eta_{\alpha\rho}$ vérifient :

(2.1) $$\eta^{00} > 0 \quad , \quad \eta^{ij}X_iX_j \text{ définie négative.}$$

A toute direction en x', associons un vecteur tangent u' de composantes u'^α par rapport à $R_{x'}$. Alors, sur la géodésique issue de x' et tangente en ce point à u', il existe un seul paramètre $s(x', x)$ satisfaisant aux trois conditions :

$$u^\rho \nabla_\rho u^\alpha = 0 \quad \left(u^\alpha = \frac{dy^\alpha}{ds}\right) \quad , \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)_{x=x'} = u' \quad , \quad s(x', x') = 0.$$

DÉFINITION. — Les coordonnées normales géodésiques d'origine x', associées à $R_{x'}$, sont les quatre quantités :

$$x^\alpha = su'^\alpha.$$

D'après les théorèmes classiques sur les systèmes différentiels, (x^α) forme bien localement un système de coordonnées. Il ne dépend pas du choix des vecteurs u' (la transformation $u' \to \xi u'$ induit $s \to \xi^{-1}s$, ce qui laisse su' inchangé).

b) LEMME. — En désignant par $g_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur métrique dans un système de coordonnées normales géodésiques :

(2.2)$_a$ $$g_{\alpha\rho}x^\rho = \eta_{\alpha\rho}x^\rho,$$

(2.2)$_b$ $$(g_{\alpha\rho})_{x'} = \eta_{\alpha\rho}.$$

Preuve. — (2.2)$_b$ résulte immédiatement de :

$$\left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx}{ds}\right)_{x'} = u' \cdot u' = u'^\rho u'^\sigma (e_\rho \cdot e_\sigma) = (g_{\rho\sigma})_{x'} u'^\rho u'^\sigma.$$

D'ailleurs, $R_{x'}$ coïncide avec le repère naturel en x' des coordonnées normales.

Démontrons $(2.2)_a$. L'équation des géodésiques issues de x' s'écrit, dans le système (x^α),

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma} u^\rho u^\sigma = 0,$$

avec :

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = u'^\alpha \quad , \quad \frac{du^\alpha}{ds} = 0.$$

D'où, en développant les symboles de Christoffel et en multipliant par s^2 :

$$(2.3) \qquad x^\rho \partial_\rho (g_{\alpha\sigma} x^\sigma) - g_{\alpha\sigma} x^\rho \partial_\rho x^\sigma = \frac{1}{2} \partial_\alpha (g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma) - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} \partial_\alpha (x^\rho x^\sigma).$$

Mais, par définition, $u^\rho \nabla_\rho (u^\alpha u_\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma = \eta_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma.$$

En portant dans (2.3), il vient après simplification :

$$(2.4) \qquad x^\rho \partial_\rho (g_{\alpha\sigma} x^\sigma) = \eta_{\alpha\sigma} x^\sigma,$$

et $(2.2)_a$ découle de (2.4) par intégration le long des géodésiques issues de x', c. q. f. d.

c) Le conoïde caractéristique de sommet x' est la surface $\Gamma_{x'}$ engendrée par les géodésiques isotropes issues de x', son équation en coordonnées normales est donc

$$\eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 ;$$

d'où, par dérivation, les composantes covariantes d'un vecteur normal en x à $\Gamma_{x'}$:

$$p_\alpha = \eta_{\alpha\rho} x^\rho = g_{\alpha\rho} x^\rho.$$

Mais

$$g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = g^{\alpha\beta} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma = 0 ;$$

donc le vecteur p_α, isotrope, est nécessairement tangent à la géodésique de longueur nulle $\widehat{x'x}$. Les hypothèses (2.1) montrent que $p_0 \neq 0$; on peut donc poser, avec la notation du § 1 :

$$p'_\alpha = p_\alpha p_0^{-1} \qquad (p'_0 = 1).$$

Par conséquent :

$$p'^\alpha = g^{\alpha\rho} p_\rho p_0^{-1} = g^{\alpha\rho} g_{\rho\sigma} x^\sigma p_0^{-1} = x^\alpha p_0^{-1}.$$

En dérivant le long des bicaractéristiques, on a d'après (1.2):

$$dp_\alpha = \eta_{\alpha\rho} dx^\rho = \eta_{\alpha\rho} p'^\rho d\lambda = p'_\alpha d\lambda\,;$$

d'où $dp'_\alpha = 0$. En résumé, on a obtenu les équations de définition des géodésiques de longueur nulle sous la forme:

$$\frac{dx^0}{g^{00} + g^{0j}p'_j} = \frac{dx^i}{g^{0i} + g^{ij}p'_j} = \frac{dp'_i}{0} = d\lambda, \tag{2.5}$$

$$g^{00} + 2g^{0i}p'_i + g^{ij}p'_i p'_j = 0. \tag{2.6}$$

En dehors de $\Gamma_{x'}$ nous posons encore $p_\alpha = \eta_{\alpha\rho} x^\rho$. Ce vecteur n'est plus isotrope mais, d'après $p^\alpha = x^\alpha$, il reste tangent en tout point x à la géodésique $\widehat{x'x}$. De plus

$$p^\rho \nabla_\rho p^\alpha = x^\rho \partial_\rho x^\alpha + \Gamma_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\rho} x^\sigma x^\rho = p^\alpha$$

entraîne:

$$p^\rho \nabla_\rho p'^\alpha = p^\rho \partial_\rho (p^\alpha p_0^{-1}) = 0.$$

d) Avec les notations précédentes, le paramètre λ s'exprime par:

$$\lambda = [p_0]. \tag{2.7}$$

Ceci résulte de la définition de p_0 et des équations:

$$\frac{d}{d\lambda}[\varphi] = [p'^\rho \partial_\rho \varphi] = [p'^i] \partial_i [\varphi].$$

Supposons maintenant le repère $R_{x'}$ orthonormé ($\eta_{00} = 1$, $\eta_{ii} = -1$, $\eta_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$), on a sur $\Gamma_{x'}$

$$(p'_1)^2 + (p'_2)^2 + (p'_3)^2 = 1\,;$$

il est donc possible de définir, sur $\Gamma_{x'}^-$, les paramètres θ et φ tels que

$$p'_1 = \sin\theta \cos\varphi \;,\; p'_2 = \sin\theta \sin\varphi \;,\; p'_3 = \cos\theta \;,\; (0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$$

et, compte tenu de (2.7):

$$x^1 = -\lambda \sin\theta \cos\varphi \quad , \quad x^2 = -\lambda \sin\theta \sin\varphi \quad , \quad x^3 = -\lambda \cos\theta.$$

$(\lambda, \theta, \varphi)$ constituent des paramètres d'intégration sur $\Gamma_{x'}^-$; en effet:

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -\lambda^2 \sin\theta \, d\lambda \wedge d\theta \wedge d\varphi. \tag{2.8}$$

Notons enfin que (2.7) s'écrit ici:

$$\lambda = x^0 = p_0.$$

e) La méthode de calcul des solutions élémentaires à partir des noyaux de diffusion est de nature locale, valable dans la mesure où le conoïde $\Gamma_{x'}$ n'est pas singulier. En effet, la paramétrix ne sera pas univoquement déterminée en un point (différent de x') où se couperont plusieurs géodésiques isotropes ; les coordonnées normales géodésiques n'existant pas en un tel point, leur utilisation n'entraîne aucune restriction supplémentaire.

Les coordonnées normales géodésiques sont les seules coordonnées utilisées dans la suite.

3. INTÉGRALE DE SURFACE ET DE VOLUME

Nous utilisons le théorème de Stokes pour transformer l'intégrale de volume :

$$\iiint_{V_\varepsilon} \partial_i[E^i_{S'}]dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

a) On prend pour 2-surface S l'intersection de $\Gamma^-_{x'}$ avec une hypersurface d'espace Σ de vecteur normal q_α ; son 2-plan tangent a pour équations :

$$dx^0 + p'_i dx^i = 0 \quad , \quad q_0 dx^0 + q_i dx^i = 0. \tag{3.1}$$

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, $(\lambda, \theta, \varphi)$ constituent des paramètres d'intégration sur $\Gamma^-_{x'}$; montrons qu'il en est de même de (θ, φ) pour S et S_ε. D'après (3.1) :

$$(q_i - q_0 p'_i)dx^i = 0.$$

En définissant θ^i et φ^i par l'égalité, valable sur le conoïde,

$$dx^i = p'^i d\lambda + \theta^i d\theta + \varphi^i d\varphi, \tag{3.2}$$

on a donc :

$$p'^i(q_i - q_0 p'_i)d\lambda + (\theta^i d\theta + \varphi^i d\varphi)(q_i - q_0 p'_i) = 0. \tag{3.3}$$

Pour qu'on puisse exprimer, sur S, λ en fonction de (θ, φ), il suffit de vérifier que

$$p'^i(q_i - q_0 p'_i) \neq 0,$$

soit en utilisant $[p'^\rho p'_\rho] = 0$:

$$p'^\rho q_\rho \neq 0.$$

Or sur S, le vecteur de temps q_ρ ne peut être orthogonal au vecteur isotrope p'^ρ.

Sur S_ε, intersection de $\Gamma_{x'}^-$ et de $x^0 = -\varepsilon$, (3.1) est vérifiée pour les valeurs particulières $q_0 = 1$, $q_i = 0$, et on a bien, pour un repère $R_{x'}$ orthonormé :

$$p'^\rho q_\rho = p'^0 = x^0 p_0^{-1} = 1 \neq 0.$$

CONCLUSION. — θ et φ peuvent être prises comme variables d'intégration pour les 2-surfaces S et S_ε.

b) Si d est l'opérateur différentiation extérieure de $\Gamma_{x'}^-$ et η_{ijk} l'indicateur de Kronecker, on a immédiatement

$$\partial_i[E_{S'}^i]dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = d\left(\frac{1}{2}[E_{S'}^i]\eta_{ijk}dx^j \wedge dx^k\right);$$

puis en posant sur $\Gamma_{x'}^-$

$$\frac{1}{2}\eta_{ijk}dx^j \wedge dx^k = \Lambda_i d\theta \wedge d\varphi - \Phi_i d\theta \wedge d\lambda + \Theta_i d\varphi \wedge d\lambda,$$

on a, compte tenu de (3.2) et des propriétés des mineurs d'un déterminant :

$$p'^k\Lambda_i + \theta^k\Theta_i + \varphi^k\Phi_i = \delta_i^k \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(\lambda, \theta, \varphi)} = -\lambda^2 \sin\theta\delta_i^k.$$

Mais, sur S, (3.3) montre que :

$$\frac{1}{2}\eta_{ijk}dx^j \wedge dx^k = (\Lambda_i p'^j + \Phi_i\varphi^j + \Theta_i\theta^j)(q_j - q_0 p'_j)\frac{d\theta \wedge d\varphi}{p'^k(q_k - q_0 p'_k)},$$

$$= -\lambda^2 \sin\theta(q_i - q_0 p'_i)\frac{d\theta \wedge d\varphi}{p'^k(q_k - q_0 p'_k)}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2}[E_{S'}^i]\eta_{ijk}dx^j \wedge dx^k = -\lambda^2 \sin\theta(p'^\rho q_\rho)^{-1}(q_i - q_0 p'_i)E_{S'}^i d\theta \wedge d\varphi.$$

Nous sommes maintenant en mesure de transformer l'intégrale de volume. Pour l'orientation, il suffit de remarquer que

$$\frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(\lambda, \theta, \varphi)} = -\lambda^2 \sin\theta \leqslant 0$$

et que $\lambda(= x^0)$ varie de $-\varepsilon < 0$ à $\lambda(\theta, \varphi) < -\varepsilon$. Le résultat s'écrit :

$$\iiint_{V_\varepsilon} \partial_i[E_{S'}^i]dx^1dx^2dx^3 = \iint_S -\lambda^2 \sin\theta(p'^\rho q_\rho)^{-1}(q_i - q_0 p'_i)E_{S'}^i d\theta d\varphi$$
$$- \iint_{S_\varepsilon} \lambda^2 \sin\theta(p'^0)^{-1}p'_i E_{S'}^i d\theta d\varphi.$$

c) D'après (2.8), on a d'autre part

$$\iiint_{V_\varepsilon} [\sigma^R_{S'} f_R - u_R L^R_{S'}] dx^1 dx^2 dx^3$$
$$= - \int_{\lambda=\lambda(\theta,\varphi)}^{\lambda=-\varepsilon} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} [\sigma^R_{S'} f_R - u_R L^R_{S'}]\lambda^2 \sin\theta d\lambda d\theta d\varphi.$$

D'où le résultat déjà énoncé (voir § 1, *c*) : pour que cette intégrale ait une limite lorsque ε tend vers zéro, il suffit que les quantités

$$\lambda^2[\sigma^R_{S'} f_R - u_R L^R_{S'}]$$

soient continues bornées au voisinage du sommet.

4. COMPORTEMENT AU VOISINAGE DU SOMMET DU CONOÏDE CARACTÉRISTIQUE

Nous cherchons le comportement de $[E^i_{S'}]$ lorsque λ tend vers zéro. On supposera pour cela que $g^{\lambda\mu}$, $B^{R,\mu}_T$, C^R_T, u_R sont continus bornés près du sommet x' ainsi que les dérivées partielles de ces expressions qui apparaissent dans les calculs. D'après la définition (1.7), on a :

$$\lim_{\lambda\to 0} (\lambda^2 p'_i E^i_{S'}) = - u_R(x') \lim_{\lambda\to 0} (g^{ij} p'_i \lambda^2 \partial_j[\sigma^R_{S'}]).$$

$(1.10)_b$ montre que $\lambda^2 \partial_j[\sigma^R_{S'}]$ est borné au voisinage de x', on a donc, pour $R_{x'}$ orthonormé ($\eta^{0i} = 0$) :

$$\lim_{\lambda\to 0} (\lambda^2 p'_i E^i_{S'}) = - u_R(x') \lim_{\lambda\to 0} \lambda^2 p'^i \partial_i[\sigma^R_{S'}].$$

Mais en écrivant que $\lim_{\lambda\to 0} [\lambda^2 D^R_{S'}] = 0$, on obtient :

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^2(2\partial_i[p'^i] - [g^{ij}]\partial_i[p'_j])[\sigma^R_{S'}] + 2 \lim_{\lambda\to 0} \lambda^2 p'^i \partial_i[\sigma^R_{S'}] = 0.$$

Compte tenu de (1.3) et (2.2)

$$\partial_i[p'^i] = \partial_i[x^i p_0^{-1}] = 3[p_0^{-1}] - [x^i p_0^{-2}]\partial_i[p_0] = [2p_0^{-1}];$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}\partial_i[p'_j] &= [p_0^{-1}]\partial_i[p_j] - [p_j p_0^{-2}]\partial_i[p_0], \\ &= [p_0^{-1}][\eta_{ij} - \eta_{i0}p'_j - \eta_{j0}p'_i + \eta_{00}p'_i p'_j].\end{aligned}$$

On a donc, avec (2.7) et $(1.10)_b$:

$$\delta^R_{S'}(4 - \eta^{ij}[\eta_{ij} - \eta_{i0}p'_j - \eta_{j0}p'_i + \eta_{00}p'_i p'_j]) + 2 \lim_{\lambda\to 0} \lambda^2 p'^i \partial_i[\sigma^R_{S'}] = 0.$$

Examinons le premier terme ; par des transformations évidentes

$$\eta^{ij}[\eta_{ij} - \eta_{i0}p'_j - \eta_{j0}p'_i + \eta_{00}p'_ip'_j]$$
$$= [\eta^{ij}\eta_{ij} - 2\eta_{i0}(\eta^{i\rho}p'_\rho - \eta^{i0}) + \eta_{00}(\eta^{\rho\sigma}p'_\rho p'_\sigma - 2\eta^{0i}p'_i - \eta^{00})],$$
$$= [\eta^{ij}\eta_{ij} + 2\eta^{i0}\eta_{i0} - 2\eta_{i0}p'^i - \eta_{00}\eta^{00} - 2\eta_{00}(\eta^{0\rho}p'_\rho - \eta^{00})] ;$$

ce qui s'écrit :

$$(4.1) \qquad \eta^{ij}[\eta_{ij} - \eta_{i0}p'_j - \eta_{j0}p'_i + \eta_{00}p'_ip'_j] = \eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} - 2 = 2.$$

Ainsi

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^2 p'_i \mathrm{E}^i_{\mathrm{S}'} = - u_\mathrm{R}(x')(- \delta^\mathrm{R}_{\mathrm{S}'}) = u_{\mathrm{S}'}(x') ;$$

d'où, comme $p'^0 = 1$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathrm{S}_\varepsilon} \lambda^2 \sin\theta(p'_0)^{-1}p'_i\mathrm{E}^i_{\mathrm{S}'}d\theta d\varphi = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} u_{\mathrm{S}'}(x')\sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi u_{\mathrm{S}'}(x')$$

ce qui est le résultat annoncé au § 1, *c*.

En conclusion, nous énonçons le résultat fondamental de ce chapitre :

Théorème. — Avec les notations et les hypothèses des paragraphes précédents, toute solution de l'équation $\mathrm{L}(u_\mathrm{R}) = f_\mathrm{R}$ vérifie l'équation intégrale, dite équation de Kirchhoff généralisée :

$$(4.2) \quad 4\pi u_{\mathrm{S}'}(x') = \iiint_{\mathrm{V}_0} [u_\mathrm{R}\mathrm{L}^\mathrm{R}_{\mathrm{S}'} - \sigma^\mathrm{R}_{\mathrm{S}'}f_\mathrm{R}]dx^1dx^2dx^3$$
$$- \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \lambda^2 \sin\theta(p'^\rho q_\rho)^{-1}(q_i - q_0p'_i)\mathrm{E}^i_{\mathrm{S}'}d\theta d\varphi.$$

CHAPITRE II

PARAMÉTRIX ET NOYAUX DE DIFFUSION DES OPÉRATEURS LAPLACIENS

Soient $\mathrm{T}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ les composantes d'un p-tenseur par rapport au repère naturel (ε_α) associé à un système de coordonnées (x^α). Les opérateurs laplaciens $\nabla^\rho\nabla_\rho\mathrm{T}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ sont des opérateurs différentiels hyperboliques du type étudié au chapitre premier. Leurs paramétrix et noyaux de diffusion seront notés respectivement :

$${}^{(p)}\sigma^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\rho'_1\ldots\rho'_p}(x', x) \quad , \quad {}^{(p)}\mathrm{L}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\rho'_1\ldots\rho'_p}(x', x).$$

En prenant pour (x^α) un système de coordonnées normales géodésiques d'origine x', nous donnons au cours de ce chapitre des expressions simples de ${}^{(p)}\sigma$ et ${}^{(p)}\mathrm{L}$ en fonction des éléments géométriques attachés à la variété [2], [3].

1. PARAMÉTRIX DU LAPLACIEN SCALAIRE $\nabla^\rho\nabla_\rho u$

Calculons les coefficients B^μ et C.

$$\nabla^\rho\nabla_\rho u = \nabla_\rho(g^{\rho\sigma}\partial_\sigma u) = g^{\rho\sigma}\partial_{\rho\sigma}u + \partial_\rho g^{\rho\sigma}\partial_\sigma u + \Gamma_\rho{}^\alpha{}_\alpha g^{\rho\sigma}\partial_\sigma u\,;$$

soit :

$$\mathrm{B}^\mu = \partial_\rho g^{\rho\mu} + \Gamma_\rho{}^\alpha{}_\alpha g^{\rho\mu} = -\,g^{\rho\sigma}\Gamma_\rho{}^\mu{}_\sigma \quad , \quad \mathrm{C} = 0. \tag{1.1}$$

En portant les valeurs précédentes dans (I.1.10$_a$), on voit, après regroupement des termes, que la paramétrix $[\sigma]$ $(= [{}^{(0)}\sigma])$ vérifie :

$$[\sigma]\{\partial_i[p'^i] - [p'^\rho\Gamma_\rho{}^\alpha{}_\alpha]\} + [\sigma]\{\partial_i[g^{ij}][p'_j] + \partial_i[g^{i0}] - [p'_\alpha\partial_\rho g^{\rho\alpha}]\} + 2[p'^i]\partial_i[\sigma] = 0. \tag{1.2}$$

LEMME. — En coordonnées normales d'origine x' :

$$\mathrm{P} = \partial_i[g^{ij}][p'_j] + \partial_i[g^{i0}] - [p'_\alpha\partial_\rho g^{\rho\alpha}] = 0.$$

Preuve. — En utilisant (I.1.3) :

$$-\,[\partial_\rho g^{\rho 0} + p'_i\partial_\rho g^{\rho i}] = -\,[\partial_0 g^{00}] - \partial_i[g^{i0}] - [p'_i\partial_0 g^{0i}] - [p'_i\partial_0 g^{0i}] - [p'_i]\partial_j[g^{ji}] - [p'_ip'_j\partial_0 g^{ij}].$$

D'où, l'expression cherchée

$$\mathrm{P} = -\,[p_0^{-2}][\partial_0 g^{\lambda\mu}p_\lambda p_\mu],$$

qui s'écrit aussi, à l'aide de (I.2.2$_a$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{P} &= -\,[p_0^{-2}][\partial_0(g^{\lambda\mu}p_\lambda)p_\mu - g^{\lambda\mu}p_\mu\partial_0 p_\lambda]\\ &= -\,[p_0^{-2}][p_\mu\partial_0 x^\mu - x^\lambda\eta_{0\lambda}] = -\,[p_0^{-2}(p_0 - p_0)] = 0.\end{aligned}$$

Mais nous avons déjà vu que

$$\partial_i[p'^i] = \partial_i[x^ip_0^{-1}] = [2p_0^{-1}]\,;$$

d'autre part, si $g = \det g_{\alpha\beta}$, on a le résultat classique :

$$2p^\rho\Gamma_\rho{}^\alpha{}_\alpha = g^{-1}p^\rho\partial_\rho g.$$

Par conséquent, (1.2) prend la forme

$$(1.3) \qquad [\sigma]\left(4[p_0^{-1}] - [g^{-1}]\frac{d}{d\lambda}[g]\right) + 4\frac{d}{d\lambda}[\sigma] = 0,$$

qui, jointe à la condition initiale

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda[\sigma] = \lim_{\lambda \to 0} [p_0\sigma] = 1,$$

conduit par intégration au

THÉORÈME. — Sur V_4 rapportée à un système de coordonnées normales géodésiques d'origine x', la paramétrix $[{}^{(0)}\sigma]$, de support $\Gamma_{x'}^-$, associée à l'opérateur laplacien scalaire a pour expression :

$$(1.4) \qquad [{}^{(0)}\sigma] = [p_0^{-1}][(-g)^{\frac{1}{4}}(-g')^{-\frac{1}{4}}].$$

Remarque. — Nous supposerons dorénavant $R_{x'}$ orthonormé, ainsi $g' = \det \eta_{\alpha\beta} = -1$ et (1.4) s'écrit :

$$[{}^{(0)}\sigma] = [p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{4}}.$$

2. NOYAU DE DIFFUSION DU LAPLACIEN SCALAIRE

D'après le théorème précédent, (I.1.6) est l'équation, valable quel que soit u :

$$[p_0^{-1}(-g)^{\frac{1}{4}}][\nabla^\rho\nabla_\rho u] = \partial_i[E^i] + [u][L].$$

Si u est le scalaire qui s'exprime en coordonnées normales par $u = (-g)^{-\frac{1}{4}}$, nous montrerons dans la suite que les quantités $[E^i]$ qui lui correspondent d'après (I.1.7) vérifient $\partial_i[E^i] = 0$; ainsi :

$$[p_0^{-1}(-g)^{\frac{1}{4}}\nabla^\rho\nabla_\rho(-g)^{-\frac{1}{4}}] = [-g]^{-\frac{1}{4}}[L].$$

Nous énonçons :

THÉORÈME. — Sur V_4 rapportée à un système de coordonnées normales géodésiques d'origine x', le noyau de diffusion $[{}^{(0)}L]$, de support $\Gamma_{x'}^-$, associé à l'opérateur laplacien scalaire a pour expression :

$$(2.1) \qquad [{}^{(0)}L] = [p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{2}}[\nabla^\rho\nabla_\rho(-g)^{-\frac{1}{4}}].$$

Il reste à calculer $[E^i]$. Compte tenu de (1.1), (I.1.7) s'écrit, pour $u = (-g)^{-\frac{1}{4}}$:

$$(2.2)\quad [E^i] = [g^{ij}p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{4}}\partial_j[-g]^{-\frac{1}{4}} - [g^{ij}(-g)^{-\frac{1}{4}}]\partial_j[p_0^{-1}(-g)^{\frac{1}{4}}]$$
$$- [p_0^{-1}]\partial_j[g^{ij}] + [2(-g)^{\frac{1}{4}}p'^i p_0^{-1}\partial_0(-g)^{-\frac{1}{4}}] + [p_0^{-1}][\partial_\rho g^{\rho i} + (2g)^{-1}g^{\rho i}\partial_\rho g].$$

Remarquons d'abord que :

$$(-g)^{\frac{1}{4}}\partial_\rho(-g)^{-\frac{1}{4}} = -(-g)^{-\frac{1}{4}}\partial_\rho(-g)^{\frac{1}{4}} = -(4g)^{-1}\partial_\rho g.$$

Donc

$$[g^{ij}p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{4}}\partial_j[-g]^{-\frac{1}{4}} - [p_0^{-1}g^{ij}(-g)^{-\frac{1}{4}}]\partial_j[-g]^{\frac{1}{4}} + [2(-g)^{\frac{1}{4}}p'^i p_0^{-1}\partial_0(-g)^{-\frac{1}{4}}]$$
$$= -[2gp_0]^{-1}([g^{ij}]\partial_j[g] + [p'^i\partial_0 g])$$
$$= -[2gp_0]^{-1}[g^{i\rho}\partial_\rho g],$$

et, en reportant dans (2.2):

$$[E^i] = [p_0^{-1}][-\partial_j[g^{ij}] + \partial_\rho g^{\rho i} + g^{ij}p_0^{-1}\partial_j[p_0]].$$

Or

$$-\partial_j[g^{ij}] + [\partial_\rho g^{\rho i}] = [\partial_0 g^{\rho i}p'_\rho] = [p_0^{-1}][\partial_0(g^{\rho i}p_\rho) - g^{\rho i}\partial_0 p_\rho];$$

puis :

$$[g^{ij}p_0^{-1}]\partial_j[p_0] = [g^{ij}p_0^{-1}(\eta_{0j} - \eta_{00}p'_j)] = [p_0^{-1}][g^{i\rho}\eta_{0\rho} - \eta_{00}p'^i].$$

Si on se rappelle que

$$\partial_0(g^{\rho i}p_\rho) = \partial_0 x^i = 0 \quad , \quad \partial_0 p_\rho = \eta_{0\rho},$$

on obtient

$$[E^i] = -\eta_{00}[x^i p_0^{-3}];$$

d'où le résultat annoncé :

$$\partial_i[E^i] = -\eta_{00}[3p_0^{-3} - 3p^i p_0^{-4}(\eta_{0i} - \eta_{00}p'_i)] = 0.$$

3. INTERPRÉTATION [7]

D'après les formules (1.4) et (2.1), toute solution de l'équation $\nabla^\rho\nabla_\rho u = f$ vérifie, en coordonnées normales,

$$4\pi u(x') = \iiint_{V_0} [u\nabla^\rho\nabla_\rho(-g)^{-\frac{1}{4}} - f(-g)^{-\frac{1}{4}}][(-g)^{\frac{1}{2}}p_0^{-1}]dx^1dx^2dx^3$$
$$- \iint_S E^i n_i dS;$$

pour u, et par conséquent f, à support compact vers le futur, on a donc, avec un choix convenable du domaine V_0 :

$$4\pi u(x') = \iiint_{V_0} [u\nabla^\rho\nabla_\rho(-g)^{-\frac{1}{4}} - f(-g)^{-\frac{1}{4}}][(-g)^{\frac{1}{2}}p_0^{-1}]dx^1dx^2dx^3.$$

Nous nous posons la question : que devient cette équation intégrale si on passe du système de coordonnées normales utilisées pour la démonstration à un système de coordonnées quelconques y^ρ (vérifiant toutefois les conditions d'orientation du § I, 1 : y^0 de temps, y^i d'espace)?

La quantité $(-g)^{-\frac{1}{4}}$ joue un rôle fondamental, commençons par donner son expression en fonction des éléments relatifs aux coordonnées (y^ρ). Désignons pour cela par $s(x', x)$ la longueur de la géodésique $\widehat{x'x}$; posons de plus $\Omega = \frac{\varepsilon}{2}s^2$ où ε est égal à $+1$ si s positif et à -1 si s négatif. Un calcul, effectué en coordonnées normales d'origine x, montre que, en coordonnées normales d'origine x' :

$$-g^{\alpha\rho}(x')\frac{\partial\Omega}{\partial x'^\rho} = x^\alpha.$$

En passant maintenant au système y^ρ de métrique $\overset{*}{g}_{\lambda\mu}$:

$$\begin{aligned}\overset{*}{g} = \det \overset{*}{g}_{\lambda\mu} &= g\left[\frac{D(x^\alpha)}{D(y^\mu)}\right]^2 \\ &= g\left[\det - \eta^{\alpha\rho}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x'^\rho\partial y^\mu}\right]^2 = g\left[\det - \eta^{\alpha\rho}\frac{\partial y'^\sigma}{\partial x'^\rho}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'^\sigma\partial y^\mu}\right]^2 \\ &= g(g')^{-2}\left[\frac{D(y'^\sigma)}{D(x'^\rho)}\det\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'^\sigma\partial y^\mu}\right]^2.\end{aligned}$$

Mais, au point x', le déterminant g' se transforme suivant :

$$\overset{*}{g}{}' = g'\left[\frac{D(x'^\alpha)}{D(y'^\mu)}\right]^2.$$

Ainsi, si on désigne par $J = \det\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'^\sigma\partial y^\mu}$ le déterminant de Hadamard de la variété :

$$\tau = (g'g^{-1})^{\frac{1}{4}} = |J|^{\frac{1}{2}}(\overset{*}{g}\overset{*}{g}{}')^{-\frac{1}{4}}.$$

On vérifie immédiatement l'invariance du second membre sous une transformation quelconque des coordonnées; τ est un biscalaire en x' et x; nous écrivons, pour $R_{x'}$ orthonormé ($g' = -1$):

$$[u\nabla^\rho\nabla_\rho(-g)^{-\frac{1}{4}} - f(-g)^{-\frac{1}{4}}] = [u\nabla^\rho\nabla_\rho\tau - f\tau].$$

Il reste à interpréter la forme de rang maximum:

$$\omega = [(-g)^{\frac{1}{2}}p_0^{-1}]dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

LEMME. — ω est la forme de Leray associée au conoïde d'équation:

$$\varphi = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0.$$

Preuve. — Il suffit de vérifier

$$d\varphi \wedge \omega = \eta = (-g)^{\frac{1}{2}}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3;$$

ce qui est évident d'après:

$$d\varphi = p_\rho dx^\rho = p_0 dx^0 + p_i dx^i.$$

Conséquence. — En supposant x^ρ et y^ρ de même orientation, on a, sur le conoïde caractéristique

$$\omega = [(-\overset{*}{g})^{\frac{1}{2}}\overset{*}{p}_0^{-1}]dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3;$$

où $\overset{*}{p}_\alpha$ sont les composantes du vecteur p dans le repère naturel associé à (y^ρ).

Preuve.

$$d\varphi \wedge [(-\overset{*}{g})^{\frac{1}{2}}\overset{*}{p}_0^{-1}]dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 = p_\rho\frac{\partial x^\rho}{\partial y^0}[(-\overset{*}{g})^{\frac{1}{2}}\overset{*}{p}_0^{-1}]dy^0 \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3.$$

Mais $p_\rho\dfrac{\partial x^\rho}{\partial y^0} = \overset{*}{p}_0$, ainsi

$$d\varphi \wedge [(-\overset{*}{g})^{\frac{1}{2}}\overset{*}{p}_0^{-1}]dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 = [-\overset{*}{g}]^{\frac{1}{2}}dy^0 \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 = \eta$$

et:

$$d\varphi \wedge \{[(-\overset{*}{g})^{\frac{1}{2}}\overset{*}{p}_0^{-1}]dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 - \omega\} = 0.$$

THÉORÈME. — Toute solution à support compact vers le futur de $\nabla^\rho\nabla_\rho u = f$ vérifie l'équation intégrale:

$$4\pi u(y') = \iiint_{V_0}[u\nabla^\rho\nabla_\rho\tau - f\tau](y', y)\omega(y', y, dy).$$

4. CAS TENSORIEL, MÉTHODE

a) Désignons par $\{e_{\underline{\alpha}}\}$ un champ de repères mobiles quelconque pour lequel les composantes du p-tenseur sont notées $T_{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}$ (Les indices soulignés $\underline{\alpha}$ seront affectés à $e_{\underline{\alpha}}$, les indices non soulignés au repère naturel ε_α, ainsi $\partial_{\underline{\lambda}}$ est la dérivée pfaffienne par rapport au repère mobile). Les opérateurs différentiels $\nabla^\rho\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ et $\nabla^{\underline{\rho}}\nabla_{\underline{\rho}} T_{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}$ s'écrivent respectivement :

$$(4.1)\quad \nabla^\rho\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}T_{\alpha_1\ldots\alpha_p} + B^{\beta_1\ldots\beta_p,\mu}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\partial_\mu T_{\beta_1\ldots\beta_p} + C^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}T_{\beta_1\ldots\beta_p}$$

$$(4.2)\quad \nabla^{\underline{\rho}}\nabla_{\underline{\rho}} T_{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p} = g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}T_{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p} + B^{\underline{\beta}_1\ldots\underline{\beta}_p,\mu}_{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}\partial_\mu T_{\underline{\beta}_1\ldots\underline{\beta}_p} + C^{\underline{\beta}_1\ldots\underline{\beta}_p}_{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}T_{\underline{\beta}_1\ldots\underline{\beta}_p}.$$

Ce sont deux opérateurs différents mais de type (A) ; leurs paramétrix et noyaux de diffusion sont notés par

$$^{(p)}\sigma^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\rho'_1\ldots\rho'_p}\ ,\quad {}^{(p)}L^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\rho'_1\ldots\rho'_p}$$

pour (4.1) et par

$$^{(p)}\sigma^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p}\ ,\quad {}^{(p)}L^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p}$$

pour (4.2). Si $A^\rho_{\underline{\alpha}}$ et $A^{\underline{\alpha}}_\rho$ sont les matrices de passage du repère naturel au repère mobile et inversement, on a le résultat (J. Colleau [*6*]) :

THÉORÈME. — Le système de coordonnées (x^α) étant fixé, les paramétrix et noyaux de diffusion tensoriels se transforment comme des p-tenseurs covariants en x', p-tenseurs contravariants en x :

$$\left[{}^{(p)}\sigma^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p}\right] = \left[\prod_{i=1}^{i=p} A^{\sigma'_i}_{\underline{\rho}'_i}(x')A^{\underline{\alpha}_i}_{\beta_i}(x)\,{}^{(p)}\sigma^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\sigma'_1\ldots\sigma'_p}\right],$$

$$\left[{}^{(p)}L^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p}\right] = \left[\prod_{i=1}^{i=p} A^{\sigma'_i}_{\underline{\rho}'_i}(x')A^{\underline{\alpha}_i}_{\beta_i}(x)\,{}^{(p)}L^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\sigma'_1\ldots\sigma'_p}\right].$$

Preuve. — Elle repose uniquement sur la relation :

$$\nabla^{\underline{\rho}}\nabla_{\underline{\rho}} T_{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p} = A^{\beta_1}_{\underline{\alpha}_1}\ \ldots\ A^{\beta_p}_{\underline{\alpha}_p}\nabla^\rho\nabla_\rho T_{\beta_1\ldots\beta_p}.$$

Pour simplifier, nous considérons seulement le cas de l'opérateur $\nabla^\rho\nabla_\rho A_\alpha$; la démonstration serait semblable dans le cas général. De l'équation

$$g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}A_{\underline{\alpha}} + B^{\underline{\beta},\mu}_{\underline{\alpha}}\partial_\mu A_{\underline{\beta}} + C^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}A_{\underline{\beta}} = A^\beta_{\underline{\alpha}}(g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}A_\beta + B^{\gamma,\mu}_\beta\partial_\mu A_\gamma + C^\gamma_\beta A_\gamma),$$

il résulte, en introduisant $A_\beta = A^{\underline{\alpha}}_\beta A_{\underline{\alpha}}$ au second membre :

$$B^{\underline{\beta},\mu}_{\underline{\alpha}} = A^\rho_{\underline{\alpha}}B^{\sigma,\mu}_\rho A^{\underline{\beta}}_\sigma + 2A^\rho_{\underline{\alpha}}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda A^{\underline{\beta}}_\rho.$$

D'après cette loi de transformation, on vérifie que

$$(4.3) \qquad {}^{(1)}\sigma^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'} = A^{\sigma'}_{\underline{\rho}'}(x')A^{\underline{\alpha}}_{\beta}(x){}^{(1)}\sigma^{\beta}_{\sigma'}$$

est solution du système (I.1.10) associé à $\nabla^{\underline{\rho}}\nabla_{\underline{\rho}}A_{\underline{\alpha}}$; c'est donc la nouvelle paramétrix. Tout vecteur A_α à support compact vérifie l'équation intégrale (I.1.11), c'est-à-dire :

$$(4.4)_a \qquad 4\pi A_{\rho'}(x') = \iiint_{V_0} [A_\alpha{}^{(1)}L^{\alpha}_{\rho'} - {}^{(1)}\sigma^{\alpha}_{\rho'}\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}A_\alpha]d^3x.$$

On a de même, en considérant l'opérateur (4.2)

$$4\pi A_{\underline{\sigma}'}(x') = 4\pi A^{\rho'}_{\underline{\sigma}'}A_{\rho'}(x') = \iiint_{V_0} [A_{\underline{\alpha}}{}^{(1)}L^{\underline{\alpha}}_{\underline{\sigma}'} - {}^{(1)}\sigma^{\underline{\alpha}}_{\underline{\sigma}'}\nabla^{\underline{\rho}}\nabla_{\underline{\rho}}A_{\underline{\alpha}}]d^3x,$$

soit, avec (4.3):

$$(4.4)_b \qquad 4\pi A^{\rho'}_{\underline{\sigma}'}A_{\rho'}(x') = \iiint_{V_0} [A_{\underline{\alpha}}{}^{(1)}L^{\underline{\alpha}}_{\underline{\sigma}'} - A^{\rho'}_{\underline{\sigma}'}{}^{(1)}\sigma^{\alpha}_{\rho'}\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}A_\alpha]d^3x.$$

Multiplions $(4.4)_a$ par $A^{\rho'}_{\underline{\sigma}'}$ et soustrayons de $(4.4)_b$, nous obtenons, pour tout champ A_α à support compact

$$\iiint_{V_0} A_\alpha({}^{(1)}L^{\alpha}_{\rho'} - A^{\alpha}_{\underline{\beta}}{}^{(1)}L^{\underline{\beta}}_{\underline{\sigma}'}A^{\underline{\sigma}'}_{\rho'})d^3x = 0\,;$$

d'où

$${}^{(1)}L^{\alpha}_{\rho'} = A^{\alpha}_{\underline{\beta}}{}^{(1)}L^{\underline{\beta}}_{\underline{\sigma}'}A^{\underline{\sigma}'}_{\rho'}\,;$$

relation qu'on aurait pu obtenir aussi par un calcul direct basé sur (I.1.8) et les lois de transformation des coefficients.

b) Pour le système de coordonnées normales (x^α), un choix qui s'impose consiste à prendre pour $\{e_{\underline{\alpha}}\}$ le repère mobile adapté à ces coordonnées ; il se définit en chaque point x comme étant le repère obtenu à partir de $R_{x'}$ par déplacement parallèle le long de la géodésique $\widehat{x'x}$; on a donc :

$$e_{\underline{\alpha}} \cdot e_{\underline{\beta}} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}.$$

Notons aussi par $t^{\alpha}_{\rho'}(x', x)$ les composantes en repère naturel du bitenseur de transport parallèle relatif à x' et x ; p^α étant tangent à $\widehat{x'x}$, on a :

$$(4.5)_a \qquad p^\mu\nabla_\mu t^{\alpha}_{\rho'} = 0,$$

$$(4.5)_b \qquad t^{\alpha}_{\rho'}(x', x') = \delta^{\alpha}_{\rho'}.$$

En repère mobile adapté, $t^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'} = \delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}$ par construction ; la matrice de changement de repère s'écrit donc :

$$e_{\underline{\mu}} = A^{\rho}_{\underline{\mu}}\varepsilon_\rho, \qquad A^{\rho}_{\underline{\mu}} = t^{\rho}_{\mu'} \quad (\mu' = \underline{\mu} \text{ numériquement}).$$

LEMME 1. — Si $C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\lambda}}{}_{\underline{\rho}}$ sont les coefficients de rotation du repère mobile adapté :

$$C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\lambda}}{}_{\underline{\rho}} p'^{\underline{\rho}} = 0.$$

Preuve. — Le vecteur $e_{\underline{\alpha}}$ est déplacé par parallélisme le long de $p'^{\underline{\rho}}$, soit :

$$O = p'^{\underline{\rho}} \nabla_{\underline{\rho}} (e_{\underline{\alpha}})^{\underline{\lambda}} = p'^{\underline{\rho}} \partial_{\underline{\rho}} \delta^{\underline{\lambda}}_{\underline{\alpha}} + C_{\underline{\sigma}}{}^{\underline{\lambda}}{}_{\underline{\rho}} p'^{\underline{\rho}} (e_{\underline{\alpha}})^{\underline{\sigma}} = C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\lambda}}{}_{\underline{\rho}} p'^{\underline{\rho}}.$$

LEMME 2. — Le vecteur p' a mêmes composantes en repère naturel et en repère mobile adapté, autrement dit :

$$\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}} A^{\rho}_{\underline{\mu}} p'_{\rho} = p'^{\underline{\lambda}} = p'^{\lambda} \qquad (\lambda = \underline{\lambda} \text{ numériquement}) \tag{4.6}$$

Preuve. — La relation $p^{\rho} \nabla_{\rho} p'^{\alpha} = 0$, démontrée en (I.2.*b*), s'écrit en repère adapté

$$O = p^{\underline{\rho}} \nabla_{\underline{\rho}} p'^{\underline{\lambda}} = p^{\underline{\rho}} \partial_{\underline{\rho}} p'^{\underline{\lambda}} + C_{\underline{\sigma}}{}^{\underline{\lambda}}{}_{\underline{\rho}} p'^{\underline{\rho}} p'^{\underline{\sigma}} = p^{\rho} \partial_{\rho} p'^{\underline{\lambda}} ;$$

en tenant compte de $p^{\rho} \partial_{\rho} p'^{\lambda} = 0$, on aboutit à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{d\lambda} (p'^{\underline{\lambda}} - p'^{\lambda}) = 0,$$

avec la condition initiale :

$$p'^{\underline{\lambda}}(x') - p'^{\lambda}(x') = \eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}} t^{\rho}_{\underline{\mu}}(x', x') p'_{\rho}(x') - p'^{\lambda}(x') = 0.$$

c) *Coefficients.* — Si $\Gamma_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\mu}$ sont les symboles de Christoffel relatifs aux coordonnées normales (x^{α}) :

$$B^{\beta_1 \ldots \beta_p, \mu}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = - g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma} \delta^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots \delta^{\beta_p}_{\alpha_p} - 2 \sum_{i=1}^{i=p} g^{\mu\lambda} \delta^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots \Gamma_{\alpha_i}{}^{\beta_i}{}_{\lambda} \ldots \delta^{\beta_p}_{\alpha_p}. \tag{4.7}$$

La formule de transformation

$$\eta^{\underline{\rho}\underline{\sigma}} A^{\tau}_{\underline{\rho}} \partial_{\tau} A^{\mu}_{\underline{\sigma}} - \eta^{\underline{\rho}\underline{\sigma}} C_{\underline{\rho}}{}^{\underline{\tau}}{}_{\underline{\sigma}} A^{\mu}_{\underline{\tau}} = - g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma}$$

entraîne d'autre part

$$B^{\underline{\beta}_1 \ldots \underline{\beta}_p, \mu}_{\underline{\alpha}_1 \ldots \underline{\alpha}_p} = - \delta^{\underline{\beta}_1}_{\underline{\alpha}_1} \ldots \delta^{\underline{\beta}_p}_{\underline{\alpha}_p} g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma} + \sum_{i} \delta^{\underline{\beta}_1}_{\underline{\alpha}_1} \ldots b^{\underline{\beta}_i, \mu}_{\underline{\alpha}_i} \ldots \delta^{\underline{\beta}_p}_{\underline{\alpha}_p}, \tag{4.8$_a$}$$

$$C^{\underline{\beta}_1 \ldots \underline{\beta}_p}_{\underline{\alpha}_1 \ldots \underline{\alpha}_p} = \sum_{i} \delta^{\underline{\beta}_1}_{\underline{\alpha}_1} \ldots C^{\underline{\beta}_i}_{\underline{\alpha}_i} \ldots \delta^{\underline{\beta}_p}_{\underline{\alpha}_p} + 2\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}} \sum_{i<j} \delta^{\underline{\beta}_1}_{\underline{\alpha}_1} \ldots C_{\underline{\alpha}_i}{}^{\underline{\beta}_i}{}_{\underline{\lambda}} \ldots C_{\underline{\alpha}_j}{}^{\underline{\beta}_j}{}_{\underline{\mu}} \ldots \delta^{\underline{\beta}_p}_{\underline{\alpha}_p} \tag{4.8$_b$}$$

avec :

$$b^{\underline{\beta}, \mu}_{\underline{\alpha}} = - 2 A^{\mu}_{\underline{\tau}} \eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}} C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\nu}}, \tag{4.9$_a$}$$

$$C^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}} = \eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}} (- \partial_{\underline{\lambda}} C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\mu}} + C_{\underline{\lambda}}{}^{\underline{\rho}}{}_{\underline{\mu}} C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}} + C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\rho}}{}_{\underline{\lambda}} C_{\underline{\rho}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\mu}}). \tag{4.9$_b$}$$

5. PARAMÉTRIX ET NOYAUX DE DIFFUSION DES LAPLACIENS TENSORIELS

a) Le calcul de la paramétrix nécessite, d'après (I.1.9), la connaissance de $B^{\underline{\beta}_1\ldots\underline{\beta}_p,\mu}_{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}p'_\mu$; d'après $(4.9)_a$ et le lemme 1 du § 4 :

$$b^{\underline{\beta},\mu}_{\underline{\alpha}}p'_\mu = -2A^{\mu}_{\underline{\tau}}p'_\mu\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}C_{\underline{\alpha}\ \underline{\nu}}^{\ \underline{\beta}} = -2p'^{\underline{\nu}}C_{\underline{\alpha}\ \underline{\nu}}^{\ \underline{\beta}} = 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}B^{\underline{\beta}_1\ldots\underline{\beta}_p,\mu}_{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}p'_\mu &= -\delta^{\underline{\beta}_1}_{\underline{\alpha}_1}\ldots\delta^{\underline{\beta}_p}_{\underline{\alpha}_p}g^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma}p'_\mu\\ &= (B^\mu p'_\mu)\delta^{\underline{\beta}_1}_{\underline{\alpha}_1}\ldots\delta^{\underline{\beta}_p}_{\underline{\alpha}_p},\end{aligned}$$

et la paramétrix $\left[\sigma^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p}\right]$ vérifie l'équation

$$(5.1)_a \quad \left[\sigma^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p}\right]\left\{2\partial_i[p'^i] - [g^{ij}]\partial_i[p'_j] - [B^\mu p'_\mu]\right\} + 2[p'^i]\partial_i\left[\sigma^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p}\right] = 0,$$

avec la condition initiale:

$$(5.1)_b \qquad \lim_{\lambda\to 0}\left[\lambda\sigma^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p}\right] = \delta^{\underline{\alpha}_1}_{\underline{\rho}'_1}\ldots\delta^{\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_p}.$$

On obtient, compte tenu de l'équation semblable vérifiée dans le cas scalaire

$$(5.2) \qquad \left[{}^{(p)}\sigma^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p}\right] = [{}^{(0)}\sigma]\delta^{\underline{\alpha}_1}_{\underline{\rho}'_1}\ldots\delta^{\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_p},$$

ce qui, avec la loi de transformation de la paramétrix donnée au § 4, conduit au

THÉORÈME 1. — Sur V_4 rapportée à un système de coordonnées normales géodésiques d'origine x', la paramétrix, de support $\Gamma^-_{x'}$, associée à l'opérateur $\nabla^\rho\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ s'écrit

$$(5.3) \qquad \left[{}^{(p)}\sigma^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\rho'_1\ldots\rho'_p}\right] = [p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{4}}[t^{\alpha_1}_{\rho'_1}\ldots t^{\alpha_p}_{\rho'_p}],$$

où $t^\alpha_{\rho'}$ sont les composantes du bitenseur de transport parallèle relatif à $\widehat{x'x}$.

b) La formule de définition (I.1.8), écrite pour l'opérateur (4.2), donne, en utilisant (4.8) et (5.2)

$$(5.4) \quad {}^{(p)}L^{\underline{\alpha}_1\ldots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\ldots\underline{\rho}'_p} = \delta^{\underline{\alpha}_1}_{\underline{\rho}'_1}\ldots\delta^{\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_p}\left\{\partial_{ij}[g^{ij}p_0^{-1}(-g)^{\frac{1}{4}}] + \partial_i[g^{\lambda\mu}\Gamma_{\lambda}{}^{i}{}_{\mu}(-g)^{\frac{1}{4}}p_0^{-1}]\right\}$$
$$+\sum_i \delta^{\underline{\alpha}_1}_{\underline{\rho}'_1}\ldots K^{\underline{\alpha}_i}_{\underline{\rho}'_i}\ldots\delta^{\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_p} + 2\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}[-g]^{\frac{1}{4}}[p_0^{-1}]\sum_{i<j}\delta^{\underline{\alpha}_1}_{\underline{\rho}'_1}\ldots C_{\underline{\rho}'_i}{}^{\underline{\alpha}_i}{}_{\underline{\lambda}}\ldots C_{\underline{\rho}'_j}{}^{\underline{\alpha}_j}{}_{\underline{\mu}}\ldots\delta^{\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_p}$$

avec :

$$K^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'} = -\,\partial_i[b^{\underline{\alpha},i}_{\underline{\rho}'}(-g)^{\frac{1}{4}}p_0^{-1}] + [(-g)^{\frac{1}{4}}p_0^{-1\prime}C^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}].$$

On a déjà vu dans le cas scalaire que :

$$(5.5)\quad \partial_{ij}[g^{ij}p_0^{-1}(-g)^{\frac{1}{4}}] + \partial_i[g^{\lambda\mu}\Gamma_{\lambda}{}^{i}{}_{\mu}(-g)^{\frac{1}{4}}p_0^{-1}] = [{}^{(0)}L] = [p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{2}}[\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}(-g)^{-\frac{1}{4}}].$$

D'autre part, la dérivée covariante en x du bitenseur de transport parallèle s'écrit, en repère mobile adapté

$$(5.6)\qquad \nabla_{\underline{\lambda}}t^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'} = \partial_{\underline{\lambda}}\delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'} + C_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\lambda}}\delta^{\underline{\beta}}_{\underline{\rho}'} = C_{\rho'}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\lambda}}\,;$$

par conséquent :

$$(5.7)\quad 2\eta^{\lambda\mu}[-g]^{\frac{1}{2}}[p_0^{-1}]\sum_{i<j}\delta^{\underline{\alpha}_1}_{\underline{\rho}'_1}\,\dots\,C_{\underline{\rho}'_i}{}^{\alpha_i}{}_{\underline{\lambda}}\,\dots\,C_{\underline{\rho}'_j}{}^{\alpha_j}{}_{\underline{\mu}}\,\dots\,\delta^{\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_p} = [-g]^{\frac{1}{2}}[p_0^{-1}]\left[(-g)^{-\frac{1}{4}}\sum_{i,j}t^{\underline{\alpha}_1}_{\underline{\rho}'_1}\,\dots\,\nabla_{\underline{\lambda}}t^{\underline{\alpha}_i}_{\underline{\rho}'_i}\,\dots\,\nabla^{\underline{\lambda}}t^{\underline{\alpha}_j}_{\underline{\rho}'_j}\,\dots\,t^{\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_p}\right].$$

En admettant pour l'instant que

$$(5.8)\qquad K^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'} = [-g]^{\frac{1}{2}}[p_0^{-1}][(-g)^{-\frac{1}{4}}\nabla^{\underline{\sigma}}\nabla_{\underline{\sigma}}t^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'} + 2\nabla^{\sigma}t^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}\nabla_{\underline{\sigma}}(-g)^{-\frac{1}{4}}],$$

on obtient, en regroupant (5.5), (5.7) et (5.8) dans (5.4)

$$[{}^{(p)}L^{\underline{\alpha}_1\dots\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1\dots\underline{\rho}'_p}] = [p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{2}}[\nabla^{\sigma}\nabla_{\underline{\sigma}}(t^{\underline{\alpha}_1}_{\underline{\rho}'_1}\,\dots\,t^{\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_p}(-g)^{-\frac{1}{4}})]$$

et, compte tenu de la nature covariante des noyaux de diffusion :

THÉORÈME 2. — Dans les conditions du théorème 1, le noyau de diffusion s'écrit :

$$(5.9)\qquad [{}^{(p)}L^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\rho'_1\dots\rho'_p}] = [p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{2}}[\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}(t^{\alpha_1}_{\rho'_1}\,\dots\,t^{\alpha_p}_{\rho'_p}(-g)^{-\frac{1}{4}})].$$

c) Vérification de (5.8).

$$(5.10)\quad \begin{aligned} -\partial_i[b^{\underline{\alpha},i}_{\underline{\rho}'}(-g)^{\frac{1}{4}}p_0^{-1}] &= 2\partial_i[A^i_{\underline{\tau}}\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}C_{\rho'}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\nu}}(-g)^{\frac{1}{4}}p_0^{-1}] \\ &= 2[-g]^{\frac{1}{4}}[p_0^{-1}]\{\partial_i[A^i_{\underline{\tau}}]\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}C_{\rho'}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\nu}} + [A^i_{\underline{\tau}}\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}]\partial_i[C_{\rho'}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\nu}}] \\ &\quad - [p_0^{-1}A^i_{\underline{\tau}}\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}C_{\underline{\rho}'}{}^{\underline{\dot\alpha}}{}_{\underline{\nu}}(\eta_{0i} - \eta_{00}p'_i)]\} + 2[A^i_{\underline{\tau}}\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}C_{\underline{\rho}'}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\nu}}p_0^{-1}]\partial_i[-g]^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

En utilisant (I.1.3) et (4.6) sous la forme

$$A^{\lambda}_{\underline{\tau}}p_{\lambda} = p_{\underline{\tau}} = \eta_{\underline{\tau}\underline{\lambda}}x^{\underline{\lambda}},$$

il vient successivement :

$$\begin{aligned} \partial_i[A^i_{\underline{\tau}}][\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}C_{\rho'}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\nu}}] &= [(\partial_{\lambda}A^{\lambda}_{\underline{\tau}} - \partial_0 A^{\lambda}_{\underline{\tau}}p'_{\lambda})\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}C_{\rho'}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\nu}}] \\ &= [\partial_{\lambda}A^{\lambda}_{\underline{\tau}} - p_0^{-1}(\eta_{0\underline{\tau}} - A^{\lambda}_{\underline{\tau}}\eta_{0\lambda})][\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}C_{\underline{\rho}'}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\nu}}]. \end{aligned}$$

D'autre part

$$[A^i_{\underline{\tau}}\eta^{\tau\nu}]\partial_i[C_{\rho'}{}^{\alpha}{}_{\nu}] = [A^{\sigma}_{\underline{\tau}}\eta^{\tau\nu}\partial_\sigma C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} - p'^{\nu}\partial_0 C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}}];$$

soit, d'après les lemmes 1 et 2 :

$$[A^i_{\underline{\tau}}\eta^{\tau\nu}]\partial_i[C_{\underline{\rho'}}{}^{\dot{\alpha}}{}_{\underline{\nu}}] = [\eta^{\tau\nu}\partial_{\underline{\tau}} C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} + p_0^{-1} C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_0].$$

En se rappelant que

$$(5.11) \qquad A^\lambda_{\underline{\tau}} p'_\lambda \eta^{\tau\nu} C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} = p'^{\nu} C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} = 0,$$

on a ensuite :

$$-[p_0^{-1}][A^i_{\underline{\tau}}\eta^{\tau\nu}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}}(\eta_{0i} - \eta_{00}p'_i)] = -[p_0^{-1}A^\lambda_{\underline{\tau}}\eta_{0\lambda}\eta^{\tau\nu}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}}].$$

Regroupons ces résultats partiels dans (5.10) ; on obtient :

$$(5.12) \quad -\partial_i[b^{\alpha,i}_{\underline{\rho'}}(-g)^{\frac{1}{4}}p_0^{-1}] = 2[A^i_{\underline{\tau}}\eta^{\tau\nu}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}}p_0^{-1}]\partial_i[-g]^{\frac{1}{4}} \\ + 2[-g]^{\frac{1}{4}}[p_0^{-1}][\partial_\lambda A^\lambda_{\underline{\tau}}\eta^{\tau\nu}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} + \eta^{\tau\nu}\partial_{\tau}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}}].$$

Toujours d'après (5.11)

$$2[A^i_{\tau}\eta^{\tau\nu}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}}p_0^{-1}]\partial_i[-g]^{\frac{1}{4}} = [2A^{\sigma}_{\underline{\tau}}\eta^{\tau\nu}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}}p_0^{-1}\partial_\sigma(-g)^{\frac{1}{4}}];$$

et en calculant de deux façons différentes la dérivée covariante contractée en x du bitenseur $t^\lambda_{\tau'}$:

$$\partial_\lambda A^\lambda_{\underline{\tau}} = \partial_\lambda t^\lambda_{\tau'} = \nabla_\lambda t^\lambda_{\tau'} - t^\sigma_{\tau'}\Gamma_\sigma{}^\lambda{}_\lambda = C_{\underline{\tau}}{}^{\lambda}{}_{\underline{\lambda}} - (2g)^{-1}\partial_{\underline{\tau}} g.$$

(5.12) s'écrit alors

$$-\partial_i[b^{\alpha,i}_{\underline{\rho'}}(-g)^{\frac{1}{4}}p_0^{-1}] = [-g]^{\frac{1}{4}}[p_0^{-1}][-(2g)^{-1}\partial_{\underline{\tau}} g\eta^{\tau\nu}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} \\ + 2C_{\underline{\tau}}{}^{\lambda}{}_{\underline{\lambda}}\eta^{\tau\nu}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} + 2\eta^{\tau\nu}\partial_{\underline{\tau}}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}}];$$

et, avec l'expression de $C^{\alpha}_{\underline{\rho'}}$ donnée en $(4.9)_b$:

$$K^{\alpha}_{\underline{\rho'}} = 2[-g]^{\frac{1}{4}}[p_0^{-1}][\nabla^{\tau}t^{\alpha}_{\underline{\rho'}}\nabla_{\underline{\tau}}(-g)^{-\frac{1}{4}}] \\ + [-g]^{\frac{1}{4}}[p_0^{-1}][\eta^{\tau\nu}(\partial_{\underline{\tau}}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} + C_{\underline{\tau}}{}^{\sigma}{}_{\underline{\nu}}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\sigma}} + C_{\underline{\rho'}}{}^{\sigma}{}_{\underline{\tau}}C_{\underline{\sigma}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} + 2C_{\underline{\tau}}{}^{\lambda}{}_{\underline{\lambda}}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}})].$$

Si on remarque enfin que, d'après (5.6),

$$\nabla^{\sigma}\nabla_{\underline{\sigma}}t^{\alpha}_{\underline{\rho'}} = \eta^{\tau\nu}\nabla_{\underline{\tau}}\nabla_{\underline{\nu}}t^{\alpha}_{\underline{\rho'}} = \eta^{\tau\nu}(\partial_{\underline{\tau}}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} - C_{\underline{\tau}}{}^{\sigma}{}_{\underline{\nu}}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\sigma}} + C_{\underline{\rho'}}{}^{\sigma}{}_{\underline{\tau}}C_{\underline{\sigma}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}}),$$

cette équation prend la forme :

$$K^{\alpha}_{\underline{\rho'}} = [-g]^{\frac{1}{4}}[p_0^{-1}][(-g)^{-\frac{1}{4}}\nabla^{\sigma}\nabla_{\underline{\sigma}}t^{\alpha}_{\underline{\rho'}} + 2\nabla^{\sigma}t^{\alpha}_{\underline{\rho'}}\nabla_{\underline{\sigma}}(-g)^{-\frac{1}{4}}] \\ + 2[-g]^{\frac{1}{4}}[p_0^{-1}][\eta^{\tau\nu}(C_{\underline{\tau}}{}^{\sigma}{}_{\underline{\nu}}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\sigma}} + C_{\underline{\tau}}{}^{\lambda}{}_{\underline{\lambda}}C_{\underline{\rho'}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}})].$$

Pour retrouver (5.8), il suffit de montrer que le dernier terme du second membre s'annule, ce qui est évident grâce à l'antisymétrie de $C_{\underline{\lambda}\underline{\mu}\underline{\sigma}}$ en $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$:

$$\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}} C_{\underline{\tau}}{}^{\underline{\sigma}}{}_{\underline{\nu}} = \eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}} \eta^{\underline{\sigma}\underline{\lambda}} C_{\underline{\tau}\underline{\lambda}\underline{\nu}} = - \eta^{\underline{\sigma}\underline{\tau}} C_{\underline{\tau}}{}^{\underline{\lambda}}{}_{\underline{\lambda}}.$$

6. CAS SPINORIEL

Dans un repère spinoriel au dessus d'un repère orthonormé quelconque $\{ e_{\underline{\alpha}} \}$, nous considérons les opérateurs laplaciens $\nabla^{\underline{\lambda}}\nabla_{\underline{\lambda}}\psi_{a_1 \dots a_p}$ agissant sur les p-spineurs covariants $\psi_{a_1 \dots a_p}$. Le théorème du § 4 se transpose au cas spinoriel de la manière suivante :

THÉORÈME. — Pour un système de coordonnées (x^α) fixé, les paramétrix ${}^{\left(\frac{p}{2}\right)}\sigma^{a_1 \dots a_p}_{r'_1 \dots r'_p}$ et noyaux de diffusion ${}^{\left(\frac{p}{2}\right)}L^{a_1 \dots a_p}_{r'_1 \dots r'_p}$ associés à $\nabla^{\underline{\lambda}}\nabla_{\underline{\lambda}}\psi_{a_1 \dots a_p}$ se comportent, par changement de repère spinoriel, comme des p-spineurs contravariants en x, p-spineurs covariants en x'.

En désignant alors par $\tau^a_{r'}(x', x)$ les composantes du bispineur de transport parallèle, un calcul en tout point semblable à celui du § 5 aboutit au résultat :

THÉORÈME. — Sur V_4 rapportée à un système de coordonnées normales géodésiques d'origine x', les paramétrix et noyaux de diffusion p-spinoriels, de support $\Gamma^-_{x'}$, s'écrivent :

$$\left[{}^{\left(\frac{p}{2}\right)}\sigma^{a_1 \dots a_p}_{r'_1 \dots r'_p}\right] = [p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{4}}[\tau^{a_1}_{r'_1} \dots \tau^{a_p}_{r'_p}], \tag{6.1}$$

$$\left[{}^{\left(\frac{p}{2}\right)}L^{a_1 \dots a_p}_{r'_1 \dots r'_p}\right] = [p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{4}}[\nabla^{\underline{\lambda}}\nabla_{\underline{\lambda}}(\tau^{a_1}_{r'_1} \dots \tau^{a_p}_{r'_p}(-g)^{-\frac{1}{4}})]. \tag{6.2}$$

7. APPLICATION AUX FORMULES DE COLLEAU

On sait, d'après Colleau [*6*], que les noyaux de diffusion tensoriels et spinoriels des différents ordres s'expriment en fonction de celui correspondant au spin $\frac{1}{2}$ (1-spineur covariant) et de « termes complémentaires simples ». Une telle situation découle immédiatement des formules explicites données aux § 5 et 6. Par exemple, d'après (5.9) :

$$\left[{}^{(2)}L^{\alpha\beta}_{\rho'\sigma'}\right] = \left[t^\alpha_{\rho'}{}^{(1)}L^\beta_{\sigma'} + t^\beta_{\sigma'}{}^{(1)}L^\alpha_{\rho'} - t^\alpha_{\rho'}t^\beta_{\sigma'}{}^{(0)}L + 2{}^{(0)}\sigma\nabla^\lambda t^\alpha_{\rho'}\nabla_\lambda t^\beta_{\sigma'}\right], \tag{7.1}$$

$$(7.2)\quad [{}^{(p)}L^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\rho_1'\ldots\rho_p'}] = \frac{1}{2}(p-1)(p-2)[{}^{(0)}Lt^{\alpha_1}_{\rho_1'}\ldots t^{\alpha_p}_{\rho_p'}] - \sum_k (p-2)[t^{\alpha_1}_{\rho_1'}\ldots {}^{(1)}L^{\alpha_k}_{\rho_k'}\ldots t^{\alpha_p}_{\rho_p'}] + \frac{1}{2}\sum_{k,l}[t^{\alpha_1}_{\rho_1'}\ldots \hat{t}^{\alpha_k}_{\rho_k'}\ldots \hat{t}^{\alpha_l}_{\rho_l'}\ldots t^{\alpha_p}_{\rho_p'}\,{}^{(2)}L^{\alpha_k\alpha_l}_{\rho_k'\rho_l'}].$$

On a aussi, en partant de (6.2) écrite pour $p = 1$ et de l'équation obtenue en changeant la variance des indices :

$$2[\tau^{r'}_a\,{}^{(\frac{1}{2})}L^a_{r'}] = [\tau^{r'}_a\,{}^{(\frac{1}{2})}L^a_{r'} + \tau^a_{r'}\,{}^{(\frac{1}{2})}L^{r'}_a]$$
$$= [p_0^{-1}][-g]^{\frac{1}{2}}[\tau^{r'}_a\nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}(\tau^a_{r'}(-g)^{-\frac{1}{4}}) + \tau^a_{r'}\nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}(\tau^{r'}_a(-g)^{-\frac{1}{4}})].$$

Mais, en utilisant une première fois $\tau^a_{r'}\tau^{r'}_a = 4$

$$\tau^{r'}_a\nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}(\tau^a_{r'}(-g)^{-\frac{1}{4}}) + \tau^a_{r'}\nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}(\tau^{r'}_a(-g)^{-\frac{1}{4}})$$
$$= \nabla^{\lambda}(\tau^{r'}_a\nabla_{\lambda}(\tau^a_{r'}(-g)^{-\frac{1}{4}}) + \tau^a_{r'}\nabla_{\lambda}(\tau^{r'}_a(-g)^{-\frac{1}{4}})) - 2(-g)^{-\frac{1}{4}}\nabla^{\lambda}\tau^a_{r'}\nabla_{\lambda}\tau^{r'}_a\,;$$

puis

$$\tau^{r'}_a\nabla_{\lambda}(\tau^a_{r'}(-g)^{-\frac{1}{4}}) + \tau^a_{r'}\nabla_{\lambda}(\tau^{r'}_a(-g)^{-\frac{1}{4}}) = 8\nabla_{\lambda}(-g)^{-\frac{1}{4}}\,;$$

et en reportant :

$$(7.3)\qquad [{}^{(0)}L] = \frac{1}{4}[\tau^{r'}_a\,{}^{(\frac{1}{2})}L^a_{r'} + {}^{(0)}\sigma\nabla^{\lambda}\tau^a_{r'}\nabla_{\lambda}\tau^{r'}_a].$$

Cette formule donne le noyau de diffusion scalaire à partir du noyau correspondant au spin $\frac{1}{2}$ et du bispineur de transport parallèle ; une formule du même type permet d'exprimer ${}^{(1)}L^{\alpha}_{\rho'}$ en fonction de ${}^{(\frac{1}{2})}L^a_{r'}$, des matrices de Dirac et de $\tau^a_{r'}$ [6].

CHAPITRE III

PARAMÉTRIX ET NOYAU DE DIFFUSION SUR UN ESPACE A COURBURE CONSTANTE

Par une méthode directe n'utilisant pas les résultats du chapitre II, nous calculons les paramétrix et noyaux de diffusion des opérateurs laplaciens scalaire, vectoriel, 2-tensoriel et 1-spinoriel [3].

Pour cela, il faut déterminer explicitement les éléments géométriques de l'espace qui interviendront dans le calcul.

1. L'ESPACE A COURBURE CONSTANTE DU POINT DE VUE DES COORDONNÉES NORMALES

a) Notons par $\omega^{\underline{\alpha}}$ et $\omega_{\underline{\alpha}}{}^{\beta}$ le corepère et les formes de connexion associées au repère mobile adapté $\{e_{\underline{\alpha}}\}$ (II, 4, *b*). En utilisant une méthode due à E. Cartan [*1*], les équations de structure

$$d\omega^{\underline{\alpha}} = \omega^{\underline{\rho}} \wedge \omega_{\underline{\rho}}{}^{\underline{\alpha}}, \tag{1.1}$$

$$d\omega_{\underline{\alpha}}{}^{\beta} = \omega_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\rho}} \wedge \omega_{\underline{\rho}}{}^{\beta} + \frac{1}{2} R_{\underline{\alpha}}{}^{\beta}{}_{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\omega^{\underline{\lambda}} \wedge \omega^{\underline{\mu}}, \tag{1.2}$$

où les composantes $R_{\underline{\alpha}}{}^{\beta}{}_{\underline{\lambda}\underline{\mu}}$ sont connues, permettent d'expliciter $[g_{\lambda\mu}]$, $[\Gamma_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\mu}]$, $[C_{\underline{\alpha}}{}^{\beta}{}_{\rho}]$, $[\partial_{\sigma}C_{\underline{\alpha}}{}^{\beta}{}_{\rho}]$ ainsi que $[t^{\alpha}_{\rho'}]$. Examinons cette méthode.

Elle consiste à introduire les paramètres surabondants a^{α}, t liés par $x^{\alpha} = a^{\alpha}t$ (x^{α} = coordonnées normales). Si, a^{α} étant fixé, on fait varier t, le point x décrit la géodésique $\widehat{x'x}$. D'après la définition du repère mobile adapté, on a donc, en remplaçant x^{α} par $a^{\alpha}t$ et dx^{α} par $t da^{\alpha} + a^{\alpha}dt$ et en séparant les termes en dt :

$$\omega^{\underline{\alpha}} = a^{\underline{\alpha}}dt + \varpi^{\underline{\alpha}}(a, t, da),$$
$$\omega_{\underline{\alpha}}{}^{\beta} = \varpi_{\underline{\alpha}}{}^{\beta}(a, t, da).$$

Reportons ces expressions dans (1.1), (1.2) ; on obtient des équations du genre

$$B_{\alpha\beta}dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = A_{\alpha}dt \wedge da^{\alpha} + A_{\alpha\beta}da^{\alpha} \wedge da^{\beta} = 0,$$

et par identification des deux premiers membres

$$A_{\alpha} = 2ta^{\rho}B_{\rho\alpha} = 0 ;$$

les équations correspondantes constituent le système différentiel ordinaire

$$\partial_t\varpi^{\underline{\alpha}} = da^{\underline{\alpha}} + a^{\underline{\rho}}\varpi_{\underline{\rho}}{}^{\underline{\alpha}}, \tag{1.3}$$

$$\partial_t\varpi_{\underline{\alpha}}{}^{\beta} = R_{\underline{\alpha}}{}^{\beta}{}_{\underline{\lambda}\underline{\mu}}a^{\underline{\lambda}}\varpi^{\underline{\mu}}, \tag{1.4}$$

où on a posé :

$$\partial_t\omega(t, a, da) = \partial_t(\varphi_{\alpha}(t, a)da^{\alpha}) = \partial_t\varphi_{\alpha}da^{\alpha}.$$

Avec les conditions initiales

$$(\varpi^{\underline{\alpha}})_{t=0} = 0 \quad , \quad (\varpi_{\underline{\alpha}}{}^{\beta})_{t=0} = 0,$$

on déduit de (1.3) et (1.4):

$$(1.5)_a \qquad \partial_{tt}\overline{\omega}^{\underline{\alpha}} = R_{\underline{\rho}}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\lambda}\underline{\mu}} a^{\underline{\rho}} a^{\underline{\lambda}} \overline{\omega}^{\underline{\mu}},$$

$$(1.5)_b \qquad (\overline{\omega}^{\underline{\alpha}})_{t=0} = 0 \quad , \quad (\partial_t \overline{\omega}^{\underline{\alpha}})_{t=0} = da^{\underline{\alpha}}.$$

Cette équation différentielle étant résolue, il suffit de faire $t = 1$, $a^\rho = x^\rho$ dans $\overline{\omega}^{\underline{\alpha}}$ pour retrouver $\omega^{\underline{\alpha}}(x^\rho, dx^\rho)$.

b) Métrique et symboles de Christoffel.

En posant

$$a_{\underline{\alpha}} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\rho}} a^{\underline{\rho}} \quad , \quad \overline{\omega}_{\underline{\alpha}\underline{\rho}} = \eta_{\underline{\rho}\underline{\sigma}} \overline{\omega}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\sigma}} = -\overline{\omega}_{\underline{\rho}\underline{\alpha}},$$

on a, d'après (1.3)

$$\partial_t(a_{\underline{\alpha}} \overline{\omega}^{\underline{\alpha}}) = a_{\underline{\alpha}} da^{\underline{\alpha}};$$

d'où:

$$(1.6) \qquad a_{\underline{\alpha}} \overline{\omega}^{\underline{\alpha}} = t a_{\underline{\alpha}} da^{\underline{\alpha}}.$$

Mais dans un espace à courbure constante où, par définition,

$$R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\lambda}\underline{\mu}} = -K(\eta_{\underline{\alpha}\underline{\lambda}}\eta_{\underline{\beta}\underline{\mu}} - \eta_{\underline{\alpha}\underline{\mu}}\eta_{\underline{\beta}\underline{\lambda}})$$

(K constante positive ou négative), $(1.5)_a$ s'écrit:

$$\partial_{tt}\overline{\omega}^{\underline{\alpha}} + K a_{\underline{\sigma}} a^{\underline{\sigma}} \overline{\omega}^{\underline{\alpha}} = K a_{\underline{\sigma}} \overline{\omega}^{\underline{\sigma}} a^{\underline{\alpha}} = t a_{\underline{\sigma}} da^{\underline{\sigma}} a^{\underline{\alpha}}.$$

Intégrons à l'aide de $(1.5)_b$; il vient

$$\overline{\omega}^{\underline{\alpha}} = \varphi(t, a) da^{\underline{\alpha}} + (a_{\underline{\sigma}} da^{\underline{\sigma}}) a^{\underline{\alpha}} (t - \varphi(t, a))(a^\tau a_\tau)^{-1},$$

avec, en supposant par exemple $K > 0$:

$$\begin{aligned}
a_\rho a^\rho > 0: &\quad \varphi(t, a) = (K a_\rho a^\rho)^{-\frac{1}{2}} \sin(t(K a_\rho a^\rho)^{\frac{1}{2}}),\\
a_\rho a^\rho = 0: &\quad \varphi(t, a) = t,\\
a_\rho a^\rho < 0: &\quad \varphi(t, a) = (-K a_\rho a^\rho)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sh}(t(-K a_\rho a^\rho)^{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Ainsi:

$$(1.7) \qquad \omega^{\underline{\alpha}} = \varphi(1, x) dx^{\underline{\alpha}} + (x_\sigma dx^\sigma) x^{\underline{\alpha}} (1 - \varphi(1, x))(x^\tau x_\tau)^{-1}.$$

La métrique $g_{\lambda\mu}$ est donnée par

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \omega^{\underline{\alpha}} \omega^{\underline{\beta}} = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu;$$

on trouve:

$$(1.8) \qquad g_{\lambda\mu} = \varphi^2(1, x)\eta_{\lambda\mu} + x_\lambda x_\mu (1 - \varphi^2(1, x))(x^\rho x_\rho)^{-1}.$$

Sur le conoïde:

$$(1.9) \qquad [g_{\lambda\mu}] = \eta_{\lambda\mu} + \frac{K}{3} x_\lambda x_\mu \quad , \quad [g^{\lambda\mu}] = \eta^{\lambda\mu} - \frac{K}{3} x^\lambda x^\mu.$$

Puis, en calculant ∂_ρ (1.8) (dérivée ordinaire) et en passant à la limite sur le conoïde :

$$(1.10) \qquad [\partial_\rho g_{\lambda\mu}] = \frac{K}{3}(x_\mu \eta_{\lambda\rho} + x_\lambda \eta_{\mu\rho} - 2x_\rho \eta_{\lambda\mu}) - \frac{4K^2}{45} x_\rho x_\lambda x_\mu,$$

$$(1.11) \qquad [\Gamma_\lambda{}^\rho{}_\mu] = -\frac{K}{3}(x_\lambda \delta^\rho_\mu + x_\mu \delta^\rho_\lambda - 2x^\rho \eta_{\lambda\mu}) + \frac{8K^2}{45} x_\lambda x_\mu x^\rho.$$

LEMME. — Pour un espace à courbure constante et sur tout conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$ repéré par des coordonnées normales d'origine x' :

$$[-g] = 1.$$

La réciproque est exacte (sans démonstration).

Preuve. — On pourrait calculer le déterminant de la matrice

$$\eta_{\lambda\mu} + \frac{K}{3} x_\lambda x_\mu ;$$

montrons plutôt que $[-g]$ est constante ; d'après (1.11) :

$$[\Gamma_\rho{}^\alpha{}_\alpha] = -Kx_\rho ;$$

puis :

$$[p^\rho \Gamma_\rho{}^\alpha{}_\alpha] = [(2g)^{-1} p^\rho \partial_\rho g] = 0.$$

Ainsi : $[-g] = [-g'] = 1.$

c) Bitenseur de transport parallèle.

A l'aide des symboles de Christoffel (1.11), les équations de définition (II.4.5) s'écrivent, sur le conoïde :

$$[p^\mu \partial_\mu t^\alpha_{\rho'}] + \frac{K}{3}[x^\alpha x_\beta t^\beta_{\rho'}] = 0 \quad , \quad [t^\alpha_{\rho'}(x', x')] = \delta^\alpha_{\rho'}.$$

En intégrant

$$(1.12) \qquad [t^\alpha_{\rho'}] = \delta^\alpha_{\rho'} - \frac{K}{6} p^\alpha p_{\rho'} ;$$

d'où, sur le conoïde, la loi de transformation du repère naturel ε_α au repère adapté $e_{\underline{\alpha}}$:

$$[e_{\underline{\rho}}] = \left(\delta^\alpha_{\underline{\rho}} - \frac{K}{6} p^\alpha p_{\underline{\rho}}\right)[\varepsilon_\alpha],$$

$$(1.13) \qquad [\partial_{\underline{\alpha}}] = \left(\delta^\alpha_{\underline{\alpha}} - \frac{K}{6} p^\alpha p_{\underline{\alpha}}\right)[\partial_\alpha] \quad , \quad [\partial_\alpha] = \left(\delta^{\underline{\alpha}}_\alpha + \frac{K}{6} p^{\underline{\alpha}} p_\alpha\right)[\partial_{\underline{\alpha}}].$$

d) Coefficients de connexion du repère mobile adapté.

En notant $\varpi_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} = D_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}}(t, a)da^{\underline{\rho}}$, les équations

$$\partial_t \varpi_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} = \frac{1}{2} R_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\lambda\mu}}(a^{\underline{\lambda}}\varpi^{\underline{\mu}} - a^{\underline{\mu}}\varpi^{\underline{\lambda}})$$

s'écrivent, compte tenu de (1.7) et de l'expression du tenseur de courbure

$$da^{\underline{\rho}}\partial_t D_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}} = - K\varphi(t, a)(a_{\underline{\alpha}}\delta_{\underline{\rho}}^{\underline{\beta}} - a^{\underline{\beta}}\eta_{\underline{\alpha\rho}})da^{\underline{\rho}};$$

d'où, en supposant par exemple $K > 0$, $a_\rho a^\rho > 0$:

$$D_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}} = K(Ka_\rho a^\rho)^{-1}(1 - \cos t(Ka_\rho a^\rho)^{\frac{1}{2}})(a^{\underline{\beta}}\eta_{\underline{\alpha\rho}} - a_{\underline{\alpha}}\delta_{\underline{\rho}}^{\underline{\beta}}). \tag{1.14}$$

Si nous définissons alors

$$\varpi_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} = C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}}(t, a)\varpi^{\underline{\rho}},$$

les quantités $C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}}(1, x)$ sont les coefficients de connexion cherchés ; on les obtient à partir de (1.14) et de la formule (1.7) qui donne dx^α comme combinaison linéaire des $\omega^{\underline{\rho}}$:

$$[C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}}] = - \frac{K}{2}(x_{\underline{\alpha}}\delta_{\underline{\rho}}^{\underline{\beta}} - x^{\underline{\beta}}\eta_{\underline{\alpha\rho}}). \tag{1.15}$$

En dérivant l'expression générale obtenue et en passant à la limite sur le conoïde :

$$[\partial_\mu C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}}] = - \frac{K}{2}(\eta_{\underline{\alpha\mu}}\delta_{\underline{\rho}}^{\underline{\beta}} - \delta_{\underline{\mu}}^{\underline{\beta}}\eta_{\underline{\alpha\rho}}) - \frac{K^2}{12}x_\mu(x_{\underline{\alpha}}\delta_{\underline{\rho}}^{\underline{\beta}} - x^{\underline{\beta}}\eta_{\underline{\alpha\rho}}).$$

Soit, avec (1.13) :

$$[\partial_{\underline{\sigma}} C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}}] = - \frac{K}{2}(\eta_{\underline{\alpha\sigma}}\delta_{\underline{\rho}}^{\underline{\beta}} - \delta_{\underline{\sigma}}^{\underline{\beta}}\eta_{\underline{\alpha\rho}}). \tag{1.16}$$

2. PARAMÉTRIX ET NOYAU DE DIFFUSION DU LAPLACIEN SCALAIRE [5]

a) La valeur de la paramétrix résulte directement de (II.1.4) et de la valeur de $[- g]$ donnée au paragraphe précédent :

$$[{}^{(0)}\sigma] = [p_0^{-1}]. \tag{2.1}$$

b) Le calcul du noyau de diffusion à l'aide de (II.2.1) nécessiterait la connaissance des dérivées secondes $[\partial_{\lambda\mu}g]$ qui sont assez longues à calculer ; nous utiliserons en fait une méthode directe basée sur l'équation de définition (I.1.8).

Dans un calcul préliminaire, on a, d'après (1.9) et (1.11)

$$[B^i] = [- g^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho}{}^{i}{}_{\sigma}] = - 2Kx^i ;$$

d'où, avec (2.1):

$$- \partial_i[B^i\sigma] = 2K\partial_i[x^i p_0^{-1}] = 4K[p_0^{-1}].$$

D'autre part:

$$\partial_{ij}[g^{ij}\sigma] = \partial_{ij}[g^{ij}p_0^{-1}].$$

Mais (1.9) entraîne

$$\partial_i[g^{ij}] = \partial_i\left[\eta^{ij} - \frac{K}{3}x^i x^j\right] = - \frac{K}{3}[\delta^i_i x^j + x^i\delta^j_i] = - \frac{4K}{3}x^j ;$$

ainsi:

$$\partial_j[g^{ij}p_0^{-1}] = - \frac{4K}{3}p'^i - \left[p_0^{-2}\left(\eta^{ij} - \frac{K}{3}x^i x^j\right)(\eta_{0j} - \eta_{00}p'_j)\right].$$

Or:

$$[\eta^{ij}(\eta_{0j} - \eta_{00}p'_j)] = [\eta^{i\rho}\eta_{0\rho} - \eta_{00}p'^i] = - \eta_{00}[p'^i],$$
$$[x^i x^j(\eta_{0j} - \eta_{00}p'_j)] = [x^i p_0]$$

Par conséquent

$$\partial_j[g^{ij}p_0^{-1}] = [- Kp'^i + \eta_{00}p'^i p_0^{-2}], \tag{2.2}$$

et:

$$\partial_{ij}[g^{ij}p_0^{-1}] = - K\partial_i[p'^i] + \eta_{00}\partial_i[p^i p_0^{-3}] = - 2K[p_0^{-1}].$$

D'où le noyau de diffusion $[{}^{(0)}L]$:

$$[{}^{(0)}L] = \partial_{ij}[g^{ij}\sigma] - \partial_i[B^i\sigma] = 2K[p_0^{-1}].$$

THÉORÈME. — Sur un espace à courbure constante, la paramétrix et le noyau de diffusion, de support $\Gamma^-_{x'}$, associés au laplacien scalaire s'écrivent, pour un système de coordonnées normales d'origine x':

$$[{}^{(0)}\sigma] = [p_0^{-1}] \quad , \quad [{}^{(0)}L] = 2K[p_0^{-1}]. \tag{2.3}$$

3. CAS TENSORIEL

a) Le théorème 1 du § II, 5 donne immédiatement la paramétrix:

$$[{}^{(p)}\sigma^{\underline{\alpha}_1 \dots \underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_1 \dots \underline{\rho}'_p}] = [p_0^{-1}]\delta^{\underline{\alpha}_1}_{\underline{\rho}'_1} \dots \delta^{\underline{\alpha}_p}_{\underline{\rho}'_p}. \tag{3.1}$$

En repère naturel, il faut remplacer $\delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}$ par $[t^{\alpha}_{\rho'}]$ donné par (1.12).

b) Pour les noyaux de diffusion, nous employons encore le repère mobile adapté aux coordonnées normales.

(II.7.2) permet de calculer les noyaux tensoriels d'ordre supérieur à 2 à partir de ${}^{(0)}\mathrm{L}$, ${}^{(1)}\mathrm{L}$, ${}^{(2)}\mathrm{L}$ et $t^{\alpha}_{\rho'}$; il suffit donc de donner les résultats pour les laplaciens vectoriels et 2-tensoriels :

$$\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\mathrm{A}_{\alpha} \quad , \quad \nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\mathrm{T}_{\alpha\beta}.$$

LEMME 1. — Sur le conoïde, (II.4.9_b) s'explicite par :

$$[\mathrm{C}^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}] = -\frac{\mathrm{K}^2}{2}p^{\underline{\beta}}p_{\underline{\alpha}}.$$

Preuve. — D'après (1.15) :

$$[\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\mathrm{C}_{\underline{\lambda}}{}^{\underline{\rho}}{}_{\underline{\mu}}\mathrm{C}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}}] = \frac{3\mathrm{K}}{2}[x^{\underline{\rho}}\mathrm{C}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}}] = 0.$$

D'autre part :

$$[\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\mathrm{C}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\rho}}{}_{\underline{\lambda}}\mathrm{C}_{\underline{\rho}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\mu}}] = -\frac{\mathrm{K}^2}{2}p^{\underline{\beta}}p_{\underline{\alpha}}.$$

Enfin, avec (1.16) :

$$[-\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\partial_{\underline{\lambda}}\mathrm{C}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\mu}}] = \frac{\mathrm{K}}{2}\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}(\eta_{\underline{\alpha}\underline{\lambda}}\delta^{\underline{\beta}}_{\underline{\mu}} - \eta_{\underline{\alpha}\underline{\mu}}\delta^{\underline{\beta}}_{\underline{\lambda}}) = 0.$$

LEMME 2.

$$\partial_i[b^{\underline{\alpha},i}_{\underline{\rho}}p_0^{-1}] = 0.$$

Preuve. — D'après la définition (II.4.9_a), (1.15) et la valeur de $[A^i_{\underline{\tau}}]$ résultant de (1.12) :

$$[b^{\underline{\alpha},i}_{\underline{\rho}}] = [-2\eta^{\underline{\tau}\underline{\nu}}\mathrm{A}^i_{\underline{\tau}}\mathrm{C}_{\underline{\rho}}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\nu}}] = \mathrm{K}[x_{\underline{\rho}}\eta^{\underline{\alpha}i} - x^{\underline{\alpha}}\delta^i_{\underline{\rho}}].$$

Par différentiation :

$$\begin{aligned}\partial_i[b^{\underline{\alpha},i}_{\underline{\rho}}p_0^{-1}] &= \mathrm{K}[p_0^{-1}][(\eta_{i\underline{\rho}} - \eta_{0\underline{\rho}}p'_i)\eta^{\underline{\alpha}i} - (\delta^{\underline{\alpha}}_i - \delta^{\underline{\alpha}}_0 p'_i)\delta^i_{\underline{\rho}} \\ &\quad - (p'_{\underline{\rho}}\eta^{\underline{\alpha}i} - p'^{\underline{\alpha}}\delta^i_{\underline{\rho}})(\eta_{0i} - \eta_{00}p'_i)], \\ &= \mathrm{K}[p_0^{-1}][\eta_{\lambda\underline{\rho}}\eta^{\underline{\alpha}\lambda} - \eta_{0\underline{\rho}}\eta^{\underline{\alpha}0} - \eta_{0\underline{\rho}}(p'^{\underline{\alpha}} - \eta^{\underline{\alpha}0}) \\ &\quad - \delta^{\underline{\alpha}}_{\lambda}\delta^{\lambda}_{\underline{\rho}} + \delta^{\underline{\alpha}}_0\delta^0_{\underline{\rho}} + \delta^{\underline{\alpha}}_0(p'_{\underline{\rho}} - \delta^0_{\underline{\rho}}) \\ &\quad - p'_{\underline{\rho}}(\eta^{\underline{\alpha}\lambda}\eta_{0\lambda} - \eta^{\underline{\alpha}0}\eta_{00} - \eta_{00}p'^{\underline{\alpha}} + \eta_{00}\eta^{\underline{\alpha}0}) \\ &\quad + p'^{\underline{\alpha}}(\delta^{\lambda}_{\underline{\rho}}\eta_{0\lambda} - \delta^0_{\underline{\rho}}\eta_{00} - \eta_{00}p'_{\underline{\rho}} + \eta_{00}\delta^0_{\underline{\rho}})] = 0.\end{aligned}$$

Noyau de diffusion vectoriel. — La paramétrix est donnée par (3.1), les coefficients de l'opérateur par (II.4.8) ; ici :

$$\begin{aligned}&\mathrm{B}^{\underline{\beta},\mu}_{\underline{\alpha}} = -\delta^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}g^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma} + b^{\underline{\beta},\mu}_{\underline{\alpha}}, \\ &\mathrm{C}^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}} = \mathrm{C}^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}.\end{aligned}$$

Il vient facilement :

$$[{}^{(1)}L^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}] = \delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}\{\partial_{ij}[g^{ij}p_0^{-1}] + \partial_i[g^{\lambda\mu}\Gamma_{\lambda}{}^{i}{}_{\mu}p_0^{-1}]\}$$
$$- \partial_i[b^{\underline{\alpha},i}_{\underline{\rho}'}p_0^{-1}] + [p_0^{-1}C^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}].$$

Compte tenu des lemmes 1 et 2 et des résultats obtenus dans le cas scalaire :

$$[{}^{(1)}L^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}] = [p_0^{-1}]\left[2K\delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'} - \frac{K^2}{2}p^{\underline{\alpha}}p_{\underline{\rho}'}\right].$$

Noyau de diffusion 2-tensoriel.

$$B^{\underline{\rho}\,\underline{\sigma},\mu}_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} = -\delta^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}\delta^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}g^{\tau\nu}\Gamma_{\tau}{}^{\mu}{}_{\nu} + b^{\underline{\rho},\mu}_{\underline{\alpha}}\delta^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}} + b^{\underline{\sigma},\mu}_{\underline{\beta}}\delta^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}},$$
$$C^{\underline{\rho}\,\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} = \delta^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}C^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}} + \delta^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}C^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}} + 2\eta^{\lambda\mu}C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\rho}}{}_{\underline{\lambda}}C_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\sigma}}{}_{\underline{\mu}}.$$

D'après (3.1) et le lemme 2 :

$$\partial_i[B^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta},i}_{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}}\,{}^{(2)}\sigma^{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}}_{\underline{\rho}'\underline{\sigma}'}] = -\delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}\delta^{\underline{\beta}}_{\underline{\sigma}'}\partial_i[g^{\lambda\mu}\Gamma_{\lambda}{}^{i}{}_{\mu}];$$

ainsi :

$$[{}^{(2)}L^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}_{\underline{\rho}'\underline{\sigma}'}] = \delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}\delta^{\underline{\beta}}_{\underline{\sigma}'}[{}^{(0)}L] + [C^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}_{\underline{\rho}'\underline{\sigma}'}].$$

On trouve, avec (1.15) et le lemme 1 :

$$[{}^{(2)}L^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}_{\underline{\rho}'\underline{\sigma}'}] = [p_0^{-1}][2K\delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}\delta^{\underline{\beta}}_{\underline{\sigma}'} - \frac{K^2}{2}(\delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\rho}'}p^{\underline{\beta}}p_{\underline{\sigma}'} + \delta^{\underline{\beta}}_{\underline{\sigma}'}p^{\underline{\alpha}}p_{\underline{\rho}'}$$
$$- p_{\underline{\rho}'}p_{\underline{\sigma}'}\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} - p^{\underline{\alpha}}p^{\underline{\beta}}\eta_{\underline{\rho}'\underline{\sigma}'} + \delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\sigma}'}p^{\underline{\beta}}p_{\underline{\rho}'} + \delta^{\underline{\beta}}_{\underline{\rho}'}p^{\underline{\alpha}}p_{\underline{\sigma}'})].$$

c) Opérateurs laplaciens de De Rham-Lichnerowicz. — Sur les vecteurs et les 2-tenseurs, ces opérateurs s'écrivent, compte tenu de la définition (1.2) du tenseur de courbure :

$$\Delta A_\alpha = \nabla^\rho\nabla_\rho A_\alpha + R_\alpha{}^\rho A_\rho,$$
$$\Delta T_{\alpha\beta} = \nabla^\rho\nabla_\rho T_{\alpha\beta} + R_\alpha{}^\rho T_{\rho\beta} + R_\beta{}^\rho T_{\alpha\rho} - 2R_\alpha{}^\rho{}_\beta{}^\sigma T_{\rho\sigma}.$$

La démonstration du théorème du § II, 4 n'utilisant que le caractère tensoriel de ΔA_α, $\Delta T_{\alpha\beta}$, les paramétrix et noyaux de diffusion correspondants se comportent comme des bi-vecteurs ou des bi-2-tenseurs covariants en x', contravariants en x.

D'autre part, l'addition aux opérateurs $\nabla^\rho\nabla_\rho$ de termes linéaires par rapport à l'inconnue ne fait que changer la valeur des coefficients $C^{\underline{S}}_{\underline{R}}$; ainsi les paramétrix des opérateurs ΔA_α et $\Delta T_{\alpha\beta}$ qui, d'après l'équation générale (I.1.10), ne dépendent pas des $C^{\underline{S}}_{\underline{R}}$, sont respectivement égales à ${}^{(1)}\sigma^{\alpha}_{\rho'}$, ${}^{(2)}\sigma^{\alpha\beta}_{\rho'\sigma'}$; pour les noyaux de diffusion, il suffit, d'après (I.1.8), d'ajouter aux expressions ${}^{(1)}L$, ${}^{(2)}L$ déjà obtenues les combinaisons linéaires convenables de $R_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\rho}}{}_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\sigma}}$ et $R_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\rho}}$.

Enfin, le passage du repère mobile adapté au repère naturel (et même à un repère quelconque) s'effectuera en remplaçant $\delta^{\underline{\alpha}}_{\rho'}$ $(= t^{\underline{\alpha}}_{\rho'})$ et $p^{\underline{\alpha}}$ par $t^{\alpha}_{\rho'}$ et p^{α}. Le résultat s'exprime par :

THÉORÈME. — Sur un espace à courbure constante rapporté à un système de coordonnées normales d'origine x', les paramétrix ${}^{(1)}\sigma$, ${}^{(2)}\sigma$ et les noyaux de diffusion ${}^{(1)}\mathrm{M}$, ${}^{(2)}\mathrm{M}$, de support $\Gamma^{-}_{x'}$, associés aux opérateurs $\Delta \mathrm{A}_{\alpha}$ et $\Delta \mathrm{T}_{\alpha\beta}$ s'écrivent :

$$(3.2) \qquad [{}^{(1)}\sigma^{\alpha}_{\rho'}] = [p_0^{-1} t^{\alpha}_{\rho'}],$$

$$(3.3) \qquad [{}^{(2)}\sigma^{\alpha\beta}_{\rho'\sigma'}] = [p_0^{-1} t^{\alpha}_{\rho'} t^{\beta}_{\sigma'}],$$

$$(3.4) \qquad [{}^{(1)}\mathrm{M}^{\alpha}_{\rho'}] = [p_0^{-1}]\left[- \mathrm{K} t^{\alpha}_{\rho'} - \frac{\mathrm{K}^2}{2} p^{\alpha} p_{\rho'} \right],$$

$$(3.5) \qquad [{}^{(2)}\mathrm{M}^{\alpha\beta}_{\rho'\sigma'}] = [p_0^{-1}][- 4\mathrm{K} t^{\alpha}_{\rho'} t^{\beta}_{\sigma'} - 2\mathrm{K} t^{\alpha}_{\sigma'} t^{\beta}_{\rho'} + 2\mathrm{K} g_{\rho'\sigma'} g^{\alpha\beta}$$
$$- \frac{\mathrm{K}^2}{2}(t^{\alpha}_{\rho'} p^{\beta} p_{\sigma'} + t^{\beta}_{\sigma'} p^{\alpha} p_{\rho'} - p_{\rho'} p_{\sigma'} g^{\alpha\beta} - p^{\alpha} p^{\beta} g_{\rho'\sigma'} + t^{\alpha}_{\sigma'} p^{\beta} p_{\rho'} + t^{\beta}_{\rho'} p^{\alpha} p_{\sigma'})].$$

Remarque. — Si on s'intéresse aux 2-formes, il est utile de calculer :

$$(3.6) \qquad [{}^{(2)}\mathrm{M}^{\alpha\beta}_{\rho'\sigma'} - {}^{(2)}\mathrm{M}^{\beta\alpha}_{\rho'\sigma'}] = - 2\mathrm{K}[p_0^{-1}][t^{\alpha}_{\rho'} t^{\beta}_{\sigma'} - t^{\alpha}_{\sigma'} t^{\beta}_{\rho'}].$$

4. CAS SPINORIEL

a) Si $\gamma^{\underline{\alpha}}$ désigne un système de matrices de Dirac, à la connexion tensorielle $\mathrm{C}_{\underline{\lambda}}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\mu}}$ est associée la connexion spinorielle [9]

$$(4.1) \qquad \sigma_b{}^a{}_{\underline{\rho}} = - \frac{1}{4} \mathrm{C}_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\lambda}}{}_{\underline{\rho}} (\gamma_{\underline{\lambda}} \gamma^{\underline{\mu}})^a_{.b} = - \frac{1}{4} \mathrm{C}_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\lambda}}{}_{\underline{\rho}} \gamma_{\underline{\lambda}.r}^{\;a} \gamma^{\underline{\mu} r}{}_{.b}$$

pour laquelle la dérivée covariante du 1-spineur ψ^a s'écrit :

$$\nabla_{\underline{\lambda}} \psi^a = \partial_{\underline{\lambda}} \psi^a + \sigma_b{}^a{}_{\underline{\lambda}} \psi^b.$$

L'opérateur hyperbolique

$$\nabla^{\lambda} \nabla_{\underline{\lambda}} \psi^a = g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu} \psi^a + \mathrm{B}^{a,\rho}_b \partial_\rho \psi^b + \mathrm{C}^a_b \psi^b$$

a pour coefficients :

$$(4.2) \qquad \mathrm{B}^{a,\rho}_b = - g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\mu} \delta^a_b + 2\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}} \sigma_b{}^a{}_{\underline{\lambda}} \mathrm{A}^{\rho}_{\underline{\mu}},$$

$$(4.3) \qquad \mathrm{C}^a_b = \eta^{\underline{\mu}\underline{\lambda}} \partial_{\underline{\mu}} \sigma_b{}^a{}_{\underline{\lambda}} - \eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}} \mathrm{C}_{\underline{\lambda}}{}^{\underline{\rho}}{}_{\underline{\mu}} \sigma_b{}^a{}_{\underline{\rho}} + \eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}} \sigma_c{}^a{}_{\underline{\lambda}} \sigma_b{}^c{}_{\underline{\mu}}.$$

Plaçons-nous pour l'instant dans un repère spinoriel au-dessus du repère mobile adapté. Le lemme 1 du § II, 4 ($C_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\rho}}p^{\underline{\rho}} = 0$) entraîne d'après (4.1):

$$\sigma_b{}^a{}_{\underline{\lambda}}p^{\underline{\lambda}} = 0.$$

On a donc, avec le lemme 2 du même paragraphe

$$B_b^{a,\rho}p'_\rho = (B^\rho p'_\rho)\delta_b^a + 2\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\sigma_b{}^a{}_{\underline{\lambda}}A_{\underline{\mu}}^\rho p'_\rho = (B^\rho p'_\rho)\delta_b^a;$$

d'où la paramétrix

$${}^{(\frac{1}{2})}\sigma_a^{r'} = {}^{(0)}\sigma\delta_a^{r'},$$

ce qui est bien en accord avec la théorie générale : $\delta_a^{r'}$ sont les composantes du bispineur de transport parallèle en repère spinoriel adapté.

Pour un espace à courbure constante :

$$[{}^{(\frac{1}{2})}\sigma_a^{r'}] = [p_0^{-1}]\delta_a^{r'}. \tag{4.4}$$

b) LEMME 1.

$$[C_b^a] = 0.$$

Preuve. — On a tout d'abord, d'après (4.1) et (1.15)

$$[\sigma_b{}^a{}_{\underline{\rho}}] = \frac{K}{8}\, x_{\underline{\mu}}(\gamma_{\underline{\rho}}\gamma^{\underline{\mu}} - \gamma^{\underline{\mu}}\gamma_{\underline{\rho}})^a{}_{.b};$$

puis, avec (1.16)

$$[\partial_{\underline{\mu}}\sigma_b{}^a{}_{\underline{\lambda}}\eta^{\underline{\mu}\underline{\lambda}}] = -\frac{1}{4}[\partial_{\underline{\mu}}C_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\lambda}}\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}](\gamma_{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\beta}})^a{}_{.b} = 0;$$

et :

$$[\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}C_{\underline{\lambda}}{}^{\underline{\rho}}{}_{\underline{\mu}}\sigma_b{}^a{}_{\underline{\rho}}] = \left[\frac{3K}{2}\, x^{\underline{\rho}}\sigma_b{}^a{}_{\underline{\rho}}\right] = 0.$$

Calculons enfin :

$$[\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\sigma_c{}^a{}_{\underline{\lambda}}\sigma_b{}^c{}_{\underline{\mu}}] = \frac{K^2}{64}x_{\underline{\rho}}x_{\underline{\sigma}}\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}(\gamma_{\underline{\lambda}}\gamma^{\underline{\rho}} - \gamma^{\underline{\rho}}\gamma_{\underline{\lambda}})(\gamma_{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\sigma}} - \gamma^{\underline{\sigma}}\gamma_{\underline{\mu}})^a{}_{.b}. \tag{4.5}$$

En utilisant les relations de commutation

$$\gamma^{\underline{\lambda}}\gamma^{\underline{\mu}} + \gamma^{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\lambda}} = -2\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}Id,$$

un des termes obtenus en développant le second membre de (4.5) prend la forme

$$\left[\frac{K^2}{64}x_{\underline{\rho}}x_{\underline{\sigma}}\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\gamma_{\underline{\lambda}}\gamma^{\underline{\rho}}\gamma_{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\sigma}}\right] = \left[-\frac{K^2}{64}\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\gamma_{\underline{\lambda}}(x_{\underline{\rho}}x_{\underline{\sigma}}\gamma^{\underline{\rho}}\gamma^{\underline{\sigma}})\gamma_{\underline{\mu}} - \frac{K^2}{32}x_{\underline{\rho}}x_{\underline{\sigma}}\gamma^{\underline{\sigma}}\gamma^{\underline{\rho}}\right],$$

ce qui s'annule d'après :

$$[x_{\underline{\rho}}x_{\underline{\sigma}}\gamma^{\underline{\rho}}\gamma^{\underline{\sigma}}] = \frac{1}{2}[x_{\underline{\rho}}x_{\underline{\sigma}}(\gamma^{\underline{\rho}}\gamma^{\underline{\sigma}} + \gamma^{\underline{\sigma}}\gamma^{\underline{\rho}})] = -[\eta^{\underline{\rho}\underline{\sigma}}x_{\underline{\rho}}x_{\underline{\sigma}}]Id = 0.$$

On montre de la même façon la nullité des trois autres termes du second membre de (4.5); ainsi:

$$[\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\sigma_c{}^a{}_{\underline{\lambda}}\sigma_b{}^c{}_{\underline{\mu}}] = 0.$$

LEMME 2.

$$\partial_i[2\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\sigma_b{}^a{}_{\underline{\lambda}}A^i_{\underline{\mu}}p_0^{-1}] = 0.$$

Preuve. — Les composantes des matrices de Dirac sont des constantes absolues; on a donc, d'après le lemme 2 du § 3:

$$\partial_i[2\eta^{\underline{\lambda}\underline{\mu}}\sigma_b{}^a{}_{\underline{\lambda}}A^i_{\underline{\mu}}p_0^{-1}] = \frac{1}{4}\partial_i[b^{\underline{\alpha},i}_{\underline{\rho}}p_0^{-1}(\gamma_{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\rho}})^a_{.b}] = 0.$$

Ces deux lemmes étant établis, la paramétrix (4.4) conduit au noyau de diffusion:

$$[{}^{(\frac{1}{2})}L_a^{r'}] = \delta_a^{r'}\{\partial_{ij}[g^{ij}p_0^{-1}] + \partial_i[g^{\lambda\mu}\Gamma^i_{\lambda\mu}p_0^{-1}]\} = 2K[p_0^{-1}]\delta_a^{r'}.$$

Mais, à l'opérateur laplacien sur les 1-spineurs contravariants

$$\Delta\psi^a = \nabla^{\underline{\rho}}\nabla_{\underline{\rho}}\psi^a + \frac{R}{4}\psi^a,$$

correspondent la paramétrix et le noyau de diffusion

$$[{}^{(\frac{1}{2})}\sigma_a^{r'}] \quad , \quad [{}^{(\frac{1}{2})}M_a^{r'}] = \left[{}^{(\frac{1}{2})}L_a^{r'} + \frac{1}{4}{}^{(0)}\sigma\delta_a^{r'}R\right];$$

nous pouvons énoncer, d'après $R = -12K$:

THÉORÈME. — Sur un espace à courbure constante rapporté à des coordonnées normales d'origine x', les paramétrix et noyau de diffusion relatifs à l'opérateur $\Delta\psi^a$ s'écrivent, en repère spinoriel quelconque

$$[{}^{(\frac{1}{2})}\sigma_a^{r'}] = [p_0^{-1}][\tau_a^{r'}] \quad , \quad [{}^{(\frac{1}{2})}M_a^{r'}] = -K[p_0^{-1}][\tau_a^{r'}], \tag{4.6}$$

où $\tau_a^{r'}$ désigne le bispineur de transport parallèle associé à $\widehat{x'x}$.

5. CONSÉQUENCES GÉOMÉTRIQUES

Les relations (2.8), (3.6), (4.6) montrent que les trois opérateurs:

1° sur les scalaires:

$$\nabla^\rho\nabla_\rho u + \frac{R}{6}u,$$

2° sur les 2-formes :

$$\Delta F_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}(R_\alpha{}^\rho F_{\rho\beta} - R_\beta{}^\rho F_{\rho\alpha}),$$

3° sur les 1-spineurs :

$$\Delta\psi^a - \frac{1}{12} R\psi^a,$$

ont un noyau de diffusion identiquement nul sur tout espace à courbure constante.

CHAPITRE IV

LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR UN ESPACE A COURBURE CONSTANTE

Considérons une 2-forme vérifiant les équations de Maxwell

$$(M_1) \qquad \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0,$$

$$(M_2) \qquad \nabla^\rho F_{\rho\alpha} = J_\alpha \ ;$$

elle vérifiera aussi le système hyperbolique du second ordre

$$(E) \qquad \Delta F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha J_\beta - \nabla_\beta J_\alpha,$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien de De Rham-Lichnerowicz introduit en (III, 3, *c*). En appliquant à (E) la théorie générale développée précédemment, nous obtenons dans ce chapitre l'équation de Kirchhoff nécessairement vérifiée par le champ électromagnétique ; de la même manière que dans le cas plat, elle donne la valeur du champ au point x' comme somme d'une intégrale triple étendue à un domaine V_0 de $\Gamma_{x'}^-$ d'une fonction de $\partial_\beta J_\alpha$, J_α et d'une intégrale double étendue à $\Sigma \cap \Gamma_{x'}^-$ d'une fonction des données de Cauchy $(F_{\alpha\beta})_\Sigma$, $(\partial_\lambda F_{\alpha\beta})_\Sigma$.

1. CHANGEMENT CONFORME DE MÉTRIQUE

a) Soit $g'_{\lambda\mu}$ une métrique conforme à la métrique initiale :

$$g'_{\lambda\mu} = \xi^{-1} g_{\lambda\mu}.$$

Tout champ électromagnétique solution de (M_1), (M_2) satisfait aussi, si on désigne par ∇' le nouvel opérateur de différentiation covariante,

$$\nabla'_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla'_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla'_\nu F_{\lambda\mu} = 0,$$
$$\nabla'^\rho F_{\rho\alpha} = \xi J_\alpha ;$$

et par conséquent :

$$\Delta' F_{\alpha\beta} = \nabla'_\alpha(\xi J_\beta) - \nabla'_\beta(\xi J_\alpha). \tag{1.1}$$

b) L'espace à courbure constante V_4, ayant un tenseur de Weyl identiquement nul, est localement conforme à un espace euclidien ; en se plaçant dans un système de coordonnées (y^ρ) cartésien pour la métrique euclidienne, on peut donc poser

$$\eta_{\lambda\mu} = \xi^{-1} g_{\lambda\mu}, \tag{1.2}$$

où $g_{\lambda\mu}$ sont les composantes de la métrique initiale en coordonnées (y^ρ). L'équation (1.1), qui prend ici la forme

$$\eta^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha(\xi J_\beta) - \partial_\beta(\xi J_\alpha),$$

montre que toute solution à support compact vers le futur des équations de Maxwell s'écrit localement sous forme de potentiels retardés

$$\begin{aligned} &-4\pi F_{\alpha\beta}(x') \\ &= \iiint_{V_0} (x^0)^{-1}[\partial_\alpha\xi J_\beta - \partial_\beta\xi J_\alpha + \xi(\partial_\alpha J_\beta - \partial_\beta J_\alpha)](x'+x)\, dx^1\, dx^2\, dx^3, \end{aligned} \tag{1.3}$$

avec :

$$x = x^0 e_0 + x^i e_i \quad , \quad x^0 < 0 \quad , \quad (x^0)^2 = \sum_i (x^i)^2.$$

Le changement conforme (1.2) laissant invariant le conoïde caractéristique de sommet x', le domaine d'intégration V_0 est aussi une portion du conoïde caractéristique associé à $g_{\lambda\mu}$.

Nous montrons dans la suite qu'il est possible de retrouver et de préciser (1.3) en partant de la formule de Kirchhoff (I. 4.2) et de l'expression des paramétrix et noyau de diffusion donnée au chapitre III ; nous calculons de plus les termes de surface à ajouter à (1.3) lorsque le support de $F_{\alpha\beta}$ est quelconque.

c) Nous reprenons à partir de maintenant le système de coordonnées normales habituel de V_4, soit (x^α). Il s'agit principalement de transformer l'intégrale due au noyau de diffusion en y faisant apparaitre le courant J_α.

Sur un espace à courbure constante et pour une 2-forme $F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ rapportée au repère mobile adapté, on a, d'après (III. 3.6) :

$$\iiint_{V_0} [F_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}{}^{(2)}M^{\underline{\rho}\,\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}]d^3x = \frac{1}{2}\iiint_{V_0} [F_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}({}^{(2)}M^{\underline{\rho}\,\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'} - {}^{(2)}M^{\underline{\sigma}\,\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'})]d^3x = -2K\iiint_{V_0} [p_0^{-1}][F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}]d^3x. \tag{1.4}$$

Dans toute la suite, nous supposerons numériquement :

$$\alpha = \underline{\alpha} = \underline{\alpha}' \quad , \quad \beta = \underline{\beta} = \underline{\beta}'.$$

Un indice $\underline{\alpha}$ correspond à un tenseur au point courant x en repère mobile adapté, un indice α correspond à un tenseur au point courant x en repère naturel, un indice $\underline{\alpha}'$ correspond à un tenseur au sommet x' (en x', repère naturel et repère adapté coïncident). Nous rappelons que $p_\alpha = p_{\underline{\alpha}}$.

2. TERME DE DIFFUSION

a) THÉORÈME. — Sur un espace à courbure constante, on a, pour toute 2-forme solution de (M_1), (M_2) :

$$2[p_0^{-1}][F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}] = -[p'_{\underline{\alpha}}J_{\underline{\beta}} - p'_{\underline{\beta}}J_{\underline{\alpha}}] + \partial_i[p'_\alpha F^i{}_\beta - p'_\beta F^i{}_\alpha + \delta^i_\alpha p'^\rho F_{\beta\rho} - \delta^i_\beta p'^\rho F_{\alpha\rho} + p'^i F_{\alpha\beta}]. \tag{2.1}$$

Preuve. — En passant au repère naturel, on a tout d'abord :

$$[F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}] = [t^\rho_{\alpha'} t^\sigma_{\beta'} F_{\rho\sigma}]. \tag{2.2}$$

Dans un calcul préliminaire, montrons que :

$$[t^\rho_{\alpha'}] = \left[\nabla^\rho p_\alpha - \frac{K}{2} p^\rho p_\alpha\right].$$

Par définition

$$[\nabla^\rho p_\alpha] = [g^{\rho\sigma} g_{\alpha\beta} \nabla_\sigma p^\beta] = [\delta^\rho_\alpha + g^{\rho\sigma}\Gamma_{\tau\alpha\sigma} p^\tau];$$

soit, avec (III. 1.9), (III. 1.11), (III. 1.12) :

$$[\nabla^\rho p_\alpha] = \left[\delta^\rho_\alpha + \frac{K}{3} p^\rho p_\alpha\right] = \left[t^\rho_{\alpha'} + \frac{K}{2} p^\rho p_\alpha\right] \qquad \text{c. q. f. d.}$$

En portant dans (2.2), il vient, d'après (III. 1.12):

$$[F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}] = \left[t^{\rho}_{\alpha'}\delta^{\sigma}_{\beta}F_{\rho\sigma} - \frac{K}{6} t^{\rho}_{\alpha'}p^{\sigma}p_{\beta}F_{\rho\sigma} \right],$$

(2.3) $$[F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}] = \left[\nabla^{\rho}p_{\alpha}F_{\rho\beta} - \frac{K}{2} p^{\rho}p_{\alpha}F_{\rho\beta} - \frac{K}{6} p^{\sigma}p_{\beta}F_{\alpha\sigma} \right].$$

Mais

$$\nabla^{\rho}p_{\alpha}F_{\rho\beta} = \nabla^{\rho}(p_{\alpha}F_{\rho\beta}) - p_{\alpha}\nabla^{\rho}F_{\rho\beta};$$

d'autre part, avec les symboles de Christoffel (III. 1.11):

$$\nabla^{\rho}(p_{\alpha}F_{\rho\beta}) = \nabla_{\rho}(p_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta}) = \partial_{\rho}(p_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta}) - \Gamma_{\alpha}{}^{\tau}{}_{\rho}p_{\tau}F^{\rho}{}_{\beta} - \Gamma_{\beta}{}^{\tau}{}_{\rho}p_{\alpha}F^{\rho}{}_{\tau} + \Gamma_{\tau}{}^{\rho}{}_{\rho}p_{\alpha}F^{\tau}{}_{\beta},$$

$$[\nabla^{\rho}(p_{\alpha}F_{\rho\beta})] = \left[\partial_{\rho}(p_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta}) + \frac{2K}{3} p_{\alpha}p^{\rho}F_{\rho\beta} \right].$$

D'où la nouvelle forme de l'équation (2.3)

$$[F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}] = \left[-p_{\alpha}\nabla^{\rho}F_{\rho\beta} + \partial_{\rho}(p_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta}) + \frac{K}{6} p_{\alpha}p^{\rho}F_{\rho\beta} + \frac{K}{6} p_{\beta}p^{\rho}F_{\rho\alpha} \right];$$

soit, par antisymétrisation et en tenant compte de (M_2):

(2.4) $$[2F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}] = [-p_{\alpha}J_{\beta} + p_{\beta}J_{\alpha} + \partial_{\rho}(p_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta} - p_{\beta}F^{\rho}{}_{\alpha})].$$

On a ensuite

$$[p_0^{-1}\partial_{\rho}(p_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta})] = [\partial_{\rho}(p'_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta}) + p'_{\alpha}p_0^{-1}\eta_{0\rho}F^{\rho}{}_{\beta}];$$

mais, en faisant apparaître une divergence sur le conoïde

$$[\partial_{\rho}(p'_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta})] = \partial_i[p'_{\alpha}F^{i}{}_{\beta}] + [p'_{\rho}\partial_0(p'_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta})];$$

soit en reportant:

$$[p_0^{-1}\partial_{\rho}(p_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta})] = \partial_i[p'_{\alpha}F^{i}{}_{\beta}] + [p'_{\alpha}p_0^{-1}\eta_{0\rho}F^{\rho}{}_{\beta} + p'_{\alpha}p'_{\rho}\partial_0F^{\rho}{}_{\beta} + p'^{\rho}F_{\rho\beta}\partial_0p'_{\alpha}].$$

Examinons le dernier terme du second membre; compte tenu de

$$\eta_{0\alpha} = -p_0^2\partial_{\alpha}(p_0^{-1}),$$

il s'écrit:

$$\begin{aligned}
[p'^{\rho}F_{\rho\beta}\partial_0p'_{\alpha}] &= [(\eta_{0\alpha} - \eta_{00}p'_{\alpha})p_0^{-1}p'^{\rho}F_{\rho\beta}] \\
&= [-\partial_{\alpha}(p'^{\rho}F_{\rho\beta}) + p_0^{-1}\partial_{\alpha}(p^{\rho}F_{\rho\beta}) + p'_{\alpha}\partial_0(p'^{\rho}F_{\rho\beta}) - p_0^{-1}p'_{\alpha}\partial_0(p_{\rho}F^{\rho}{}_{\beta})] \\
&= [(\partial_{\alpha} - p'_{\alpha}\partial_0)(p'^{\rho}F_{\beta\rho}) + p_0^{-1}F_{\alpha\beta} + p'^{\rho}\partial_{\alpha}F_{\rho\beta} - p_0^{-1}p'_{\alpha}\eta_{0\rho}F^{\rho}{}_{\beta} - p'_{\alpha}p'_{\rho}\partial_0F^{\rho}{}_{\beta}].
\end{aligned}$$

On obtient donc, après simplification,

$$[p_0^{-1}\partial_{\rho}(p_{\alpha}F^{\rho}{}_{\beta})] = \partial_i[p'_{\alpha}F^{i}{}_{\beta}] + [(\partial_{\alpha} - p'_{\alpha}\partial_0)(p'^{\rho}F_{\beta\rho}) + p_0^{-1}F_{\alpha\beta} + p'^{\rho}\partial_{\alpha}F_{\rho\beta}]$$

et :

(2.5) $[p_0^{-1}\partial_\rho(p_\alpha F^\rho{}_\beta - p_\beta F^\rho{}_\alpha)] = \partial_i[p'_\alpha F^i{}_\beta - p'_\beta F^i{}_\alpha]$
$+[(\partial_\alpha - p'_\alpha\partial_0)(p'^\rho F_{\beta\rho}) - (\partial_\beta - p'_\beta\partial_0)(p'^\rho F_{\alpha\rho}) + 2p_0^{-1}F_{\alpha\beta} + p'^\rho(\partial_\alpha F_{\rho\beta} - \partial_\beta F_{\rho\alpha})]$.

Continuons à transformer (2.5) ; d'après (M_1) écrite en repère naturel

$$[2p_0^{-1}F_{\alpha\beta} + p'^\rho(\partial_\alpha F_{\rho\beta} - \partial_\beta F_{\rho\alpha})] = [2p_0^{-1}F_{\alpha\beta} + p'^\rho\partial_\rho F_{\alpha\beta}] = \partial_i[p'^i F_{\alpha\beta}] ;$$

puis

$$[(\partial_\alpha - p'_\alpha\partial_0)(p'^\rho F_{\beta\rho})] = \partial_i[\delta^i_\alpha p'^\rho F_{\beta\rho}] ;$$

ainsi :

(2.6) $[p_0^{-1}\partial_\rho(p_\alpha F^\rho{}_\beta - p_\beta F^\rho{}_\alpha)] = \partial_i[p'_\alpha F^i{}_\beta - p'_\beta F^i{}_\alpha$
$+ \delta^i_\alpha p'^\rho F_{\beta\rho} - \delta^i_\beta p'^\rho F_{\alpha\rho} + p'^i F_{\alpha\beta}]$.

La formule (2.1) du théorème résulte immédiatement de (2.4) et (2.6) si on remarque que, d'après (III. 1.12):

$$-[p'_\alpha J_\beta - p'_\beta J_\alpha] = -[p'_{\underline{\alpha}} J_{\underline{\beta}} - p'_{\underline{\beta}} J_{\underline{\alpha}}].$$

b) Pour une 2-forme rapportée au repère mobile adapté, (I. 4.2) s'écrit :

(2.7) $$4\pi F_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}(x') = \iiint_{V_0} [F_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}{}^{(2)}M^{\underline{\rho}\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'} - {}^{(2)}\sigma^{\underline{\rho}\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}(\nabla_{\underline{\rho}}J_{\underline{\sigma}} - \nabla_{\underline{\sigma}}J_{\underline{\rho}})]d^3x$$
$$- \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \lambda^2 \sin\theta (p'^\rho q_\rho)^{-1}(q_i - q_0 p'_i)E^i_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}d\theta d\varphi.$$

Sur un espace à courbure constante, on a, d'après (1.4) et (2.1)

$$\iiint_{V_0} [F_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}{}^{(2)}M^{\underline{\rho}\underline{\sigma}}_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}]d^3x = \iiint_{V_0} K(p'_{\underline{\alpha}}J_{\underline{\beta}} - p'_{\underline{\beta}}J_{\underline{\alpha}})d^3x + \iiint_{V_0} \partial_i[G^i_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}]d^3x$$

avec :

(2.8) $$[G^i_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}] = -K[p'_\alpha F^i{}_\beta - p'_\beta F^i{}_\alpha + \delta^i_\alpha p'^\rho F_{\beta\rho} - \delta^i_\beta p'^\rho F_{\alpha\rho} + p'^i F_{\alpha\beta}].$$

De la même façon qu'en (I, 3, *b*), l'intégrale de volume de la divergence se transforme en intégrale de surface; on obtient, compte tenu de $(\lambda^2 G^i_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'})_{x'} = 0$:

$$\iiint_{V_0} \partial_i[G^i_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}]d^3x = -\iint_S \lambda^2 \sin\theta (p'^\rho q_\rho)^{-1}(q_i - q_0 p'_i)G^i_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}d\theta d\varphi.$$

La formule de Kirchhoff (2.7) s'écrit :

(2.9) $$4\pi F_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}(x') = \iiint_{V_0} [p_0^{-1}][K(p_{\underline{\alpha}}J_{\underline{\beta}} - p_{\underline{\beta}}J_{\underline{\alpha}}) - (\nabla_{\underline{\alpha}}J_{\underline{\beta}} - \nabla_{\underline{\beta}}J_{\underline{\alpha}})]d^3x$$
$$- \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \lambda^2 \sin\theta (p'^\rho q_\rho)^{-1}(q_i - q_0 p'_i)(E^i_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'} + G^i_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'})d\theta d\varphi.$$

Dans le cas où $F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ est à support compact vers le futur, un choix convenable de V_0 permet d'annuler l'intégrale de surface ; (2.9) se réduit bien à une équation de la forme (1.3).

3. INTÉGRALE DE SURFACE

D'après la définition (I. 1.7) et pour la paramétrix (III. 3.1), on a, en repère mobile adapté :

$$(3.1)\quad [E^i_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}] = [p_0^{-1}][g^{ij}]\partial_j[F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}] - [F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}]\partial_j[g^{ij}p_0^{-1}] + 2[p_0^{-1}p'^i\partial_0 F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}] + [p_0^{-1}B^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}{}^{,i}F_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}].$$

En premier lieu :

$$(3.2)\quad \{[g^{ij}]\partial_j[F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}] + [2p'^i\partial_0 F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}]\}(q_i - q_0 p'_i) = [(q^\lambda - q_0 p^\lambda + \delta^\lambda_0 p'^\rho q_\rho)\partial_\lambda F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}].$$

En second lieu, on a déjà vu en (III. 2.2) que

$$\partial_j[g^{ij}p_0^{-1}] = [-Kp'^i + \eta_{00}p'^i p_0^{-2}] ;$$

d'où :

$$(3.3)\quad \partial_j[g^{ij}p_0^{-1}][q_i - q_0 p'_i] = [p'^\rho q_\rho(-K + \eta_{00}p_0^{-2})].$$

En troisième lieu, l'équation générale

$$B^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}{}^{,i} = -\delta^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}\delta^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}g^{\lambda\mu}\Gamma_\lambda{}^i{}_\mu + b^{\underline{\rho},i}_{\underline{\alpha}}\delta^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}} + b^{\underline{\sigma},i}_{\underline{\beta}}\delta^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}$$

s'écrit, sur un espace à courbure constante :

$$[B^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}{}^{,i}] = [-2K\delta^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}\delta^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}p^i + \delta^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}K(p_{\underline{\alpha}}\eta^{\underline{\rho}i} - p^{\underline{\rho}}\delta^i_{\underline{\alpha}}) + \delta^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}K(p_{\underline{\beta}}\eta^{\underline{\sigma}i} - p^{\underline{\sigma}}\delta^i_{\underline{\beta}})]$$

Mais, d'après la loi de transformation du repère mobile au repère naturel

$$[K\delta^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}p_{\underline{\alpha}}\eta^{\underline{\rho}i}F_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}] = \left[Kp_\alpha\left(F^i{}_\beta + \frac{K}{6}p^i p_\rho F^\rho{}_\beta - \frac{K}{6}p_\beta p^\rho F^i{}_\rho\right)\right] ;$$

puis, de la même façon

$$[-K\delta^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}p^{\underline{\rho}}\delta^i_{\underline{\alpha}}F_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}] = [-K\delta^i_\alpha p^\rho F_{\rho\beta}] ;$$

ainsi :

$$[p_0^{-1}B^{\underline{\rho}}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\sigma}}_{\underline{\beta}}{}^{,i}F_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}] = [-2Kp'^i F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} + K(p'_\alpha F^i{}_\beta - p'_\beta F^i{}_\alpha + \delta^i_\alpha p'^\rho F_{\beta\rho} - \delta^i_\beta p'^\rho F_{\alpha\rho}) + \frac{K^2}{6}p'^i(p_\alpha p_\rho F^\rho{}_\beta + p_\beta p_\rho F_\alpha{}^\rho)] ;$$

d'où il résulte, avec (2.8) :

(3.4) $$[G^{i}_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'} + p_0^{-1} B^{\underline{\rho}\underline{\sigma},i}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} F_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}] = \left[-2Kp'^{i}F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} - Kp'^{i}\left(F_{\alpha\beta} - \frac{K}{6} p_\alpha p^\rho F_{\rho\beta} - \frac{K}{6} p_\beta p^\rho F_{\alpha\rho} \right) \right] = [-3Kp'^{i}F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}].$$

(3.1), (3.2), (3.3), (3.4) entraînent enfin :

$$[(E^{i}_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'} + G^{i}_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'})(q_i - q_0 p'_i)] = [p_0^{-1}(q^\lambda - q_0 p^\lambda + \delta^\lambda_0 p'^\rho q_\rho)\partial_\lambda F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} - p'^\rho q_\rho (2K + \eta_{00} p_0^{-2}) F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}].$$

THÉORÈME. — Sur un espace à courbure constante et dans le domaine de régularité du conoïde caractéristique de sommet x', toute solution des équations de Maxwell s'exprime en fonction du vecteur courant J_α et des données de Cauchy $(F_{\alpha\beta})_\Sigma$, $(\partial_\lambda F_{\alpha\beta})_\Sigma$ par

$$4\pi F_{\underline{\alpha}'\underline{\beta}'}(x') = \iiint_{V_0} [p_0^{-1}][K(p_{\underline{\alpha}} J_{\underline{\beta}} - p_{\underline{\beta}} J_{\underline{\alpha}}) - (\nabla_{\underline{\alpha}} J_{\underline{\beta}} - \nabla_{\underline{\beta}} J_{\underline{\alpha}})] d^3x - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta [p_0 (p'^\rho q_\rho)^{-1} (q^\lambda - q_0 p^\lambda + \delta^\lambda_0 p'^\rho q_\rho) \partial_\lambda F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} - (\eta_{00} + 2Kp_0^2) F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}]_S \, d\theta d\varphi,$$

en désignant par $F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ les composantes du champ dans le repère mobile adapté aux coordonnées normales (x^α) d'origine x', par p^λ le vecteur tangent aux bicaractéristiques $(p^\alpha = x^\alpha)$ et par q^λ le vecteur normal à l'hypersurface initiale Σ.

REMERCIEMENTS

Je prie M. A. Lichnerowicz de trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance ; c'est grâce à ses conseils et encouragements toujours précieux que j'ai pu mener ce travail à bien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[2] M. CHEVALIER, Sur le noyau de diffusion de l'opérateur laplacien. *C. R. Acad. Sci.*, t. **264**, série A, 1967, p. 380.

[3] M. CHEVALIER, Sur les noyaux de diffusion tensoriels. *C. R. Acad. Sci.*, t. **266**, série A, 1968, p. 33.

[4] Y. CHOQUET-BRUHAT, Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Math.*, t. **88**, 1952, p. 141.

[5] Y. CHOQUET-BRUHAT, Sur la théorie des propagateurs. *Annali di Matématica pura ed appl.*, t. **64**, 1964, p. 191.
[6] J. COLLEAU, Étude des propagateurs tensoriels et spinoriels. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **3**, 1965, p. 195.
[7] E. COMBET, Solutions élémentaires des dalembertiens généralisés. *Mémorial des Sciences Mathématiques*, Fasc. **160**, 1965.
[8] A. LICHNEROWICZ, Propagateurs et commutateurs en relativité générale. *Publ. Math. I. H. E. S.*, n° 10, 1961.
[9] A. LICHNEROWICZ, Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale. *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **92**, 1964, p. 11.
[10] S. L. SOBOLEV, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. *Rec. Math. Moscou*, N. S. 1, 1936, p. 39.

TABLE DES MATIÈRES

Manuscrit reçu le 4 juillet 1969.

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1710*a*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5981. 2-1970.