ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

I. MORET-BAILLY

Structure du champ gravitationnel « non-radiatif » dans le formalisme de Newman-Penrose en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, n° 4 (1969), p. 415-438
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_4_415_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XI, n° 4, 1969, p. 415-438.

Section A :
Physique théorique.

Structure du champ gravitationnel « non-radiatif » dans le formalisme de Newman-Penrose en relativité générale

par

I. MORET-BAILLY
(Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.
Institut Henri Poincaré, Paris).

RÉSUMÉ. — Dans ce travail nous étudions la structure du champ gravitationnel non-radiatif dans le formalisme de Newman-Penrose. Les fonctions du champ étant supposées développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$ nous démontrons que les coefficients de ces puissances sont des polynômes de la variable temps retardée.

Des résultats analogues ont déjà été obtenus par Papapetrou pour le champ électromagnétique non radiatif en relativité restreinte et par Papapetrou et l'auteur pour le champ gravitationnel non radiatif considéré par Bondi et Sachs.

SUMMARY. — The structure of a non-radiative gravitational field is investigated using the Newman-Penrose formalism. We show that the field variables, supposed to possess an expansion in powers of $\frac{1}{r}$, have as coefficient of $\frac{1}{r^n}$ a polynomial in the retarded time variable.

Similar results were already obtained by Papapetrou in the case of the non-radiative electromagnetic field in Special Relativity, and by Papapetrou and the present author in the case of the non-radiative gravitational field considered by Bondi and Sachs.

I. INTRODUCTION

Dans deux travaux précédents [*1*] et [*2*] nous avons étudié la structure du champ gravitationnel « retardé », solution des équations du vide et non radiatif sur un espace-temps asymptotiquement plat. Cette étude a été faite d'abord dans le cas du champ à symétrie axiale étudié par Bondi [*3*], ensuite dans le cas plus général du champ asymétrique traité par Sachs [*4*] et Newman-Penrose [*5*], Newman-Unti [*6*]. Pour ce dernier cas nous avions utilisé la forme des équations du champ donnée par Sachs.

Dans le présent travail nous reprenons l'étude de ce cas, toujours pour des champs dont les composantes sont développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$, mais cette fois dans le formalisme de Newman-Penrose. Les résultats sont identiques à ceux déjà obtenus dans [*2*]. Ils auraient d'ailleurs pu en être déduits. Il nous a semblé préférable de les établir directement parce que cette forme des équations du champ permet, d'une part, d'en donner une démonstration plus simple et d'autre part de les étendre à d'autres grandeurs caractérisant le champ.

Énumérons brièvement les hypothèses faites dans ce travail. Le champ gravitationnel est une solution « retardée » sur un espace-temps asymptotiquement plat des équations du vide étudiée dans [*6*] par Newman-Unti. Les coordonnées radiatives $x^0 = u$, $x^1 = r$ sont utilisées, u est le temps retardé, r est un paramètre affine des bicaractéristiques. Cette solution est de plus supposée développable en série de puissances de $\frac{1}{r}$ et non radiative dans le domaine (Ω) défini par $r > {}_1r > 0$. Rappelons que, par définition, une telle solution est non radiative si en tout point de ce domaine les composantes du tenseur de courbure par rapport à un champ de repères quasi-orthonormés ont un développement ne contenant pas de terme en $\frac{1}{r}$. Avec la notation utilisée dans [*5*] une solution est non radiative si et seulement si :

$$\psi_4^0 = 0. \tag{I-1}$$

Dans le chapitre II, nous rappelons le formalisme utilisé par Newman-Penrose dans [*5*] et précisions les hypothèses faites. Dans le chapitre III nous reprenons l'étude des équations du vide pour l'obtention des solutions satisfaisant les hypothèses précédentes sans que (I-1) soit nécessairement vérifié. Dans le chapitre IV nous étudions la structure de ces solutions pour un champ non radiatif. L'hypothèse (I-1) étant satisfaite, nous démontrons que les coefficients des puissances de $\frac{1}{r}$ des fonctions du champ sont des polynômes de la variable u.

II. FORMALISME UTILISÉ PAR NEWMAN-PENROSE

Dans ce chapitre nous rappelons le formalisme utilisé dans [5] en précisant les hypothèses que nous faisons.

1) Définition d'un champ de repères quasi-orthonormés ($\mathscr{R}$).

Soit V_4 une variété riemannienne, de classe C^∞, munie d'une métrique de signature -2, rapportée à des coordonnées locales x^α. Le tenseur métrique est supposé de classe au moins C^1, C^3 par morceaux. Nous supposons l'existence globale d'une famille d'hypersurfaces caractéristiques à un paramètre $u(x^\alpha) = \text{cte}$ dans un ouvert (Ω) complémentaire d'un tube d'univers renfermant les sources. Le champ de vecteurs l_μ défini sur (Ω) par

$$l_\mu = \frac{\partial u}{\partial x^\mu}, \tag{II-1}$$

étant intégrable, satisfait :

$$\nabla_\mu l_\nu - \nabla_\nu l_\mu = 0 \tag{II-2}$$

ce qui entraîne

$$l^\mu \nabla_\mu l_\nu = 0. \tag{II-3}$$

La congruence des trajectoires de l_μ est donc géodésique ; étant isotrope, elle engendre les hypersurfaces $u = \text{cte}$. Ces trajectoires sont appelées rayons. Désignons par r un paramètre affine pour chacun des rayons. Il est supposé, en outre, que r peut tendre vers l'infini sur chaque rayon. Précisons les hypothèses faites sur la topologie de V_4. Désignons par E_3 le complémentaire d'une boule fermée ε_3 de R^3 muni de sa topologie usuelle. Nous supposons que V_4 possède un ouvert (Ω) qui est difféomorphe au produit $R \times E_3$, chaque hypersurface $u = {}_1u$ de (Ω) s'appliquant sur ${}_1u \times E_3$. Nous supposons en outre que les rayons de chaque hypersurface $u = {}_1u$ ont pour homologues la restriction à ${}_1u \times E_3$ des droites rayons de la boule ${}_1u \times \varepsilon_3$.

En tout point $x \in \Omega$ on considère une base de l'espace tangent T_x : l_μ, n_μ, a_μ, b_μ satisfaisant :

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = a_\mu l^\mu = b_\mu l^\mu = a_\mu n^\mu = b_\mu n^\mu = a_\mu b^\mu = 0 \tag{II-4}$$

$$l^\mu n_\mu = 1, \qquad a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = -1, \tag{II-5}$$

où l_μ est le vecteur défini par (II-1). A cette base on fait correspondre de façon biunivoque une autre base $(\mathscr{R})$ dont les vecteurs l_μ, n_μ, m_μ, $\overline{m}_\mu$ appartiennent à T_x^c, complexifié de T_x, m^μ et $\overline{m}^\mu$ étant définis par

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu - ib_\mu), \qquad \overline{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu + ib_\mu). \tag{II-6}$$

On étend à T_x^c le produit scalaire défini sur T_x. L'espace tangent $T_x \subset T_x^c$ admet pour base $(\mathscr{R})$ qui d'après (II-4, 5, 6) satisfait :

$$l^\mu n_\mu = -\, m^\mu \overline{m}_\mu = 1, \tag{II-7}$$

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = l^\mu m_\mu = n^\mu m_\mu = 0. \tag{II-8}$$

On donne à cette base $(\mathscr{R})$ le nom de repère quasi-orthonormé. Les composantes du tenseur métrique en coordonnées locales s'écrivent :

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \overline{m}_\nu - m_\nu \overline{m}_\mu. \tag{II-9}$$

2) **Les fonctions du champ.**

Dans [5] Newman et Penrose obtiennent des équations du champ du cas extérieur qui remplacent les équations d'Einstein du vide. Les fonctions inconnues qui y sont utilisées sont les coefficients de spin, les composantes par rapport à $(\mathscr{R})$ du tenseur de courbure et les composantes en coordonnées locales des vecteurs du repère $(\mathscr{R})$. Les coefficients de spin sont les 12 scalaires complexes suivants et leur conjugué, définis en fonction des coefficients de rotation de Ricci relatifs au repère $(\mathscr{R})$:

$$\text{(II-10)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \chi = m^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu & \sigma = m^\mu m^\nu \nabla_\nu l_\mu \\ \pi = -\, \overline{m}^\mu l^\nu \nabla_\nu n_\mu & \mu = -\, \overline{m}^\mu m^\nu \nabla_\nu n_\mu \\ \rho = m^\mu \overline{m}^\nu \nabla_\nu l_\mu & \nu = -\, \overline{m}^\mu n^\mu \nabla_\nu n_\mu \\ \lambda = -\, \overline{m}^\mu \overline{m}^\nu \nabla_\nu n_\mu & \tau = m^\mu n^\nu \nabla_\nu l_\mu \\ \multicolumn{2}{c}{\alpha = \frac{1}{2}(n^\mu \overline{m}^\nu \nabla_\nu l_\mu - \overline{m}^\mu \overline{m}^\nu \nabla_\nu m_\mu)} \\ \multicolumn{2}{c}{\beta = \frac{1}{2}(n^\mu m^\nu \nabla_\nu l_\mu - \overline{m}^\mu m^\nu \nabla_\nu m_\mu)} \\ \multicolumn{2}{c}{\gamma = \frac{1}{2}(n^\mu n^\nu \nabla_\nu l_\mu - \overline{m}^\mu n^\nu \nabla_\nu m_\mu)} \\ \multicolumn{2}{c}{\varepsilon = \frac{1}{2}(n^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu - \overline{m}^\mu l^\nu \nabla_\nu m_\mu).} \end{array} \right.$$

Les 10 composantes indépendantes du tenseur de Weyl par rapport à $(\mathscr{R})$ sont les 5 scalaires complexes ψ_A ($A = 0, 1, 2, 3, 4$) et leur conjugué défini à partir des composantes en coordonnées locales $C_{\mu\nu\rho\sigma}$. Dans tout ce travail, ce tenseur s'identifie au tenseur de courbure, les équations du vide étant satisfaites.

$$\text{(II-11)} \quad \begin{aligned} \psi_0 &= - R_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu l^\rho m^\sigma & \psi_3 &\doteq R_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu n^\rho \overline{m}^\sigma \\ \psi_1 &= - R_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu l^\rho m^\sigma & \psi_4 &= - R_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\sigma \\ \psi_2 &= - \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}(l^\mu n^\nu l^\rho n^\sigma + l^\mu n^\nu m^\rho \overline{m}^\sigma). \end{aligned}$$

Les autres fonctions inconnues qui entrent dans les équations du champ sont les composantes, en coordonnées locales, des vecteurs du repère $(\mathscr{R})$ qui vérifient (II-1, 7, 8). Le nombre de ces inconnues est réduit par le choix de coordonnées locales adaptées à la congruence l_μ. Le scalaire u est la coordonnée x^0, on a alors :

$$\text{(II-12)} \qquad l_\mu = \delta^0_\mu.$$

Les rayons sont les courbes coordonnées de la variable x^1 qui est un paramètre affine r pour chacun des rayons : $x^1 \equiv r$,

$$\text{(II-13)} \qquad l^\mu = \frac{dx^\mu}{dr} = g^{\mu\nu}\frac{\partial u}{\partial x^\nu} = g^{\mu 0} = \delta^\mu_1.$$

Les deux autres coordonnées qui sont constantes pour les points d'un même rayon sont notées x^i. Dans ce travail tout indice latin désigne 2, 3. Ce choix de coordonnées locales adaptées x^α est systématiquement fait dans la suite. Les composantes n^μ, m^μ non encore déterminées, des vecteurs du repère $(\mathscr{R})$ s'écrivent, compte tenu de (II-7, 8) :

$$\text{(II-14)} \qquad n^\mu = \delta^\mu_0 + U\delta^\mu_1 + X^k\delta^\mu_k,$$

$$\text{(II-15)} \qquad m^\mu = \omega\delta^\mu_1 + \xi^k\delta^\mu_k,$$

où les fonctions réelles U et X^k et complexes ω et ξ^k sont des fonctions des coordonnées. Ce sont ces fonctions inconnues déterminant le repère $(\mathscr{R})$ qui entrent dans les équations du champ. Elles déterminent $g^{\mu\nu}$ en tenant compte de (II-9, 14, 15)

$$\text{(II-16)} \qquad \begin{aligned} g^{11} &= 2(U - \omega\overline{\omega}) \\ g^{1i} &= X^i - (\xi^i\overline{\omega} + \overline{\xi}^i\omega) \\ g^{kl} &= - (\xi^k\overline{\xi}^l + \overline{\xi}^k\xi^l). \end{aligned}$$

Le choix du champ de repères $(\mathscr{R})$ donne des relations entre les coefficients de spin. La relation (II-2) entraîne :

$$\text{(II-17)} \qquad \overline{\alpha} + \beta = \tau$$

$$\text{(II-18)} \qquad \rho = \overline{\rho}.$$

Rappelons que les parties réelle et imaginaire de ρ sont respectivement les scalaires dilatation et rotation attachées à la congruence. La relation (II-18) exprime que la rotation est nulle, propriété qui, on le sait, caractérise les congruences géodésiques isotropes intégrables. Rappelons aussi que le module de σ est la distorsion.

De plus, on impose aux repères ($\mathscr{R}$), définis aux points d'un même rayon, de se déduire les uns des autres par transport parallèle le long de ce rayon, on a donc :

(II-19) $$l^\mu \nabla_\mu n_\nu = l^\mu \nabla_\mu m_\nu = l^\mu \nabla_\mu \overline{m}_\gamma = 0,$$

et (II-3, 19) entraînent alors :

(II-20) $$\chi = \varepsilon = \pi = 0.$$

3) Les équations (1) du champ du cas extérieur.

Écrivons les équations du champ (cas extérieur) de Newman-Penrose dans le système de coordonnées locales adaptées que nous avons définies, les hypothèses faites jusqu'ici étant satisfaites. Nous les classons en quatre groupes d'équations : le premier et le deuxième groupe des équations radiales, les équations non radiales et le dernier groupe.

1er *groupe des équations radiales.* — Dans ces équations n'interviennent que l'opérateur $D \equiv \dfrac{\partial}{\partial r}$.

(II-21)
$$\begin{aligned}
a)&\ D\xi^i = \rho\xi^i + \sigma\overline{\xi}^i \\
b)&\ D\omega = \rho\omega + \sigma\overline{\omega} - (\overline{\alpha} + \beta) \\
c)&\ DX^i = (\overline{\alpha} + \beta)\overline{\xi}^i + (\alpha + \overline{\beta})\xi^i \\
d)&\ DU = (\overline{\alpha} + \beta)\overline{\omega} + (\alpha + \overline{\beta})\omega - (\gamma + \overline{\gamma}) \\
e)&\ D\rho = \rho^2 + \sigma\overline{\sigma} \\
f)&\ D\sigma = 2\rho\sigma + \psi_0 \\
g)&\ D\tau = \tau\rho + \overline{\tau}\sigma + \psi_1 \\
h)&\ D\alpha = \alpha\rho + \beta\overline{\sigma} \\
i)&\ D\beta = \beta\rho + \alpha\sigma + \psi_1 \\
j)&\ D\gamma = \tau\alpha + \overline{\tau}\beta + \psi_2 \\
k)&\ D\lambda = \lambda\rho + \mu\overline{\sigma} \\
l)&\ D\mu = \mu\rho + \lambda\sigma + \psi_2 \\
m)&\ D\nu = \tau\lambda + \overline{\tau}\mu + \psi_3.
\end{aligned}$$

(1) Dans [6] ces équations sont notées (9-$a \to q$), (10-$a \to m$) et (11-$a \to d$).

2ᵉ groupe des équations radiales. — Dans ces équations interviennent les opérateurs D et $\delta \equiv \omega \frac{\partial}{\partial r} + \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

$$\text{(II-22)} \quad D\psi_{A''} + (A'' - 5)\rho\psi_{A''} = \bar{\delta}\psi_{A''-1} - 2(3 - A'')\alpha\psi_{A''-1} + (1 - A'')\lambda\psi_{A''-2},$$

où $A'' = 1, 2, 3, 4$.

Ces quatre équations sont linéaires et homogènes par rapport aux ψ_A.

Les équations non radiales. — Elles font intervenir les opérateurs δ et $\Delta \equiv U\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial u} + X^k\frac{\partial}{\partial x^k}$.

$$\text{(II-23)} \quad \begin{array}{ll}
a) & \delta X^i - \Delta\xi^i = (\mu + \bar{\gamma} - \gamma)\xi^i + \bar{\lambda}\bar{\xi}^i \\
b) & \delta\bar{\xi}^i - \bar{\delta}\xi^i = (\bar{\beta} - \alpha)\xi^i + (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\xi}^i \\
c) & \delta\bar{\omega} - \bar{\delta}\omega = (\bar{\beta} - \alpha)\omega + (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\omega} + (\mu - \bar{\mu}) \\
d) & \delta U - \Delta\omega = (\mu + \bar{\gamma} - \gamma)\omega + \bar{\lambda}\bar{\omega} - \bar{\nu} \\
e) & \Delta\lambda - \bar{\delta}\nu = 2\alpha\nu + (\bar{\gamma} - 3\gamma - \mu - \bar{\mu})\lambda - \psi_4 \\
f) & \delta\rho - \bar{\delta}\sigma = (\beta + \bar{\alpha})\rho + (\bar{\beta} - 3\alpha)\sigma - \psi_1 \\
g) & \delta\alpha - \bar{\delta}\beta = \mu\rho - \lambda\sigma - 2\alpha\beta + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \psi_2 \\
h) & \delta\lambda - \bar{\delta}\mu = (\alpha + \bar{\beta})\mu + (\bar{\alpha} - 3\beta)\lambda - \psi_3 \\
i) & \delta\nu - \Delta\mu = \gamma\mu - 2\nu\beta + \bar{\gamma}\mu + \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} \\
j) & \delta\gamma - \Delta\beta = \tau\mu - \sigma\nu(\mu - \gamma + \bar{\gamma})\beta + \bar{\lambda}\alpha \\
k) & \delta\tau - \Delta\sigma = 2\tau\beta + (\bar{\gamma} + \mu - 3\gamma)\sigma + \bar{\lambda}\rho \\
l) & \Delta\rho - \bar{\delta}\tau = (\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\mu})\rho - 2\alpha\tau - \lambda\sigma - \psi_2 \\
m) & \Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = \rho\nu - \tau\lambda - \lambda\beta + (\bar{\gamma} - \gamma - \bar{\mu})\alpha - \psi_3.
\end{array}$$

Le dernier groupe d'équations dans lesquelles les opérateurs δ et Δ agissent sur les ψ_A.

$$\text{(II-24)} \quad \Delta\psi_{A''-1} - \delta\psi_{A''} = (A''-1)\nu\psi_{A''-2} - 2(A''-3)\gamma\psi_{A''-1} + (A''-5)\tau\psi_{A''} - A''\mu\psi_{A''-1} + 2(A''-2)\beta\psi_{A''} - (A''-4)6\psi_{A''+1},$$

avec $A'' = 1, 2, 3, 4$.

Ces équations imposent à ψ_4 d'être au moins de classe C^0 et aux autres fonctions du champ d'être au moins de classe C^1. D'autre part, la forme des équations (II-22) montre que toute solution est nécessairement indéfiniment dérivable par rapport aux variables x^2, x^3.

4) **Définition des solutions étudiées.**

Dans les chapitres suivants nous ne nous intéressons qu'aux solutions qui sont « retardées » sur un espace-temps asymptotiquement plat et développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$. Ce sont les solutions des équations du vide (II-21 $\to$ 24) qui satisfont les hypothèses suivantes :

a) Sur (Ω) les coefficients de spin (II-10), liés par les relations (II-17, 18, 20), les ψ_A, donnés par (II-11) et les fonctions déterminant le repère $(\mathcal{R})$ sont développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$. Toutes ces séries sont supposées dérivables terme à terme.

b) Les fonctions ψ_0, ρ, ξ^k satisfont les conditions aux limites suivantes :

$$\text{(II-25)} \qquad \lim_{r=\infty} (r^5 \psi_0) = \psi_0^0,$$

où ψ_0^0 est une fonction des variables u, x^i,

$$\text{(II-26)} \qquad \lim_{r=\infty} (r\rho) = -1,$$

$$\text{(II-27)} \qquad \lim_{r=\infty} (r\xi^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \lim_{r=\infty} (r\xi^3) = \frac{i}{\sqrt{2}\sin x^2}$$

Les hypothèses *a*) et *b*) sont suffisantes pour que la métrique de V_4 ait pour limite, quand r tend vers l'infini, celle de la métrique de l'espace de Minkowski rapporté aux coordonnées radiatives ([1]) u, r, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \varphi$, à savoir :

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{22}}{r^2}\right) = -1, \qquad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{33}}{r^2}\right) = -\sin^2\theta, \qquad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{23}}{r^2}\right) = 0,$$

$$\lim_{r=\infty} (g_{01}) = 1, \qquad \lim_{r=\infty} (g_{00}) = 1, \qquad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{0i}}{r}\right) = 0.$$

Les coordonnées x^2 et x^3 sont alors les coordonnées polaires θ, φ définies sur la sphère à deux dimensions S_2. L'ouvert (Ω) est ainsi défini par $\underset{1}{u} < u < \underset{2}{u}$, $\underset{1}{r} < r$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Dans [7] il est démontré que les solutions des équations du champ satisfaisant les hypothèses (*a*) et (*b*) ont nécessairement le comportement ([2]) asymptotique suivant :

$$\text{(II-29)} \qquad \begin{aligned} &\tau,\ X^k = 0\left(\frac{1}{r^3}\right); \qquad \gamma,\ \sigma = 0\left(\frac{1}{r^2}\right); \qquad \alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \omega = 0\left(\frac{1}{r}\right); \\ &U = 0(1); \qquad \psi_{A''} = 0\left(\frac{1}{r^{5-A''}}\right) \quad \text{avec} \quad A'' = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

([1]) Voir [5].

([2]) Le symbole $0\left(\frac{1}{r^n}\right)$ désigne une fonction telle que

$$\left|0\left(\frac{1}{r^n}\right)\right| \left\langle \frac{1}{r^n} f(u, \theta, \varphi)\right.$$

pour tout r suffisamment grand, $f(u, \theta, \varphi)$ étant une fonction indépendante de r.

Écrivons les développements en $\frac{1}{r}$ de ces solutions en tenant compte de (II-25, 26, 27, 29). Nous sommes obligés de modifier les notations utilisées dans [5] pour pouvoir formuler sous une forme condensée les résultats que nous obtiendrons.

Si F désigne l'une des fonctions suivantes $\rho, \sigma, \alpha, \beta, \lambda, \mu, \tau, \nu, \gamma, \xi^k, X^k$,

$$F = \frac{1}{r}\left[\overset{0}{F} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{F}}{r^n}\right],$$

avec :

$$\text{(II-31)} \qquad \overset{0}{\sigma} = \overset{0}{\gamma} = \overset{0}{X^k} = \overset{1}{X^k} = \overset{1}{\tau} = 0, \quad \overset{0}{\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \overset{0}{\xi^3} = \frac{i}{\sqrt{2}\sin\theta}, \quad \overset{0}{\rho} = -1.$$

$$\text{(II-32)} \qquad \begin{cases} U = \overset{0}{U} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{U}}{r^n}, \\ \omega = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\omega}}{r^n}. \end{cases}$$

$$\text{(II-33)} \qquad \psi_A = \frac{1}{r^2} \sum_{n=3-A}^{\infty} \frac{\overset{n}{\psi_A}}{r^n}, \qquad \text{avec : } A = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Dans (II-33), remarquons que l'indice n ne prend pas que les valeurs entières positives prises dans les formules précédentes mais prend aussi la valeur 0 pour $A = 3$ et $A = 4$ et même la valeur -1 pour $A = 4$.

III. ÉTUDE DES ÉQUATIONS DU CHAMP

1) **Résolution du premier groupe des équations radiales** (II-21).

Nous introduisons (II-30, 31, 32) dans ces équations. Nous allons démontrer que l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ donne le résultat suivant pour U, ω et l'une quelconque des fonctions F :

a) Les seuls coefficients du développement de ces fonctions qui ne sont pas déterminés par ces équations sont : $\overset{1}{\rho}, \overset{1}{\sigma}, \overset{0}{\alpha}, \overset{0}{\beta}, \overset{0}{\lambda}, \overset{0}{\mu}, \overset{0}{U}, \overset{1}{\omega}$.

b) Les coefficients $\overset{n}{U}, \overset{n}{\omega}, \overset{n}{F}$ (n entier positif) sont chacun une somme de produits dont les facteurs ne sont que $\overset{1}{\rho}$, $\overset{1}{\sigma}$, $\overset{0}{\alpha}$, $\overset{0}{\beta}$, $\overset{0}{\lambda}$, $\overset{0}{\mu}$, $\overset{0}{\mathrm{U}}$, $\overset{1}{\omega}$, $\overset{i}{\psi}_{\mathrm{A}'}$ $(\mathrm{A}' = 0, 1, 2, 3)$, leur conjugué et un coefficient numérique. Chaque produit a de plus la propriété suivante : la somme des indices (0 de $\overset{0}{\alpha}$, $\overset{0}{\beta}$, $\overset{0}{\lambda}$, $\overset{0}{\mu}$, $\overset{0}{\mathrm{U}}$, 1 de $\overset{1}{\rho}$, $\overset{1}{\sigma}$, $\overset{1}{\omega}$, i de $\overset{i}{\psi}_{\mathrm{A}'}$) de chaque facteur qui y figure est égale à n. Remarquons que si b) est vraie pour U, ω, F, b) est vraie pour $\overline{\mathrm{U}}$, $\overline{\omega}$, $\overline{\mathrm{F}}$.

Démontrons (a) et (b) d'abord pour ρ et σ. Les équations (II-21, e, f) donnent :

$$\left\{\begin{aligned} &1 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{\overset{n}{\rho}}{r^n} = \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\rho}}{r^n}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\sigma}}{r^n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\sigma}}{r^n} \\ &\sum_{n=1}^{\infty} -(n+1)\frac{\overset{n}{\sigma}}{r^n} = 2\left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\rho}}{r^n}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\sigma}}{r^n} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_0}{r^n}. \end{aligned}\right.$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$\text{(III-1)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}(1-n)\frac{\overset{n}{\rho}}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\rho}\overset{q}{\bar{\rho}} + \overset{p}{\sigma}\overset{q}{\bar{\sigma}})\right] \\ &\sum_{n=1}^{\infty}(1-n)\frac{\overset{n}{\sigma}}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2}{r^n}\sum_{p+q=n}\overset{p}{\rho}\overset{q}{\sigma}\right] + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_0}{r^n}, \end{aligned}\right.$$

avec p, q entiers positifs.

Seuls $\overset{1}{\rho}$ et $\overset{1}{\sigma}$ ne sont pas déterminés par (III-1). Mais, seul $\overset{1}{\sigma}$ n'est pas effectivement déterminé, car $\overset{1}{\rho}$ peut être annulé par un changement de coordonnée [1]. Nous supposerons dans la suite :

$$\text{(III-2)} \qquad \overset{1}{\rho} = 0.$$

Démontrons maintenant (b) pour $\overset{n}{\rho}$, $\overset{n}{\sigma}$ $(n > 1)$. Raisonnons par récurrence. Supposons que (b) soit vérifiée pour les $\overset{i}{\rho}$, $\overset{i}{\sigma}$ avec $i = 2, \ldots, n-1$, il est immédiat d'après (III-1) que (b) est vraie pour $i = n$. Il ne nous reste plus qu'à vérifier (b) pour $n = 2$, par exemple. Pour $n = 2$, (III-1) donne

$$\text{(III-3)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\overset{2}{\rho} = -\overset{1}{\sigma}\overset{1}{\bar{\sigma}} \\ &\overset{2}{\sigma} = 0. \end{aligned}\right.$$

[1] Voir [6].

Faisons la démonstration pour α et β en utilisant le système (21-*h*, *i*) qui s'écrit après y avoir introduit les développements (II-30, 31, 33):

$$\text{(III-4)}\qquad \left\{\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} - n\frac{\overset{n}{\alpha}}{r^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{0}{\alpha}\overset{n}{\rho} + \overset{0}{\beta}\overset{n}{\sigma}}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\rho}\overset{q}{\alpha} + \overset{p}{\bar\sigma}\overset{q}{\beta})\right] \\ \sum_{n=1}^{\infty} - n\frac{\overset{n}{\beta}}{r^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{0}{\beta}\overset{n}{\rho} + \overset{0}{\alpha}\overset{n}{\sigma}}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\sigma}\overset{q}{\alpha} + \overset{p}{\rho}\overset{q}{\beta}) + \frac{\overset{n}{\psi}_1}{r^n}\right]. \end{aligned}\right.$$

La proposition (*a*) est vérifiée pour α et β puisque $\overset{0}{\alpha}$ et $\overset{0}{\beta}$ ne sont pas déterminés par ce système. Démontrons (*b*). Pour $n = 1$ on a, compte tenu de (III-2):

$$\text{(III-5)}\qquad \left\{\begin{aligned} \overset{1}{\alpha} &= -\overset{0}{\beta}\overset{1}{\bar\sigma} \\ \overset{1}{\beta} &= -\overset{0}{\alpha}\overset{1}{\sigma}. \end{aligned}\right.$$

Procédons par récurrence pour $n > 1$. Dans (III-4) nous utilisons la proposition (*b*) appliquée à ρ et σ, $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{1}{\beta}$ donnés par (III-5), la proposition (*b*) supposée vraie pour les $\overset{i}{\alpha}$, $\overset{i}{\beta}$ avec $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Le système (III-4) nous donne alors immédiatement (*b*) pour $\overset{n}{\alpha}$ et $\overset{n}{\beta}$. Il ne nous reste plus qu'à vérifier que (*b*) est vraie par exemple pour $n = 2$. On a, en tenant compte de (III-2, 3, 5),

$$\text{(III-6)}\qquad \left\{\begin{aligned} \overset{2}{\alpha} &= \overset{0}{\alpha}\overset{1}{\sigma}\overset{1}{\bar\sigma} \\ \overset{2}{\beta} &= \overset{0}{\beta}\overset{1}{\sigma}\overset{1}{\bar\sigma} - \frac{1}{2}\overset{2}{\psi}_1. \end{aligned}\right.$$

Les propositions (*a*) et (*b*) sont de suite démontrées pour τ en utilisant (II-17). Démontrons-les pour les autres fonctions F et U, ω. Nous introduisons les développements (II-30, 31, 32, 33) dans (II-21, *a*, *b*, *c*, *d*, *j*, *k*, *l*, *m*). Nous obtenons respectivement:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} - n\frac{\overset{n}{\xi}}{r^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overset{0}{\xi}{}^k\frac{\overset{n}{\rho}}{r^n} + \overset{0}{\xi}{}^k\frac{\overset{n}{\sigma}}{r^n}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\rho}\overset{q}{\xi}{}^k + \overset{p}{\sigma}\overset{q}{\xi}{}^k)\right],$$

$$\text{(III-7)}\quad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(1-n)\frac{\overset{n}{\omega}}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\rho}\overset{q}{\omega} + \overset{p}{\sigma}\overset{q}{\varpi}) - \frac{\overset{n}{\tau}}{r^n}\right]$$

$$c)\quad \sum_{n=2}^{\infty} -(n+1)\frac{\overset{n}{X}{}^k}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\overset{0}{\xi}{}^k\frac{\overset{n}{\tau}}{r^n} + \overset{0}{\xi}{}^k\frac{\overset{n}{\bar\tau}}{r^n}\right) + \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\tau}\overset{q}{\xi}{}^k + \overset{p}{\bar\tau}\overset{q}{\xi}{}^k)\right],$$

$$j)\quad \sum_{n=1}^{\infty} -(n+1)\frac{\overset{n}{\gamma}}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\overset{0}{\alpha}\frac{\overset{n}{\tau}}{r^n} + \overset{0}{\beta}\frac{\overset{n}{\bar{\tau}}}{r^n}\right) + \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\tau}\overset{q}{\alpha} + \overset{p}{\bar{\tau}}\overset{q}{\beta})\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_2}{r^n},$$

$$d)\quad \sum_{n=1}^{\infty} -n\frac{\overset{n}{\mathrm{U}}}{r^n} = \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\tau}\overset{q}{\bar{\omega}} + \overset{p}{\bar{\tau}}\overset{q}{\omega})\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\gamma} + \overset{n}{\bar{\gamma}}}{r^n},$$

$$k)\quad \sum_{n=1}^{\infty} -n\frac{\overset{n}{\lambda}}{r^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overset{0}{\lambda}\frac{\overset{n}{\rho}}{r^n} + \overset{0}{\mu}\frac{\overset{n}{\sigma}}{r^n}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\rho}\overset{q}{\lambda} + \overset{p}{\mu}\overset{q}{\bar{\sigma}})\right],$$

$$l)\quad \sum_{n=1}^{\infty} -n\frac{\overset{n}{\mu}}{r^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overset{0}{\mu}\frac{\overset{n}{\rho}}{r^n} + \overset{0}{\lambda}\frac{\overset{n}{\sigma}}{r^n}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\mu}\overset{q}{\rho} + \overset{p}{\lambda}\overset{q}{\sigma})\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_2}{r^n},$$

$$m)\quad -\overset{0}{\nu} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{\overset{n}{\nu}}{r^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_3}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overset{0}{\lambda}\frac{\overset{n}{\tau}}{r^n} + \overset{0}{\mu}\frac{\overset{n}{\bar{\tau}}}{r^n}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(\overset{p}{\tau}\overset{q}{\lambda} + \overset{p}{\bar{\tau}}\overset{q}{\mu})\right].$$

Les équations (III-7 *b*, *k*, *l*) ne déterminent pas $\overset{1}{\omega}$, $\overset{0}{\lambda}$, $\overset{0}{\mu}$. L'équation (III-7, *m*) donne :

$$\text{(III-8)}\qquad \overset{0}{\nu} = -\overset{0}{\psi}_3,$$

c'est la proposition (*b*) pour $\overset{0}{\nu}$. Démontrons-la pour les autres coefficients. Nous opérons comme pour α et β. Nous raisonnons par récurrence pour $n > 1$; nous utilisons la propriété (*b*) appliquée à ρ, σ, α, β, nous la supposons vraie pour les $\overset{i}{\xi}$, $\overset{i}{\omega}$, $\overset{i}{\mathrm{X}}{}^k$, $\overset{i}{\gamma}$, $\overset{i}{\mathrm{U}}$, $\overset{i}{\lambda}$, $\overset{i}{\mu}$, $\overset{i}{\nu}$ avec $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Les équations (III-7) donnent de suite (*b*) pour $i = n$. Il suffit de vérifier que (*b*) est vraie pour $i = 1$ et $i = 2$. On obtient en tenant compte de (III-2, 3, 5; 6) de (II-31) et de

$$\text{(III-9)}\qquad \overset{2}{\tau} = -\frac{1}{2}\overset{2}{\psi}_1,$$

donné par (II-21, g):

$$
\begin{aligned}
&\overset{1}{\xi}{}^2 = -\frac{\overset{1}{\sigma}}{\sqrt{2}} & &\overset{2}{\xi}{}^2 = \frac{\overset{1}{\sigma}\overset{1}{\overline{\sigma}}}{\sqrt{2}} \\
&\overset{1}{\xi}{}^3 = \frac{i\overset{1}{\sigma}}{\sqrt{2}\sin\theta} & &\overset{2}{\xi}{}^3 = \frac{i\overset{1}{\sigma}\overset{1}{\overline{\sigma}}}{\sqrt{2}\sin\theta} \\
&\overset{1}{\gamma} = -\frac{1}{2}\overset{1}{\psi}_2 & &\overset{2}{\omega} = -\overset{1}{\sigma}\overset{1}{\overline{\omega}} - \frac{1}{2}\overset{2}{\psi}_1 \\
\text{(III-10)}\quad &\overset{1}{\mathrm{U}} = -\frac{1}{2}(\overset{1}{\psi}_2 + \overset{1}{\overline{\psi}}_2) & &\overset{2}{\gamma} = \frac{1}{3}[\overset{2}{\psi}_1\overset{0}{\alpha} + \overset{2}{\overline{\psi}}_1\overset{0}{\beta}] - \frac{1}{3}\overset{2}{\psi}_2 \\
&\overset{1}{\lambda} = -\overset{0}{\mu}\overset{1}{\overline{\sigma}} & &\overset{2}{\mathrm{U}} = \frac{1}{6}[\overset{2}{\psi}_1\overset{0}{\alpha} + \overset{2}{\overline{\psi}}_1\overset{0}{\beta}] - \frac{1}{6}\overset{2}{\psi}_2 \\
&\overset{1}{\mu} = -\overset{0}{\lambda}\overset{1}{\sigma} - \overset{1}{\psi}_2 & &\overset{2}{\lambda} = \overset{0}{\lambda}\overset{1}{\sigma}\overset{1}{\overline{\sigma}} + \frac{1}{2}\overset{1}{\overline{\sigma}}\overset{1}{\psi}_2 \\
&\overset{1}{\nu} = -\frac{1}{2}\overset{1}{\psi}_3 & &\overset{2}{\mu} = \overset{0}{\mu}\overset{1}{\sigma}\overset{1}{\overline{\sigma}} - \frac{1}{2}\overset{2}{\psi}_2 \\
& & &\overset{2}{\nu} = -\frac{1}{3}\overset{2}{\psi}_3 + \frac{1}{6}(\overset{2}{\psi}_1\overset{0}{\lambda} + \overset{2}{\overline{\psi}}_1\overset{0}{\mu}).
\end{aligned}
$$

La proposition (b) est donc vérifiée pour $i = 1$, $i = 2$.

En vue d'une utilisation dans l'étude du prochain groupe d'équations, précisons les ψ_{A} qui interviennent dans ρ, ξ^k, α, ω, λ. L'étude des équations [III-1-4-7 (a, b, k, l)] montre que ces fonctions dépendent toutes de ψ_0, que α et ω dépendent en outre de ψ_1 et λ de ψ_2.

2) **Résolution du deuxième groupe des équations radiales** (II-22).

Nous introduisons (II-30, 31, 32, 33) dans les équations (II-22). Nous obtenons [1]:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=3-\mathrm{A}''}^{\infty} -(n+2)\frac{\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''}}{r^n} + (\mathrm{A}''-5)\left(-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\rho}}{r^n}\right)\sum_{n=3-\mathrm{A}'}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''}}{r^n} \\
= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\overline{\omega}}}{r^n}\sum_{n=4-\mathrm{A}''}^{\infty}(n+2)\frac{\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''-1}}{r^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{n}{\xi}{}^k}{r^n}\sum_{n=4-\mathrm{A}''}^{\infty}\frac{\partial_k\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''-1}}{r^n} \\
-2(3-\mathrm{A}'')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{n}{\alpha}}{r^n}\sum_{n=4-\mathrm{A}''}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''-1}}{r^n} + (1-\mathrm{A}'')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{n}{\lambda}}{r^n}\sum_{n=5-\mathrm{A}''}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''-2}}{r^n}.
\end{aligned}
$$

[1] $\partial_k \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^k}$.

ou encore ([2])

$$\text{(III-11)}\qquad \sum_{n=3-\mathrm{A}''}^{\infty} (3-\mathrm{A}''-n)\frac{\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''}}{r^n}$$
$$= \sum_{n=4-\mathrm{A}''}^{\infty}\left\{\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}[(5-\mathrm{A}'')\overset{p}{\rho}\overset{q}{\psi}_{\mathrm{A}''}+\overset{p}{\xi}{}^k\partial_k\overset{q}{\psi}_{\mathrm{A}''-1}-2(3-\mathrm{A}'')\overset{p}{\alpha}\overset{q}{\psi}_{\mathrm{A}''-1}]\right\}$$
$$+ \sum_{n=5-\mathrm{A}''}^{\infty}\left\{\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}[-(q+2)\overset{p}{\varpi}\overset{q}{\psi}_{\mathrm{A}''-1}+(1-\mathrm{A}'')\overset{p}{\lambda}\overset{q}{\psi}_{\mathrm{A}''-2}]\right\}.$$

Nous allons démontrer que l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ dans (III-11) donne les propriétés (*c*) et (*d*) suivantes pour les ψ_{A} $(\mathrm{A} = 0, 1, 2, 3, 4)$.

(*c*) Les seuls coefficients du développement des ψ_{A} qui ne sont pas déterminés par les équations (III-11) sont tous les $\overset{i}{\psi}_0$ et les $\overset{3-\mathrm{A}''}{\psi}_{\mathrm{A}''}$ avec $\mathrm{A}'' \neq 0$. Les $\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''}$ possèdent la propriété suivante :

Propriété (*d*) :

Chaque coefficient $\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''}$ est une somme de produits dont les facteurs ne sont que $\overset{1}{\sigma}$, $\overset{0}{\alpha}$, $\overset{0}{\beta}$, $\overset{0}{\lambda}$, $\overset{0}{\mu}$, $\overset{0}{\mathrm{U}}$, $\overset{1}{\omega}$, $\overset{i}{\psi}_0$ (quel que soit i), les $\overset{3-\mathrm{A}''}{\psi}_{\mathrm{A}''}$, leur conjugué, les dérivées par rapport à θ et φ de ces facteurs et un coefficient numérique. Chaque produit a de plus la propriété suivante : la somme des indices (zéro de $\overset{0}{\alpha}$, $\overset{0}{\beta}$, $\overset{0}{\lambda}$, $\overset{0}{\mu}$, $\overset{0}{\mathrm{U}}$, un de $\overset{1}{\sigma}$, $\overset{1}{\omega}$, i de $\overset{i}{\psi}_0$ et $3-\mathrm{A}''$ de $\overset{3-\mathrm{A}''}{\psi}_{\mathrm{A}''}$) de chaque facteur qui y figure est égale à n.

(III-11) rend la proposition (*c*) évidente. Démontrons la propriété (*d*). Nous faisons un raisonnement par récurrence portant sur l'indice A″ des $\overset{i}{\psi}_{\mathrm{A}''}$. Nous devons donc

([2]) Dans (III-11), le couple (p, q) d'indices figurant dans un monôme est une solution entière du système

$$\begin{cases} p+q=n \\ p \geqslant p_0, \qquad q \geqslant q_0. \end{cases}$$

La notation $\sum\limits_{p+q=n}$ signifie une sommation dans laquelle le couple (p, q) prend successivement la valeur des solutions entières du système. Précisons la valeur de p_0 et q_0. Pour $\overset{p}{\rho}$, $\overset{p}{\varpi}$ on a $p_0 = 1$, pour $\overset{p}{\xi}{}^k$, $\overset{p}{\alpha}$, $\overset{p}{\lambda}$ on a $p_0 = 0$, pour q dans $\overset{q}{\psi}_{\mathrm{A}}$ $(\mathrm{A} = 0, 1, 2, 3, 4)$ on a $q_0 = 3-\mathrm{A}$.

1° Démontrer le *lemme* suivant : la propriété (*d*) est vraie pour $\overset{i}{\psi}_{A''}$ quel que soit i, si elle est supposée vraie pour tous les $\overset{j}{\psi}_{B''}$, quel que soit j, avec $B'' < A''$.

2° Vérifier que $\overset{i}{\psi}_{A''}$ possède la propriété (*d*) pour une valeur de A'', par exemple $A'' = 1$, quel que soit i.

Démontrons le lemme. Par hypothèse (*d*) est vraie pour les $\overset{j}{\psi}_{B''}$ avec $B'' < A''$ quel que soit j. L'identification des coefficients de $\frac{1}{r^n}$ des membres de (III-11) pour $n = 4 - A''$ prouve alors que (*d*) est vraie pour cette valeur de n :

$$\text{(III-12)} \qquad -\overset{4-A''}{\psi}_{A''} = \overset{0}{\xi^k}\partial_k \overset{4-A''}{\psi}_{A''-1} - 2(3 - A'')\overset{0}{\alpha}\overset{4-A''}{\psi}_{A''-1}.$$

On a tenu compte de (III-2) dans (III-12). Pour $n \geqslant 5 - A''$, cette identification donne :

$$\text{(III-13)} \quad (3 - A'' - n)\overset{n}{\psi}_{A''} = \sum_{p+q=n} [(5 - A'')\overset{p}{\rho}\overset{q}{\psi}_{A''} + \overset{p}{\xi^k}\partial_k\overset{q}{\psi}_{A''-1} - 2(3 - A)\overset{p}{\alpha}\overset{q}{\psi}_{A''-1} - (q+2)\overset{p}{\varpi}\overset{q}{\psi}_{A''-1} + (1 - A'')\overset{p}{\lambda}\overset{q}{\psi}_{A''-2}].$$

L'indice A'' étant fixé, nous raisonnons par récurrence sur l'indice n dans (III-13). Nous devons donc prouver que si, en outre, (*d*) est vraie pour $\overset{i}{\psi}_{A''}$ avec $i = 4 - A'', 5 - A'', \ldots, n - 1$, elle est vraie pour $\overset{n}{\psi}_{A''}$. Ensuite nous devons vérifier que (*d*) est vraie pour $n = 5 - A''$ par exemple. Des $\overset{i}{\psi}_{B''}$ figurent dans les seconds membres de (III-13), soit explicitement, soit, comme nous l'avons déjà vu, dans les α, ω, λ (ψ_1 dans α, ω, ψ_2 dans ω). Mais cet indice B'' est au plus égal à l'indice A'' des premiers membres. En effet, dans le cas où $A'' = 1$, les $\overset{i}{\psi}_2$ dont dépendent les $\overset{p}{\lambda}$ n'interviennent pas, le facteur $(1 - A'')$ étant alors nul ; dans le cas où $A'' > 1$ c'est évident.

Montrons que les $\psi_{A''}$ des seconds membres ont un indice i inférieur à n. Ceci est immédiat pour les $\overset{q}{\psi}_{A''}$ qui y figurent explicitement, l'indice p de $\overset{p}{\rho}$ étant supérieur à 1. Pour $A'' = 1$ dans (III-13) les $\overset{i}{\psi}_1$ dont dépendent les $\overset{p}{\alpha}$ et $\overset{p}{\varpi}$ ont un indice i au plus égal à p qui, lui-même, est au plus égal à $n - 3$. Enfin pour $A'' = 2$ dans (III-13) les $\overset{i}{\psi}_2$ dont dépendent les $\overset{p}{\lambda}$ ont un indice i au plus égal à p et ce dernier est aussi au plus égal à $n - 3$. Aux seconds membres de (III-13) les fonctions F, U, ω possèdent la propriété (*b*) et les $\overset{i}{\psi}_{B''}$ $(B'' < A'')$ la propriété (*d*), quel que soit i ; de même les $\overset{j}{\psi}_{A''}$ avec $j \leqslant n-1$ possèdent la propriété (*d*). De (III-13) nous déduisons que les $\overset{n}{\psi}_{A''}$ satisfont alors (*d*). Vérifions maintenant que les $\overset{n}{\psi}_{A''}$ satisfont (*d*) pour $n = 5 - A''$. Faisons $n = 5 - A''$ dans (III-13) nous obtenons :

$$\begin{aligned} -2 \overset{5-A''}{\psi}_{A''} = {} & (5-A'')\rho^{2} \overset{3-A''}{\psi}_{A''} + \overset{0}{\bar{\xi}}{}^{k}\partial_k \overset{5-A''}{\psi}_{A''-1} + \overset{1}{\bar{\xi}}{}^{k}\partial_k \overset{4-A''}{\psi}_{A''-1} \\ & - 2(3-A)[\overset{0}{\alpha} \overset{5-A''}{\psi}_{A''-1} + \overset{1}{\alpha} \overset{4-A''}{\psi}_{A''-1}] - (6-A'')\overset{1}{\overline{\omega}} \overset{4-A''}{\psi}_{A''-1} + (1-A'')\overset{0}{\lambda} \overset{5-A''}{\psi}_{A''-2}. \end{aligned}$$

Cette vérification est faite en tenant compte des relations (III-3, 5, 10) et de la propriété (*d*) vérifiée par hypothèse par les $\overset{i}{\psi}_{B''}$, $B'' < A''$. Le lemme est démontré.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier la propriété (*d*) pour les $\overset{i}{\psi}_1$ quel que soit i. Faisons $A'' = 1$ dans (III-11). Les seuls $\overset{i}{\psi}_A$ qui y figurent, explicitement ou non, sont les $\overset{i}{\psi}_1$ et les $\overset{i}{\psi}_0$. Il n'existe donc pas, dans les seconds membres, de $\overset{i}{\psi}_{B''}$ $(B'' < A'')$.

La vérification se fait en reprenant la démonstration du lemme dans le cas où les $\overset{i}{\psi}_{B''}$ n'existent pas.

Remarque. — Si dans les $\overset{n}{F}$, $\overset{n}{U}$, $\overset{n}{\omega}$ donnés par le 1[er] groupe des équations radiales on remplace les $\overset{i}{\psi}_{A''}$ $(i \leqslant n)$ par leurs valeurs données par le 2[e] groupe des équations radiales, on trouve de suite que les $\overset{n}{F}$, $\overset{n}{U}$, $\overset{n}{\omega}$ possèdent la propriété (*d*).

3) **Les équations « non-radiales »** (II-23).

Nous y introduisons les développements (III-30, 31, 32, 33). Ces équations conduisent à de nouvelles relations entre les coefficients $\overset{1}{\sigma}$, $\overset{0}{\alpha}$, $\overset{0}{\beta}$, $\overset{0}{\mu}$, $\overset{0}{U}$, $\overset{1}{\omega}$, $\overset{0}{\lambda}$, $\overset{3-A''}{\psi}_{A''}$. Elles permettent de déterminer $\overset{0}{\alpha}$, $\overset{0}{\beta}$, $\overset{0}{\mu}$, $\overset{0}{U}$ et donnent $\overset{1}{\omega}$, $\overset{0}{\lambda}$, $\overset{1}{\psi}_4$, $\overset{0}{\psi}_3$, la partie imaginaire de $\overset{1}{\psi}_2$ en fonction de $\overset{1}{\sigma}$.

L'identification des termes en $\dfrac{1}{r^2}$ des membres de (23, *b*), compte tenu de (II-31) et (II-17) détermine $\overset{0}{\alpha}$ et $\overset{0}{\beta}$,

$$\overset{0}{\beta} = -\overset{0}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{cotg} \theta. \tag{III-14}$$

De même l'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (23, g) compte tenu de (II-31) et (III-14) détermine $\overset{0}{\mu}$,

$$\overset{0}{\mu} = -\frac{1}{2}. \tag{III-15}$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (23, l) et (III-15) donnent

$$\overset{0}{\mathrm{U}} = -\frac{1}{2}. \tag{III-16}$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r^3}$ des membres de (23, f), compte tenu de (II-31) et (III-14) détermine $\overset{1}{\omega}$:

$$\overset{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{\nabla} + 2 \operatorname{cotg} \theta)\overset{1}{\sigma}, \tag{III-17}$$

avec

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \overline{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{III-18}$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r}$ des membres de (23, d), en tenant compte de (III-17) et (III-16) détermine $\overset{0}{\nu}$:

$$\overset{0}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{\nabla} + 2 \operatorname{cotg} \theta)\frac{\partial \overset{1}{\sigma}}{\partial u} \tag{III-19}$$

et par suite (III-8) détermine $\overset{0}{\psi}_3$.

L'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (23, k) donne

$$\overset{0}{\lambda} = \frac{\partial \overset{1}{\overline{\sigma}}}{\partial u} \tag{III-20}$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r}$ des membres de (23, e) donne, compte tenu de (III-20)

$$\overset{-1}{\psi}_4 = -\frac{\partial^2 \overset{1}{\sigma}}{\partial u^2}. \tag{III-21}$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (23, c) en tenant compte de (III-14, 17) de $\overset{-1}{\mu} = -\overset{0}{\lambda}\overset{1}{\sigma} - \overset{1}{\psi}_2$, donné par (III-7), de (III-20) détermine la partie imaginaire de $\overset{1}{\psi}_2$ soit :

$$\text{(III-22)} \quad \overset{1}{\bar{\psi}}_2 - \overset{1}{\psi}_2 = \frac{1}{2}(\nabla + \text{cotg}\ \theta)(\nabla + 2\ \text{cotg}\ \theta)\overset{1}{\bar{\sigma}} - \frac{1}{2}(\bar{\nabla} + \text{cotg}\ \theta)(\bar{\nabla} + 2\ \text{cotg}\ \theta)\overset{1}{\sigma} + \overset{1}{\sigma}\frac{\partial \overset{1}{\bar{\sigma}}}{\partial u} - \overset{1}{\sigma}\frac{\partial \overset{1}{\sigma}}{\partial u}.$$

Rappelons qu'à ce stade les seuls coefficients du développement des inconnues (II-30, 32, 33) qui ne sont pas déterminés sont $\overset{1}{\sigma}$, les $\overset{i}{\psi}_0$, $\overset{2}{\psi}_1$ et la partie réelle de $\overset{1}{\psi}_2$.

4) **Résolution des équations** (II-24).

Nous y introduisons les développements (II-30, 31, 32, 33).

Dans les équations obtenues en faisant A″ = 2 puis A″ = 3 dans (II-24), l'identification des termes en $\frac{1}{r^4}$ dans la première et celle des termes en $\frac{1}{r^3}$ dans la deuxième donne :

$$\text{(III-23)} \qquad \frac{\partial \overset{1}{\psi}_2}{\partial u} = \overset{0}{\xi}{}^k \partial_k \overset{0}{\psi}_3 - 2\overset{0}{\beta}\overset{0}{\psi}_3 + \overset{1}{\sigma}\,\overset{-1}{\psi}_4,$$

$$\text{(III-24)} \qquad \frac{\partial \overset{2}{\psi}_1}{\partial u} = \overset{0}{\xi}{}^k \partial_k \overset{1}{\psi}_2 + 2\overset{0}{\psi}_3\overset{1}{\sigma}.$$

Nous introduisons (II-31), (III-18), (III-8) et (III-19) dans (III-23, 24). Les équations (III-23) et (III-24) s'écrivent :

$$\text{(III-25)} \qquad \frac{\partial \overset{1}{\psi}_2}{\partial u} = -\frac{1}{2}(\nabla + \text{cotg}\ \theta)(\nabla + 2\ \text{cotg}\ \theta)\frac{\partial \overset{1}{\bar{\sigma}}}{\partial u} - \overset{1}{\sigma}\frac{\partial^2 \overset{1}{\bar{\sigma}}}{\partial u^2},$$

$$\text{(III-26)} \qquad \frac{\partial \overset{2}{\psi}_1}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla\overset{1}{\psi}_2 - \frac{2}{\sqrt{2}}(\nabla + 2\ \text{cotg}\ \theta)\overset{1}{\sigma}\frac{\partial \overset{1}{\bar{\sigma}}}{\partial u}.$$

$\overset{1}{\psi}_2$ et $\overset{2}{\psi}_1$ doivent donc être solution des équations (III-25) et (III-26) (La partie imaginaire de $\overset{1}{\psi}_2$ donnée par (III-22) satisfait (III-25)).

Faisons maintenant $A'' = 1$ dans (II-24) et démontrons que cette équation donne la dérivée par rapport à la variable u de chaque coefficient $\overset{i}{\psi}_0$ du développement de ψ_0 en fonction de $\overset{1}{\sigma}$, $\overset{2}{\psi}_1$, de la partie réelle de $\overset{1}{\psi}_2$ et des $\overset{j}{\psi}_0$ avec $j < i$. Démontrons d'abord que chaque $\partial_u \overset{n+1}{\psi}_0$ possède [1] la propriété (d) comme les $\overset{n}{\psi}_{A''}$. Pour $A'' = 1$ (II-24) s'écrit :

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{U}}{r^n}\sum_{n=3}^{\infty}(n+2)\frac{\overset{n}{\psi}_0}{r^n} + r\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\partial_u\overset{n}{\psi}_0}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\overset{n}{X}{}^k}{r^n}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\partial^k\overset{n}{\psi}_0}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\omega}}{r^n}\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)\frac{\overset{n}{\psi}_1}{r^n}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{n}{\xi}{}^k}{r^n}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^k\overset{n}{\psi}_1}{r^n} = \left(4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\gamma}}{r^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{n}{\mu}}{r^n}\right)\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_0}{r^n}$$

$$-\left(4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\overset{n}{\tau}}{r^n} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{n}{\beta}}{r^n}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_1}{r^n} + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\sigma}}{r^n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n}{\psi}_2}{r^n}.$$

ou encore [2]

$$\text{(III-27)} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial_u\overset{n+1}{\psi}_0}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(3\overset{p}{\sigma}\overset{q}{\psi}_2 + \overset{p}{\xi}{}^k\partial_k\overset{q}{\psi}_1 - 2\overset{p}{\beta}\overset{q}{\psi}_1)\right]$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}\{(q+2)\overset{p}{U}\overset{q}{\psi}_0 - (q+2)\overset{p}{\omega}\overset{q}{\psi}_1 - \overset{p}{\mu}\overset{q}{\psi}_0\}\right]$$

$$+\sum_{n=4}^{\infty}\left[\frac{1}{r^n}\sum_{p+q=n}(-\overset{p}{X}{}^k\partial_k\overset{q}{\psi}_0 + 4\overset{p}{\gamma}\overset{q}{\psi}_0 - 4\overset{p}{\tau}\overset{q}{\psi}_1)\right]$$

L'identification des coefficients de $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^n}$ $(n \geqslant 4)$ des membres de (III-27) donne successivement :

$$\text{(III-28)} \qquad \partial_u\overset{3}{\psi}_0 = 3\overset{1}{\sigma}\overset{1}{\psi}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla\overset{2}{\psi}_1 - 2\overset{0}{\beta}\overset{2}{\psi}_1,$$

---

(1) $\partial_u \equiv \dfrac{\partial}{\partial u}$.

(2) Dans (III-27) l'indice p de $\overset{p}{\xi}$, $\overset{p}{\beta}$, $\overset{p}{U}$, $\overset{p}{\mu}$ satisfait $p \geqslant p_0 = 0$, l'indice p de $\overset{p}{\sigma}$, $\overset{p}{\gamma}$, $\overset{p}{\omega}$, $\overset{p}{X}$ satisfait $p \geqslant p_0 = 1$, l'indice q de $\overset{q}{\psi}_A$ satisfait $p \geqslant q_0 = 3 - A$.

$$\text{(III-29)}\quad \partial_u \overset{4}{\psi}_0 = 3\overset{1}{\sigma}\overset{2}{\psi}_2 + 3\overset{2}{\sigma}\overset{1}{\psi}_2 + \overset{1}{\xi}{}^k\partial_k\overset{2}{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla\overset{3}{\psi}_1 - 2\overset{0}{\beta}\overset{3}{\psi}_1 - 2\overset{1}{\beta}\overset{2}{\psi}_1 + 5\overset{0}{\mathrm{U}}\overset{3}{\psi}_0 - 4\overset{1}{\omega}\overset{2}{\psi}_1 - \overset{0}{\mu}\overset{3}{\psi}_0,$$

$$\text{(III-30)}\quad \partial_u \overset{n+1}{\psi}_0 = \sum_{p+q=n} [(3\overset{p}{\sigma}\overset{q}{\psi}_2 + \overset{p}{\xi}{}^k\partial_k\overset{q}{\psi}_1 - 2\overset{p}{\beta}\overset{q}{\psi}_1) + (q+2)(\overset{p}{\mathrm{U}}\overset{q}{\psi}_0 - \overset{p}{\omega}\overset{q}{\psi}_1 - \overset{p}{\mu}\overset{q}{\psi}_0 - \overset{p}{\mathrm{X}}{}^k\partial_k\overset{q}{\psi}_0 + 4(\overset{p}{\gamma}\overset{q}{\psi}_0 - \overset{p}{\tau}\overset{q}{\psi}_1))].$$

La propriété (*d*) que possèdent les $\overset{i}{\sigma}$, $\overset{i}{\xi}$, $\overset{i}{\mathrm{U}}$, $\overset{i}{\omega}$, $\overset{i}{\mu}$, $\overset{i}{\mathrm{X}}{}^k$, $\overset{i}{\gamma}$, $\overset{i}{\tau}$ entraînent la propriété (*d*) pour les $\partial_u \overset{n+1}{\psi}_0$. Si nous tenons compte maintenant des relations (III-14 $\to$ 22) nous déduisons que les $\partial_u\overset{i}{\psi}_0$ ($i = 3, 4, 5, \ldots$) ne sont fonction que des $\overset{1}{\sigma}$, $\overset{2}{\psi}_1$ la partie réelle de $\overset{1}{\psi}_2$ et les $\overset{j}{\psi}_0$ avec $j < i$. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer, au voisinage de $u = {}_0u$ une solution retardée, sur un espace-temps asymptotiquement plat, et développable en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$. Il suffit de se donner certaines fonctions sur l'hypersurface caractéristique $u = {}_0u$ et sur le domaine $r = \infty$. En effet le second membre de (III-25) est connu si l'on se donne $\overset{1}{\sigma}$, fonction de trois variables u, θ, φ de classe c^2 par rapport à ces variables, et indéfiniment dérivable par rapport à θ, φ.

La donnée d'une fonction réelle de deux variables θ et φ de classe C^∞ $[\overset{1}{\bar{\psi}}_2({}_0u, \theta, \varphi) + \overset{1}{\psi}_2({}_0u, \theta, \varphi)]$ permet avec (III-22) de déterminer, après intégration par rapport à u, une solution $\overset{1}{\psi}_2$ de (III-25). Cette solution, introduite dans (III-26) permet, de même, d'obtenir une solution $\overset{2}{\psi}_1$ de cette équation en se donnant deux fonctions réelles de deux variables θ, φ de classe C^∞ ou une fonction complexe $\overset{2}{\psi}_1({}_0u, \theta, \varphi)$. La connaissance de $\overset{1}{\sigma}$, $\overset{2}{\psi}_1$ et $\overset{1}{\psi}_2$ entraîne alors celle des $\overset{n}{\mathrm{F}}$ (définis par (II-30), $\overset{n}{\omega}$, $\overset{n}{\mathrm{U}}$, $\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''}$ pour $n < 3$, en utilisant (III-17, 19 $\to$ 22, 6, 10, 12, 13) et entraîne celle du second membre de (III-28). Montrons que la donnée d'une infinité de fonctions de deux variables θ, φ de classe C^∞ : $\overset{n}{\psi}_0({}_0u, \theta, \varphi)$ permet d'achever l'intégration des équations du champ. En effet, $\overset{3}{\psi}_0({}_0u, \theta, \varphi)$ détermine la solution de (III-28) après intégration par rapport à u ; mais alors, les propriétés (*d*) des F, ω, U et $\psi_{\mathrm{A}''}$ montrent que les $\overset{n}{\mathrm{F}}$, $\overset{n}{\omega}$, $\overset{n}{\mathrm{U}}$, $\overset{n}{\psi}_{\mathrm{A}''}$ sont également déterminés pour $n = 3$. La démonstration se termine aisément en montrant que, si les $\overset{i}{\mathrm{F}}$, $\overset{i}{\omega}$, $\overset{i}{\mathrm{U}}$, $\overset{i}{\psi}_{\mathrm{A}''}$, $\overset{i}{\psi}_0$ sont connus pour $i \leqslant n$, la donnée de $\overset{n+1}{\psi}_0({}_0u, \theta, \varphi)$, après intégration par rapport à u de (III-27), détermine $\overset{n+1}{\psi}_0$ et par suite les $\overset{n+1}{\mathrm{F}}$, $\overset{n+1}{\omega}$, $\overset{n+1}{\mathrm{U}}$, $\overset{n+1}{\psi}_{\mathrm{A}''}$.

Les équations du champ non utilisées sont alors identiquement vérifiées.

IV. LE CAS DU CHAMP NON-RADIATIF

Nous supposons maintenant que le champ est non-radiatif. L'hypothèse (I-1) s'écrit dans notre notation:

$$\overset{-1}{\psi}_4 = 0, \tag{IV-1}$$

c'est-à-dire d'après (III-21):

$$\frac{\partial^2 \overset{1}{\sigma}}{\partial u^2} = 0. \tag{IV-2}$$

ce qui entraîne que les parties réelle et imaginaire de $\overset{1}{\sigma}$ sont des polynômes en u de degré un au plus.

Des équations (III-14 → 22), (II-31) et (IV-2) nous déduisons:

$$\frac{\partial \overset{0}{\beta}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\alpha}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\mu}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\mathrm{U}}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\nu}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\psi}_3}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\lambda}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\xi}}{\partial u} = 0 \tag{IV-3}$$

$$\frac{\partial^2 \overset{1}{\omega}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2(\overset{1}{\psi}_2 - \overset{1}{\bar{\psi}}_2)}{\partial u^2} = 0. \tag{IV-4}$$

De même les relations (IV-2, III-25, 26) entraînent:

$$\frac{\partial^2 \overset{1}{\psi}_2}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 \overset{2}{\psi}_1}{\partial u^3} = 0. \tag{IV-5}$$

Remarquons que les relations (IV-1 → 5) sont encore vérifiées si on remplace les fonctions qui y figurent par leur conjugué ou par leurs dérivées par rapport à θ et φ. De plus toutes ces fonctions sont infiniment dérivables par rapport à u.

Les relations (IV-1 → 5) et la propriété (d) que possèdent les $\overset{i}{\mathrm{F}}$, $\overset{i}{\omega}$, $\overset{i}{\mathrm{U}}$, $\overset{i}{\psi}_{\mathrm{A}''}$ entraînent immédiatement, pour $i < 3$:

$$\frac{\partial^{i+1} \overset{i}{\mathrm{F}}}{\partial u^{i+1}} = \frac{\partial^{i+1} \overset{i}{\mathrm{U}}}{\partial u^{i+1}} = \frac{\partial^{i+1} \overset{i}{\omega}}{\partial u^{i+1}} = \frac{\partial^{i+1} \overset{i}{\psi}_{\mathrm{A}''}}{\partial u^{i+1}} = 0. \tag{IV-6}$$

De même, le second membre de (III-27) possédant la propriété (*d*), on déduit de ce qui précède que la dérivée troisième par rapport à u du second membre de (III-28) est nulle. On a donc :

$$\text{(IV-7)} \qquad \frac{\partial^4 \overset{3}{\psi}_0}{\partial u^4} = 0.$$

La propriété (*d*) et (IV-7) montrent que (IV-6) est vérifié pour $i = 3$. Démontrons maintenant que (IV-1 $\to$ 5) entraînent

$$\text{(IV-8)} \qquad \frac{\partial^{i+1} \overset{i}{\psi}_0}{\partial u^{i+1}} = 0$$

et (IV-6) pour toutes les valeurs de i. Pour cela il suffit de prouver que si (IV-8) et (IV-6) sont vraies pour $i \leqslant n$ elles sont vraies pour $i = n + 1$, la vérification de ces relations pour une valeur de i, $i = 3$ étant déjà faite. Prenons la $(n + 1)^{\text{ème}}$ dérivée des membres de (III-30) par rapport à u. Celle du second membre est nulle à cause de la propriété (*d*) vérifiée par les coefficients qui y figurent et les propriétés (IV-6, 8) qu'ils vérifient également pour $i \leqslant n$. On en déduit donc :

$$\text{(IV-9)} \qquad \frac{\partial^{n+2} \overset{n+1}{\psi}_0}{\partial u^{n+2}} = 0.$$

La propriété (*d*), (IV-6, 8) véririfiées pour $i \leqslant n$, (IV-9) entraînent (IV-6) pour $i = n + 1$. Étudions maintenant les conséquences qu'entraînent les propriétés précédentes sur le tenseur métrique donné par (II-16). Nous introduisons (II-30, 31, 32) dans (II-16), nous obtenons :

$$g^{11} = 2\left(\overset{0}{\mathrm{U}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\mathrm{U}}}{r^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\omega}}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\omega}}}{r^n}\right)$$

$$g^{1i} = \frac{1}{r}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\mathrm{X}}{}^i}{r^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\omega}}}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\xi}{}^i}{r^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\omega}}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\xi}}{}^i}{r^n}\right)$$

$$g^{kl} = -\frac{1}{r^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\xi}{}^k}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\xi}}{}^l}{r^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\xi}}{}^k}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\xi}{}^l}{r^n}\right),$$

$$
\text{(IV-10)}\quad \begin{cases}
g^{11} = 2\left[\overset{0}{\mathrm{U}} + \dfrac{\overset{1}{\mathrm{U}}}{r} + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n}\left(\overset{n}{\mathrm{U}} + \sum_{p+q=n} \overset{p}{\omega}\overset{q}{\bar{\omega}}\right)\right] & \text{avec} \quad p \geqslant 1, \quad q \geqslant 1, \\
g^{1i} = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}\left[\overset{n}{\mathrm{X}}{}^i + \sum_{p+q=n} (\overset{p}{\bar{\omega}}\overset{q}{\xi}{}^i - \overset{p}{\omega}\overset{q}{\bar{\xi}}{}^i)\right] & \text{avec} \quad p \geqslant 1, \quad q \geqslant 0, \\
g^{kl} = -\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} (\overset{p}{\xi}{}^k\overset{q}{\bar{\xi}}{}^l + \overset{p}{\bar{\xi}}{}^k\overset{q}{\xi}{}^l) & \text{avec} \quad p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0.
\end{cases}
$$

Écrivons (IV-10) sous la forme suivante :

$$
\text{(IV-11)}\quad \begin{cases}
g^{11} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}{}^{11}}{r^n} & \text{avec} \quad \overset{0}{g}{}^{11} \equiv 2\overset{0}{\mathrm{U}},\ \overset{1}{g}{}^{11} \equiv \overset{1}{\mathrm{U}},\ \overset{n}{g}{}^{11} \equiv \overset{n}{\mathrm{U}} + \displaystyle\sum_{p+q=n} \overset{p}{\omega}\overset{q}{\bar{\omega}} \\
& \qquad \text{pour } n \geqslant 2, \\
g^{1i} = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}{}^{1i}}{r^n} & \text{avec} \quad \overset{n}{g}{}^{1i} \equiv \overset{n}{\mathrm{X}}{}^i + \displaystyle\sum_{p+q=n} (\overset{p}{\bar{\omega}}\overset{q}{\xi}{}^i - \overset{p}{\omega}\overset{q}{\bar{\xi}}{}^i), \\
g^{kl} = \dfrac{1}{r^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}{}^{kl}}{r^n} & \text{avec} \quad \overset{n}{g}{}^{kl} \equiv \overset{p}{\xi}{}^k\overset{q}{\bar{\xi}}{}^l - \overset{p}{\bar{\xi}}{}^k\overset{q}{\xi}{}^l.
\end{cases}
$$

D'après ce qui précède les $\overset{n}{g}{}^{\alpha\beta}$ sont infiniment dérivables par rapport à u. Appliquons $\dfrac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}}$ aux $\overset{n}{g}{}^{\alpha\beta}$ définis par (IV-11) et par :

$$
\text{(IV-12)}\quad \begin{cases}
g^{00} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}{}^{00}}{r^n} \\
g^{01} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}{}^{01}}{r^n} \quad \text{avec} \quad \overset{0}{g}{}^{0\mu} = \delta_1^\mu \quad \text{et} \quad \overset{n}{g}{}^{0\mu} = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1, \\
g^{oi} = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}{}^{0i}}{r^n}
\end{cases}
$$

d'après (II-13).

Nous obtenons, en utilisant (IV-6, 8) pour i quelconque

$$
\text{(IV-13)}\qquad \frac{\partial^{n+1}\overset{n}{g}{}^{\alpha\beta}}{\partial u^{n+1}} = 0, \qquad \text{quel que soit } n.
$$

En conclusion nous avons obtenu les résultats suivants pour le cas du champ non radiatif.

Si les coefficients de spin, les fonctions définissant le repère ($\mathscr{R}$) et les composantes ψ_A du tenseur de Weyl ont un développement en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$ sur $\Omega \subset V_4$ satisfaisant (II-30 → 33), si ces développements sont solutions des équations du vide (II-21 → 24) et si (IV-1) est satisfait sur (Ω), alors les coefficients $\overset{n}{F}$, $\overset{n}{U}$, $\overset{n}{\omega}$, $\overset{n}{\psi}_A$, $\overset{n}{g}{}^{\alpha\beta}$ des développements (II-30 → 33) et (IV-11, 12) sont des polynômes en u dont le degré est au plus égal à n.

Le résultat pour les composantes $g^{\alpha\beta}$ du tenseur métrique est identique à celui obtenu dans [*2*].

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude à M. le Professeur A. PAPAPETROU, Directeur de Recherches au C. N. R. S., pour les observations fructueuses qu'il a bien voulu me faire dans l'élaboration de ce travail.

RÉFÉRENCES

[*1*] I. MORET-BAILLY et A. PAPAPETROU, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. VI, n° 3, 1967, p. 205-218.
[*2*] I. MORET-BAILLY, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. IX, n° 4, 1968, p. 395-439.
[*3*] H. BONDI, M. VAN DER BURG et A. METZNER, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **269**, 1962, p. 21.
[*4*] R. SACHS, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **270**, 1962, p. 103.
[*5*] E. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 566.
[*6*] E. NEWMAN et T. UNTI, *J. Math. Phys.*, vol. 3, n° 5, 1962, p. 891.
[*7*] R. PENROSE, *An Analysis of the structure of space-time* (Department of Mathematics, Birkbeck College, London, 1968).

Cette étude constitue une partie de la thèse de Doctorat ès Sciences de Mme Irène MORET-BAILLY enregistrée au C. N. R. S. sous le numéro A. O. 3512, dont la soutenance est prévue pour octobre 1969 devant la Faculté des Sciences de Paris.

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1969).