ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

R. LAPIEDRA

Sur les équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, nº 3 (1969), p. 277-307
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_3_277_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A:
Vol. XI, n° 3, 1969, p. 277-307. *Physique théorique.*

Sur les équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel

par

R. LAPIEDRA

RÉSUMÉ. — On considère des doubles 2-formes symétriques, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, intimement apparentées aux doubles 2-formes symétriques des types III-*a* et III-*b* de la classification de Bel-Petrov et on donne les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire l'espace-temps de la Relativité Générale pour que les équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel admettent de telles solutions $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$.

INTRODUCTION

D'après le point de vue proposé par Lichnerowicz [*1*] et Pirani [*2*] [*3*], ce serait le tenseur de courbure, $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$, de la variété riemanienne, V4, décrivant l'espace-temps de la relativité générale, qui devrait être considéré comme le véritable tenseur champ gravitationnel. En fait, dans la formule de la déviation géodésique [*1*], celle-ci ne dépend des dérivées du tenseur métrique de V4 que par le biais de $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$.

On démontre [*1*] que les identités de Bianchi pour $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$,

$$(1) \qquad \underset{\rho\alpha\beta}{S} \nabla_\rho R_{\alpha\beta\lambda\mu} \equiv \nabla_\rho R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_\alpha R_{\beta\rho\lambda\mu} + \nabla_\beta \nabla_{\rho\alpha\lambda\mu} = 0$$

d'une part, et les équations d'Einstein d'autre part

$$(2) \qquad R_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta} \qquad \left(U_{\alpha\beta} \equiv T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(g^{\lambda\mu} T_{\lambda\mu})\right)$$

avec $T_{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie, entraînent

$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = \nabla_\lambda U_{\beta\mu} - \nabla_\mu U_{\beta\lambda} \tag{3}$$

et réciproquement (1) et (3) supposent (2) pourvu que l'on ait (2) sur une hypersurface orientée dans l'espace.

On peut voir facilement que (1) est équivalente à

$$\nabla_\alpha {}^*R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \qquad \left({}^*R_{\alpha\beta\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu}\right) \tag{4}$$

avec $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ le tenseur élément de volume de V4.

Ainsi, on pourrait prendre les équations

$$\nabla_\alpha {}^*R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = \nabla_\lambda U_{\beta\mu} - \nabla_\mu U_{\beta\lambda} \tag{6}$$

avec les équations (2) jouant le rôle de conditions initiales, comme les équations du champ gravitationnel, mais c'est d'un autre point de vue que nous nous placerons, comme on le verra par la suite.

Ce qui frappe tout d'abord des équations (5) (6) est leur ressemblance formelle avec les équations du champ électromagnétique en absence d'induction.

$$\nabla_\alpha \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta \tag{8}$$

où l'on sait que $F_{\alpha\beta}$ est une 2-forme qui représente le champ électromagnétique et $\vec{J}$ le vecteur courant électrique. C'est en exploitant cette ressemblance que Lichnerowicz a développé un formalisme pour traiter les ondes et radiations gravitationnelles en relativité générale et qu'il a développé un processus de quantification du champ gravitationnel à l'approximation linéaire.

Considérons un champ gravitationnel faible. Dans un système de coordonnées adéquat le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ de V4 s'écrira :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon\psi_{\alpha\beta} \tag{9}$$

où $\eta_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur métrique de Minkovski et ε est l'infiniment petit principal. Ce champ gravitationnel faible est « supporté » par l'espace de Minkowski et est intimement lié au tenseur variation $\psi_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique de Minkovski.

Le tenseur de courbure, $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$, correspondant à la métrique (9) est alors de l'ordre de ε et si l'on désigne par $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ la partie principale du tenseur de courbure, ce tenseur $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ satisfera aux mêmes propriétés de symétrie que $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$, c'est-à-dire :

$$H_{\alpha\beta\lambda\mu} = - H_{\beta\alpha\lambda\mu} = - H_{\alpha\beta\mu\lambda} = H_{\lambda\mu\alpha\beta} \tag{10}$$

$$H_{\alpha\beta\lambda\mu} + H_{\lambda\alpha\beta\mu} + H_{\beta\lambda\alpha\mu} = 0 \tag{11}$$

Supposons $U_{\alpha\beta}$ être tel que le deuxième membre de (6) s'annule. Dans ces conditions, l'on aura pour (5) et (6)

$$\nabla_\alpha {}^*R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{12}$$

$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{13}$$

ce qui donne *modulo* $0(\varepsilon^2)$

$$\partial_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{14}$$

$$\partial_\alpha H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{15}$$

les indices étant élevés et abaissés à l'aide du tenseur $\eta_{\alpha\beta}$. Le tenseur $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ décrit alors le champ gravitationnel faible et les équations (14) (15) (avec $H_{\alpha\beta}$ donné sur une hypersurface orientée dans l'espace) sont les équations du champ.

Maintenant considérons un espace-temps donné, V4, et à partir de lui envisageons une petite variation, autrement dit posons au lieu de (9)

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \varepsilon\psi_{\alpha\beta} \tag{16}$$

où $g_{\alpha\beta}$ représente le tenseur métrique initial et $g'_{\alpha\beta}$ le tenseur varié. Nous considérerons le champ gravitationnel comme étant « supporté » par V4, son existence étant liée à la variation de V4, donnée pour le tenseur $\psi_{\alpha\beta}$, ce qui est en accord avec le rôle joué par $\psi_{\alpha\beta}$ dans (9) [*4*].

Le tenseur $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, c'est-à-dire le terme d'ordre un en ε du tenseur de courbure $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ construit avec les $g'_{\alpha\beta}$, satisfera encore aux relations (10) (11), mais en général, il ne satisfera pas aux équations

$$\nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0, \qquad \nabla_\alpha H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{17}$$

qui, l'équation (13) supposée satisfaite, prennent dans le cas présent la place des équations (14) (15). Ainsi nous tournons la question comme ceci : nous nous donnons comme équations du champ gravitationnel, les équations

$$\nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0, \qquad \nabla_\alpha H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = \nabla_\lambda U_{\beta\mu} - \nabla_\mu U_{\beta\lambda} \tag{18}$$

avec pour $U_{\alpha\beta}$

$$U_{\alpha\beta} \equiv T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(g^{\lambda\mu} T_{\lambda\mu}) \tag{19}$$

où $T_{\alpha\beta}$ est un tenseur conservatif. Nous ajoutons encore la condition supplémentaire

$$U_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \tag{20}$$

condition qu'il suffit de vérifier sur une hypersurface Σ orientée dans l'espace. Dans (18), $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ est un tenseur lié à la présence de $\psi_{\alpha\beta}$ et doué des propriétés de symétrie (10) (11). Il décrit le champ gravitationnel.

Désormais, nous parlerons de (18) comme des équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel.

En fait, en prenant comme équations du champ gravitationnel les équations (18), Lichnerowicz [*1*] [*4*] a développé un processus de quantification du champ gravitationnel dans des espaces-temps de Minkovski et à courbure constante, respectivement.

En accord avec ce point de vue, nous nous proposons d'examiner dans la partie première de ce travail quelles conditions doit remplir un espace-temps pour que sur lui on puisse trouver des solutions, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, des équations (18) avec un certain $T_{\alpha\beta}$ donné, ces solutions devant satisfaire aux relations de symétrie (10) (11). Certes, d'après ce qu'on a dit au début de cette introduction, nous connaissons trivialement une condition suffisante pour qu'il existe de telles solutions : qu'on soit dans le vide. Mais nous donnerons ici des conditions nécessaires et suffisantes, tout en nous limitant au cas où $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ est algébriquement le plus simple possible. Plus précisément nous étudierons deux cas pour $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, intimement liés aux cas III-*a*, III-*b* de la classification de Bel-Petrov des doubles 2-formes symétriques [*5*]. Pour $T_{\alpha\beta}$, nous nous donnerons l'expression

$$T_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta \tag{21}$$

avec τ un certain scalaire nul ou pas et $\vec{l}$ un vecteur isotrope. Ceci donne pour $U_{\alpha\beta}$, en vertu de (19) :

$$U_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta \tag{22}$$

ce qui revient à dire en vertu de (20) que nous limitons notre étude au cas où $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ admet un tenseur de Ricci de la forme

$$H_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta \tag{23}$$

SECTION I

QUELQUES CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

1. La variété espace-temps.

Nous désignerons par V_4 la variété riemanienne censée représenter l'espace-temps de la relativité générale. Le ds^2 de V_4 sera supposé être de signature -2 et dans un système de coordonnées locales x^α, on aura :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Les indices grecs α, β, ... varieront toujours de 0 à 3 et les latins $i, j, \ldots$ de 1 à 3.

2. La distorsion, la rotation et la dilatation d'une congruence de courbes géodésiques et isotropes.

Une congruence de courbes est une famille de courbes à trois paramètres

$$x^\alpha = x^\alpha(s, y^i) \tag{2.1}$$

les y^i étant constantes le long de chaque courbe.

Les paramètres s, y^i étant fixés, à chaque congruence de courbes on peut associer un champ de vecteurs

$$l^\alpha = \frac{\partial x^\alpha(s, y^i)}{\partial s} \tag{2.2}$$

Nous supposerons la congruence (2.1) être isotrope et géodésique, c'est-à-dire, d'une part

$$l^\alpha l_\alpha = 0 \tag{2.3}$$

et d'autre part

$$l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = c l_\alpha \tag{2.4}$$

ou bien encore choisissant convenablement le paramètre s

$$l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = 0 \tag{2.5}$$

Quand (2.4) se ramène à (2.5) on dit de s qu'il est un paramètre affine.

Donnons-nous trois champs de vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{K}$, tels que l'on ait

(2.6) $\vec{l}.\vec{X}=\vec{l}.\vec{Y}=\vec{K}.\vec{X}=\vec{K}.\vec{Y}=\vec{K}^2=\vec{X}.\vec{Y}=0, \quad \vec{X}^2=\vec{Y}^2=-1, \quad \vec{K}.\vec{l}=1$

De $\vec{l}$, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{K}$ on dit alors qu'ils forment un repère quasi orthonormé adapté à la congruence à laquelle le champ de vecteurs $\vec{l}$ est associé. Cette congruence nous la noterons dorénavant $\Gamma(\vec{l})$.

Maintenant, $\vec{l}$ étant donné, les relations (2.6) déterminent les vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{K}$, aux transformations près

(2.7) $$S^\alpha \to S^{\alpha\prime} = e^{i\varphi}(S^\alpha - \bar{\eta}l^\alpha)$$

(2.8) $$K^\alpha \to K^{\alpha\prime} = K^\alpha - \eta S^\alpha - \bar{\eta}\bar{S}^\alpha + \eta\bar{\eta}l^\alpha$$

où nous avons posé

(2.9) $$S^\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^\alpha + iY^\alpha)$$

φ étant un scalaire réel, η un scalaire complexe, $\bar{\eta}$ son complexe conjugué et $\bar{S}^\alpha$ le complexe conjugué de S^α.

Ceci dit, on définit les scalaires réels taux de distorsion, D, de rotation, ω et de dilatation, θ, de $\Gamma(\vec{l})$ comme ceci [*6*]

(2.10) $$D^2 \equiv \sigma\bar{\sigma} \qquad (\bar{\sigma} \text{ complexe conjugué de } \sigma)$$

(2.11) $$\theta + i\omega \equiv \zeta$$

où σ et ζ valent

(2.12) $$\sigma \equiv \quad S^\alpha S^\beta \nabla_\alpha l_\beta$$

(2.13) $$\zeta \equiv -\, S^\alpha \bar{S}^\beta \nabla_\alpha l_\beta$$

A l'aide des vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, les scalaires ω, θ, D s'écrivent encore (*)

(2.14) $$\omega = \frac{1}{2}(X^\alpha Y^\beta - X^\beta Y^\alpha)\nabla_\alpha l_\beta, \qquad \theta = -\frac{1}{2}(X^\alpha X^2 + Y^\alpha Y^\beta)\nabla_\alpha l_\beta$$

(2.15) $$D = (H^2 + K^2)^{1/2}$$

(*) L'expression de θ qu'on donne par la suite suppose que le scalaire c figurant dans (2.4) est nul.

avec

$$(2.16)\quad H \equiv \frac{1}{2}(X^\alpha Y^\beta + X^\beta Y^\alpha)\nabla_\alpha l_\beta, \qquad K \equiv \frac{1}{2}(X^\alpha X^\beta - Y^\alpha Y^\beta)\nabla_\alpha l_\beta$$

Compte tenu de (2.12), (2.13), on démontre aisément que D, ω et θ sont invariantes vis-à-vis des transformations (2.7). Plus précisément, on démontre [*6*] [*7*] que l'on a

$$(2.17)\qquad D = \frac{1}{2}[\nabla_\alpha l_\beta(\nabla^\alpha l^\beta + \nabla^\beta l^\alpha) - \nabla_\alpha l^\alpha]^{1/2}$$

$$(2.18)\qquad \omega^2 = \nabla_\alpha l_\beta(\nabla^\alpha l^\beta - \nabla^\beta l^\alpha), \qquad \theta = \frac{1}{2}\nabla_\alpha l^\alpha$$

SECTION II

LES ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR DU CHAMP GRAVITATIONNEL POUR DES DOUBLES 2-FORMES SINGULIÈRES

3. Les doubles 2-formes singulières.

En reprenant les définitions de Lichnerowicz, soit $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ une double 2-forme singulière de vecteur fondamental $\vec{l}$, c'est-à-dire, d'une part (définition de double 2-forme symétrique)

$$(3.1)\qquad H_{\alpha\beta\lambda\mu} = H_{\lambda\mu\alpha\beta}$$

$$(3.2)\qquad H_{\alpha\beta\lambda\mu} = -H_{\beta\alpha\lambda\mu} = -H_{\alpha\beta\mu\lambda}$$

et d'autre part, il existe un vecteur $\vec{l}$ (nécessairement isotrope [*1*]) tel que

$$(3.3)\qquad l^\alpha H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$$

$$(3.4)\qquad l^\alpha {}^*H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$$

où nous avons posé

$$(3.5)\qquad {}^*H_{\alpha\beta\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}H^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu}$$

$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ étant le tenseur élément de volume.

L'on démontre [*1*] que toute double 2-forme singulière, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, de vecteur fondamental $\vec{l}$ peut s'écrire sous la forme

$$(3.6)\qquad H_{\alpha\beta\lambda\mu} = aF_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu} + b\overset{*}{F}_{\alpha\beta}\overset{*}{F}_{\lambda\mu}$$

où $F_{\alpha\beta}$ est une 2-forme singulière de vecteur fondamental $\vec{l}$, c'est-à-dire

$$F_{\alpha\beta} = - F_{\beta\alpha} \tag{3.7}$$

$$l^\alpha F_{\alpha\beta} = \quad l^\alpha \overset{*}{F}_{\alpha\beta} = 0 \qquad \left(\overset{*}{F}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}\right) \tag{3.8}$$

$F_{\alpha\beta}$ étant une 2-forme singulière de vecteur fondamental $\vec{l}$, on sait que $F_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{F}_{\alpha\beta}$ peuvent s'écrire sous la forme (à un facteur près) [2]

$$F_{\alpha\beta} = l_\alpha X_\beta - l_\beta X_\alpha \tag{3.9}$$

$$\overset{*}{F}_{\alpha\beta} = l_\alpha Y_\beta - l_\beta Y_\alpha \tag{3.10}$$

où $\vec{X}$, $\vec{Y}$ sont deux vecteurs d'espace tel que

$$\vec{l}.\vec{X} = \vec{l}.\vec{Y} = \vec{X}.\vec{Y} = 0, \qquad \vec{X}.\vec{X} = \vec{Y}.\vec{Y} = -1 \tag{3.11}$$

De (3.6), (3.9), (3.10) on tire alors facilement deux conclusions. La première est que $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ satisfait automatiquement à la relation

$$H_{\alpha\beta\lambda\mu} + H_{\lambda\alpha\beta\mu} + H_{\beta\lambda\alpha\mu} = 0 \tag{3.12}$$

la deuxième est que

$$H_{\alpha\mu} \equiv H_\alpha{}^\beta{}_{\beta\mu} = \tau l_\alpha l_\mu \qquad (\tau \equiv a + b) \tag{3.13}$$

Si $\tau = 0$, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ correspond alors au cas III-*b* de la classification de Bel-Petrov [5] des doubles 2-formes symétriques à tenseur de Ricci nul. Nous étudierons tout de même le cas $\tau \neq 0$.

Maintenant de (3.6) on trouve tout de suite

$$*H_{\alpha\beta\lambda\mu} = a\overset{*}{F}_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu} - bF_{\alpha\beta}\overset{*}{F}_{\lambda\mu} \tag{3.14}$$

et si nous définissons

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(F^{\alpha\beta} + i\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}) \tag{3.15}$$

$$\overline{\mathcal{F}}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(F^{\alpha\beta} - i\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}) \tag{3.16}$$

l'on trouve, compte tenu de (3.6), (3.14)

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\mu} \equiv H_{\alpha\beta\lambda\mu} + i*H_{\alpha\beta\lambda\mu} = (\beta\mathcal{F}_{\lambda\mu} + \tau\overline{\mathcal{F}}_{\lambda\mu})\mathcal{F}_{\alpha\beta} \tag{3.17}$$

où nous avons posé

$$\beta \equiv a - b \tag{3.18}$$

4. Les équations du champ dans un repère quasi orthonormé.

A l'aide de (3.17) et (22), les équations du champ (18) s'écrivent

$$\nabla_\alpha \mathcal{H}^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = \nabla_\lambda(\tau l_\beta l_\mu) - \nabla_\mu(\tau l_\beta l_\lambda) \tag{4.1}$$

et quand on substitue dans (4.1) l'expression de $\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\mu}$ donnée par (3.17) on trouve

$$\begin{aligned}(\beta\mathcal{F}_{\lambda\mu} + \tau\overline{\mathcal{F}}_{\lambda\mu})\nabla_\alpha\mathcal{F}^\alpha_\beta + \mathcal{F}^\alpha_\beta(\beta\nabla_\alpha\overline{\mathcal{F}}_{\lambda\mu} + \tau\nabla_\alpha\overline{\mathcal{F}}_{\lambda\mu} + \mathcal{F}_{\lambda\mu}\partial_\alpha\beta + \overline{\mathcal{F}}_{\lambda\mu}\partial_\alpha\tau)\\ = (l_\mu\partial_\lambda\tau - l_\lambda\partial_\mu\tau)l_\beta + \tau(\nabla_\lambda l_\mu - \nabla_\mu l_\lambda)l_\beta + \tau(l_\mu\nabla_\lambda l_\beta - l_\lambda\nabla_\mu l_\beta)\end{aligned} \tag{4.2}$$

Nous introduisons maintenant le vecteur isotrope $\vec{K}$ tel que les quatre vecteurs $\vec{l}$, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{K}$ forment un repère quasi orthonormé adapté à $\Gamma(\vec{l})$, c'est-à-dire

$$\vec{K}.\vec{X} = \vec{K}.\vec{Y} = 0, \qquad \vec{K}.\vec{l} = 1 \tag{4.3}$$

Mais au lieu de considérer le repère $\vec{l}$, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{K}$, nous considérerons le repère $\vec{l}$, $\vec{S}$, $\vec{\overline{S}}$, $\vec{K}$, avec $\vec{S}$ défini par (2.9) et $\vec{\overline{S}}$ son complexe conjugué.

On aura donc pour les quatre vecteurs $\vec{l}$, $\vec{S}$, $\vec{\overline{S}}$, $\vec{K}$ les relations

$$\vec{l}.\vec{l} = \vec{K}.\vec{K} = \vec{S}\cdot\vec{S} = \vec{l}.\vec{S} = \vec{K}.\vec{S} = 0 \tag{4.4}$$

$$\vec{S}.\vec{\overline{S}} = -1, \qquad \vec{K}.\vec{l} = 1 \tag{4.5}$$

et les vecteurs $\vec{S}$, $\vec{K}$ seront déterminés aux transformations (2.7) (2.8) près.

A l'aide des vecteurs $\vec{S}$, $\vec{\overline{S}}$, les 2-formes $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ et $\overline{\mathcal{F}}^{\alpha\beta}$ s'écrivent respectivement

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = l^\alpha S^\beta - l^\beta S^\alpha \tag{4.6}$$

$$\overline{\mathcal{F}}^{\alpha\beta} = l^\alpha \overline{S}^\beta - l^\beta \overline{S}^\alpha \tag{4.7}$$

compte tenu de quoi on a pour (4.2) dans le repère $\vec{l}$, $\vec{S}$, $\vec{\overline{S}}$, $\vec{K}$ (nous écrivons à gauche de chaque équation les trois vecteurs de ce repère sur lesquels on a projeté pour obtenir l'équation en question).

(4.8) $K^\beta S^\lambda l^\mu$, $\qquad -\tau S^\alpha \dot{l}_\alpha = 0$

(4.9) $S^\beta K^\lambda l^\mu$, $\qquad \beta S^\alpha \dot{l}_\alpha = 0$

(4.10) $K^\beta K^\lambda l^\mu$, $\qquad -\tau\zeta + \beta\sigma = -\dot{\tau} - 2\tau K^\alpha \dot{l}_\alpha$

$$(4.11)\quad K^\beta\bar{S}^\lambda S^\mu, \qquad -\beta\sigma - \tau\zeta = \tau(\zeta - \bar{\zeta})$$

$$(4.12)\quad S^\beta K^\lambda S^\mu, \qquad \tau\sigma = -\tau\sigma$$

$$(4.13)\quad \bar{S}^\beta K^\lambda S^\mu, \qquad \dot{\tau} + 2\tau K^\alpha \dot{l}_\alpha + \tau\bar{\zeta} = \tau\zeta$$

$$(4.14)\quad K^\beta K^\lambda S^\mu, \qquad S^\alpha \partial_\alpha \tau - \tau(\Gamma - 2S^\alpha V_\alpha) = -S^\alpha\partial_\alpha\tau + \tau(\Gamma - 2S^\alpha V_\alpha)$$

$$(4.15)\quad S^\beta K^\lambda \bar{S}^\mu, \qquad \beta\sigma = \tau\bar{\zeta}$$

$$(4.16)\quad \bar{S}^\beta K^\lambda \bar{S}^\mu, \qquad \dot{\beta} + \bar{\zeta}\beta + 2\beta S_\alpha \dot{\bar{S}}^\alpha + 2\beta K^\alpha \dot{l}_\alpha = -\tau\bar{\sigma}$$

$$(4.17)\quad K^\beta K^\lambda \bar{S}^\mu, \qquad S^\alpha\partial_\alpha\beta + \beta(2S^\alpha V_\alpha - \Gamma - 2\Sigma) = -S^\alpha\partial_\alpha\tau + \tau(\bar{\Gamma} - 2\bar{S}^\alpha V_\alpha)$$

les autres composantes de (4.2) s'annulant identiquement ou se ramenant aux équations précédentes en vertu de l'antisymétrie des indices λ, μ dans (4.2). Nous avons utilisé les notations suivantes :

$$(4.18)\qquad \dot{-} \equiv l^\rho \nabla_\rho -$$

$$(4.19)\qquad V_\alpha \equiv K^\rho \nabla_\alpha l_\rho$$

$$(4.20)\qquad \Gamma \equiv K^\alpha S^\beta \nabla_\alpha l_\beta$$

$$(4.21)\qquad \Sigma \equiv S^\alpha \bar{S}^\beta \nabla_\alpha l S_\beta$$

Pour σ et $\zeta \equiv \theta + i\omega$ valent les expressions (2.12), (2.13). De (4.8), (4.9) et du fait que l'on a $\beta^2 + \tau^2 \neq 0$ (autrement d'après (3.17) $\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\mu}$ serait nul), on trouve

$$(4.22)\qquad S^\alpha \dot{l}_\alpha = 0$$

Ainsi, le vecteur isotrope $\vec{l}$ est géodésique et les scalaires $D \equiv (\sigma\bar{\sigma})^{1/2}$, θ, ω sont bien les taux de distorsion, de dilatation et de rotation respectivement de la congruence $\Gamma(\vec{l})$ (rappelons que ces notions n'avaient été définies dans le paragraphe 2 que pour des congruences isotropes géodésiques) dont le champ de vecteurs associé est le champ des vecteurs $\vec{l}$. Rappelons encore que D, θ, ω sont invariants vis-à-vis des transformations (2.7) et précisons que désormais au lieu de parler de taux de distorsion, etc., nous parlerons de distorsion, de dilatation et de rotation tout court.

Dorénavant, puisque $\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\mu}$ dans l'équation (3.17) ne change pas si on substitue $\vec{l}$ par $h\vec{l}$ et τ, β par $h^{-2}\tau$, $h^{-2}\beta$, respectivement (h un scalaire quelconque) nous supposerons $\vec{l}$ être tel que l'on a

$$(4.23)\qquad \vec{K}.\dot{\vec{l}} = 0$$

ce qui équivaut à utiliser une paramétrisation affine sur la congruence $\Gamma(\vec{l})$. Compte tenu de cela, on voit aisément que le système des équations (4.8)-(4.17) se ramène à

$$\dot{l}^\alpha = 0 \tag{4.24}$$

$$\sigma = 0 \tag{4.25}$$

$$\tau\zeta = 0 \tag{4.26}$$

$$\dot{\tau} = 0 \tag{4.27}$$

$$\dot{\beta} + \bar{\zeta}\beta + 2S_\alpha\dot{\bar{S}}^\alpha\beta = 0 \tag{4.28}$$

$$S^\alpha\partial_\alpha\tau + \tau(2S^\alpha V_\alpha - \Gamma) = 0 \tag{4.29}$$

$$S^\alpha\partial_\alpha\beta + \beta(2S^\alpha V_\alpha - \Gamma - 2\Sigma) = 0 \tag{4.30}$$

Dans ce système (4.24), (4.25) signifient que $\Gamma(\vec{l})$ est géodésique et sans distorsion et (4.26) signifie que ou bien τ ou bien la rotation et la dilatation de $\Gamma(\vec{l})$ sont nulles.

L'équation (4.27) donne la loi de propagation de τ le long de $\Gamma(\vec{l})$. D'une manière analogue, l'équation (4.28) donne la loi de propagation de β le long de $\Gamma(\vec{l})$ et aussi celle de $\vec{S}$ pourvu que $\beta \neq 0$, comme on le verra avec un peu plus de détail par la suite.

Il nous reste alors l'examen des conditions d'intégrabilité des équations (4.27), (4.28), (4.29) et (4.30). Pour cela, nous allons examiner séparément deux cas, selon que τ soit nul ou pas.

5. Le cas $\tau = 0$.

Sous cette condition, le système (4.24)-(4.30) s'écrit :

$$\dot{l}^\alpha = 0 \tag{5.1}$$

$$\sigma = 0 \tag{5.2}$$

$$(\lg\beta)^{\bullet} + \bar{\zeta} + 2S_\alpha\dot{\bar{S}}^\alpha = 0 \tag{5.3}$$

$$S^\alpha\partial_\alpha \lg\beta + 2S^\alpha V_\alpha - \Gamma - 2\Sigma = 0 \tag{5.4}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, (5.3) s'écrit :

$$(\lg\beta)^{\bullet} = -\theta \tag{5.5}$$

$$2S^\alpha\dot{\bar{S}}_\alpha = i\omega \tag{5.6}$$

la première de ces deux équations donnant la loi de propagation de β le long de $\Gamma(\vec{l})$. En ce qui concerne la deuxième équation, considérons un vecteur complexe $\vec{R}$ satisfaisant aux relations :

$$\vec{R}.\vec{\bar{R}} = -1, \qquad \vec{R}.\vec{R} = \vec{R}.\vec{l} = 0 \tag{5.7}$$

Le vecteur $\vec{S}$ solution de (5.6) et le vecteur $\vec{R}$ sont alors reliés par une formule de transformation du type de celle de (2.7), c'est-à-dire

$$\vec{S} = e^{i\varphi}(\vec{R} - \bar{\eta}\,\vec{l}) \tag{5.8}$$

Supposons en outre que $\vec{R}$ se propage par parallélisme le long de $\Gamma(\vec{l})$

$$\dot{\vec{R}} = 0 \tag{5.9}$$

Si on substitue (5.8) dans (5.6), on obtient, compte tenu de (5.9)

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega}{2} \tag{5.10}$$

Ainsi, si nous donnons à $\vec{R}$ une rotation d'angle φ dans son propre plan, cet angle se propageant le long de $\Gamma(\vec{l})$ selon (5.10), nous obtenons justement le vecteur $\vec{S}$ solution de (5.6).

On voit que quand on substitue (5.8) dans (5.6), η reste arbitraire. En effet, il n'apparaît pas dans (5.10). Remarquons qu'il fallait s'attendre à un tel résultat du moment que $\mathcal{K}_{\alpha\beta\lambda\mu}$ lui-même, est invariant vis-à-vis des transformations de la forme (2.7) quand $\varphi = 0$.

Maintenant soit $\vec{C}$ le vecteur isotrope qui forme avec le vecteur $\vec{l}$, $\vec{R}$ un repère quasi orthonormé, c'est-à-dire

$$\vec{C}.\vec{l} = 1, \qquad \vec{C}.\vec{R} = 0 \tag{5.11}$$

Le vecteur $\vec{K}$ sera alors relié aux vecteurs $\vec{l}$, $\vec{R}$, pour une relation de la forme (2.7)

$$\vec{K} = \vec{C} - \eta\vec{R} - \bar{\eta}\,\vec{\bar{R}} + \eta\bar{\eta}\,\vec{l} \tag{5.12}$$

Substituons (5.8), (5.12) dans (5.4). On obtient

$$R^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg \beta + 2iR^{\alpha}\partial_{\alpha}\varphi + 2R^{\alpha}V'_{\alpha} - \Gamma' - 2\Sigma' = 0 \tag{5.13}$$

où nous avons utilisé les notations évidentes d'après (4.19), (4.20), (4.21).

(5.14) $$V'_\alpha \equiv C^\beta \nabla_\alpha l_\beta, \qquad \Gamma' \equiv C^\alpha R^\beta \nabla_\alpha l_\beta, \qquad \Sigma' \equiv R^\alpha \bar{R}^\beta \nabla_\alpha R_\beta$$

Or les équations (5.5) (5.10) déterminent non pas β et φ respectivement, mais seulement leur propagation le long de $\Gamma(\vec{l})$, ce qui revient à dire que β et φ sont déterminés, chacun, à une fonction près, ces deux fonctions étant arbitraires sur une hypersurface ψ, d'équation locale $f(X^\alpha) = 0$, transversale à $\Gamma(\vec{l})$. C'est-à-dire :

(5.15) $$l^\alpha \partial_\alpha f \neq 0$$

Nous pouvons donc disposer de ces deux fonctions de manière à ce que β et φ satisfassent à (5.13). Pour cela faire, ψ sera choisie de manière à avoir sur ψ

(5.16) $$S^\alpha \partial_\alpha f = 0$$

ce qui est toujours possible.

Voyons ce qu'il en est de (5.13) en dehors de ψ. Pour cela, nous calculerons la dérivée de (5.13) le long de $\Gamma(\vec{l})$ compte tenu (5.1), (5.2), (5.5), (5.10), on obtient :

(5.17) $$(R^\alpha \dot{\partial}_\alpha \lg \beta) = - R^\alpha \partial_\alpha \theta + \theta R^\alpha V'_\alpha - \zeta R^\alpha \partial_\alpha \lg \beta$$

(5.18) $$(R^\alpha \dot{V}'_\alpha) = - \zeta R^\alpha V'_\alpha + R(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$$

(5.19) $$\dot{\Gamma}' = - \bar{\zeta} \Gamma' + R(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$$

(5.20) $$\dot{\Sigma}' = - \zeta \Sigma' - i R(\mathcal{F}', K')$$

(5.21) $$(R^\alpha \dot{\partial}_\alpha \varphi) = \frac{1}{2} R^\alpha \partial_\alpha \omega - \zeta R^\alpha \partial_\alpha \varphi - \frac{1}{2} \omega R^\alpha V'_\alpha$$

où nous avons posé

(5.22) $$R(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \equiv \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\lambda\mu} \mathcal{F}^{\alpha\beta\prime} \mathcal{G}^{\lambda\mu\prime}$$

(5.23) $$R(\mathcal{F}', K') \equiv \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\lambda\mu} \mathcal{F}^{\alpha\beta\prime} K^{\lambda\mu\prime}$$

$R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ désignant le tenseur de courbure de l'espace-temps et

(5.24) $$\mathcal{F}^{\alpha\beta\prime} \equiv l^\alpha R^\beta - l^\beta R^\alpha, \qquad \mathcal{G}^{\alpha\beta\prime} \equiv l^\alpha C^\beta - l^\beta C^\alpha, \qquad i K^{\alpha\beta} \equiv \bar{R}^\alpha R^\beta - \bar{R}^\beta R^\alpha$$

Pour obtenir (5.18), (5.19) nous avons fait usage de l'identité

$$(5.25) \qquad \nabla_\rho \nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\alpha \nabla_\rho l_\beta = R_{\sigma\beta\rho\alpha} l^\sigma$$

et pour obtenir (5.20) de l'identité analogue à (5.25) avec les dérivées secondes de $\vec{R}$.

Maintenant si on substitue (5.17)-(5.21) dans la dérivée le long de $\Gamma(\vec{l})$ de (5.13) l'on trouve

$$(5.26) \qquad \begin{aligned} & l^\rho \partial_\rho (R^\alpha \partial_\alpha \lg \beta + 2i R^\alpha \partial_\alpha \varphi + 2R^\alpha V'_\alpha - \Gamma' - 2\Sigma') \\ & \quad = - \zeta (R^\alpha \partial_\alpha \lg \beta + 2i R^\alpha \partial_\alpha \varphi + 2R^\alpha V'_\alpha - \Gamma' - 2\Sigma') \\ & \qquad - R^\alpha \partial_\alpha \bar{\zeta} + \bar{\zeta} R^\alpha V'_\alpha + \bar{\zeta}\Gamma' + R(\mathcal{F}', \mathcal{G}') + 2iR(\mathcal{F}', K') \end{aligned}$$

D'autre part, tous les calculs faits, on trouve

$$(5.27) \qquad R^\alpha \partial_\alpha \bar{\zeta} = (\bar{\zeta} - \zeta)\Gamma' + \bar{\zeta} R^\alpha V'_\alpha + iR(\mathcal{F}', K')$$

et avec cela (5.26) devient

$$(5.28) \qquad \begin{aligned} & l^\rho \partial_\rho (R^\alpha \partial_\alpha \lg \beta + 2i R^\alpha \partial_\alpha \varphi + 2R^\alpha V'_\alpha - \Gamma' - 2\Sigma') \\ & \quad = - \zeta (R^\alpha \partial_\alpha \lg \beta + 2i R^\alpha \partial_\alpha \varphi + 2R^\alpha V'_\alpha - \Gamma' - 2\Sigma') \\ & \qquad + R(\mathcal{F}', \mathcal{G}') + iR(\mathcal{F}', K) \end{aligned}$$

L'équation (5.13) étant satisfaite sur ψ, le simple examen de (5.28), nous dit que pour que (5.13) soit satisfaite partout, il faut et il suffit que la condition suivante d'intégrabilité soit satisfaite.

$$(5.29) \qquad R(\mathcal{F}', \mathcal{G}') + iR(\mathcal{F}', K') = 0$$

On démontre facilement, compte tenu de (5.1), (5.2) que la condition (5.29) est invariante vis-à-vis des transformations (2.7), (2.8), c'est-à-dire que (5.29) est une condition sur l'espace-temps et la congruence $\Gamma(\vec{l})$ seulement. On peut donc supprimer les primes dans (5.29) si l'on veut (pour $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ seront valables alors des définitions analogues à celles de (5.24), mais cette fois-ci, en faisant intervenir les vecteurs $\vec{S}$, $\vec{K}$ au lieu des vecteurs $\vec{R}$, $\vec{C}$). En résumé nous énonçons le théorème suivant :

THÉORÈME I. — Étant donné les équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel pour des doubles 2-formes singulières, de vecteur fondamental $\vec{l}$ et à tenseur de Ricci nul, pour qu'on puisse trouver des solutions de telles équations il faut et il suffit que

— la congruence isotrope $\Gamma(\vec{l})$ soit géodésique et sans distorsion ;

— la congruence $\Gamma(\vec{l})$ et le tenseur de courbure de l'espace-temps soient tels que l'on ait

$$R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) + iR(\mathcal{F}, K) = 0 \tag{5.30}$$

6. Le cas $\tau \neq 0$.

Ici il nous faudra encore distinguer deux cas selon que β est nul ou pas. Supposons tout d'abord que $\beta = 0$. Le système (4.24)-(4.30) s'écrit alors

$$\dot{l}^\alpha = 0 \tag{6.1}$$

$$\sigma = 0 \tag{6.2}$$

$$\zeta = 0 \tag{6.3}$$

$$\dot{\tau} = 0 \tag{6.4}$$

$$S^\alpha \partial_\alpha \lg \tau + 2S^\alpha V_\alpha - \Gamma = 0 \tag{6.5}$$

Les équations (6.1), (6.2) sont les mêmes équations que les (5.1), (5.2) respectivement : ainsi nous avons toujours une congruence $\Gamma(\vec{l})$ géodésique et sans distorsion. L'équation (6.3) signifie que maintenant $\Gamma(\vec{l})$ est aussi sans rotation, ni dilatation. En ce qui concerne (6.4), elle donne la loi de propagation de τ le long de $\Gamma(\vec{l})$ et il nous reste à analyser les conditions d'intégrabilité de (6.4), (6.5). Or, différemment de ce qui s'est passé avec (5.4), l'équation (6.5) est invariante vis-à-vis des transformations (2.7), (2.8) et nous ne pouvons disposer de φ pour qu'une des deux équations réelles de (6.5) soit satisfaite. Mais l'équation (6.4) laisse τ indéterminé sur une hypersurface, ψ, transversale à $\Gamma(\vec{l})$. Nous pouvons jouer sur cette indétermination dans τ de manière à ce qu'une des deux équations

$$X^\alpha \partial_\alpha \lg \tau + 2X^\alpha V_\alpha - \Gamma_1 = 0 \qquad (\Gamma_1 \equiv K^\alpha X^\beta \nabla_\alpha l_\beta) \tag{6.6}$$

$$Y^\alpha \partial_\alpha \lg \tau + 2Y^\alpha V_\alpha - \Gamma_2 = 0 \qquad (\Gamma_2 \equiv K^\alpha Y^\beta \nabla_\alpha l_\beta) \tag{6.7}$$

soit satisfaite sur ψ. Ainsi, pour ce qui est de l'autre équation, nous sommes amenés à étudier aussi les conditions d'intégrabilité de (6.6), (6.7). Pour cela nous allons calculer l'expression

$$X^\rho \partial_\rho (Y^\alpha \partial_\alpha l_y \tau + 2Y^\alpha V_\alpha - \Gamma_2) \tag{6.8}$$

sur l'hypersurface ψ où nous supposons que τ a été choisi de manière à ce que (6.6) soit satisfaite sur ψ.

On obtient, compte tenu de (6.1)-(6.4)

$$(6.9)\quad X^\rho\partial_\rho(Y^\alpha\partial_\alpha \lg\tau) = -\Sigma_2 X^\alpha\partial_\alpha \lg\tau + Y^\alpha\partial_\alpha(X^\rho\partial_\rho \lg\tau) + \Sigma_1 Y^\alpha\partial_\alpha \lg\tau$$

$$(6.10)\quad X^\rho\partial_\rho\Gamma_2 = -\Sigma_2\Gamma_1 + \Gamma_1\Gamma_2 - R(\overset{*}{F}, L)$$

$$(6.11)\quad X^\rho\partial_\rho(Y^\alpha V_\alpha) = -\Sigma_2 X^\alpha V_\alpha + Y^\alpha\partial_\alpha(X^\rho V_\rho) + \Sigma_1 Y^\alpha V_\alpha + R(\mathcal{G}, K)$$

où nous avons posé, d'une part

$$(6.12)\quad \Sigma_1 \equiv Y^\alpha Y^\beta \triangle_\alpha X_\beta, \qquad \Sigma_2 \equiv X^\alpha X^\beta \nabla_\alpha Y_\beta$$

et d'autre part

$$(6.13)\quad R(\overset{*}{F}, L) \equiv \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\lambda\mu}\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}L^{\lambda\mu}, \qquad R(\mathcal{G}, K) \equiv \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\lambda\mu}\mathcal{G}^{\alpha\beta}K^{\lambda\mu}$$

avec

$$(6.14)\quad L_{\alpha\beta} \equiv K_\alpha X_\beta - K_\beta X_\beta, \quad \mathcal{G}_{\alpha\beta} \equiv l_\alpha K_\beta - l_\beta K_\alpha, \quad K_{\alpha\beta} \equiv X_\alpha Y_\beta - X_\beta Y_\alpha$$

En substituant dans (6.8) les expressions (6.9), (6.10), (6.11) et en procédant à l'addition et soustraction de l'expression $Y^\alpha\partial_\alpha\Gamma_1$ on obtient

$$\begin{aligned}(6.15)\quad & X^\rho\partial_\rho(Y^\alpha\partial_\alpha \lg\tau + 2Y^\alpha V_\alpha - \Gamma_2)\\ &= Y^\alpha\partial_\alpha(X^\rho\partial_\rho \lg\tau + 2X^\rho V_\rho - \Gamma_1) + \Sigma_1(Y^\alpha\partial_\alpha \lg\tau + 2Y^\alpha V_\alpha)\\ &- \Sigma_2(X^\alpha\partial_\alpha \lg\tau + 2X^\alpha V_\alpha - \Gamma_1) - \Gamma_1\Gamma_2 + Y^\alpha\partial_\alpha\Gamma_1 + R(\overset{*}{F}, L) + 2R(\mathcal{G}, K)\end{aligned}$$

ce qui, compte tenu du fait que sur ψ on a

$$(6.16)\quad X^\alpha\partial_\alpha \lg\tau + 2X^\alpha V_\alpha - \Gamma_1 = 0$$

nous donne sur ψ

$$\begin{aligned}(6.17)\quad & X^\rho\partial_\rho(Y^\alpha\partial_\alpha \lg\tau + 2Y^\alpha V_\alpha - \Gamma_2)\\ &= \Sigma_1(Y^\alpha\partial_\alpha \lg\tau + 2Y^\alpha V_\alpha) - \Gamma_1\Gamma_2 + Y^\alpha\partial_\alpha\Gamma_1 + R(\overset{*}{F}, L) + 2R(\mathcal{G}, K)\end{aligned}$$

Or, tous calculs faits, on trouve avec des notations évidentes (pour interpréter la notation $\overset{*}{L}$, se reporter à (1.8))

$$(6.18)\quad Y^\alpha\partial_\alpha\Gamma_1 = -\Sigma_1\Sigma_2 + \Gamma_1\Gamma_2 + R(F, \overset{*}{L})$$

d'où (sur ψ)

$$(6.19)\quad \begin{aligned} X^{\rho}\partial_{\rho}(Y^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg \tau + 2Y^{\alpha}V_{\alpha} - \Gamma_2) \\ = \Sigma_1(Y^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg \tau + 2Y^{\alpha}V_{\alpha} - \Gamma_2) + R(F, \overset{*}{L}) + R(\overset{*}{F}, L) + 2R(\mathcal{G}, K) \end{aligned}$$

D'autre part, nous pouvons obtenir que (6.7) soit satisfaite sur une 2-surface transversale à $\Gamma(\vec{l})$ et à la congruence des courbes tangentes partout au champ des vecteurs $\vec{X}$, car (6.16) laisse encore τ indéterminé sur une telle 2-surface. Ainsi, les équations (6.1)-(6.4) étant satisfaites partout, l'équation (6.6) satisfaite sur ψ et l'équation (6.7) satisfaite sur une telle 2-surface, pour que cette équation (6.7) soit satisfaite sur ψ, il faut et il suffit, d'après (6.19), que l'on ait sur ψ

$$(6.20)\qquad R(F, \overset{*}{L}) + R(\overset{*}{F}, L) + 2R(\mathcal{G}, K) = 0$$

ce qui, avec des notations complexes, s'écrit

$$(6.21)\qquad R(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{L}}) - R(\bar{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) + 2iR(\mathcal{G}, K) = 0$$

avec pour la 2-forme complexe $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$

$$(6.22)\qquad \mathcal{L}_{\alpha\beta} \equiv K_{\alpha}S_{\beta} - K_{\beta}S_{\alpha}$$

$\bar{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}$ représentant la 2-forme complexe conjuguée de $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ et pour $R(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{L}})$ et $R(\bar{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$ valent des définitions analogues à celles de (6.13).

Maintenant supposons (6.5) satisfaite sur ψ et examinons ce qu'elle devient en dehors de ψ. En dérivant le long de $\Gamma(\vec{l})$ on obtient, compte tenu de (6.1)-(6.4)

$$(6.23)\quad \begin{aligned} l^{\rho}\partial_{\rho}(S^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg \tau + 2S^{\alpha}V_{\alpha} - \Gamma) \\ = - \bar{S}_{\alpha}\dot{S}^{\alpha}(S^{\rho}\partial_{\rho} \lg \tau + 2S^{\rho}V_{\rho} - \Gamma) + R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

ce qui montre bien, que les équations (6.1)-(6.4) étant satisfaites partout et l'équation (6.5) satisfaite sur ψ, pour que (6.5) soit satisfaite partout il faut et il suffit

$$(6.24)\qquad R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$$

D'autre part, on vient de voir que si (6.5) est satisfaite sur ψ on a (6.21) sur ψ. Or, dans ces conditions, dès que l'on a (6.24), l'équation (6.5) est satisfaite partout et ainsi, d'après (6.19), la condition (6.21) est satisfaite automatiquement partout et non pas seulement sur ψ. Remarquons d'autre part que la condition (6.24) peut encore s'écrire sous la forme (voir (5.30)) :

$$R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) + iR(\mathcal{F}, K) = 0 \tag{6.25}$$

En effet, dans le cas présent ($\tau \neq 0$) on a (voir (6.3)) $\zeta = 0$, d'où, compte tenu de (5.27) :

$$R(\mathcal{F}, K) = 0 \tag{6.26}$$

Étudions maintenant le cas $\beta \neq 0$.

Le système (4.24)-(4.30) s'écrit à présent

$$\dot{l}^\alpha = 0 \tag{6.27}$$

$$\sigma = 0 \tag{6.28}$$

$$\zeta = 0 \tag{6.29}$$

$$\dot{\tau} = 0 \tag{6.30}$$

$$\dot{\beta} = 0 \tag{6.31}$$

$$S_\alpha \dot{\bar{S}}^\alpha = 0 \tag{6.32}$$

$$S^\alpha \partial_\alpha \tau + \tau(2S^\alpha V_\alpha - \Gamma) = 0 \tag{6.33}$$

$$S^\alpha \partial_\alpha \beta + \beta(2S^\alpha V_\alpha - \Gamma - 2\Sigma) = 0 \tag{6.34}$$

Nous devons donc étudier les conditions d'intégrabilité de (6.30), (6.33) d'une part et de (6.31), (6.32), (6.34) d'autre part. Mais pour (6.30), (6.33), cette étude a déjà été faite dans le cas où $\beta = 0$. C'est vrai que nous avons maintenant l'équation (6.32) pour $\vec{S}$ mais on peut se convaincre facilement que cela ne change rien à l'argument. Ainsi nous avons à nouveau les conditions (6.21), (6.24).

En ce qui concerne (6.31), (6.32), (6.34), elles ont été étudiées dans le cas $\tau = 0$ (paragraphe 3). On aura alors (5.30) qui se ramène à (6.24) du fait que dans le cas présent ($\zeta = 0$) $R(\mathcal{F}, K)$ est nul (voir (6.26)).

En résumé, nous énonçons le théorème suivant qui englobe aussi bien le cas $\beta = 0$ que le cas $\beta \neq 0$:

THÉORÈME II. — Étant donné les équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel pour des doubles 2-formes singulières, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, de vecteur fondamental $\vec{l}$ et à tenseur de Ricci *non nul*, pour qu'il soit possible de trouver des solutions des telles équations, il faut et il suffit que

— la congruence isotrope $\Gamma(\vec{l})$ soit géodésique, sans distorsion, ni rotation, ni dilatation;

— la congruence $\Gamma(\vec{l})$ et le tenseur de courbure de l'espace-temps soient tels que l'on ait

$$R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0 \tag{6.35}$$

$$R(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{L}}) - R(\bar{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) + 2iR(\mathcal{G}, K) = 0 \tag{6.36}$$

A propos de ce théorème, il est très intéressant de faire remarquer ceci : quand on calcule les diverses projections dans le repère $\vec{l}$, $\vec{S}$, $\vec{\bar{S}}$, $\vec{K}$ de l'expression

$$\nabla_\lambda(\tau l_\beta l_\mu) - \nabla_\mu(\tau l_\beta l_\lambda) \tag{6.37}$$

qui apparaît dans (4.1) et on tient compte des équations (6.27)-(6.30), l'on trouve nécessairement

$$\nabla_\lambda(\tau l_\beta l_\mu) - \nabla_\mu(\tau l_\beta l_\lambda) = 0 \tag{6.38}$$

Ainsi, dans le cas où $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ est une double 2-forme singulière, les équations d'ordre supérieur du champ adoptent toujours la forme

$$\nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{6.39}$$

$$\nabla_\alpha H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{6.40}$$

et ceci que τ soit nul ou pas. C'est-à-dire que, dans le cas des doubles 2-formes singulières, (6.40) est toujours une conséquence de (6.39) (voir l'introduction) que le tenseur de Ricci de $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ soit nul ou pas.

Nota 1. — On remarquera que si $\beta = 0$, les équations du champ d'ordre supérieur pour $\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\mu}$ n'imposent aux vecteurs $\vec{S}$, $\vec{K}$ aucune condition. D'eux-mêmes, ces vecteurs satisfont déjà les relations (2.6). Par conséquent dans ce cas $\vec{S}$, $\vec{K}$ sont déterminés aux transformations (2.7), (2.8) près, respectivement. Par contre si $\beta \neq 0$, le degré de liberté φ dans (2.7) disparaît, φ satisfaisant alors à la condition (5.10).

Nota 2. — On vérifie aisément que, compte tenu de (6.27), (6.28), l'ensemble des équations (6.35), (6.36) est invariant vis-à-vis des transformations (2.7), (2.8). C'est-à-dire, elles sont bien des conditions sur $\Gamma(\vec{l})$ et le tenseur de courbure seulement.

SECTION III

LES ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR DU CHAMP POUR DES DOUBLES 2-FORMES SYMÉTRIQUES DU TYPE III-*a* DE LA CLASSIFICATION DE BEL-PETROV

7. Les doubles 2-formes symétriques du type III-*a* et autres.

Considérons une double 2-forme $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, telle que pour un certain vecteur $\vec{u}$ l'on ait

$$(7.1) \qquad H_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\alpha u^\lambda = 0, \qquad {}^*H_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\alpha u^\lambda = 0$$

$$(7.2) \qquad H_{\alpha\beta} = \tau u_\alpha u_\beta$$

On démontre que si $\tau = 0$ les deux équations (7.1), (7.2) entraînent le caractère isotrope de $\vec{u}$. Il en est de même si $\tau \neq 0$. En effet, supposons que l'on ait $\vec{u}^2 \neq 0$. On démontre alors [5] que les équations (7.1) entraînent

$$(7.3) \qquad H_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\alpha = 0$$

ce qui est trivialement incompatible avec (7.2) si $\vec{u}^2 \neq 0$. Par conséquent le vecteur $\vec{u}$ est nécessairement isotrope et, en accord avec les notations utilisées jusqu'ici, dorénavant nous le noterons $\vec{l}$. Ainsi (7.1), (7.2) s'écriront de la forme

$$(7.4) \qquad H_{\alpha\beta\lambda\mu}l^\alpha l^\lambda = 0, \qquad {}^*H_{\alpha\beta\lambda\mu}l^\alpha l^\lambda = 0$$

$$(7.5) \qquad H_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta$$

Quand nous posons $\tau = 0$ dans (7.5), les relations (7.4), (7.5) caractérisent le cas III-*a* de la classification de Bel-Petrov des doubles 2-formes symétriques à tenseur de Ricci nul [5].

Supposons maintenant que $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ est tel que l'on a

$$(7.6) \qquad \underset{\alpha\beta\lambda}{\mathrm{S}}\, H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$$

On démontre alors que sous les conditions (7.4), (7.5), (7.6), $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ est de la forme

$$(7.7) \quad H_{\alpha\beta\lambda\mu} = \tau F_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu} + A(F_{\alpha\beta}\mathcal{G}_{\lambda\mu} + \mathcal{G}_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu} - \overset{*}{F}_{\alpha\beta}K_{\lambda\mu} - K_{\alpha\beta}\overset{*}{F}_{\lambda\mu})$$

où les mêmes notations que dans la section II sont valables. De (7.7), on obtient aisément

$$(7.8)\quad {}^*H_{\alpha\beta\lambda\mu} = \tau\overset{*}{F}_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu} + A(F_{\alpha\beta}K_{\lambda\mu} + \mathcal{G}_{\alpha\beta}\overset{*}{F}_{\lambda\mu} + \overset{*}{F}_{\alpha\beta}\mathcal{G}_{\lambda\mu} + K_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu})$$

Nous allons établir par la suite des conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire $\Gamma(\vec{l})$ et le tenseur de courbure de l'espace-temps, $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$, pour qu'il soit possible de trouver des solutions, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, de la forme (7.7), aux équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel

$$(7.9)\quad \nabla_\alpha H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = \nabla_\lambda(\tau l_\beta l_\mu) - \nabla_\mu(\tau l_\beta l_\lambda)$$

$$(7.10)\quad \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0$$

8. Les équations du champ dans un repère quasi orthonormé.

Les doubles 2-formes symétriques de la forme (7.7) ayant comme tenseur de Ricci, d'après (7.5)

$$(8.1)\quad H_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta$$

l'équation (7.9) est une conséquence de (7.10) et nous n'aurons à nous occuper dans ce paragraphe que de cette dernière équation.

Plaçons-nous dans le cadre d'un repère quasi orthonormé adapté à $\Gamma(\vec{l})$, $\vec{l}$, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{K}$. En substituant (7.8) dans (7.10), nous trouvons que cette équation tensorielle est équivalente au système d'équations

$$(8.2)\quad X^\beta X^\lambda l^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = -AY_\alpha \dot{l}^\alpha = 0$$

$$(8.3)\quad Y^\beta X^\lambda l^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = -AX_\alpha \dot{l}^\alpha = 0$$

$$(8.4)\quad K^\beta X^\lambda l^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = -A(X^\alpha Y^\beta + X^\beta Y^\alpha)\nabla_\alpha l_\beta = 0$$

$$(8.5)\quad K^\beta Y^\lambda l^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = A(X^\alpha X^\beta - Y^\alpha Y^\beta)\nabla_\alpha l_\beta = 0$$

$$(8.6)\quad X^\beta K^\lambda l^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = -A(Y_\alpha \dot{X}^\alpha + 2Y^\alpha X^\beta)\nabla_\alpha l_\beta = 0$$

$$(8.7)\quad Y^\beta K^\lambda l^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = -\dot{A} - A\nabla_\alpha l^\alpha = 0$$

$$(8.8)\quad K^\beta K^\lambda l^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = -Y^\alpha\partial_\alpha A + A(2\Gamma_2 + \Sigma_2 - Y^\alpha V_\alpha) + \tau Y^\alpha X^\beta \nabla_\alpha l_\beta = 0$$

$$(8.9)\quad K^\beta Y^\lambda X^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = X^\alpha\partial_\alpha A - A(2\Gamma_1 + \Sigma_1 - X^\alpha V_\alpha) + \tau Y^\alpha Y^\beta \nabla_\alpha l_\beta = 0$$

$$(8.10)\quad X^\beta K^\lambda X^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = -Y^\alpha\partial_\alpha A + A(\Gamma_2 - 2\gamma_2 - Y^\alpha V_\alpha) = 0$$

$$(8.11)\quad Y^\beta K^\lambda X^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = X^\alpha \partial_\alpha A - A(\Gamma_1 - 2\gamma_1 - X^\alpha V_\alpha) + \dot{\tau} + \tau(2K^\alpha \dot{l}_\alpha - X^\alpha X^\beta \nabla_\alpha l_\beta) = 0$$

$$(8.12)\quad K^\beta K^\lambda X^\mu \Delta_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = A[2(X^\alpha Y^\beta - X^\beta Y^\alpha)\nabla_\alpha K_\beta + K^\alpha Y^\beta \nabla_\alpha X_\beta] + Y^\alpha \partial_\alpha \tau + \tau(2Y^\alpha V_\alpha - \Gamma_2 - \Sigma_2) = 0$$

$$(8.13)\quad Y^\beta K^\lambda Y^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = A(2\gamma_2 + \Gamma_2 + \Sigma_2) + \tau X_\alpha \dot{Y}^\alpha = 0$$

$$(8.14)\quad K^\beta K^\lambda Y^\mu \nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = K^\alpha \partial_\alpha A + A(2\nabla_\alpha K^\alpha + 3K^\alpha V_\alpha) - \tau\Sigma_1 = 0$$

les autres composantes de (7.10) s'annulant identiquement ou se ramenant aux équations précédentes en vertu de l'antisymétrie en λ, μ de ${}^*H_{\alpha\beta\lambda\mu}$.

Nous avons utilisé les notations

$$(8.15)\qquad \gamma_1 \equiv K_\alpha \dot{X}^\alpha, \qquad \gamma_2 \equiv K_\alpha \dot{Y}^\alpha$$

$$(8.16)\qquad \Gamma_1 \equiv K^\alpha X^\beta \nabla_\alpha l_\beta, \qquad \Gamma_2 \equiv K^\alpha Y^\beta \nabla_\alpha l_\beta$$

$$(8.17)\qquad \Sigma_1 \equiv Y^\alpha Y^\beta \nabla_\alpha X_\beta, \qquad \Sigma_2 \equiv X^\alpha X^\beta \nabla_\alpha Y_\beta$$

Le système des équations (8.2)-(8.14) est équivalent au système (nous supposons désormais $K_\alpha \dot{l}^\alpha = 0$ pour les mêmes raisons que dans la section II).

$$(8.18)\quad \dot{l}^\alpha = 0$$

$$(8.19)\quad \sigma = 0$$

$$(8.20)\quad \tau\omega = 0$$

$$(8.21)\quad Y_\alpha \dot{X}^\alpha = 2\omega$$

$$(8.22)\quad (l_\gamma \dot{A}) = -2\theta$$

$$(8.23)\quad Y^\alpha \partial_\alpha A + A(Y^\alpha V_\alpha - \Sigma_2 - 2\Gamma_2) = 0$$

$$(8.24)\quad X^\alpha \partial_\alpha A + A(X^\alpha V_\alpha - \Sigma_1 - 2\Gamma_1) - \tau\theta = 0$$

$$(8.25)\quad A(2\gamma_1 + \Gamma_1 + \Sigma_1) + \dot{\tau} + \theta\tau = 0$$

$$(8.26)\quad 2\gamma_2 + \Gamma_2 + \Sigma_2 = 0$$

$$(8.27)\quad A[2(X^\alpha Y^\beta - X^\beta Y^\alpha)\nabla_\alpha K_\beta + K^\alpha Y^\beta \nabla_\alpha X_\beta] + Y^\alpha \partial_\alpha \tau + \tau(2Y^\alpha V_\alpha - \Gamma_2 - \Sigma_2) = 0$$

$$(8.28)\quad K^\alpha \partial_\alpha A + A(2\nabla_\alpha K^\alpha + 3K^\alpha V_\alpha) - \tau\Sigma_1 = 0$$

Nous poursuivrons l'étude de ce système en distinguant deux cas, selon que τ est nul ou pas.

9. Le cas $\tau = 0$.

Dans ce cas, le système des équations (8.18)-(8.28) se réduit au système d'équations suivant :

$$\dot{l}^{\alpha} = 0 \tag{9.1}$$

$$\sigma = 0 \tag{9.2}$$

$$\bar{S}^{\alpha}\dot{S}_{\alpha} = -2i\omega \tag{9.3}$$

$$(\lg \dot{A}) = -2\theta \tag{9.4}$$

$$S^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg A + S^{\alpha}V_{\alpha} - 2\Gamma - \Sigma = 0 \tag{9.5}$$

$$2\gamma + \Gamma + \Sigma = 0 \tag{9.6}$$

$$K^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg A + 2\nabla_{\alpha}K^{\alpha} + 3K^{\alpha}V_{\alpha} = 0 \tag{9.7}$$

$$2(S^{\alpha}\bar{S}^{\beta} - \bar{S}^{\alpha}S^{\beta})\nabla_{\alpha}K_{\beta} + K^{\alpha}\bar{S}^{\beta}\nabla_{\alpha}S_{\beta} = 0 \tag{9.8}$$

Les équations (9.1), (9.2) nous disent respectivement que $\Gamma(\vec{l})$ est géodésique et sans distorsion et les (9.3), (9.4) (remarquons que (9.3) se ramène à une seule équation réelle) nous donnent la propagation de $\vec{S}$, A, respectivement le long de $\Gamma(\vec{l})$.

Maintenant, en procédant d'une manière semblable à celle utilisée dans la section II, considérons un vecteur complexe tel que

$$\vec{R}.\vec{l} = \vec{R}^2 = 0, \qquad \vec{R}.\vec{\bar{R}} = -1 \tag{9.9}$$

et tel qu'il se propage par parallélisme le long de $\Gamma(\vec{l})$.

Soit $\vec{C}$ le vecteur isotrope qui forme avec $\vec{l}$, $\vec{R}$ un repère quasi orthonormé adapté à $\Gamma(\vec{l})$. On aura

$$S^{\alpha} = e^{i\varphi}(R^{\alpha} - \bar{\eta}l^{\alpha}) \tag{9.10}$$

$$K^{\alpha} = C^{\alpha} - \eta R^{\alpha} - \bar{\eta}\bar{R}^{\alpha} + \eta\bar{\eta}l^{\alpha} \tag{9.11}$$

Compte tenu de (9.10), (9.11), les équations (9.3), (9.5) deviennent

$$\dot{\varphi} = 2\omega \tag{9.12}$$

$$R^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg (Ae^{i\varphi}) + R^{\alpha}V'_{\alpha} - 2\Gamma' - \Sigma' = 0 \tag{9.13}$$

avec V'_α, Γ' et Σ' données par (5.14). Maintenant, puisque (9.4), (9.3) (ou plutôt (9.12) qui est équivalent à (9.3)) déterminent A et φ, chacun à une fonction près arbitraire sur ψ (hypersurface transversale à $\Gamma(\vec{l})$, il s'ensuit que (9.13) peut être satisfaite sur ψ, en choisissant lesdites fonctions convenablement.

Voyons ce qu'il en est de (9.13) en dehors de ψ. Tous calculs faits, la dérivée de (9.13) le long de $\Gamma(\vec{l})$ (voir dans la section II, le calcul de la dérivée le long de $\Gamma(\vec{l})$ pour (5.13)) nous donne

$$(9.14)\quad \begin{aligned} & l^\rho \partial_\rho [R^\alpha \partial_\alpha \lg (Ae^{i\varphi}) + R^\alpha V'_\alpha - 2\Gamma' - \Sigma'] \\ &\quad = -\zeta[R^\alpha \partial_\alpha \lg (Ae^{i\varphi}) + R^\alpha V'_\alpha - 2\Gamma' - \Sigma'] - R(\mathcal{F}', \mathcal{G}') - iR(\mathcal{F}', K') \end{aligned}$$

d'où on voit que les équations (9.1)-(9.4) étant satisfaites partout et (9.5) satisfaite sur ψ, pour que (9.5) soit satisfaite partout il faut et il suffit que l'on ait

$$(9.15)\qquad R(\mathcal{F}', \mathcal{G}') + iR(\mathcal{F}', K') = 0$$

L'on sait comment cette condition déjà obtenue lors de l'étude faite dans la section II (voir (5.29)) est invariante vis-à-vis des transformations (2.7), (2.8).

Examinons par la suite l'équation (9.6)

$$(9.16)\qquad 2K_\alpha \dot{S}^\alpha + K^\alpha S^\beta \nabla_\alpha l_\beta + S^\alpha \bar{S}^\beta \nabla_\alpha S_\beta = 0$$

Essayons comme vecteur, $\vec{S}$, solution de cette équation, un vecteur $\vec{S}'$ de la forme

$$(9.17)\qquad S^{\alpha\prime} = S^\alpha - \bar{\eta} l^\alpha$$

où $\vec{S}$ est le vecteur solution de (9.3), (9.5). On aura

$$(9.18)\quad \begin{aligned} & 2K^{\alpha\prime}\dot{S}'_\alpha + K^{\alpha\prime} S^{\beta\prime} \nabla_\alpha l_\beta + S^{\alpha\prime} \bar{S}^{\beta\prime} \nabla_\alpha S'_\beta \\ &\quad = 2K_\alpha \dot{S}^\alpha + K^\alpha S^\beta \nabla_\alpha l_\beta + S^\alpha \bar{S}^\beta \nabla_\alpha S_\beta + 2(2\zeta - \bar{\zeta})\bar{\eta} - 2\dot{\bar{\eta}} = 0 \end{aligned}$$

où $\vec{K}'$ représente le vecteur isotrope qui forme avec $\vec{S}'$, $\vec{l}$ un repère quasi orthonormé, c'est-à-dire, d'après (2.7)

$$(9.19)\qquad \vec{K}' = \vec{K} - \eta \vec{S} - \bar{\eta} \vec{\bar{S}} + \eta\bar{\eta}\, \vec{l}$$

Ainsi, (9.18) nous donne l'équation de propagation le long de $\Gamma(\vec{l})$ à laquelle doit satisfaire le $\bar{\eta}$ de (9.17) pour que (9.6), c'est-à-dire l'équation suivante

$$2K'^{\alpha}\dot{S}'_{\alpha} + K^{\alpha'}S^{\beta'}\nabla_{\alpha}l_{\beta} + S^{\alpha'}\bar{S}'^{\beta}\nabla_{\alpha}S'_{\beta} = 0 \tag{9.20}$$

soit satisfaite.

Remarquons que les équations (9.1)-(9.5) étant invariantes vis-à-vis des transformations des vecteurs $\vec{S}$, $\vec{K}$ de la forme (9.17), (9.19), les nouveaux vecteurs $\vec{S}'$, $\vec{K}'$ sont des solutions des équations (9.1)-(9.6) et pas seulement des solutions de (9.6).

Il nous faut encore examiner les deux équations (9.7), (9.8) (remarquons que (9.8) se ramène à une seule équation réelle). En y substituant $\vec{S}'$, $\vec{K}'$ donnés par (9.17), (9.19) et, compte tenu de (9.1)-(9.5) et (9.18), nous trouvons, tous calculs faits

$$\begin{aligned} K^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg A + 2\nabla_{\alpha}K^{\alpha} + 3K^{\alpha}V_{\alpha} + 2\eta(\Sigma - \Gamma - S^{\alpha}V_{\alpha}) \\ + 2\bar{\eta}(\bar{\Sigma} - \bar{\Gamma} - \bar{S}^{\alpha}V_{\alpha}) - 2S^{\alpha}\partial_{\alpha}\eta - 2\bar{S}^{\alpha}\partial_{\alpha}\bar{\eta} = 0 \end{aligned} \tag{9.21}$$

$$\begin{aligned} K^{\alpha}\bar{S}^{\beta}\nabla_{\alpha}S_{\beta} + 2(S^{\alpha}\bar{S}^{\beta} - \bar{S}^{\alpha}S^{\beta})\nabla_{\alpha}K_{\beta} - 2\eta(\Sigma - \Gamma - S^{\alpha}V_{\alpha}) \\ + 2\bar{\eta}(\bar{\Sigma} - \bar{\Gamma} - \bar{S}^{\alpha}V_{\alpha}) + 2S^{\alpha}\partial_{\alpha}\eta - 2\bar{S}^{\alpha}\partial_{\alpha}\bar{\eta} = 0 \end{aligned} \tag{9.22}$$

ces deux équations étant équivalentes à la seule équation complexe

$$\begin{aligned} K^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg A + 2\nabla_{\alpha}K^{\alpha} + 3K^{\alpha}V_{\alpha} + K^{\alpha}\bar{S}^{\beta}\nabla_{\alpha}S_{\beta} + 2(S^{\alpha}\bar{S}^{\beta} - \bar{S}^{\alpha}S^{\beta})\nabla_{\alpha}K_{\beta} \\ + 4\bar{\eta}(\bar{\Sigma} - \bar{\Gamma} - \bar{S}^{\alpha}V_{\alpha}) - 4\bar{S}^{\alpha}\partial_{\alpha}\bar{\eta} = 0 \end{aligned} \tag{9.23}$$

Or (9.18) laissant η indéterminé sur ψ, on peut profiter de cette indétermination pour que (9.23) et partant (9.7), (9.8) soient satisfaites sur ψ.

En résumé, nous avons trouvé des vecteurs $\vec{S}'$, $\vec{K}'$, solution partout avec un A convenable des équations (9.3)-(9.6) et solution sur ψ de (9.7). (9.8). Par commodité nous écrirons désormais $\vec{S}$ pour $\vec{S}'$. En particulier, chaque fois qu'on aura affaire aux équations (9.7), (9.8), il doit être compris que les vecteurs $\vec{S}$, $\vec{K}$ qui y apparaîtront représenteront les vecteurs que nous avons notés jusqu'ici $\vec{S}'$, $\vec{K}'$.

Ceci dit, calculons les dérivées le long de $\Gamma(\vec{l})$ des premiers membres des équations (9.7), (9.8). Occupons-nous tout d'abord de (9.7). On obtient compte tenu des diverses équations (9.1)-(9.6)

$$\begin{aligned} l^{\rho}\partial_{\rho}(K^{\alpha}\partial_{\alpha} \lg A) = (\bar{\gamma} + \bar{\Gamma})(2\Gamma + \Sigma - S^{\alpha}V_{\alpha}) \\ + (\gamma + \Gamma)(2\bar{\Gamma} + \bar{\Sigma} - \bar{S}^{\alpha}V_{\alpha}) - 2K^{\alpha}\partial_{\alpha}\theta + 2\theta K^{\alpha}V_{\alpha}. \end{aligned} \tag{9.24}$$

$$(9.25)\quad l^\rho\partial_\rho(K^\alpha V_\alpha) = \bar{\gamma}(S^\alpha V_\alpha + \Gamma) + \gamma(\bar{S}^\alpha V_\alpha + \bar{\Gamma}) + \bar{\Gamma}S^\alpha V_\alpha + \Gamma\bar{S}^\alpha V_\alpha + R(\mathcal{G}, \mathcal{G})$$

$$(9.26)\quad l^\rho\partial_\rho(\nabla_\alpha K_\alpha) = \bar{S}^\alpha\partial_\alpha\gamma + S^\alpha\partial_\alpha\bar{\gamma} + \gamma\nabla_\alpha\bar{S}^\alpha + \bar{\gamma}\nabla_\alpha S^\alpha - \zeta\zeta_K - \bar{\zeta}\bar{\zeta}_K - \bar{S}^\alpha V_\alpha(\Gamma + \gamma) - S^\alpha V_\alpha(\bar{\Gamma} + \bar{\gamma}) - R_{\alpha\beta}l^\alpha K^\beta$$

où nous avons posé

$$(9.27)\qquad \zeta_K = - S^\alpha\bar{S}^\beta\nabla_\alpha K_\beta$$

avec $\bar{\zeta}_K$ le complexe conjugué de ζ_K.

Maintenant nous allons expliciter le calcul (9.26) en calculant l'expression

$$(9.28)\qquad \bar{S}^\alpha\partial_\alpha\gamma + S^\alpha\partial_\alpha\bar{\gamma}$$

Compte tenu de (9.6)

$$(9.29)\quad 2\bar{S}^\alpha\partial_\alpha\gamma + 2S^\alpha\partial_\alpha\bar{\gamma} = -(S^\alpha\partial_\alpha\bar{\Sigma} + \bar{S}^\alpha\partial_\alpha\Sigma) - (S^\alpha\partial_\alpha\bar{\Gamma} + \bar{S}^\alpha\partial_\alpha\Gamma)$$

et tous calculs faits

$$(9.30)\quad \bar{S}^\alpha\partial_\alpha\Sigma + S^\alpha\partial_\alpha\bar{\Sigma} = -2i\omega K^\alpha\bar{S}^\beta\nabla_\alpha S_\beta + 2i\omega(\zeta_K - \bar{\zeta}_K) + 2\Sigma\bar{\Sigma} - (\bar{\zeta}\zeta_K + \bar{\zeta}_K\zeta) + R(K, K)$$

$$(9.31)\quad S^\alpha\partial_\alpha\bar{\Gamma} + \bar{S}^\alpha\partial_\alpha\Gamma = -\zeta\zeta_K - \bar{\zeta}\bar{\zeta}_K + 2\theta K^\alpha V_\alpha + \Sigma\bar{\Gamma} + \bar{\Sigma}\Gamma - 2K^\alpha\partial_\alpha\theta + 2\Gamma\bar{\Gamma} - R(\mathcal{F}, \bar{\mathfrak{L}}) - R(\bar{\mathcal{F}}, \mathfrak{L})$$

d'où en substituant dans (9.26)

$$(9.32)\quad 2\, l^\rho\partial_\rho(\nabla_\alpha K^\alpha) = 2\gamma\nabla_\alpha\bar{S}^\alpha - 2S^\alpha V_\alpha(\bar{\Gamma} + \bar{\gamma}) + 2\bar{\gamma}\nabla_\alpha S^\alpha - 2\bar{S}^\alpha V_\alpha(\Gamma + \gamma) - \Sigma(2\bar{\Sigma} + \bar{\Gamma}) - \Gamma(2\bar{\Gamma} + \bar{\Sigma}) + 2i\omega[K^\alpha\bar{S}^\beta\nabla_\alpha S_\beta + 2(S^\alpha\bar{S}^\beta - \bar{S}^\alpha S^\beta)\nabla_\alpha K_\beta] - 2\theta K^\alpha V_\alpha + 2K^\alpha\partial_\alpha\theta - R(K, K) - 2R(\mathcal{G}, \mathcal{G}) - R(\mathcal{F}, \bar{\mathfrak{L}}) - R(\bar{\mathcal{F}}, \mathfrak{L})$$

et compte tenu de (9.24), (9.25), (9.32), tout en utilisant (9.6)

$$(9.33)\quad l^\rho\partial_\rho(K^\alpha\partial_\alpha l_\gamma A + 2\nabla_\alpha K^\alpha + 3K^\alpha V_\alpha) = 2i\omega[K^\alpha\bar{S}^\beta\nabla_\alpha S_\beta + 2(S^\alpha\bar{S}^\beta - \bar{S}^\alpha S^\beta)\nabla_\alpha K_\beta] + R(\mathcal{G}, \mathcal{G}) - R(K, K) - R(\mathcal{F}, \bar{\mathfrak{L}}) - R(\bar{\mathcal{F}}, \mathfrak{L})$$

Voyons ce qu'il en est de la dérivée du premier membre de (9.8). On trouve :

$$(9.34)\quad l^\rho\partial_\rho(K^\alpha\bar{S}^\beta\nabla_\alpha S_\beta) = \Sigma(\bar{\gamma} + \bar{\Gamma}) - \bar{\Sigma}(\gamma + \Gamma) + \gamma\bar{\Gamma} - \bar{\gamma}\Gamma + 2i\omega K^\alpha V_\alpha - 2iK^\alpha\partial_\alpha\omega - iR(\mathcal{G}, K)$$

$$(9.35)\quad l^\rho \partial_\rho[(S^\alpha \bar{S}^\beta - S^\beta \bar{S}^\alpha)\nabla_\alpha K_\beta] = \bar{\Sigma}\gamma - \Sigma\bar{\gamma} - S^\alpha \partial_\alpha \bar{\gamma} + \bar{S}^\alpha \partial_\alpha \gamma + \zeta\zeta_K - \bar{\zeta}\bar{\zeta}_K + R(\mathcal{F}, \bar{\mathfrak{L}}) - R(\bar{\mathcal{F}}, \mathfrak{L})$$

Maintenant l'expression

$$(9.36)\qquad \bar{S}^\alpha \partial_\alpha \gamma - S^\alpha \partial_\alpha \bar{\gamma}$$

qui apparaît dans (9.35) vaut, compte tenu de (9.5), (9.6) :

$$(9.37)\qquad \bar{S}^\alpha \partial_\alpha \gamma - S^\alpha \partial_\alpha \bar{\gamma} = \frac{1}{2}[\bar{S}^\alpha \partial_\alpha(\Gamma - S^\rho V_\rho - S^\rho \partial_\rho l_y A) - S^\alpha \partial_\alpha(\bar{\Gamma} - \bar{S}^\rho V_\rho - \bar{S}^\rho \partial_\rho l_y A)]$$

d'où tous calculs faits

$$(9.38)\quad 2\bar{S}^\alpha \partial_\alpha \gamma - 2S^\alpha \partial_\alpha \bar{\gamma} = 2i\omega(\zeta_K + \bar{\zeta}_K) + 2\theta(\bar{\zeta}_K - \zeta) + 2i\omega K^\alpha \partial_\alpha l_y A + \bar{\Gamma}\Sigma - \Gamma\bar{\Sigma} + R(\bar{\mathcal{F}}, \mathfrak{L}) - R(\mathcal{F}, \bar{\mathfrak{L}}) - iR(\mathfrak{G}, K)$$

et ensuite de (9.34), (9.35), (9.38) avec le concours de (9.6) on obtient

$$(9.39)\quad l^\rho \partial_\rho[K^\alpha \bar{S}^\beta \nabla_\alpha S_\beta + 2(S^\alpha \bar{S}^\beta - S^\beta \bar{S}^\alpha)\nabla_\alpha K_\beta] = 2i\omega(K^\alpha \partial_\alpha l_y A + 2\nabla_\alpha K^\alpha + 3K^\alpha V_\alpha) + R(\mathcal{F}, \bar{\mathfrak{L}}) - R(\bar{\mathcal{F}}, \mathfrak{L}) - 2iR(\mathfrak{G}, K)$$

Les équations (9.33), (9.39) montrent bien alors que les équations (9.1)-(9.6) étant satisfaites partout et (9.7), (9.8) satisfaites sur ψ, pour que (9.7), (9.8) soient satisfaites partout, il faut et il suffit que l'on ait

$$(9.40)\qquad R(\mathcal{F}, \bar{\mathfrak{L}}) + R(\bar{\mathcal{F}}, \mathfrak{L}) + R(K, K) - R(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = 0$$

$$(9.41)\qquad R(\mathcal{F}, \bar{\mathfrak{L}}) - R(\bar{\mathcal{F}}, \mathfrak{L}) - 2iR(\mathfrak{G}, K) = 0$$

et de nouveau on peut trouver que, compte tenu de (9.1), (9.2), (9.15), les conditions (9.40), (9.41) sont invariantes vis-à-vis des transformations des vecteurs $\vec{S}$, $\vec{K}$, données par les formules (2.7), (2.8).

Nous énonçons le théorème suivant :

THÉORÈME III. — Étant donné les équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel pour des doubles 2-formes, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, telles que :

a) $$H_{\alpha\beta} = 0$$

b) $$H_{\alpha\beta\lambda\mu} + H_{\lambda\alpha\beta\mu} + H_{\beta\lambda\alpha\lambda} = 0$$

et telles qu'il existe un vecteur $\vec{l}$ tel que l'on ait

c) $$H_{\alpha\beta\lambda\mu} l^\alpha l^\lambda = 0, \qquad {}^*H_{\alpha\beta\lambda\mu} l^\alpha l^\lambda = 0$$

du fait de *a)* et *c)* $\vec{l}$ est isotrope. D'autre part, pour qu'il existe des solutions, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, des dites équations, satisfaisant *a)*, *b)* et *c)*, il faut et il suffit que l'on ait :

— la congruence isotrope $\Gamma(\vec{l})$ est géodésique et sans distorsion;

— la congruence $\Gamma(\vec{l})$ et le tenseur de courbure de l'espace-temps sont tels que l'on a

$$R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) + iR(\mathcal{F}, K) = 0 \tag{9.42}$$

$$R(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{L}}) - R(\bar{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) - 2iR(\mathcal{G}, K) = 0 \tag{9.43}$$

$$R(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{L}}) + R(\bar{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) + R(K, K) - R(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = 0 \tag{9.44}$$

10. Étude d'un cas spécial avec $\tau \neq 0$.

Nous nous proposons d'examiner dans ce paragraphe les conditions auxquelles doit satisfaire l'espace-temps pour qu'il soit possible de trouver des solutions, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, du type (7.7) avec $\tau \neq 0$, des équations d'ordre supérieur du champ (7.9), (7.10) sans deuxième membre, c'est-à-dire des équations :

$$\nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{10.1}$$

$$\nabla_\alpha H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{10.2}$$

ou, ce qui revient au même, des équations

$$\nabla_\alpha {}^*H^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{10.3}$$

$$\nabla_\lambda(\tau l_\beta l_\mu) - \nabla_\mu(\tau l_\beta l_\lambda) = 0 \tag{10.4}$$

Dans le cas des doubles 2-formes symétriques (7.7) avec $\tau \neq 0$, dont il est question dans le présent paragraphe, il s'agirait en général d'étudier l'équation (7.10), dont, compte tenu de (7.5), l'équation (7.9) en est une conséquence. Mais ici nous posons aussi l'équation (10.4) qu'elle ne saurait être en général une conséquence de (10.3) comme on le verra par la suite. Nous aboutirons ainsi à des espaces-temps assez particuliers pour que les équations d'ordre supérieur s'écrivent sous la forme (10.1), (10.2), malgré le fait que $\tau \neq 0$, de sorte que nous rejoignons ainsi l'étude des équations d'ordre supérieur de la section II (cas des doubles 2-formes singulières) où ce qui se présente ici comme un cas particulier est là la règle générale, en ce sens que (10.4) et partant (10.2) est une conséquence de (10.3) quand $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ est singulière (voir la fin du paragraphe 6).

Ceci dit, écrivons les équations (10.3), (10.4) dans le repère $\vec{l}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{K}$, de rigueur. Pour (10.3), nous avons l'ensemble des équations (8.18)-(8.28) et pour (10.4) nous trouvons, compte tenu de (8.18)-(8.28),

$$(10.5) \qquad K^\beta K^\mu l^\lambda, \qquad \dot{\tau} = 0$$

$$(10.6) \qquad K^\beta K^\mu X^\lambda, \qquad X^\alpha \partial_\alpha \tau + \tau(2X^\alpha V_\alpha - \Gamma_1) = 0$$

$$(10.7) \qquad Y^\beta K^\mu X^\lambda, \qquad \tau\theta = 0$$

$$(10.8) \qquad K^\beta K^\mu Y^\lambda, \qquad Y^\alpha \partial_\alpha \tau + \tau(2Y^\alpha V_\alpha - \Gamma_2) = 0$$

où nous avons écrit à gauche les trois vecteurs du repère sur lesquels il faut projeter dans chaque cas pour obtenir l'équation en question. Les autres projections ne figurant pas dans (10.5)-(10.8) s'annulent identiquement ou se ramènent à une des équations (8.18)-(8.28) ou (10.5)-(10.8).

L'ensemble des équations (8.18)-(8.28) et (10.5)-(10.8) se ramènent à :

$$(10.9) \qquad \dot{l}^\alpha = 0$$

$$(10.10) \qquad \sigma = 0$$

$$(10.11) \qquad \zeta = 0$$

$$(10.12) \qquad \bar{S}^\alpha \dot{S}_\alpha = 0$$

$$(10.13) \qquad (l_y \dot{A}) = 0$$

$$(10.14) \qquad S^\alpha \partial_\alpha A + A(S^\alpha V_\alpha - \Sigma - \Gamma) = 0$$

$$(10.15) \qquad 2\gamma + \Gamma + \Sigma = 0$$

$$(10.16) \qquad K^\alpha \partial_\alpha A + A(2\nabla_\alpha K^\alpha + 3K^\alpha V_\alpha) - \tau\Sigma_1 = 0$$

$$(10.17) \qquad iA[2(S^\alpha \bar{S}^\beta - S^\beta \bar{S}^\alpha)\nabla_\alpha K_\beta + K^\alpha \bar{S}^\beta \nabla_\alpha S_\beta] - \tau\Sigma_2 = 0$$

$$(10.18) \qquad \dot{\tau} = 0$$

$$(10.19) \qquad S^\alpha \partial_\alpha \tau + \tau(2S^\alpha V_\alpha - \Gamma) = 0$$

où nous avons utilisé les notations complexes habituelles.

Les équations (10.9), (10.10), (10.11) signifient que $\Gamma(\vec{l})$ est géodésique, sans distorsion, ni rotation, ni dilatation et (10.12), (10.13) nous donnent les lois de propagation le long de $\Gamma(\vec{l})$ de $\vec{S}$ et A respectivement. En procédant d'une manière analogue à ce qui a été fait dans le cas $\tau = 0$, on obtient comme condition d'intégrabilité de (10.12), (10.13), (10.14)

$$(10.20) \qquad R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$$

L'apparition des deux termes supplémentaires, $-\tau\Sigma_1$ et $-\tau\Sigma_2$ (équations (10.16), (10.17)) par rapport au cas $\tau = 0$ ne change pas grand-chose dans l'étude des équations (10.15), (10.16), (10.17). Ici comme là, on obtient les conditions suivantes d'intégrabilité :

(10.21) $$R(\mathcal{F}, \overline{\mathfrak{L}}) + R(\mathcal{F}, \overline{\mathfrak{L}}) + R(K, K) - R(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = 0$$

(10.22) $$R(\mathcal{F}, \overline{\mathfrak{L}}) - R(\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{L}) - 2iR(\mathfrak{G}, K) = 0$$

En ce qui concerne l'étude des conditions d'intégrabilité des équations restantes (10.18), (10.19), elle a déjà été faite lors de l'étude des équations du champ d'ordre supérieur d'une double 2-forme singulière dans le cas $\tau \neq 0$ (voir paragraphe 4), les équations (6.4), (6.5) étant les mêmes que les équations présentes (10.18), (10.19).

On obtient ainsi comme condition d'intégrabilité des équations (10.18), (10.19) :

(10.23) $$R(\mathcal{F}, \mathfrak{G}) = 0$$

(10.24) $$R(\mathcal{F}, \overline{\mathfrak{L}}) - R(\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{L}) + 2iR(\mathfrak{G}, K) = 0$$

En résumé, compte tenu de (10.20), (10.21), (10.22), (10.23), (10.24), nous trouvons comme conditions d'intégrabilité dans le cas $\tau \neq 0$ les conditions suivantes

(10.25) $$R(\mathcal{F}, \mathfrak{G}) = 0$$

(10.26) $$R(\mathfrak{G}, K) = 0$$

(10.27) $$R(\mathcal{F}, \overline{\mathfrak{L}}) - R(\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{L}) = 0$$

(10.28) $$R(\mathcal{F}, \overline{\mathfrak{L}}) + R(\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{L}) + R(K, K) - R(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = 0$$

et nous énonçons le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — Étant donné les équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel à deuxième membre nul, pour des doubles 2-formes symétriques, $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, telles que

a) $$H_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta \qquad (\tau \neq 0)$$

b) $$\underset{\alpha\beta\lambda}{S} H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$$

et telles qu'il existe un vecteur $\vec{l}$ tel que l'on a

c) $$H_{\alpha\beta\lambda\mu} l^\alpha l^\lambda = 0, \qquad {}^*H_{\alpha\beta\lambda\mu} l^\alpha l^\lambda = 0$$

du fait de *a)*, *b)*, $\vec{l}$ est isotrope. D'autre part pour qu'il existe des solutions $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, de ces équations satisfaisant à *a)*, *b)*, *c)*, il faut et il suffit que l'on ait

— la congruence isotrope $\Gamma(\vec{l})$ est géodésique, sans distorsion, ni rotation, ni dilatation;

— la congruence $\Gamma(\vec{l})$ et le tenseur de courbure de l'espace-temps sont tels que les conditions (10.25)-(10.28) sont satisfaites.

REMERCIEMENTS

Je prie M. LICHNEROWICZ de trouver ici le témoignage de ma gratitude pour l'aide et les encouragements qu'il n'a cessé de m'accorder pendant l'élaboration de ce travail.

Je tiens aussi à remercier M. BEL qui, lors d'une discussion, a exprimé un point de vue qui m'a été fort utile par la suite dans tout le travail.

Enfin je ne saurais oublier le « Centre National de la Recherche Scientifique » et « L'Aide à la Recherche Scientifique » dont l'aide matérielle m'a permis de réaliser ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. LICHNEROWICZ, *Ann. di Mat.*, t. **50**, 1960, p. 1.
[2] F. A. E. PIRANI, *Acta Phys. Polon.*, t. **15**, 1956, p. 389.
[3] F. A. E. PIRANI, *Phys. Rev.*, t. **105**, 1957, p. 1089.
[4] A. LICHNEROWICZ, *Propagateurs et commutateurs en Relativité Générale.* Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques, n° 10.
[5] L. BEL, *Cah. Phys.*, t. **16**, 1962, p. 59.
[6] R. SACHS, *Proc. Royal Society*, t. **264**, 1961, p. 309.
[7] I. ROBINSON, *Il. math. Physics*, t. **2**, 1961, p. 290.

(Manuscrit reçu le 27 mai 1969).