ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

Coordonnées radiatives « cartésiennes »

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, nº 3 (1969), p. 251-275
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_3_251_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XI, n° 3, 1969, p. 251-275.

Section A :
Physique théorique.

Coordonnées radiatives « cartésiennes »

par

A. PAPAPETROU

Institut Henri Poincaré,
Laboratoire de Physique Théorique Associé au C. N. R. S.

RÉSUMÉ. — Nous considérons une transformation qui mène des coordonnées radiatives habituelles à des coordonnées du type cartésien. Nous étudions la forme et les propriétés générales de la métrique dans les nouvelles coordonnées.

Les équations du champ sont étudiées à l'ordre $1/r^4$ et les résultats obtenus sont comparés avec la solution des équations de Newman-Penrose. Dans le cas d'un champ stationnaire cette comparaison conduit à l'interprétation physique détaillée de la quantité Ψ_1^0 de Newman-Penrose.

SUMMARY. — We consider a transformation leading from the usual radiation coordinates to cartesian-like coordinates. We study the form and the general properties of the metric in the new coordinates.

The field equations are discussed to the order $1/r^4$ and the results obtained are compared with those derived from the Newman-Penrose formalism. In the special case of a stationary field this comparison allows the detailed physical interpretation of the quantity Ψ_1^0 of Newman-Penrose.

1. DÉFINITION DES COORDONNÉES RADIATIVES « CARTÉSIENNES »

Soient $\tilde{x}^\mu$ les coordonnées radiatives introduites par Bondi [*1*] [*2*] :

$$\tilde{x}^0 = u\,; \qquad \tilde{x}^i = (r, \theta, \varphi).$$

Dans ces coordonnées, la métrique du champ éloigné a la forme [2] [3]

$$(1,1)\quad \begin{cases} ds^2 = (1+\gamma_{00})du^2 + 2(1+\gamma_{01})dudr + 2r(\gamma_{02}d\theta + \gamma_{03}d\varphi)du \\ \qquad - r^2\{(1-\gamma_{22})d\theta^2 + \sin^2\theta(1-\gamma_{33})d\varphi^2 - 2\gamma_{23}d\theta d\varphi\}. \end{cases}$$

Les $\gamma_{\mu\nu}$ sont supposés développables en série des puissances de $\frac{1}{r}$:

$$(1,1\,a)\qquad \gamma_{\mu\nu} = \sum_n \frac{1}{r^n}\overset{n}{\gamma}_{\mu\nu}(u,\theta,\varphi) \quad , \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Rappelons que les hypersurfaces u = const. sont caractéristiques et que les bicaractéristiques de ces surfaces sont les lignes paramétriques de la coordonnée r. Le vecteur normal à la surface u = const. est

$$(1,2)\qquad \tilde{l}_\mu = (1\,;0,0,0) = \delta^0_\mu.$$

Par conséquent

$$(1,2\,a)\qquad \tilde{l}^\mu = (0\,;\tilde{g}^{10},0,0) = \tilde{g}^{10}\delta^\mu_1.$$

Rappelons encore que Bondi définit finalement la coordonnée r par la condition

$$\tilde{g}_{22}\tilde{g}_{33} - (\tilde{g}_{23})^2 = r^4\sin^2\theta.$$

Par contre Newman et Penrose [4] demandent que r soit un paramètre affine des bicaractéristiques. Ceci mène à la relation

$$(1,3)\qquad \tilde{g}_{01} = \tilde{g}^{01} = 1$$

et à la conséquence

$$(1,4)\qquad \tilde{l}^\mu = \delta^\mu_1.$$

Le passage aux coordonnées radiatives « cartésiennes » $x^\mu = (t\,;x^i)$ sera effectué par les formules suivantes :

$$(1,5)\quad \begin{cases} x^0 \equiv t = u + r; \\ x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad x^3 = r\cos\theta. \end{cases}$$

Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ correspondant aux coordonnées x^μ est donné par

$$(1,6)\qquad g_{\mu\nu} = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}.$$

En utilisant la transformation inverse à (1,5) on trouve que $g_{\mu\nu}$ a la forme

(1,7) $$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sum_n \frac{1}{r^n} \overset{n}{g}_{\mu\nu} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$\eta_{\mu\nu}$ étant le tenseur métrique minkowskien sous sa forme diagonale habituelle :

(1,8) $$\eta_{\mu\nu} = (1; -1, -1, -1).$$

Les coefficients $\overset{n}{g}_{\mu\nu}$ sont aussi, comme les $\overset{n}{\gamma}_{\mu\nu}$ dans (1,1 *a*), fonctions de u, θ, φ. Exprimées comme fonctions des nouvelles coordonnées les $\overset{n}{g}_{\mu\nu}$ dépendent donc de $t - r$ et x^i, étant homogènes de degré zéro en x^i. C'est-à-dire en posant

(1,9) $$\overset{n}{g}_{\mu\nu\,|\,i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \overset{n}{g}_{\mu\nu}\right)_{t-r=\text{const}}$$

nous aurons les relations

(1,10) $$\overset{n}{g}_{\mu\nu\,|\,i} x^i = 0.$$

Il est encore à remarquer que quand on s'intéresse seulement au champ éloigné le remplacement de u par $t - r$ n'est justifié que par la simplification particulière de la métrique minkowskienne.

Les composantes contravariantes $g^{\mu\nu}$ ont une forme analogue à (1,7) :

(1,7 *a*) $$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \sum_n \frac{1}{r^n} g_n^{\mu\nu}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Les coefficients $g_n^{\mu\nu}$ sont déterminés par les $\overset{n}{g}_{\mu\nu}$. En effet la relation

(1,11) $$g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\nu$$

nous donne :

(1,11 *a*) $$g_1^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\overset{1}{g}_{\alpha\beta}, \qquad g_2^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\overset{2}{g}_{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\sigma}\overset{1}{g}_{\alpha\rho}\overset{1}{g}_{\beta\sigma}, \text{ etc.}$$

Ces formules montrent que les $g_n^{\mu\nu}$ sont aussi fonctions de $t - r$ et x^i satisfaisant à

(1,10 *a*) $$g_{n\,|\,i}^{\mu\nu} x^i = 0.$$

La normale à l'hypersurface u = const. a dans le repère x^μ les composantes

$$l_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\tilde{l}_\alpha, \qquad l^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\tilde{l}^\alpha.$$

De (1,2), (1,2 *a*) et (1,5) on déduit :

$$(1,12) \qquad l^\mu = \left(1\,;\frac{x^i}{r}\right), \qquad l_\mu = \left(1\,;\,-\frac{x^i}{r}\right).$$

Ajoutons que l^μ aurait une forme plus compliquée si on avait utilisé la coordonnée r définie d'après Bondi. C'est pour cette raison que dans ce travail nous acceptons la définition de r donnée par Newman et Penrose.

La relation

$$(1,13) \qquad (g_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\alpha})l^\alpha = 0$$

est une conséquence immédiate de (1,3). On a aussi la relation équivalente

$$(1,13\,a) \qquad (g^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\alpha})l_\alpha = 0.$$

En tenant compte des développements (1,7) et (1,7 *a*) on trouve les conditions d'orthogonalité

$$(1,14) \qquad \overset{n}{g}_{\mu\alpha}l^\alpha = 0 = \overset{n}{g}{}^{\mu\alpha}l_\alpha, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

La relation (1,13) ou (1,13 *a*) est la *condition de coordonnées* pour les coordonnées « cartésiennes » que nous venons d'introduire : elle joue dans ce système de coordonnées le même rôle comme par exemple la condition isotherme, $(\sqrt{g}g^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$, dans la méthode d'approximation classique. Notons que contrairement aux conditions de coordonnées utilisées précédemment, qui sont des équations différentielles, la nouvelle condition est constituée par des équations algébriques.

Une condition de la forme (1,13) a été donné par Floridès, Synge et McCrea [5]. Ces auteurs étudient un système de coordonnées radiatives cartésiennes construit à l'aide d'une courbe C du genre temps et des cônes de lumière ayant pour sommets les points de C. Leur attention a été concentrée sur les propriétés de ces coordonnées dans un domaine de l'espace contenant la courbe C. Par contre dans notre travail, nous utilisons ces coordonnées dans le domaine éloigné des sources du champ, sans supposer l'existence d'une courbe C.

Avant de passer au prochain chapitre nous donnons quelques formules comme exemples d'application des relations (1,10) et (1,14). D'abord, une notation. Pour $f(t - r, x^i)$ nous posons

(1,15) $$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial(t-r)}, \qquad f_{|i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)_{t-r=\mathrm{const}}.$$

Il s'ensuit :

(1,16) $$f_{,\alpha} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \dot{f} l_\alpha + \delta_{\alpha i} f_{|i}.$$

En remarquant que l^α et l_α ne dépendent pas de t on déduit de (1,14) :

(1,17) $$\dot{\overset{n}{g}}_{\mu\alpha} l^\alpha = 0 = \ddot{\overset{n}{g}}_{\mu\alpha} l^\alpha = \ldots$$

Des relations analogues sont valables pour $\overset{n}{g}{}^{\mu\nu}$.

D'autre part on trouve immédiatement

(1,18) $$l^i_{,k} = \frac{1}{r}(\delta^i_k + l^i l_k).$$

On vérifie aussi la relation plus générale

(1,19) $$l^\alpha_{,\beta} = \frac{1}{r}(\delta^\alpha_\beta + l^\alpha l_\beta - \eta^{\alpha 0} l_\beta - l^\alpha \eta_{\beta 0}).$$

En tenant compte de ces formules on trouve en dérivant (1,14) par rapport à x^i :

(1,20) $$r \overset{n}{g}_{\mu\alpha|i} l^\alpha = \overset{n}{g}_{\mu 0} l_i - \overset{n}{g}_{\mu i}.$$

Avec $\mu = i$ cette relation nous donne

(1,21) $$r \overset{n}{g}_{\alpha i|i} l^\alpha = \overset{n}{g}_{00} - \overset{n}{g}_{ii} = \overset{n}{g},$$

où nous avons posé

(1,22) $$\eta^{\alpha\beta} \overset{n}{g}_{\alpha\beta} = \overset{n}{g}.$$

2. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE LA MÉTRIQUE

Posons

(2,1) $$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}.$$

D'après (1,13) $h_{\mu\nu}$ est orthogonal à l^{μ} :

$$h_{\mu\alpha} l^{\alpha} = 0. \tag{2,2}$$

Les relations (2,2) permettent d'exprimer les h_{0i} et h_{00} à l'aide de h_{ik} et l^k. On trouve :

$$h_{i0} = - h_{ik} l^k \quad , \quad h_{00} = - h_{0i} l^i = h_{ik} l^i l^k. \tag{2,3}$$

A l'aide de (2,3) on démontre sans difficulté que

$$\det h_{\mu\nu} = 0. \tag{2,4}$$

Dans le déterminant de $h_{\mu\nu}$ appelons $H^{\alpha\beta}$ le co-facteur correspondant à l'élément $h_{\alpha\beta}$. Des formules (2,3) on déduit encore les relations

$$H^{\alpha\beta} = H^{00} l^{\alpha} l^{\beta} \ ; \qquad H^{00} = \det h_{ik}. \tag{2,5}$$

La quantité $\det g_{\mu\nu}$ est la somme de termes qui contiennent jusqu'à 4 facteurs $h_{\alpha\beta}$. La somme des termes contenant 4 facteurs $h_{\alpha\beta}$ est la quantité $\det h_{\mu\nu}$ qui s'annule d'après (2,4). On trouve sans difficulté que la somme des termes contenant 3 facteurs $h_{\alpha\beta}$ s'annule aussi à cause de (2,5). Il ne reste donc dans $\det g_{\mu\nu}$ que des termes contenant jusqu'à 2 termes $h_{\alpha\beta}$. Le calcul détaillé conduit à une formule assez simple :

$$g \equiv - \det g_{\mu\nu} = 1 + \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\alpha} h_{\nu\beta}. \tag{2,6}$$

A cause de la condition (2,2) les 10 quantités $h_{\mu\nu}$ peuvent être exprimées à l'aide de 6 quantités indépendantes. Ces quantités pourraient être par exemple les composantes h_{ik} comme le montrent les relations (2,3). Mais il est préférable d'exprimer les $h_{\mu\nu}$ à l'aide de 6 « scalaires » obtenus de la manière suivante.

Le tenseur métrique est donné d'après [*4*] par la relation

$$g^{\mu\nu} = l^{\mu} n^{\nu} + n^{\mu} l^{\nu} - (m^{\mu} \overline{m}^{\nu} + m^{\mu} \overline{m}^{\nu}). \tag{2,7}$$

Dans le repère $\tilde{x}^{\mu}$ utilisé par Newman et Penrose les vecteurs n^{μ} et m^{μ} sont donnés par

$$\tilde{n}^{\mu} = \delta^{\mu}_{0} + U \delta^{\mu}_{1} + X^{A} \delta^{\mu}_{A}, \quad \tilde{m}^{\mu} = \omega \delta^{\mu}_{1} + \xi^{A} \delta^{\mu}_{A} \ ; \quad A = 2, 3. \tag{2,8}$$

Rappelons que les 3 fonctions U et X^A sont réelles, tandis que ω et ξ^A sont des fonctions complexes.

Considérons 3 « vecteurs » auxiliaires définis dans le repère $\tilde{x}^\mu$ par

$$(2,9) \qquad \tilde{A}^\mu = \delta_2^\mu, \qquad \tilde{B}^\mu = \delta_3^\mu, \qquad \tilde{C}^\mu = \delta_0^\mu.$$

A l'aide de la formule de transformation

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tilde{V}^\alpha$$

nous trouvons :

$$(2,9\,a) \quad A^\mu \equiv ra^\mu = (0\,;\, ra^i), \qquad B^\mu \equiv r \sin\theta b^\mu = (0\,;\, r\sin\theta b^i), \qquad C^\mu = \delta_0^\mu.$$

Les vecteurs tridimensionnels a^i et b^i ont les composantes

$$(2,10) \quad \begin{cases} a^i = (\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta) = \dfrac{1}{\lambda}(l^3 l^i - \delta^{3i}), \\ b^i = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0) = \dfrac{1}{\lambda}(-\delta^{i1} l^2 + \delta^{i2} l^1)\,; \\ \lambda = \sqrt{1-(l^3)^2} = \sin\theta. \end{cases}$$

Les 3 vecteurs l^i, a^i, b^i forment un repère de l'espace à 3 dimensions, orthonormé par rapport à la métrique $-\eta_{ik} = \delta_{ik}$:

$$l^i l^i = a^i a^i = b^i b^i = 1 \quad , \quad l^i a^i = a^i b^i = b^i l^i = 0.$$

Les vecteurs a^i et b^i sont tangents aux courbes $\varphi =$ const. et $\theta =$ const. de la sphère $r =$ const.

En tenant compte de (1,4) et (2,9) on peut réécrire les relations (2,8) sous la forme

$$(2,8\,a) \quad \tilde{n}^\mu = \tilde{C}^\mu + U\tilde{l}^\mu + X^2\tilde{A}^\mu + X^3\tilde{B}^\mu, \qquad \tilde{m}^\mu = \omega\tilde{l}^\mu + \xi^2\tilde{A}^\mu + \xi^3\tilde{B}^\mu.$$

On trouve alors immédiatement la forme de ces vecteurs dans le repère x^μ :

$$(2,11) \quad n^\mu = C^\mu + Ul^\mu + r(X^2 a^\mu + \sin\theta X^3 b^\mu), \quad m^\mu = \omega l^\mu + r(\xi^2 a^\mu + \sin\theta \xi^3 b^\mu).$$

En introduisant (2,11) dans (2,7) on obtient :

$$(2,12) \quad \begin{cases} g^{\mu\nu} = l^\mu C^\nu + l^\nu C^\mu + 2l^\mu l^\nu(U - \omega\bar{\omega}) + (l^\mu a^\nu + l^\nu a^\mu) r (X^2 - \omega\bar{\xi}^2 - \bar{\omega}\xi^2) \\ \qquad + (l^\mu b^\nu + l^\nu b^\mu) r \sin\theta (X^3 - \omega\bar{\xi}^3 - \bar{\omega}\xi^3) - 2a^\mu a^\nu r^2 \xi^2 \bar{\xi}^2 \\ \qquad - 2b^\mu b^\nu r^2 \sin^2\theta \xi^3\bar{\xi}^3 - (a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu) r^2 \sin\theta (\xi^2\bar{\xi}^3 + \bar{\xi}^2\xi^3). \end{cases}$$

On vérifie directement que la métrique minkowskienne $\eta^{\mu\nu}$ est donnée par

$$\eta^{\mu\nu} = l^\mu C^\nu + l^\nu C^\mu - l^\mu l^\nu - (a^\mu a^\nu + b^\mu b^\nu). \tag{2,13}$$

En retranchant (2,13) de (2,12) nous trouvons finalement :

(2,14)

$$g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} = a'X^{\mu\nu} + b'Y^{\mu\nu} + c'Z^{\mu\nu} + A'(l^\mu a^\nu + l^\nu a^\mu) + B'(l^\mu b^\nu + l^\nu b^\mu) + C' l^\mu l^\nu;$$

$$X^{\mu\nu} = a^\mu a^\nu - b^\mu b^\nu, \quad Y^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu, \quad Z^{\mu\nu} = a^\mu a^\nu + b^\mu b^\nu. \tag{2,15}$$

Les 10 quantités $g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}$ ont été ainsi exprimées à l'aide des 6 « scalaires » a', b', c', A', B', C'. La comparaison détaillée de (2,12) et (2,14) permet d'exprimer ces scalaires en fonction des quantités utilisées dans le formalisme de Newman et Penrose :

$$\left\{\begin{aligned} & a' = r^2(\sin^2\theta\xi^3\bar\xi^3 - \xi^2\bar\xi^2), \quad b' = -r^2\sin\theta(\xi^2\bar\xi^3 + \bar\xi^2\xi^3), \\ & \qquad\qquad c' = 1 - r^2(\xi^2\bar\xi^2 + \sin^2\theta\xi^3\bar\xi^3); \\ & A' = r(X^2 - \omega\bar\xi^2 - \bar\omega\xi^2), \quad B' = r\sin\theta(X^3 - \omega\bar\xi^3 - \bar\omega\xi^3), \\ & \qquad\qquad C' = 1 + 2U - 2\omega\bar\omega. \end{aligned}\right. \tag{2,16}$$

Une décomposition du type (2,14) sera possible pour un « tenseur » $k^{\mu\nu} = k^{\nu\mu}$ quelconque satisfaisant à $k^{\mu\alpha}l_\alpha = 0$. Considérons en particulier le tenseur $\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ satisfaisant à cause de (2,2) à

$$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}.l_\nu = \eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta}l^\beta = 0.$$

Nous aurons :

$$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta} = aX^{\mu\nu} + bY^{\mu\nu} + cZ^{\mu\nu} + A(l^\mu a^\nu + l^\nu a^\mu) + B(l^\mu b^\nu + l^\nu b^\mu) + Cl^\mu l^\nu.$$

Par conséquent :

$$h_{\alpha\beta} = aX_{\alpha\beta} + bY_{\alpha\beta} + cZ_{\alpha\beta} + A(l_\alpha a_\beta + l_\beta a_\alpha) + B(l_\alpha b_\beta + l_\beta b_\alpha) + Cl_\alpha l_\beta \tag{2,17}$$

les $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta}$, etc. étant donné par

$$X_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}X^{\mu\nu}, \ \dots \quad ; \quad a_\alpha = \eta_{\alpha\mu}a^\mu \quad , \quad b_\alpha = \eta_{\alpha\mu}b^\mu. \tag{2,18}$$

Les scalaires a', b', ... de (2,14) et les scalaires a, b, ... de (2,17) ne sont pas indépendants. En effet l'équation (1,11) conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = -\frac{c'-1}{c-1} = -\frac{1}{g} \quad ; \quad CC' = AA' + BB' - C\,; \\ & gA' = (c - 1 - a)A - bB \quad , \quad gB' = -bA + (c - 1 + a)B. \end{aligned} \tag{2,19}$$

On a aussi la relation

$$g = -\det g_{\mu\nu} = (c-1)^2 - (a^2 + b^2). \tag{2,20}$$

Considérons encore les quantités

$$\rho = l_{\mu;\nu} m^\mu \overline{m}^\nu = -\frac{1}{2} l^\mu{}_{;\mu} \quad , \quad \sigma = l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu.$$

A l'aide de (1,18) et (1,19) on trouve :

$$\rho = -\frac{1}{r} - \frac{1}{4}(lgg)_{,\alpha} l^\alpha, \qquad \sigma = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho} m^\mu m^\nu l^\rho. \tag{2,21}$$

On aura donc

$$\rho = -\frac{1}{r} + \frac{\rho^0}{r^2} + \frac{\rho^1}{r^3} + \ldots, \qquad \sigma = \frac{\sigma^0}{r^2} + \frac{\sigma^1}{r^3} + \ldots \tag{2,22}$$

La formule (2,20) montre que ρ ne dépend que des quantités a, b, c. En développant ces quantités en séries,

$$a = \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \ldots, \quad b = \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \ldots, \quad c = \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} + \ldots, \tag{2,23}$$

on trouve finalement :

$$\rho^0 = -\frac{1}{2} c_1, \qquad \rho^1 = -\frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2c_2), \ldots \tag{2,24}$$

Notons encore la relation suivante qu'on trouve en multipliant (2,17) par $\eta^{\alpha\beta}$:

$$-2c = \eta^{\alpha\beta} \sum_n \frac{1}{r^n} \overset{n}{g}_{\alpha\beta}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2,25 a}$$

C'est-à-dire :

$$c_1 = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \overset{1}{g}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \overset{1}{g}, \qquad c_2 = -\frac{1}{2} \overset{2}{g}, \ldots \tag{2,25}$$

Les deux premiers coefficients de σ dans (2,22) peuvent être exprimés aussi à l'aide de a, b, c. En effet, on déduit des équations de Newman-Penrose, quand on a choisi les coordonnées angulaires $\tilde{x}^2 = \theta$ et $\tilde{x}^3 = \varphi$:

$$\sqrt{2}\xi^2 = \frac{1}{r} - \frac{\sigma^0}{r^2} + \ldots, \qquad \sqrt{2} \sin \theta \xi^3 = \frac{i}{r} + \frac{i\sigma^0}{r^2} + \ldots \tag{2,26}$$

La deuxième formule (2,11) donne alors :

$$m^\mu = \omega l^\mu + \frac{a^\mu + ib^\mu}{\sqrt{2}} - \frac{a^\mu - ib^\mu}{\sqrt{2}r}\sigma^0 + \dots \tag{2,27}$$

En introduisant (2,27) dans (2,21) on trouve finalement :

$$\sigma^0 = -\frac{a_1 + ib_1}{2}, \qquad \sigma^1 = -(a_2 + ib_2) - c_1(a_1 + ib_1). \tag{2,28}$$

La première de ces équations montre le rôle particulièrement important des quantités a_1 et b_1.

3. LES TRANSFORMATIONS PERMISES

Remarquons d'abord qu'il ne s'agit pas exactement des transformations de Bondi-Metzner à cause du fait que nous utilisons la coordonnée r définie d'après Newman-Penrose. Les calculs sont presque une répétition des calculs de Bondi-Metzner et Sachs, adaptée aux nouvelles coordonnées x^μ. Nous donnerons directement les résultats de ces calculs.

Soient $x^\mu = (t; x^i)$ et $x'^\mu = (t'; x'^i)$ deux systèmes de coordonnées radiatives cartésiennes. La relation entre x^μ et x'^μ a la forme

$$x^\mu = r'f^\mu + f_0^\mu + \frac{1}{r'}f_1^\mu + \dots \tag{3,1}$$

Les coefficients $f^\mu, f_0^\mu, f_1^\mu, \dots$ sont fonctions de $t' - r'$ et l'^i, où

$$r' = (x'^i x'^i)^{1/2}, \qquad l'^i = \frac{x'^i}{r'}. \tag{3,2}$$

Ces fonctions seront déterminées à l'aide de la formule de transformation

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}. \tag{3,3}$$

Nous avons à demander que $g'_{\mu\nu}$ ait une forme analogue à (1,7) :

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sum_n \frac{1}{r'^n} g'^n_{\mu\nu}, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3,4}$$

Dans cette relation les coefficients $g'^n_{\mu\nu}$ sont des fonctions de $t' - r'$ et l'^i satisfaisant à des relations de la forme (1,14) :

$$g'^n_{\mu\alpha} l'^\alpha = 0. \tag{3,5}$$

Le premier membre de (3,3) est une série de puissances de $\frac{1}{r'}$ avec des coefficients qui sont fonctions de $t' - r'$ et l'^i. Les deux premiers facteurs du deuxième membre ont la même propriété d'après (3,1). Mais le dernier facteur $g_{\alpha\beta}$ est une série de puissances de $\frac{1}{r}$ et les coefficients sont fonctions de $t - r$ et l^i. Pour pouvoir utiliser (3,3) il faut d'abord exprimer $g_{\alpha\beta}$ à l'aide de r', $t' - r'$ et l'^i. On y arrive en déduisant de (3,1) les relations qui donnent r, $t - r$ et l^i comme fonctions de r', $t' - r'$ et l'^i, ce qui permet de réécrire l'équation (1,7) sous la forme

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \sum_n \frac{1}{r'^n} \tilde{g}^n_{\alpha\beta}(t' - r', l'^i), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3,6}$$

C'est cette forme de $g_{\alpha\beta}$ qu'on introduira dans (3,3). Il suffit alors d'égaler les coefficients de $\frac{1}{r'^n}$ dans les deux membres de (3,3). Nous donnons directement les résultats finaux de ce calcul qui sont les suivants.

Le coefficient f^μ du premier terme de (3,1) a la forme

$$f^\mu = A^\mu_\nu l^\nu, \tag{3,7}$$

les A^μ_ν étant des constantes satisfaisant à

$$\eta_{\mu\nu} A^\mu_\rho A^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \tag{3,8}$$

C'est-à-dire les A^μ_ν sont les coefficients de la transformation de Lorentz qui apparaît ainsi directement dans les coordonnées radiatives cartésiennes.

Pour le coefficient suivant f^μ_0 nous trouvons la forme

$$f^\mu_0 = (t' - r')A^\mu_0 + \lambda^\mu(l'^i). \tag{3,9}$$

Les 4 fonctions λ^μ satisfont à 3 relations :

$$\lambda^i = \left(\frac{1}{f^0} f^i A^0_k - A^i_k\right) \frac{\partial}{\partial x'^k}(r'\Phi) + \lambda^0 \frac{f^i}{f^0}, \tag{3,10}$$

Φ étant une fonction arbitraire de l'^i. Ceci signifie que les f^μ_0 dépendent de deux fonctions arbitraires de l'^i, par exemple les fonctions Φ et λ^0. Il est à rappeler qu'il n'y a qu'une telle fonction dans les transformations de Bondi-Metzner. Le fait que nous avons ici deux fonctions arbitraires est une conséquence de la définition de la coordonnée r d'après Newman-Penrose. Nous allons toutefois voir plus tard qu'on peut imposer dans ce cas une condition supplémentaire générale et particulièrement simple qui permet d'éliminer l'une de ces fonctions et d'arriver ainsi à des transformations isomorphes aux transformations de Bondi-Metzner.

Nous donnerons encore l'expression trouvée pour le coefficient f_1^μ :

$$f_1^\mu = \frac{1}{2} f^\mu \left(A_0^\alpha f^\beta \tilde{g}^2_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} f^\alpha f^\beta \dot{\tilde{g}}^3_{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} f^\beta \tilde{g}^2_{\alpha\beta}, \tag{3,11}$$

les quantités $\tilde{g}^n_{\alpha\beta}$ étant définies par (3,6).

4. CLASSIFICATION DES ÉQUATIONS DU CHAMP

Il a été montré par Bondi [2] et Sachs [3] qu'avec les coordonnées radiatives les équations du champ se séparent, à l'aide de l'identité de Bianchi, en trois groupes. On a d'abord les équations principales qui donnent des équations non triviales à chaque étape de l'approximation. Par contre les équations supplémentaires ne donnent, quand les équations principales sont satisfaites, qu'une équation chacune à une certaine étape de l'approximation. Enfin une des équations du champ est une conséquence immédiate des équations principales.

Dans le cas des coordonnées radiatives cartésiennes on peut prendre comme équations principales les 6 équations suivantes :

$$R_{ik} - l_i R_{0k} - l_k R_{0i} + l_i l_k R_{00} = 0. \tag{4,1}$$

En effet quand ces équations sont satisfaites on déduit de l'identité de Bianchi d'abord la relation

$$R l^\alpha_{;\alpha} = 0. \tag{4,2 a}$$

Le facteur $l^\alpha_{;\alpha}$ étant d'après (2,21) différent de zéro, la relation (4,2 *a*) conduit à

$$R = 0. \tag{4,2}$$

L'équation du champ (4,2) est donc l'équation triviale.

L'identité de Bianchi conduit aussi, quand les équations (4,1) sont satisfaites, à la relation

$$\{r^3\sqrt{g}(R_{0i} - l_i R_{00})\}_{,\alpha} l^\alpha = 0. \tag{4,3}$$

Avec le tenseur métrique développé en série d'après (1,7) on voit immédiatement que la quantité $\sqrt{g}(R_{0i} - l_i R_{00})$ a un développement de la forme

$$\sqrt{g}(R_{0i} - l_i R_{00}) = \sum_n \frac{1}{r^n} \overset{n}{M}_{0i} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4,4}$$

les $\overset{n}{M}_{0i}$ étant fonctions de $t - r$ et l^k. La relation (4,3) montre que les équations (4, 1) et l'identité de Bianchi ont la conséquence

$$\overset{n}{M}_{0i} = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \neq 3.$$

Il s'ensuit que les équations du champ

$$R_{0i} - l_i R_{00} = 0 \tag{4,5}$$

se réduisent à

$$\overset{3}{M}_{0i} = 0. \tag{4,5 a}$$

Notons encore que 2 seulement de 3 équations (4,5) ou (4,5 *a*) sont indépendantes. En effet en multipliant (4,5) par l_i on trouve une relation qui est une conséquence de (4,1).

Quand les équations (4,1) et (4,5) sont satisfaites, on déduit de l'identité de Bianchi encore une relation :

$$(r^2\sqrt{g}R_{00})_{,\alpha} l^\alpha = 0. \tag{4,6}$$

Avec les $g_{\mu\nu}$ de la forme (1,7) on trouve :

$$\sqrt{g}R_{00} = \sum_n \frac{1}{r^n} \overset{n}{M}_{00}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4,7}$$

La relation (4,6) est équivalente à

$$\overset{n}{M}_{00} = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \neq 2.$$

Il s'ensuit que l'équation du champ

$$R_{00} = 0 \tag{4,8}$$

se réduit à

(4,8 *a*) $$M^2_{00} = 0.$$

Nous sommes ainsi arrivés au résultat que deux des équations (4,5 *a*) et l'équation (4,8 *a*) constituent les équations du champ supplémentaires.

On arrive à un autre choix d'équations principales en remarquant qu'un tenseur $A_{ik} = A_{ki}$ de l'espace à 3 dimensions peut être représenté par ses composantes relatives au repère formé par les 3 vecteurs l^i, a^i, b^i. Le résultat est une relation analogue à (2,17) :

$$A_{ik} = \tilde{a}X_{ik} + \tilde{b}Y_{ik} + \tilde{c}Z_{ik} + \tilde{A}(l_i a_k + l_k a_i) + \tilde{B}(l_i b_k + l_k b_i) + \tilde{C} l_i l_k.$$

Les scalaires $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, ... sont donnés par

$$\tilde{a} = \frac{1}{2} A_{ik} X^{ik}, \qquad \tilde{b} = \frac{1}{2} A_{ik} Y^{ik}, \qquad \tilde{c} = \frac{1}{2} A_{ik} Z^{ik} ;$$
$$\tilde{A} = A_{ik} l^i a^k, \qquad \tilde{B} = A_{ik} l^i b^k, \qquad \tilde{C} = A_{ik} l^i l^k.$$

L'équation $A_{ik} = 0$ est équivalente aux 6 équations scalaires

$$\tilde{a} = \tilde{b} = \dots \tilde{C} = 0.$$

En prenant comme A_{ik} le premier membre de (4,1) nous trouvons le deuxième système d'équations principales qui est le suivant :

(4,9 *a*) $$R_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta = 0 ;$$

(4,9 *b*) $$R_{\alpha i} l^\alpha a^i = R_{\alpha i} l^\alpha b^i = 0 ;$$

(4,9 *c*) $$R_{ik} X^{ik} = R_{ik} Y^{ik} = R_{ik} Z^{ik} = 0.$$

Les équations supplémentaires sont les mêmes comme précédemment :

(4,10) $$M^3_{0i} a^i = M^3_{0i} b^i = 0 = M^2_{00}.$$

L'équation (4,9 *a*) est particulièrement simple. En effet on trouve

(4,11) $$\left\{ \begin{aligned} R_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g} g_{,\alpha} l^\alpha\right)_{,\beta} l^\beta + \frac{1}{rg} g_{,\alpha} l^\alpha + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{g} g_{,\alpha} l^\alpha\right)^2 \\ + \frac{1}{2g}\{(a_{,\alpha} l^\alpha)^2 + (b_{,\alpha} l^\alpha)^2 - (c_{,\alpha} l^\alpha)^2\}. \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de (2,20) on voit que cette équation ne contient que les quantités *a*, *b* et *c*. Les équations suivantes (4,9 *b*) sont encore relativement simples. Nous ne les écrirons pas ici explicitement. Nous remarquerons seulement qu'à côté de a, b, c elles contiennent aussi les quantités A et B. La forme exacte des 3 dernières équations principales (4,9 c) n'a pas été déterminée.

5. DISCUSSION DES ÉQUATIONS DU CHAMP

Avec le $g_{\mu\nu}$ développé en série d'après (1,7) on arrive immédiatement à un développement analogue de $R_{\mu\nu}$:

(5,1) $$R_{\mu\nu} = \sum_n \frac{1}{r^n} \overset{n}{R}_{\mu\nu}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

les $\overset{n}{R}_{\mu\nu}$ étant fonctions des $\overset{n'}{g}_{\mu\nu}$ ($n' \leqslant n$) et de leurs dérivées. Les équations du champ $R_{\mu\nu} = 0$ se réduisent à

(5,2) $$\overset{n}{R}_{\mu\nu} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Les expressions qu'on trouve pour $\overset{n}{R}_{\mu\nu}$ s'allongent très rapidement avec les valeurs de n croissantes, ce qui rend la discussion directe des équations (5,2) particulièrement difficile.

Le problème se présente sous une forme moins compliquée quand on utilise les équations du champ (4,9) et (4,10) et si en même temps on passe à la description de $g_{\mu\nu}$ à l'aide des quantités a, b, ... introduites par (2,17). Nous donnerons dans la suite les résultats obtenus de cette manière sans entrer dans les détails du calcul.

A l'ordre $\frac{1}{r}$ toutes les équations principales (4,9) sont vides. A l'ordre $\frac{1}{r^2}$ c'est seulement la dernière de (4,9 c) qui n'est pas vide. Elle a la forme simple

(5,3) $$\dot{c}_1 = 0,$$

c_1 étant le coefficient du premier terme dans le développement de c d'après (2,23). A cause de (2,25), l'équation (5,3) est équivalente à

(5,3 a) $$\dot{g}^1 = 0.$$

Avant de discuter les équations du champ à l'ordre $1/r^3$ nous allons montrer que l'équation (5,3 *a*) permet une simplification de la métrique. Il sera en effet toujours possible d'imposer la condition

(5,4) $$g^1 = 0 \leftrightarrow c_1 = 0.$$

Pour le démontrer il suffit d'utiliser la relation de transformation de la quantité g^1. On peut se limiter au cas simple où les constantes A^μ_ν qui entrent dans (3,6) sont

(5,5) $$A^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu.$$

La formule de transformation de g^1 prend alors finalement la forme

(5,6) $$g'^1 = 4\lambda^0 - 2r'(r'\Phi)_{,ii} + \tilde{g}^1.$$

La quantité $\tilde{g}^1$ est dans le cas (5,5) ce que devient g^1 quand on y remplace $t - r$ par $t' - r'$ et l^k par l'^k. Le g^1 étant indépendant de $t - r$ d'après (5,3 *a*) le $\tilde{g}^1$ sera une fonction de l'^k seulement. La relation (5,6) montre alors qu'on peut toujours annuler g'^1. En effet il suffit de choisir les deux fonctions arbitraires $\lambda^0(l'^k)$ et $\Phi(l'^k)$ de la manière suivante :

$$\Phi = 0, \qquad \lambda^0 = -\frac{1}{4}\tilde{g}^1.$$

Dans la suite nous utiliserons exclusivement des coordonnées satisfaisant à (5,4). Remarquons qu'avec la restriction (5,4) il ne reste dans (3,9) qu'une fonction arbitraire $\Phi(l'^k)$. En effet en se limitant à des transformations satisfaisant à $g^1 = g'^1 = 0$ on trouve au lieu de (3,10) :

(5,7) $$\lambda^\alpha = \frac{1}{2}f^\alpha r'^2\Phi_{,ii} - A^\alpha_i r'\Phi_{,i} + A^\alpha_0\Phi.$$

Remarquons finalement qu'avec (5,4) le terme de l'ordre $\frac{1}{r^2}$ dans le développement de ρ donné par (2,22) disparaît. Newman et Unti [*6*] ont éliminé ce terme par une transformation de la coordonnée radiale,

(5,8) $$r' = r - \rho^0(u, \theta, \varphi),$$

apparemment sans utiliser les équations du champ. En réalité ils ont aussi besoin des équations du champ. En effet pour que la relation (5,8) soit compatible avec les transformations de Bondi-Metzner ρ^0 doit être indépendant de *u*. Or les équations du champ imposent que ρ^0 soit indépendant de *u*.

A l'ordre $\frac{1}{r^3}$ l'équation (4,9 *a*) est vide. Les équations (4,9 *b*) donnent :

$$(5,9) \quad A_1 = \frac{r}{2}(-a_{1,i}a^i + b_{1,i}b^i) - \frac{1}{\lambda}l^3 a_1, \quad B_1 = \frac{r}{2}(-a_{1,i}b^i - b_{1,i}a^i) - \frac{1}{\lambda}l^3 b_1.$$

A_1 et B_1 sont les premiers coefficients dans les développements de A et B analogues à (2,23) :

$$(5,10) \qquad A = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \ldots, \qquad B = \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} + \ldots$$

Les deux premières des équations (4,9 *c*) donnent :

$$(5,11) \qquad \dot{a}_2 = \dot{b}_2 = 0.$$

La dernière équation (4,9 *c*) est vide.

A l'ordre $\frac{1}{r^4}$ nous n'avons déterminé que les équations (4,9 *a*) et (4,9 *b*). Elles donnent :

$$(5,12) \qquad 4c_2 + a_1^2 + b_1^2 = 0,$$

$$(5,13) \quad r(a_{2,i}a^i - b_{2,i}b^i) - \frac{2}{\lambda}l^3 a_2 = 0 = r(a_{2,i}b^i + b_{2,i}a^i) + \frac{2}{\lambda}l^3 b_2.$$

Les deux premières équations supplémentaires (4,10) ont la forme

$$(5,14) \qquad \dot{A}_2 = \ldots \quad , \quad \dot{B}_2 = \ldots$$

Les deuxièmes membres de ces équations contiennent les quantités a_1, b_1, A_1, B_1 et C_1 ; C_1 est le premier coefficient dans le développement de la quantité C :

$$(5,15) \qquad C = \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \ldots$$

Notons la relation donnée par la composante $\alpha = \beta = 0$ de (2,17) :

$$(5,16) \qquad C = h_{00} = \sum_n \frac{1}{r^n} \overset{n}{g}_{00}.$$

C'est-à-dire

$$(5,17) \qquad C_1 = \overset{1}{g}_{00} \quad , \quad C_2 = \overset{2}{g}_{00}, \ldots$$

La troisième équation supplémentaire (4,10) donne

$$\left\{ 2g^1_{00} + 2(A_1 a^i + B_1 b^i)_{,i} + \dot{a}_1 a_1 + \dot{b}_1 b_1 \right\}^{\cdot} = \dot{a}_1{}^2 + \dot{b}_1{}^2. \tag{5,18}$$

Les équations (5,13) ont une conséquence simple et importante. En effet si nous réintroduisons les angles polaires θ et φ nous pouvons écrire ces équations sous la forme

$$b_{2,\varphi} = \sin\theta . a_{2,\theta} + 2\cos\theta . a_2, \qquad - a_{2,\varphi} = \sin\theta . b_{2,\theta} + 2\cos\theta . b_2. \tag{5,13 a}$$

La première de ces équations s'écrit encore

$$(\sin\theta . b_2)_{,\varphi} = (\sin^2\theta . a_2)_{,\theta}$$

et montre que

$$\sin\theta . b_2 = X_{,\theta} \quad , \quad \sin^2\theta . a_2 = X_{,\varphi}. \tag{5,19}$$

En introduisant (5,19) dans la deuxième (5,13 *a*) on trouve que $X = X(\theta, \varphi)$ satisfait à l'équation de Laplace :

$$\Delta X = 0.$$

La seule solution de cette équation qui n'a pas de singularité sur la sphère $r =$ const. est $X =$ const. Par conséquent

$$a_2 = b_2 = 0. \tag{5,20}$$

Ce résultat renforce les équations (5,11) de l'ordre $\frac{1}{r^3}$.

Avec (5,20) et (5,4) la deuxième équation (2,28) nous donne

$$\sigma^1 = 0. \tag{5,21}$$

Le deuxième terme du développement (2,22) de σ s'annule donc à cause des équations du champ. Newman et Unti [*6*] avaient déduit ce résultat en postulant que le développement de la quantité Ψ_0 commence avec le terme de l'ordre $\frac{1}{r^5}$.

En comparant (5,18) aux résultats des travaux précédents [*2*] [*3*] [*6*], on voit immédiatement que cette équation exprime la loi de conservation de l'énergie. D'autre part les quantités A_2 et B_2 sont liées au moment cinétique du système. Par conséquent les équations (5,14) expriment la loi de conservation du moment cinétique.

6. CHAMPS STATIONNAIRES

Dans ce chapitre nous allons utiliser des coordonnées radiatives cartésiennes adaptées au caractère stationnaire du champ, c'est-à-dire telles que

$$(6,1) \qquad \dot{g}_{\mu\nu} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \dot{g}^{n}_{\mu\nu} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Dans ce cas, les développements (5,1) de $R_{\mu\nu}$ commencent avec le terme de l'ordre $n = 3$. Nous avons déterminé les quantités $g^{1}_{\mu\nu}$ et $g^{2}_{\mu\nu}$ par intégration des équations du champ

$$(6,2) \qquad R^{3}_{\mu\nu} = 0 = R^{4}_{\mu\nu}.$$

Nous donnons dans la suite les résultats de ces calculs.

L'équation $R^{3}_{00} = 0$ se réduit à

$$(6,3) \qquad g^{1}_{00,ii} = 0.$$

La solution de cette équation qui n'a pas de singularité sur la sphère $r =$ const. est

$$(6,4) \qquad g^{1}_{00} = -2m,$$

la constante m étant l'énergie totale du système.

Les équations $R^{3}_{0i} = R^{3}_{ik} = 0$ sont assez longues et nous ne les écrirons pas ici directement. On déduit de ces équations la forme générale des quantités g^{1}_{0i} et g^{1}_{ik} qui est compliquée du fait qu'elle contient la fonction arbitraire Φ entrant dans les transformations permises d'après (5,7). On obtient des résultats simples en imposant une condition aux coordonnées utilisées. Pour y arriver posons d'abord

$$(6,5) \qquad g^{1}_{0i} - g^{1}_{00}l_i = F_i, \qquad g^{1}_{ik} - g^{1}_{i0}l_k - g^{1}_{0k}l_i + g^{1}_{00}l_il_k = F_{ik}.$$

On vérifie immédiatement que

$$(6,6) \qquad F_il^i = 0 = F_{ik}l^k.$$

On a encore à cause de (1,14) et (5,4) :

$$(6,7) \qquad F_{ii} = -g^{1} = 0.$$

Avec (6,5) on peut exprimer les g^{1}_{0i} et g^{1}_{ik}, donc aussi les R^{3}_{0i} et R^{3}_{ik} à l'aide de g^{1}_{00}, F_i et F_{ik}. Les équations du champ $R^{3}_{0i} = R^{3}_{ik} = 0$ prennent alors la forme

$$r(F_{i,ss} - F_{s,si}) - F_{s,s}l_i = 0\,; \tag{6,8}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & r^2(F_{ik,ss} - F_{is,sk} - F_{ks,si}) - r(F_{is,s}l_k + F_{ks,s}l_i) \\ & \quad + 2rF_{s,s}(\delta_{ik} - l_il_k) + 2(F_il_k + F_kl_i) = 0. \end{aligned} \right. \tag{6,9}$$

Notons encore que la combinaison (6,8) + (6,9)$.l^k$ donne la relation simple

$$rF_{is,s} - 2F_i = 0. \tag{6,10}$$

On démontre sans difficulté que dans le cas d'un champ stationnaire on peut imposer, à l'aide d'une transformation permise, la condition

$$F_{s,s} = 0 \tag{6,11}$$

que nous allons accepter par la suite. L'équation (6,8) se réduit alors à

$$F_{i,ss} = 0. \tag{6,12}$$

La solution de cette équation qui est régulière sur la sphère $r =$ const. est $F_i =$ const. Ces constantes s'annulent à cause de la première de (6,6) et on a finalement

$$F_i = 0. \tag{6,13}$$

Par un raisonnement analogue on déduit de (6,9), (6,10) et (6,6) :

$$F_{ik} = 0. \tag{6,14}$$

Par conséquent le $g^{1}_{\mu\nu}$ prend, quand la condition (6,11) est satisfaite, la forme particulièrement simple

$$g^{1}_{\mu\nu} = g^{1}_{00}l_\mu l_\nu = -\,2ml_\mu l_\nu. \tag{6,15}$$

Rappelons que la solution de Schwarzschild est donnée par (6,15) joint à $g^{n}_{\mu\nu} = 0$ pour $n \geqslant 2$.

En comparant (6,15) avec (2,17) on voit que la condition (6,11) conduit à

$$a_1 = b_1 = A_1 = B_1 = 0, \qquad C_1 = -\,2m. \tag{6,16}$$

On aura donc d'après (2,28)

$$\sigma^0 = 0. \tag{6,17}$$

C'est-à-dire la condition (6,11) est équivalente à la restriction (6,17) qu'on peut toujours imposer dans le cas d'un champ stationnaire [7].

Notons encore que dans les transformations permises qui conservent (6,11) on trouve que la fonction Φ qui entre dans (5,7) doit être de la forme

$$\Phi = a_\mu l'^\mu, \tag{6,18}$$

les α^μ étant 4 constantes arbitraires. D'autre part pour que nous restions dans des repères adaptés au caractère stationnaire du champ les constantes qui entrent dans (3,6) doivent satisfaire à

$$\mathrm{A}_0^\mu = \mathrm{A}_\mu^0 = \delta_{\mu 0}. \tag{6,19}$$

On voit ainsi que la condition (6,11) ou (6,17) a la conséquence que nous n'avons comme transformations permises que les rotations dans l'espace à 3 dimensions décrites par les constantes A_k^i et les translations décrites par α_μ.

Des équations du champ de l'ordre $n = 4$ nous écrirons à titre d'exemple la plus simple :

$$- 2\mathrm{R}_{00}^4 = r(rg_{00}^2)_{,ss} = 0. \tag{6,20}$$

La solution de cette équation qui n'a pas de singularité sur la sphère $r = \text{const}$ est

$$g_{00}^2 = \beta_s l^s, \qquad \beta_s = \text{const.} \tag{6,21}$$

Les autres équations de l'ordre $n = 4$ sont plus longues que (6,20), mais leur intégration ne présente pas de difficultés. Le résultat final est :

$$\left\{\begin{aligned} g_{0i}^2 &= \beta_i + 2\beta_s l^s l_i + \mathrm{B}_{is} l^s, \qquad \mathrm{B}_{ik} = -\mathrm{B}_{ki} = \text{const.}\,; \\ g_{ik}^2 &= 3\beta_s l^s l_i l_k + \beta_i l_k + \beta_k l_i + \mathrm{B}_{is} l^s l_k + \mathrm{B}_{ks} l^s l_i. \end{aligned}\right. \tag{6,22}$$

En comparant (6,21) et (6,22) avec (2,17) on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} & a_2 = b_2 = c_2 = 0\,; \\ & \mathrm{A}_2 = -(\beta_i + \mathrm{B}_{ik} l^k) a^i, \quad \mathrm{B}_2 = -(\beta_i + \mathrm{B}_{ik} l^k) b^i, \quad \mathrm{C}_2 = \beta_i l^i. \end{aligned}\right. \tag{6,23}$$

Notons que les deux premières de ces relations sont identiques au résultat général (5,20) et que la troisième équation (6,23) découle aussi de (5,12) et (6,16). Rappelons encore que les constantes β_i déterminent la position du « centre de masse » du système, tandis que les constantes B_{ik} déterminent le moment cinétique (en unités géométriques) :

$$\vec{J} = (B_{23}, B_{31}, B_{12}). \tag{6,24}$$

On peut annuler les β_i à l'aide des translations décrites par les constantes α_i de (6,18) : Dans le repère où $\beta_i = 0$ le centre de masse est situé au point $x^i = 0$. On peut aussi annuler par exemple B_{23} et B_{31} à l'aide des rotations décrites par les constantes A^i_k de (3,6) : Quand $B_{23} = B_{31} = 0$ le moment cinétique a la direction de l'axe de x^3 et la valeur B_{12}.

7. L'INTERPRÉTATION DE Ψ_1^0

Nous allons comparer les résultats que nous avons obtenu ici par intégration des équations (6,2) avec ce qu'on trouve par la solution des équations du champ données par Newman et Penrose [*4*]. Nous y parviendrons à l'aide des formules (2,16). On voit immédiatement que pour déduire de ces formules les a', b', ... à l'ordre $\frac{1}{r^2}$ on a besoin des quantités U, ω et ξ^A (A = 2, 3) à l'ordre $\frac{1}{r^2}$ et des quantités X^A à l'ordre $\frac{1}{r^3}$.

Avec le choix $\tilde{x}^2 = \theta$ et $\tilde{x}^3 = \varphi$ des coordonnées angulaires la solution des équations de Newman-Penrose donne les résultats suivants (¹) :

$$(7,1)\quad \left\{\begin{aligned}
&U = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2r}(\Psi_2^0 + \overline{\Psi}_2^0) - \frac{1}{6r^2}(\Psi_2^1 + \overline{\Psi}_2^1) + \dots ; \\
&\omega = \frac{\omega^0}{r} - \frac{1}{r^2}\left(\sigma^0\overline{\omega}^0 + \frac{1}{2}\Psi_1^0\right) + \dots, \\
&\qquad\qquad\qquad \sqrt{2}\omega^0 = \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\right)\sigma^0 ; \\
&\sqrt{2}\xi^2 = \frac{1}{r} - \frac{\sigma^0}{r^2} + \dots \quad , \quad \sqrt{2}\sin\theta\,\xi^3 = \frac{i}{r} + \frac{i\sigma^0}{r^2} + \dots ; \\
&\sqrt{2}X^2 = \frac{1}{6r^3}(\Psi_1^0 + \overline{\Psi}_1^0) + \dots \quad , \quad \sqrt{2}\sin\theta\,X^3 = \frac{-i}{6r^3}(\Psi_1^0 - \overline{\Psi}_1^0) + \dots
\end{aligned}\right.$$

(¹) Nous retenons la notation de NEWMAN et UNTI [*6*].

En introduisant ces développements dans (2,16) nous trouvons :

$$(7,2)\quad \left\{\begin{aligned} a' &= \frac{1}{r}(\sigma^0+\bar{\sigma}^0)+0\left(\frac{1}{r^3}\right),\ b'=\frac{i}{r}(-\sigma^0+\bar{\sigma}^0)+0\left(\frac{1}{r^3}\right),\ c'=-\frac{3}{r^2}\sigma^0\bar{\sigma}^0+\ldots;\\ \sqrt{2}\mathrm{A}' &= -\frac{1}{r}(\omega^0+\bar{\omega}^0)+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{2}{3}(\Psi_1^0+\bar{\Psi}_0^1)+2(\omega^0\bar{\sigma}^0+\bar{\omega}^0\sigma^0)\right\}+\ldots,\\ \sqrt{2}\mathrm{B}' &= \frac{i}{r}(\omega^0-\bar{\omega}^0)-\frac{i}{r^2}\left\{\frac{2}{3}(\Psi_1^0-\bar{\Psi}_1^0)-2(\omega^0\bar{\sigma}^0-\bar{\omega}^0\sigma^0)\right\}+\ldots;\\ \mathrm{C}' &= -\frac{1}{r}(\Psi_2^0+\bar{\Psi}_2^0)-\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{3}(\Psi_2^1+\bar{\Psi}_2^1)+2\omega^0\bar{\omega}^0\right\}+\ldots\end{aligned}\right.$$

Dans le cas du champ stationnaire, nous avons imposé la condition (6,17), $\sigma^0 = 0$. Ceci simplifie les relations (7,2) :

$$(7,3)\quad \left\{\begin{aligned} &a',\ b',\ c' = 0\left(\frac{1}{r^3}\right);\\ &\sqrt{2}\mathrm{A}' = \frac{2}{3r^2}(\Psi_1^0+\bar{\Psi}_1^0)+\ldots\quad,\quad \sqrt{2}\mathrm{B}' = -\frac{2i}{3r^2}(\Psi_1^0-\bar{\Psi}_1^0)+\ldots;\\ &\mathrm{C}' = -\frac{1}{r}(\Psi_2^0+\bar{\Psi}_2^0)-\frac{1}{3r^2}(\Psi_2^1+\bar{\Psi}_2^1)+\ldots\end{aligned}\right.$$

D'autre part l'équation de mouvement pour Ψ_2^0 donne, dans le cas d'un champ stationnaire, le résultat

$$(7,4)\qquad \Psi_2^0 = \bar{\Psi}_2^0 = -m,$$

la constante m étant l'énergie totale du système. L'équation de mouvement pour Ψ_1^0 se réduit, dans le cas stationnaire avec $\sigma^0 = 0$, à

$$(7,5)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\Psi_1^0 = 0.$$

La solution de cette équation est une somme de fonctions harmoniques de spin ${}_sY_l^m$ [7] avec $s = l = 1$:

$$(7,6)\qquad \Psi_1^0 = \sum_m(\gamma_m+i\delta_m)\,{}_1Y_m^1,\qquad m = -1, 0, +1,$$

γ_m et δ_m étant des constantes réelles.

L'intégration de (6,2) nous a conduit aux formules (6,16) et (6,23) qui donnent les quantités a, b, ... à l'ordre $\dfrac{1}{r^2}$. Les relations (2,19) nous permettent de déterminer les quantités a', b', ... correspondantes. On trouve sans difficulté :

$$(7,7)\quad \begin{cases} a', b', c' = 0\left(\dfrac{1}{r^3}\right); \\ A' = \dfrac{A_2'}{r^2} + \dots, \qquad B' = \dfrac{B_2'}{r^2} + \dots, \qquad C' = \dfrac{C_1'}{r} + \dfrac{C_2'}{r^2} + \dots; \\ A_2' = -A_2 \quad , \quad B_2' = -B_2 \quad , \quad C_1' = -C_1 \quad , \quad C_2' = -C_2. \end{cases}$$

La comparaison des résultats (7,3) et (7,7) permet l'interprétation détaillée de Ψ_1^0 (*). On remarquera d'abord que, à cause de l'orthonormalisation de a^i, b^i et l^i et de l'antisymétrie des B_{ik}, on a

$$B_{ik}a^i l^k = -(B_{23}b^1 + B_{31}b^2 + B_{12}b^3),$$
$$B_{ik}b^i l^k = B_{23}a^1 + B_{31}a^2 + B_{12}a^3.$$

Par conséquent les A_2' et B_2' donnés par (7,7) et (6,23) sont des expressions linéaires en a^i et b^i avec des coefficients constants. Le calcul explicite des fonctions ${}_1Y_1^m$ qui entrent dans (7,6) montre que les A_2' et B_2' donnés par (7,3) ont la même structure. En comparant les coefficients des a^i et b^i dans les expressions déduites des relations (7,7) et (7,3) on trouve finalement :

$$(7,8)\qquad (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = -\frac{2}{3}(\gamma_{-1} - \gamma_1, \delta_1 + \delta_{-1}, \gamma_0),$$

$$(7,9)\qquad (B_{23}, B_{31}, B_{12}) = -\frac{2}{3}(\delta_{-1} - \delta_1, -\gamma_1 - \gamma_{-1}, \delta_0).$$

Comme application de ces formules notons que si le centre de masse est situé au point $x^i = 0$, c'est-à-dire quand $\beta_i = 0$, on a d'après (7,8)

$$\gamma_1 = \gamma_{-1}, \qquad \delta_1 = -\delta_{-1}, \qquad \gamma_0 = 0.$$

Si en plus le moment cinétique a la direction de l'axe x^3, c'est-à-dire si $B_{23} = B_{31} = 0$, on a encore

$$\delta_1 = \delta_{-1}, \qquad \gamma_1 = -\gamma_{-1},$$

ce qui donne finalement :

$$\gamma_1 = \gamma_0 = \gamma_{-1} = \delta_1 = \delta_{-1} = 0.$$

(*) Pour cette interprétation, voir aussi [*8*] [*9*] [*10*].

L'expression (7,6) pour ψ_1^0 ne contient donc dans ce cas que le terme avec le coefficient δ_0.

Les calculs présentés dans ce travail montrent que la solution des équations du champ n'est pas facilitée par l'utilisation des coordonnées cartésiennes. Le formalisme de Newman-Penrose, utilisant les coordonnées polaires de l'espace à 3 dimensions, constitue sans doute la méthode la plus efficace pour la recherche de cette solution. L'intérêt des coordonnées radiatives cartésiennes consiste d'abord en ce qu'elles donnent un aspect différent du problème des champs gravitationnels radiatifs. En plus, elles permettent l'interprétation détaillée des quantités qui entrent dans le formalisme de Newman-Penrose. Ces coordonnées pourraient éventuellement être utiles aussi pour le développement d'une méthode d'approximation tenant compte des sources du champ dans le cas des champs globalement faibles; mais cette question n'a pas encore été étudiée en détail.

RÉFÉRENCES

[*1*] H. BONDI, *Nature* (London), t. **186**, 1960, p. 535.
[*2*] H. BONDI, M. G. J. VAN DER BURG et A. W. K. METZNER, *Proc. Roy. Soc.*, t. **A 269**, 1962, p. 21.
[*3*] R. K. SACHS, *Proc. Roy. Soc.*, t. **A 270**, 1962, p. 103.
[*4*] E. T. NEWMAN et R. PENROSE, *Journ. Math. Physics*, t. **3**, 1962, p. 566.
[*5*] P. S. FLORIDÈS, J. MCCREA et J. L. SYNGE, *Proc. Roy. Soc.*, t. **A 292**, 1966, p. 1.
[*6*] E. T. NEWMAN et T. W. J. UNTI, *Journ. Math. Physics*, t. **3**, 1962, p. 891.
[*7*] E. T. NEWMAN et R. PENROSE, *Proc. Roy. Soc.*, t. **A 305**, 1968, p. 175.
[*8*] A. I. JANIS et E. T. NEWMAN, *Journ. Math. Physics*, t. **6**, 1965, p. 902.
[*9*] E. T. NEWMAN et T. W. J. UNTI, *Journ. Math. Physics*, t. **6**, 1965, p. 1806.
[*10*] D. J. LAMB, *Journ. Math. Physics*, t. **7**, 1966, p. 458.

(Manuscrit reçu le 27 juin 1969).