ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

Structures spinorielles

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, nº 1 (1969), p. 19-55
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_1_19_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XI, n° 1, 1969, p. 19-55. *Physique théorique.*

Structures spinorielles

par

A. CRUMEYROLLE

(Faculté des Sciences de Toulouse)

SOMMAIRE. — Le chapitre premier donne quelques compléments, d'un caractère assez technique, sur les groupes de Clifford et leurs sous-groupes fondamentaux, qui à notre connaissance n'avaient jamais fait l'objet d'un exposé systématique. Nous avons résumé, dans les tableaux des pages 30 et 31, les divers résultats rappelés ou nouvellement obtenus.

Le chapitre II donne une approche que nous croyons inédite de l'étude des variétés à structure spinorielle dont l'importance géométrique a été mise en lumière par les travaux de Lichnerowicz et de Milnor. Cette approche s'inspire de l'étude approfondie des algèbres de Clifford selon Chevalley. Elle nous permet de construire explicitement des repères spinoriels et de donner une condition d'existence sur une variété pseudo-riemannienne d'une structure spinorielle complexe, condition qui s'exprime par la possibilité de construire sur ces variétés un champ de sous-espaces complexes totalement isotropes de dimension maximale.

Le chapitre III développe dans la même optique quelques notions de base sur les connexions spinorielles.

CHAPITRE PREMIER

QUELQUES COMPLÉMENTS SUR LES GROUPES DE CLIFFORD ET LEURS SOUS-GROUPES FONDAMENTAUX

Dans le chapitre premier, les notations sont pour l'essentiel celles de N. Bourbaki [*2*, a]. Nous nous restreignons, sauf spécification contraire, à la considération d'un espace vectoriel E de dimension finie sur R, muni d'une forme quadratique Q non dégénérée. B étant la forme bilinéaire symétrique associée, nous trouvons commode de prendre $B(x, x) = Q(x)$. L'algèbre de Clifford de Q, notée C(Q) est l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle T(E) de E par l'idéal bilatère engendrée par les éléments de la forme

$$x \otimes x - Q(x).1, \quad (x \in E).$$

La signature de Q est, sauf spécification plus précise, absolument quelconque.

I. — Rappels succincts sur les groupes de Clifford [*2*, a].

Le groupe de Clifford de Q est le groupe multiplicatif G des éléments inversibles g de C(Q) tels que $gxg^{-1} \in E$, $\forall x \in E$.

On note G^+ l'ensemble des éléments pairs de G, G^+ est le groupe de Clifford spécial.

Posant $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$, l'application $g \to \varphi_g$ est une représentation de G dans E et :

$$\varphi(G) = O(Q), \quad \text{si} \quad n = 2r$$
$$\varphi(G^+) = SO(Q), \quad \text{si} \quad n = 2r + 1.$$

Ker $\varphi = Z \cap C^*(Q)$, Z désignant le centre de C(Q) et $C^*(Q)$ l'ensemble des éléments inversibles de C(Q).

β étant l'antiautomorphisme principal, pour $g \in G$, n pair, ou $g \in G^+$, n impair, $N(g) = \beta(g)g$ est un élément de R^*. Nous appelons groupe de Clifford réduit le noyau G_0 de N si n est pair, et groupe de Clifford spécial réduit le noyau ${G_0}^+$ de N si n est impair. Il est bien connu que N est un homomorphisme de G (n pair) ou de G^+ (n impair) dans R^*.

Nous définirons maintenant un revêtement de O(Q), n pair, et de SO(Q), n impair ; nous appellerons groupes spinoriels, selon une terminologie provisoire, des sous-groupes de G ou de G^+, qui donnent ces revêtements.

Au préalable, nous établirons deux lemmes, essentiels pour la suite, qui sont d'ailleurs valables en remplaçant R par un corps quelconque K commutatif.

II. — Lemme I.

(e_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, est une base orthogonale de E, on rappelle [*2*, a] que si x_i est un élément de E non isotrope, $\varphi(x_i) = -u_i$, u_i étant la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à x_i. Nous énonçons le

LEMME 1. — *Soit* $\varphi_g = u$ et $u = u_1 u_2 \ldots u_h$.

a) *Si* $n = 2r$ *et* $g \in G$, *alors*

$$g = \lambda x_1 \ldots x_h,\ (\lambda \in R^*), \quad \textit{quand } h \textit{ est pair},$$
$$g = \lambda x_1 \ldots x_h e_1 e_2 \ldots e_n, \textit{ quand } h \textit{ est impair.}$$

b) *Si* $n = 2r + 1$ *et* $g \in G^+$, *alors*

$$g = \lambda x_1 \ldots x_h \textit{ et } h \textit{ est nécessairement pair.}$$

En effet, *a)* est immédiat quand h est pair, alors $g \in G^+$. Quand h est impair

$$\varphi(\lambda x_1 \ldots x_h) = -u_1 \ldots u_h,$$

or de

$$(e_1 \ldots e_n)e_k = -e_k(e_1 \ldots e_n),$$

on tire :

$$(e_1 \ldots e_n)x = -x(e_1 \ldots e_n),\ \forall x \in E,$$

d'où

$$\varphi(e_1 \ldots e_n) = -I_E \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda x_1 \ldots x_h e_1 \ldots e_n) = u$$

Dans le cas *b)* h est nécessairement pair, car le déterminant de u_i est négatif et u est dans SO(Q), le résultat est alors immédiat. Notons que *b)* ne s'étend pas à G, si n est impair, car Z est alors non trivial.

En abrégé, on peut dire que le lemme 1 exprime que :

Pour tout g, élément de G, *si n est pair, de* G^+ *si n est impair,* $g = \lambda x_1 \ldots x_k$, *où les* $x_1 \ldots x_k$ *ne sont pas isotropes et k pair si* $n = 2r + 1$.

III. — Lemme 2.

Si x est un élément de E *non isotrope et si* $\theta_x : y \to xy$, *alors* Det $\theta_x = (x)^{2^n}$.

Prenons x pour l'élément e_1 d'une base (e_i) orthogonale, donc telle que

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \qquad i \neq j \qquad \text{et} \qquad (e_i)^2 = \alpha_i.$$

Ordonnons les éléments d'une base usuelle de C(Q), $e_{i_1 \ldots i_h}$,

$$1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_h \leqslant n,\ e_\phi = 1,$$

dans l'ordre lexicographique :

$$e_1,\ e_1e_2,\ e_1e_2e_3 \ldots e_1e_2 \ldots e_n,\ e_1e_3,\ e_1e_3e_4 \ldots e_1e_n,\ 1,\ e_{i_1 \ldots i_h}$$

avec $i_1 > 1$. 2^{n-1} éléments commencent par e_1 ; θ_{e_1} est bijective et envoie les éléments qui commencent par e_1 sur les 2^{n-1} autres éléments de la base (à un coefficient numérique près α_1) et *vice versa*. ε_{e_1} désignant la signature de la permutation

$$e_{i_1} \dots i_h \to e_1(e_{i_1} \dots i_h) \ (\mathrm{mod}\ \alpha_1),$$

il vient

$$\mathrm{Det}\ \theta_{e_1} = (\alpha_1)^{2^{n-1}}\varepsilon_{e_1} = (\alpha_1)^{2^{n-1}},$$

puisqu'il y a 2^{2n-2} inversions dans la permutation.

Ainsi Det $\theta_x = (x)^{2^n}$.

Conséquence :

Si $g \in \mathrm{G}(n = 2r)$, ou si $g \in \mathrm{G}^+(n = 2r+1)$,

$$g = \lambda x_1 \dots x_k,$$

selon le lemme 1 et

$$\mathrm{Det}\ \theta_g = \lambda^{2^n}(x_1)^{2^n} \dots (x_k)^{2^n}$$

$$\mathrm{Det}\ \theta_g = (\mathrm{N}(g))^{2^{n-1}} \tag{1}$$

IV. — Définitions.

A quelques variantes près, on définit usuellement [*4*, b], [*7*] un groupe spinoriel en considérant :

— *Soit le sous-groupe* Spin_1 (Q) *des éléments* g *de* $\mathrm{G}(n = 2r)$, *ou de* $\mathrm{G}^+(n = 2r+1)$ *tels que* Det $\theta_g = 1$.

— *Soit, quand* C(Q) *est une algèbre matricielle le sous-groupe* Spin_2 (Q) *des éléments* B *de* $\mathrm{G}(n = 2r)$, *ou de* $\mathrm{G}^+(n = 2r+1)$, *tels que*

$$|\ \mathrm{Det\ B}\ | = 1.$$

On sait [*4*, a] [*7*] que ces algèbres matricielles sont dans les deux cas de dimension 2^{2r}. Elles interviennent dans les représentations spinorielles ou semi-spinorielles.

C'est un exercice facile laissé au lecteur, d'établir que si :

$$\theta_{\mathrm{B}} = \mathrm{A} \to \mathrm{BA}$$

$$\mathrm{Det}\ \theta_{\mathrm{B}} = (\mathrm{Det\ B})^{2r} \tag{2}$$

V. — Comparaison des groupes spinoriels et des groupes de Clifford réduits.

Il est immédiat que $|\operatorname{Det} B| = 1$ équivaut à $\operatorname{Det} \theta_B = 1$, donc $\mathrm{Spin}_1(Q) = \mathrm{Spin}_2(Q)$. De même on voit que $G_0 \subseteq \mathrm{Spin}_1(Q)$, n pair, $G_0^+ \subseteq \mathrm{Spin}_1(Q)$, n impair.

PROPOSITION 1.

a) G_0 *est identique à* $\mathrm{Spin}_1(Q)$ *si* $n = 2r$ *et* Q *définie positive.*
b) G_0^+ *est identique à* $\mathrm{Spin}_1(Q)$ *si* $n = 2r + 1$ *et* Q *définie.*
c) *Dans tous les autres cas le groupe de Clifford réduit (n pair), ou spécial réduit (n impair) est un sous-groupe d'indice 2 de* $\mathrm{Spin}_1(Q)$.

Restreignons N à $\mathrm{Spin}_1(Q)$ et calculons $N(\mathrm{Spin}_1(Q))$.

$n = 2r$. S'il existe $x \in E$, tel que $N(x) = (x)^2 < 0$, x appartient à G et on peut calculer λ réel tel que $\lambda^2(x)^2 = -1$, $N(\mathrm{Spin}_1(Q) = \{-1, 1\}$ et $\dfrac{\mathrm{Spin}_1 Q}{G_0} \simeq \{-1, 1\}$.

S'il n'existe aucun élément $x \in E$ tel que $(x)^2 < 0$ alors $N(g) > 0$ pour tout élément de G_0 et $G_0 = \mathrm{Spin}_1 Q$.

$n = 2r + 1$. Prenant $n \geqslant 3$, s'il existe deux éléments x et y tels que $N(x)N(y) < 0$, on peut déterminer λ réel tel que $\lambda^2(x)^2(y)^2 = -1$,

$$N(\mathrm{Spin}_1 Q) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{Spin}_1 Q}{G_0^+} \simeq \{-1, 1\}.$$

Si Q est définie, pour $\varphi_g = u$, $g \in G^+$, $g = \lambda x_1 \dots x_h$, h pair (lemme 1), $N(g) > 0$ et $G_0^+ = \mathrm{Spin}_1 Q$.

Notons que si $n = 1$, $\operatorname{Det} \theta_g = N(g)$ donc $G_0^+ = \mathrm{Spin}_1 Q$.

VI. — Algèbre de Lie de Spin_1 Q. Revêtement de O(Q), *n* pair, de SO(Q), *n* impair.

Pour l'intelligence de cet article, résumons brièvement certains résultats exposés dans le livre de Chevalley [*4*, a].

Posons $\varphi_1 = \varphi \mid \mathrm{Spin}_1 Q$.

L'algèbre de Lie du groupe multiplicatif $C^*(Q)$ est $C(Q)$, le crochet $[X, Y]$ étant $XY - YX = \operatorname{ad} X(Y)$, φ s'identifie à la représentation adjointe Ad de G et

$$\varphi(\exp tX) = \exp(t \operatorname{ad} X), \qquad \forall t \in R \tag{3}$$

G est un sous-groupe de Lie topologique de $C^*(Q)$ dont l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$ est l'espace engendré linéairement par les éléments (xy), x, $y \in E$, et par un élément z, non trivial, du centre Z si n est impair.

$$\dim \mathcal{L}(G) = \frac{n(n-1)}{2} + 1, \; n \text{ pair.}$$

$$\dim \mathcal{L}(G) = \frac{n(n-1)}{2} + 2, \; n \text{ impair.}$$

$\mathcal{L}(G^+)$ est engendré linéairement par les seuls éléments (xy), x, $y \in E$, sa dimension est $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ pour tout n.

$\mathcal{L}(G_0)$, n pair, (resp $\mathcal{L}(G_0{}^+)$, n impair) est l'ensemble des éléments $X \in \mathcal{L}(G)$, (resp $\mathcal{L}(G^+)$, n impair), tels que $\beta(X) + X = 0$, comme on le déduit aisément de (3), il en résulte facilement :

$$\dim \mathcal{L}(G_0) \;\; = \dim \mathcal{L}(G_0{}^+) = \frac{n(n-1)}{2}, \; n \text{ pair,}$$

$$\dim \mathcal{L}(G_0{}^+) = \frac{n(n-1)}{2}, \; n \text{ impair.}$$

On voit aussi que $\mathcal{L}(G_0{}^+)$ est engendré linéairement par les e_ie_j, $i < j$, (e_i) étant une base de E.

Déterminons maintenant l'algèbre de Lie de Spin_1 Q. Considérons le sous-espace F de $\mathcal{L}(G)$ engendré linéairement par les produits e_ie_j, $i < j$, (e_i) étant une base de E, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Si on suppose le repère orthogonal, on déduit de $e_ie_j = - e_je_i$ et des propriétés de la trace :

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{Tr}\,(\theta_{e_i}\theta_{e_j}) = 0, & \text{puis} & \mathrm{Tr}\,(X) = 0, & \forall X \in F & \\ \mathrm{Det}\,(\theta_{\exp X}) = 1, & \text{donc} & X \in \mathcal{L}\,(\mathrm{Spin}_1 Q) & \text{et} & F \subseteq \mathcal{L}\,(\mathrm{Spin}_1 Q). \end{array}$$

Si $n = 2r$, $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G^+)$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ et on a pour base les e_ie_j, $i < j$ et 1. Si $\lambda \in R^*$, θ_λ a pour trace $\lambda.2^n$ et $\exp(\lambda.2^n) = 1$ entraîne que $\lambda = 0$, ainsi $F = \mathcal{L}(\mathrm{Spin}_1 Q)$.

Si $n = 2r + 1$, on raisonne de la même manière sur $\mathcal{L}(G^+)$ et on aboutit au même résultat. On a donc :

PROPOSITION 2. — *L'algèbre de Lie de* Spin_1 Q *est engendrée linéaire-*

ment par les produits $e_i e_j$, $i < j$ où (e_i) constitue une base de E. *Sa dimension est* $\frac{n(n-1)}{2}$.

PROPOSITION 3. — *La restriction φ_1 de φ à* Spin_1 Q *est une application ouverte.*

De (3) on tire $\tilde{\varphi}_1(X) = \text{ad } X$, $\tilde{\varphi}$ désignant l'application tangente. φ_1 est injective car $X_1 Y - YX_1 = 0$, pour tout Y entraîne que $X_1 \in Z \cap F$, donc $X_1 = 0$. $\tilde{\varphi}_1$ est donc un isomorphisme de F sur $\mathfrak{L}(SO(Q))$. Si X est un élément d'un voisinage $\mathcal{U}$ de O dans F, par $X \to \exp X$, $\mathcal{U}$ est homéomorphe à un voisinage $\mathcal{V}$ de l'identité dans Spin_1 Q. Dès lors la chaîne d'homéomorphismes locaux

$$\exp X \to X \to \text{ad } X \to \exp(\text{ad } X) = \varphi_1(\exp X),$$

montre que φ_1 est ouverte à l'identité donc partout.

On a donc les isomorphismes topologiques :

$$O(Q) \simeq \frac{\text{Spin}_1 Q}{\ker \varphi_1}, \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$SO(Q) \simeq \frac{\text{Spin}_1 Q}{\ker \varphi_1}, \text{ si } n \text{ est impair,}$$

le lemme 2 assurant que φ_1 (Spin_1 Q) est égal à SO(Q) pour n impair et à O(Q) pour n pair (Det $\theta_g > 0$, si $n > 1$).

Remarquant que $\ker \varphi_1$ est discret, $\ker \varphi_1 = \{-1, 1\}$, on a donc établi que Spin_1 Q est un revêtement.

Remarques.

1° Certains auteurs définissent Spin_1 Q en se restreignant à la composante connexe de l'identité. φ_1 (Spin_1 Q) est alors la composante connexe de SO(Q) dans tous les cas.

2° Les considérations précédentes montrent que G_0^+ et Spin_1 (Q) ont même algèbre de Lie. On établit [*4*, a] que si Q est définie G_0^+ est connexe. Il en est encore de même si $n > 2$, Q non définie. Si $n = 2$, G_0^+ a deux composantes connexes si Q est non définie.

La composante connexe de l'identité de Spin_1 Q *est donc* G_0^+ *(sauf si $n = 2$ et* Q *non définie).*

En résumé, les flèches montantes indiquant des inclusions strictes et les cadres les composantes connexes de l'identité, on peut dresser les tableaux récapitulatifs suivants :

$n = 2r$

Q *définie positive*

Dimensions

$$\begin{array}{l|rl}
\dfrac{n(n-1)}{2}+1 & & G \xrightarrow{\ \varphi\ } O(Q) \\
& & \uparrow \\
\dfrac{n(n-1)}{2} & G_0 = & \mathrm{Spin}_1\, Q \xrightarrow{\varphi} O(Q) \\
& & \uparrow \\
\dfrac{n(n-1)}{2} & G_0{}^+ = \boxed{G_0{}^+} = & \boxed{\mathrm{Spin}_1\, Q} \xrightarrow{\varphi} SO(Q) = \boxed{SO(Q)}
\end{array}$$

Q *définie négative*

$$\begin{array}{rl}
& G \xrightarrow{\ \varphi\ } O(Q) \\
& \uparrow \\
& \mathrm{Spin}_1\, Q \xrightarrow{\varphi} O(Q) \\
& \uparrow \\
G_0 = G_0{}^+ = \boxed{G_0{}^+} = & \boxed{\mathrm{Spin}_1\, Q} \xrightarrow{\varphi} SO(Q) = \boxed{SO(Q)}
\end{array}$$

Q *non définie* $n > 2$

$$\begin{array}{rl}
& G \xrightarrow{\qquad\varphi\qquad} O(Q) \\
& \uparrow \\
& \mathrm{Spin}_1\, Q \xrightarrow{\quad\varphi\quad} O(Q) \\
& \uparrow \\
& G_0 \\
& \uparrow \\
G_0{}^+ = & \boxed{G_0{}^+} = \boxed{\mathrm{Spin}_1\, Q} \xrightarrow{\varphi} \boxed{SO(Q)}
\end{array}$$

$u = 2r + 1$

Q *définie*

Dimensions

$$\begin{array}{l|rl}
\dfrac{n(n-1)}{2}+2 & & G \xrightarrow{\varphi} SO(Q) \\
& & \uparrow \\
\dfrac{n(n-1)}{2}+1 & & G^+ \xrightarrow{\varphi} SO(Q) \\
& & \uparrow \\
\dfrac{n(n-n)}{2} & G_0{}^+ = & \boxed{G_0{}^+} = \mathrm{Spin}_1\, Q = \boxed{\mathrm{Spin}_1\, Q} \xrightarrow{\varphi} SO(Q) = \boxed{SO(Q)}
\end{array}$$

Q non définie

$$\begin{array}{c}
G \xrightarrow{\varphi} SO(Q) \\
\uparrow \\
G^+ \xrightarrow{\varphi} SO(Q) \\
\uparrow \\
\mathrm{Spin}_1\, Q \xrightarrow{\varphi} SO(Q) \\
\uparrow \\
G_0{}^+ = \boxed{G_0{}^+} = \boxed{\mathrm{Spin}_1\, Q} \xrightarrow{\varphi} \boxed{SO(Q)}
\end{array}$$

Remarquons que Spin_1 Q est connexe si et seulement si n est impair et Q définie.

VII. — Le groupe « Pin » et le groupe « Spin ».

Les développements précédents laissent échapper le revêtement de O(Q) lorsque n est impair. Pour pallier cet inconvénient il est nécessaire de définir un autre groupe de Clifford. Nous nous proposons de généraliser les résultats donnés par Atiyah, Bott et Shapiro pour Q définie négative [*1*].

α désigne ici l'automorphisme principal de C(Q), *le groupe de Clifford* α de Q est le groupe Γ des éléments g de $C^*(Q)$ tels que :

$$\alpha(g)xg^{-1} \in E, \qquad \forall x \in E.$$

Désignant par p_g l'application $x \to \alpha(g)xg^{-1}$, $g \to p_g$ est une représentation de Γ dans E. On pourrait facilement établir que le noyau de p est R^*; on définirait $\tilde{N}(g) = g\alpha(\beta(g))$; si $g \in \Gamma$, $\tilde{N}(g)$ est dans R^*, $\tilde{N}$ est un homomorphisme de Γ dans R^* et $p(\Gamma) \subseteq O(Q)$.

Posons $\Gamma^+ = \Gamma \cap C^+(Q)$. Nous établissons la

PROPOSITION 4.

1° *Si* $n = 2r$, $\Gamma = G$, $p(\Gamma) = O(Q)$, $p(\Gamma^+) = SO(Q)$.
3° *Si* $n = 2r + 1$, $G^+ \subset \Gamma \subset G$, $p(\Gamma) = O(Q)$, $p(\Gamma^+) = SO(Q)$.

Pour $n = 2r$, G est d'après le lemme 1, l'ensemble des éléments g de

$C^*(Q)$ de la forme $g = \lambda x_1 \ldots x_k$, $\lambda \in R^*$ et $x_1 \ldots x_k$ non isotropes

$$\alpha(g) = (-1)^k g \qquad \text{et} \qquad \alpha(g)xg^{-1} \in E.$$

Inversement soit $u \in O(Q)$, $u = u_1 \ldots u_h$, avec les notations du lemme 1; comme $u_i = p(x_i)$ et $p(x_1 \ldots x_h) = u$, $x_1 \ldots x_h$ appartient à Γ et s'applique sur u de sorte que $p(\Gamma) = O(Q)$.

Si $p(g)$, $g \in \Gamma$, est égal à u, $g = \lambda x_1 \ldots x_h$, donc g appartient à G.

Il est évident que $p(\Gamma^+) = SO(Q)$ et que le complémentaire de Γ^+ dans Γ se projette sur le complémentaire de $SO(Q)$ dans $O(Q)$.

Pour $n = 2r + 1$. De la même manière si $g \in G^+$, alors $g \in \Gamma$. Si $u \in O(Q)$, $u = u_1 \ldots u_h$, posant $u_i = -\varphi(x_i)$, $p(x_1 \ldots x_h) = u$; or il est évident directement que $x_1 \ldots x_h$ est dans Γ et $p(\Gamma) = O(Q)$. Enfin si $p(g)$, $g \in \Gamma$, est égal à u, $g = \lambda x_1 \ldots x_h \in G$. Si h est pair, $g \in G^+ = \Gamma^+$ et $p(\Gamma^+) = SO(Q)$.

Si h est impair, $g \in G$, mais non à Γ^+, $p(\gamma) \in O(Q) - SO(Q)$.

Remarque. — Il apparaît que Γ est constitué par l'ensemble des éléments de $C^*(Q)$ de la forme $\lambda x_1 x_2 \ldots x_k$, $\lambda \in R^*$ et x_i non isotrope, $i = 1, 2 \ldots k$, $x_i \in E$. Cela nous suggère une *définition directe.*

L'ensemble des éléments de $C^*(Q)$ *de la forme* $\lambda x_1 x_2 \ldots x_k$ *contitue un groupe* (vérification immédiate) *noté* Γ, *le sous-ensemble de ces éléments avec k pair constitue un sous-groupe de* Γ *appelé* Γ^+.

Le lemme 1 montre bien la raison de l'insuffisance de G pour « revêtir » $O(Q)$. Quand n est impair, c'est la condition $g = \lambda x_1 \ldots x_h$, h nécessairement pair, qui constitue un obstacle. Le remplacement de $\varphi(x_i) = -u_i$ par $p(x_i) = u_i$ et la suppression de cet obstacle assurent le succès de la deuxième méthode.

Définitions.

Considérons le sous-ensemble de Γ constitué par l'ensemble des éléments g tels que $|\tilde{N}(g)| = 1$ (ou si l'on préfère, $|N(g)| = 1$, puisque $g = \lambda x_1 \ldots x_h$). C'est un sous-groupe fermé que l'on pourrait tout aussi bien définir, d'après le lemme 2, par Det $\theta_g = 1$. Ce sous-groupe est noté Pin Q.

On appelle alors Spin Q le sous-groupe de Pin Q que p envoie sur $SO(Q)$, c'est-à-dire :

$$\text{Spin } Q = \text{Pin } Q \cap C^+(Q).$$

Si $n = 2r$, on a Pin Q = Spin_1 Q.

Si $n = 2r + 1$, on a Spin Q = Spin_1 Q (immédiat). $\maltese$

Il serait sans difficulté de montrer que $(p, \text{Pin Q})$ et $(p, \text{Spin Q})$ donnent des revêtements de O(Q) et SO(Q) respectivement.

Dans le cas $n = 2r$, g est dans Spin Q si et seulement si $g = \lambda x_1 x_2 \ldots x_h$, h pair et Det $\theta_g = 1$. Si $n > 2$, on a vu que la composante connexe de l'identité de Pin Q est $G_0{}^+$, elle est contenue dans G^+ comme Spin Q, donc c'est aussi la composante connexe de Spin Q.

Ainsi Spin Q et Spin_1 Q = Pin Q ont même composante connexe de l'identité ($G_0{}^+$ pour $n > 2$), donc même algèbre de Lie, résultat qui découle d'ailleurs de la théorie des revêtements.

Toujours pour $n = 2r$ comparons $G_0{}^+$ et Spin Q. Il est évident que $G_0{}^+ \subseteq$ Spin Q.

Si Q est définie et $g \in$ Spin Q, $N(g) > 0$, donc $N(g) = 1$ et Spin Q $= G_0{}^+$, Spin Q est donc connexe.

Si Q n'est pas définie, $N(g) < 0$ est possible et $\dfrac{\text{Spin Q}}{G_0{}^+} \simeq \{-1, 1\}$.

Remarques. — Tout élément de Pin Q étant de la forme $g = \lambda x_1 x_2 \ldots x_k$, x_i non isotrope, $\lambda \in R^*$, et tout élément g' de Spin Q d'une forme analogue mais avec k pair, avec de plus $N(g) = N(g') = \pm 1$, il est évident que Spin Q est d'indice 2 dans Pin Q. D'après les théorèmes d'isomorphismes sur les groupes

$$\frac{\varphi\,(\text{Pin Q})}{\varphi\,(\text{Spin Q})} = \frac{O(Q)}{SO(Q)} \simeq \frac{\text{Pin Q}}{\text{Spin Q}},$$

donc SO(Q) est toujours d'indice 2 dans O(Q).

De même

$$\frac{\text{Spin Q}}{G_0{}^+} = \frac{\text{Spin Q}}{\boxed{\text{Spin Q}}} \simeq \frac{SO(Q)}{\boxed{SO(Q)}}.$$

La considération de N montre que $\dfrac{\text{Spin Q}}{G_0{}^+} \simeq \{-1, 1\}$ si Q n'est pas définie, donc $\boxed{SO(Q)}$ est d'ordre 2 dans SO(Q). Combinant les deux résultats précédents on voit que $\boxed{SO(Q)}$ est d'indice 4 dans O(Q). On retrouve ainsi indépendamment le résultat bien connu : *Le groupe de Lorentz généralisé a 4 composantes connexes pour toute dimension.*

Enfin nous noterons que si Q est définie, pour toute dimension, Spin Q *est connexe.* Ce résultat très simple n'avait pas son correspondant pour Spin_1 Q.

Tableaux récapitulatifs

$n = 2r$

Q *définie positive*

$$
\begin{tikzcd}
O(Q) & & G=\Gamma \arrow[ll, "p"'] \arrow[rr, "\varphi"] & & O(Q) \\
& & O(Q) & G_0=\mathrm{Spin}_1 Q=\mathrm{Pin}\, Q \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ul] & O(Q) \\
SO(Q) \arrow[uu] & G^+ \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[uur] & SO(Q) \arrow[u] & & \\
SO(Q) & G_0{}^+=\boxed{G_0{}^+} \arrow[l, "p"'] \arrow[u] & =\mathrm{Spin}\, Q= & \boxed{\mathrm{Spin}_1 Q} \arrow[uu] \arrow[r, "\varphi"] & SO(Q)=\boxed{SO(Q)} \arrow[uu]
\end{tikzcd}
$$

Q *définie négative*

$$
\begin{tikzcd}
O(Q) & & G=\Gamma \arrow[ll, "p"'] \arrow[rr, "\varphi"] & & O(Q) \\
& & O(Q) & \mathrm{Spin}_1 Q=\mathrm{Pin}\, Q \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ul] & O(Q) \\
SO(Q) \arrow[uu] & G^+ \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[uur] & SO(Q) \arrow[u] & & \\
SO(Q) & G_0{}^+=\boxed{G_0{}^+}=G_0= \arrow[l, "p"'] \arrow[u] & & \boxed{\mathrm{Spin}_1 Q}=\mathrm{Spin}\, Q \arrow[uu] \arrow[r, "\varphi"] & SO(Q)=\boxed{SO(Q)} \arrow[uu]
\end{tikzcd}
$$

Q *non définie* $\quad n > 2$

$$
\begin{tikzcd}
O(Q) & & G=\Gamma \arrow[ll, "p"'] \arrow[rrr, "\varphi"] & & & O(Q) \\
& & O(Q) & \mathrm{Spin}_1 Q=\mathrm{Pin}\, Q \arrow[l, "p"'] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[ul] & & O(Q) \\
SO(Q) \arrow[uu] & G^+ \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[uur] & SO(Q) \arrow[u] & & & \\
& & SO(Q) & \mathrm{Spin}\, Q \arrow[l, "p"'] \arrow[uu] & G_0 \arrow[uul] & \\
\boxed{SO(Q)} \arrow[uu] & G_0{}^+=\boxed{\mathrm{Spin}\, Q}= \arrow[l, "p"'] \arrow[uu] & & \boxed{G_0{}^+}= \arrow[u] & \boxed{\mathrm{Spin}_1 Q} \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & \boxed{SO(Q)} \arrow[uuu]
\end{tikzcd}
$$

$n = 2r + 1$

Q *définie*

$$
\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[rr, "\varphi"] & & SO(Q) \\
O(Q) & & \Gamma \arrow[ll, "p"'] \arrow[u] & & \\
O(Q) & \mathrm{Pin}\,Q \arrow[l, "p"'] \arrow[ur] & & G^{+} \arrow[ul] \arrow[r, "\varphi"] & SO(Q) \\
SO(Q) \arrow[u] & \mathrm{Spin}\,Q \arrow[l, "p"'] \arrow[u] & = \mathrm{Spin}_1\,Q = G_0^{+} = & \boxed{G_0^{+}} \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & SO(Q) = \boxed{SO(Q)}
\end{tikzcd}
$$

Q *non définie*

$$
\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[rrr, "\varphi"] & & & SO(Q) \\
O(Q) & & \Gamma \arrow[ll, "p"'] \arrow[u] & & & \\
O(Q) & \mathrm{Pin}\,Q \arrow[l, "p"'] \arrow[ur] & & G^{+} \arrow[ul] \arrow[rr, "\varphi"] & & SO(Q) \\
SO(Q) \arrow[u] & \mathrm{Spin}\,Q \arrow[l, "p"'] \arrow[u] & = & \mathrm{Spin}_1\,Q \arrow[u] \arrow[rr, "\varphi"] & & SO(Q) \\
\boxed{SO(Q)} \arrow[u] & \boxed{\mathrm{Spin}\,Q} \arrow[l, "p"'] \arrow[u] & = & \boxed{\mathrm{Spin}_1\,Q} \arrow[u] & = G_0^{+} = \boxed{G_0^{+}} \arrow[r, "\varphi"] & \boxed{SO(Q)} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

CHAPITRE II

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES A STRUCTURE SPINORIELLE

V est une variété réelle, de dimension n, de classe C^∞ munie d'une structure pseudo-riemannienne. La forme quadratique fondamentale Q, de composantes $g_{\alpha\beta}$ en coordonnées locales, est donc non dégénérée en tout point, de signature quelconque, mais en raison de la continuité cette signature est partout la même.

I. — Algèbre de Clifford d'une variété pseudo-riemannienne.

L'algèbre de Clifford $C_V(Q)$ de V est le quotient de l'algèbre tensorielle $\otimes D^1(V)$ des champs de vecteurs différentiables de V par l'idéal bilatère $\mathfrak{J}$ engendré par les éléments de $\otimes D^1(V)$ de la forme

$$X \otimes X - Q(X), \qquad X \in D^1(V).$$

En chaque point $x \in V$, $C_V(Q)$ induit naturellement une algèbre de Clifford $C_x(Q)$ sur les réels, de dimension 2^n, quotient de $\otimes T_x$ (T_x espace tangent à V en x) par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme

$$X_x \otimes X_x - Q(X_x).$$

On sait que $C_x(Q)$ est en tant qu'espace vectoriel isomorphe à l'algèbre extérieure ΛT_x [*2*], un tel isomorphisme associe à la base

$$(e_{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_2} \dots \wedge e_{\alpha_k})_x \text{ la base } (e_{\alpha_1 \dots \alpha_k})_x \text{ de } C_x(Q).$$

On peut considérer que $C_x(Q)$ est tout aussi bien induite par l'algèbre de Clifford $C_U(Q)$, où U est un ouvert de V contenant x. Si U est le domaine de coordonnées (x^α), $C_U(Q)$ est une algèbre sur l'anneau des germes des éléments de $C^\infty(U)$, de dimension 2^n, de base $\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}}\right)$ et il existe encore un isomorphisme $C^\infty(U)$ linéaire avec $\Lambda D^1(U)$.

Plus brièvement on peut dire, avec un léger abus, que $C_V(Q)$ est un fibré vectoriel, de groupe structural $O(Q)$, « fibré en algèbre localement trivial »; à toute section locale de $\Lambda(V)$ se trouve associée une section de $C_V(Q)$ que nous appellerons un champ local différentiable cliffordien.

On rappelle que $e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha = 2g_{\alpha\beta}$, si $e_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

II. — Représentations spinorielles.

Nous revenons à la considération de l'algèbre $C(Q)$ d'un espace vectoriel E de dimension n sur un corps K commutatif.

1° Si $n = 2r$.

C(Q) est centrale, simple [*2*]. Toutes les représentations irréductibles de C(Q) sont donc équivalentes [*2*]. Si plus particulièrement Q est d'indice maximum r [*2*], donc neutre, l'algèbre C(Q) est isomorphe à celle des endomorphismes d'un espace vectoriel S de dimension 2^r. Il est classique [2] de construire une représentation irréductible (ou spinorielle) de C(Q) en utilisant une décomposition de Witt de E, $E = F \oplus F'$, où F et F' sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux (en abrégé s. t. i. m.), et prenant $S = \Lambda F$ de sorte que cette représentation spinorielle ρ' est telle que si $(\xi, \eta) \in F \times F'$, $\rho'(\xi) = \xi^{\Lambda}$ et $\rho'(\eta) = 2\eta^{L}$ (ξ^{Λ} multiplication extérieure à gauche par ξ, η^{L} produit intérieur droit par η).

Nous utiliserons lorsque Q est neutre des bases, dites bases de Witt de E, $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$, telles que les x_i (resp y_i) constituent une base de F (resp F') avec $B(x_i, y_j) = \delta_{ij}$, de sorte que F et F' sont mis naturellement en dualité.

Définissons $f = y_1 y_2 \ldots y_r$, f est définie à un facteur scalaire près, les y_i engendrant une sous-algèbre de C(Q) isomorphe à $\Lambda F'$.

LEMME 1. — *On peut trouver une représentation spinorielle* ρ' *dans* $S = \Lambda F$, *telle que pour tout* u *appartenant à* S *et tout élément* w *de* C(Q) :

$$(\rho'(w).u)f = wuf.$$

Nous donnerons de ce lemme, constamment utilisé dans [4, a], une démonstration directe.

Définissons ρ par $\rho(w)(uf) = wuf$, ρ est une représentation de C(Q) dans $C(Q)f$, ρ est injective puisque C(Q) est simple, et en raison de la dimension de $C(Q)f$ qui est visiblement 2^r, l'image de C(Q) par ρ est End $(C(Q).f)$. ρ est une bijection de C(Q) sur l'algèbre End $(C(Q)f)$, donc une représentation spinorielle de C(Q). En appelant i l'isomorphisme linéaire de $C(Q)f$ sur S défini par

$$x_{i_1 \ldots i_h} f \to x_{i_1 \ldots i_h}, \quad i_1 < i_2 \ldots < i_h, \quad \text{soit } \rho'(w) = i \circ \rho(w) \circ i^{-1},$$

ρ' est une représentation équivalente à ρ de C(Q) dans S et $(\rho'(w).u)f = wuf$.

(Un calcul de routine permettrait de vérifier que ρ' est la représentation ainsi désignée plus haut, cependant ce résultat est inutile).

Nous avons supposé Q neutre, si tel n'est pas le cas et si $K = R$, nous complexifions E en E_c, étendons Q en Q' et considérons l'algèbre C(Q') isomorphe à la complexifiée de C(Q). Q' est neutre et les considérations précédentes sont valables (Si K était quelconque on plongerait K dans K' algébriquement clos).

2° Si $n = 2r + 1$.

$C^+(Q)$ est centrale, simple [2]. Si de plus Q est d'indice maximum r, $C^+(Q)$ est isomorphe à End S avec dim $S = 2^r$.

$C^+(Q)$ est isomorphe à $C(Q_1)$ où, $C(Q_1)$ est l'algèbre de Clifford de l'espace $F \oplus F'$, tel que ξ_0 étant non isotrope, $F \oplus F' \oplus (\xi_0)$ soit une décomposition de Witt de E, avec $Q_1(y) = -Q(\xi_0)Q(y)$, $y \in F \oplus F'$. Q_1 est neutre. $C(Q_1)$ se représente comme $C(Q)$ lorsque $n = 2r$. $C^+(Q)$ admet donc une représentation spinorielle ρ_+ qui peut se prolonger de deux manières inéquivalentes en représentation irréductible ρ de $C(Q)$ (On pose $\rho = \rho_+ \circ \varphi$, ou $\rho_+ \circ \varphi'$, avec $\varphi(u) = u_1 + u_2$, ou $u_1 - u_2$, si $u = u_1 + u_2 z \in C(Q)$, z étant un élément non trivial du centre de carré 1, u_1 et u_2 appartenant à $C^+(Q)$; on se rapportera au livre de Chevalley [*4*, a]).

Remarque. — Revenant au cas $K = R$, les représentations irréductibles précédentes ($n = 2r$, ou $n = 2r + 1$) donnent des représentations de Pin Q qui sont irréductibles car $C(Q)$ s'obtient par combinaisons linéaires d'éléments de Pin Q comme on le voit aisément.

Les éléments des espaces de représentation étant appelés spineurs nous ne parlerons plus bas que de variétés spinorielles et point de variétés « pinorielles ». De plus en se plaçant dans $C^+(Q)$ les représentations φ et p sont identiques.

III. — Spineurs. Repères spinoriels. Champs locaux de spineurs. $n=2r$.

Comme nous l'avons déjà dit, un spineur est un élément d'un espace vectoriel de dimension finie 2^r sur lequel opère une représentation irréductible de l'algèbre de Clifford $C(Q)$.

Nous prenons pour espace de base un espace E de dimension n sur R, muni d'une forme quadratique Q non dégénérée. Supposons que dans un repère orthonormé $(e_1, e_2 \ldots e_n)$,

$$Q(x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^n)^2$$

et pour fixer les idées que $k \leqslant (n - k)$. On a une décomposition de Witt de E_c en prenant :

$$E_c = F \oplus F'.$$

$$F = \left(\frac{e_1 + e_n}{\sqrt{2}}, \frac{e_2 + e_{n-1}}{\sqrt{2}}, \ldots \frac{e_k + e_{n-k+1}}{\sqrt{2}}, \frac{ie_{k+1} + e_{n-k}}{\sqrt{2}}, \ldots \frac{ie_r + e_{n-r+1}}{\sqrt{2}}\right),$$

$$F' = \left(\frac{e_1 - e_n}{\sqrt{2}}, \frac{e_2 - e_{n-1}}{\sqrt{2}}, \ldots \frac{e_k - e_{n-k+1}}{\sqrt{2}}, \frac{ie_{k+1} - e_{n-k}}{\sqrt{2}}, \ldots \frac{ie_r - e_{n-r+1}}{\sqrt{2}}\right).$$

Soit $F = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$, $F' = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$, avec

$$B(\xi_i, \xi_j) = B(\eta_i, \eta_j) = 0$$
$$B(\xi_i, \eta_j) = \delta_{ij}.$$

Nous dirons que $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_r)$ (noté (ξ_i, η_j)) constitue la base de Witt associée à la base orthonormée réelle (e_i) de E_c. A une base réelle $\mathfrak{R}$ de E_c est donc associée injectivement par le procédé précédent une base de Witt W. Cependant si on se donne une base de Witt quelconque de E_c, le calcul inverse de celui que nous venons de faire donne une base orthonormée de E_c et rien ne nous permet d'affirmer que c'est une base de E. Elle provient d'une base orthonormée de E par un élément de O(Q'), Q' complexifié de Q.

Soient $\Omega = (\xi_i, \eta_j)$ et $W = (x_i, y_j)$ deux bases de Witt associées à des bases réelles orthonormées de E_c par le procédé précédent, telles que la deuxième base réelle se déduise de la première par un élément τ de O(Q). Soit $g \in \text{Pin } Q$, l'un des deux éléments tels que $p(g) = \tau$, g est défini au signe près (*).

$$\mathcal{S} = \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_h \leqslant r,$$

est une base de $C(Q')f$ $(f = y_1 \ldots y_r)$, espace des spineurs pour la représentation ρ du II.

Si on remplace Ω par une autre base de Witt Ω' associée à une base réelle orthonormée $\mathfrak{R}'$ de E_c :

$$\Omega' = (\xi_{i'}, \eta_{j'}), \qquad \text{avec} \qquad \mathfrak{R}' = p(\gamma)(\mathfrak{R}), \ \gamma \in \text{Pin } Q,$$

on peut remplacer g par $g' = \gamma g$ et $\mathcal{S}$ par

$$\mathcal{S}' = \xi_{i'_1} \ldots \xi_{i'_h} g' y_1 \ldots y_r = \gamma \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r.$$

(On note que $e_{i'} = \tau(e_i)$, $\tau \in O(Q)$, pour tout i, équivaut à $\xi_{i'} = \tau(\xi_i)$ et $\eta_{j'} = \tau(\eta_j)$ pour tout i et tout j).

Nous pourrons convenir de dire que $\mathcal{S}$ est « au-dessus » de $\mathfrak{R}$ et $\mathcal{S}'$ « au-dessus » de $\mathfrak{R}'$. Observons que

$$\mathfrak{R}' = p(\gamma)\mathfrak{R}, \qquad \mathcal{S}' = \rho(\gamma)\mathcal{S},$$

mais $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ ne sont définis qu'au signe près, de sorte que l'on a « au-dessus » d'un repère $\mathfrak{R}$, les repères $\mathcal{S}$ et $(-\mathcal{S})$.

Si ψ est l'élément de C^{2^r}, défini par un spineur rapporté au premier repère $\mathcal{S}$, ψ' l'élément de C^{2^r} défini par ce même spineur dans le repère $\mathcal{S}'$,

---

(*) Pour la commodité des notations, p désigne ici l'application appelée φ dans le chapitre premier (Pin Q = Spin_1 Q pour $n = 2r$).

alors $\psi' = (\rho(\gamma))^{-1}\psi$, où $(\rho(\gamma))^{-1}$ est considéré, avec un léger abus de notation comme endomorphisme de C^{2^r}.

W étant fixée, $\mathcal{S}$ est univoquement associé à $(\mathfrak{R}, g)$, nous appellerons $(\mathfrak{R}, g)$ un « repère spinoriel » de $C(Q')f$ « au-dessus » de $\mathfrak{R}$.

Un spineur, élément de $C(Q')f$, où opère à gauche Pin Q, est donc parfaitement défini par un triplet $(\mathfrak{R}, g, \psi)$, ce triplet pouvant être choisi d'une infinité de manières. *Deux triplets* $(\mathfrak{R}, g, \psi)$ *et* $(\mathfrak{R}', g', \psi')$ *définiront le même spineur, si et seulement si, posant* $\gamma = g'g^{-1}$ $(g, g' \in \text{Pin } Q)$

$$(1) \qquad \mathfrak{R}' = \sigma(\mathfrak{R}), \qquad p(\gamma) = \sigma, \qquad \psi' = (\rho(\gamma))^{-1}\psi.$$

Cela suggère la définition suivante : [5], [7] :

DÉFINITION 1. — *Un spineur « attaché à une représentation complexe* ρ_1 *de* Pin Q » *est une classe d'équivalence de triplets* $(\mathfrak{R}, g, \psi)$, $\mathfrak{R}$ *repère orthonormé réel de* E_c, $g \in \text{Pin } Q$, $\psi \in C^{2^r}$, $(\mathfrak{R}', g', \psi')$ *étant équivalent à* $(\mathfrak{R}, g, \psi)$, *si et seulement si les relations* (1) *sont vérifiées en prenant* ρ_1 *au lieu de* ρ.

Avec les notations de Lichnerowicz [7], $\mathfrak{R} = z$, $\mathfrak{R}' = z'$, $z' = z\sigma$, (1) s'écrit avec ρ_1 au lieu de ρ :

$$(2) \qquad z' = z\sigma, p\gamma = \sigma, \psi(z\rho_1(\gamma)) = \rho_1(\gamma)^{-1}\psi(z).$$

Nous conviendrons de dire dans tous les cas que $(\mathfrak{R}, g)$ est un repère spinoriel, $(\mathfrak{R}, g)$ et $(\mathfrak{R}', g')$ définissent le même espace de spineurs, si et seulement si :

$$(3) \quad \mathfrak{R}' = \sigma(\mathfrak{R}) \quad \textit{et} \quad p(\gamma) = \sigma \quad \textit{avec} \quad \gamma = g'g^{-1}, \qquad g, g' \in \text{Pin } Q.$$

Notons bien que $(\mathfrak{R}, g) \sim (\mathfrak{R}, -g)$.

On observera qu'un spineur au sens de la définition 1 n'est ni réel, ni complexe, car dans l'espace complexe de représentation opère seulement Pin Q et non Pin Q'. Dans ce qui suit, on choisira la représentation ρ.

PROPOSITION 1. — $W = (x_i, y_j)$ *étant une base de Witt associée à un repère réel orthonormé, et choisie une fois pour toutes, tout repère spinoriel peut se définir par* 2^r *éléments de* $C(Q')$ *de la forme*

$$\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r, \qquad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant r, \qquad g \in \text{Pin } Q,$$

où $\Omega = (\xi_i, \eta_j)$ *est une base de Witt associée à un repère variable réel orthonormé, tel que* $W = p(g^{-1}).\Omega$.

En effet, si Ω est associée à $\mathfrak{R}$ et si les composantes de ψ dans le repère spinoriel $(\mathfrak{R}, g)$ sont $x^{i_1 \cdots i_h}$, on peut identifier ψ à

$$\psi_1 = x^{i_1 \cdots i_h} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r$$

et cette identification est intrinsèque, car dans le repère $(\mathfrak{R}', g')$, $\mathfrak{R}' = (\xi_{i'}, \eta_{j'})$, appartenant au même espace de spineurs, ψ' de composantes $x^{i'_1 \cdots i'_h}$ est identifié de la même manière à

$$\psi'_1 = x^{i'_1 \ldots x i'_h} \xi_{i'_1} \ldots \xi_{i'_h} g' y_1 \ldots y_r = \psi_1$$

Donc d'après (1), $(\mathfrak{R}, g)$ s'identifie à $\{ \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r \}$.

On note cependant que le choix de W est arbitraire. Cela donne de l'intérêt à la proposition suivante.

Proposition 2. — *Soient* $W = (x_i, y_j)$, $W' = (x_{i'}, y_{j'}) = p(\delta).W$ *des bases de Witt associées à des repères orthonormés réels.* Posons :

$$\mathcal{S} = \{ \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ \ldots y_r \} = (\mathfrak{R}, g)$$
$$\mathcal{S}' = \{ \xi_{i'_1} \ldots \xi_{i'_h} g' y'_1 \ldots y'_r \} = (\mathfrak{R}', g'), \qquad \varepsilon = N(\delta) = \pm 1.$$

Alors $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}'$ *définissent le même espace de spineurs si et seulement si :*

$$y'_1 \ldots y'_r = \varepsilon y_1 \ldots y_r,$$

($\varepsilon = 1$ *équivaut à* $\delta \in \operatorname{Spin} Q$ *si* Q *définie négative,* $\varepsilon = 1$ *si* Q *est définie positive*).

Le diagramme (4) ci-dessous fixant les notations,

$$(4) \qquad \begin{array}{ccc} \Omega = (\xi_i, \ \eta_j) & \xrightarrow{p(g^{-1})} & W = (x_i, \ y_j) \\ {\scriptstyle p(\gamma)} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle p(\delta)} \\ \Omega' = (\xi_{i'}, \eta_{j'}) & \xrightarrow{p(g'^{-1})} & W' = (x_{i'}, y_{j'}) \end{array} \qquad g, g', \gamma, \delta \in \operatorname{Pin} Q$$

et $(\mathfrak{R}, g)$, $(\mathfrak{R}', g')$ définissant le même espace de spineurs, on a nécessairement, puisque $\mathfrak{R}' = p(\gamma)\mathfrak{R}$,

$$\mathcal{S}' = \pm \rho(\gamma)\mathcal{S} = \varepsilon_1 \rho(\gamma)\mathcal{S}.$$

Or

$$\mathcal{S}' = \{ \gamma \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r \delta^{-1} \},$$

de sorte que

$$y_1 \ldots y_r \delta^{-1} = f\delta^{-1} = \varepsilon_1 f.$$

Mais $f\delta^{-1} = \varepsilon_1 f$ entraîne $\delta f\delta^{-1} = \varepsilon_1\delta f = y_1' \ldots y_r' = f'$.

Appliquant β à $f\delta^{-1}$ il vient : $\delta f = \varepsilon\varepsilon_1 f$, d'où

$$f' = \delta f\delta^{-1} = \varepsilon f, \qquad \varepsilon = \mathrm{N}(\delta).$$

Les remarques concernant ε viennent de la comparaison de G_0, Spin Q et Pin Q [chapitre premier].

Réciproquement : Si $f' = \varepsilon f$, montrons que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ définissent le même espace de spineurs. Il est permis d'après les résultats antérieurs de supposer que $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$; alors $\mathcal{S}' = \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g\delta^{-1} f' = \varepsilon\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g\delta^{-1} f$, il suffit donc d'établir que

$$\varepsilon\delta^{-1} f = \varepsilon_1 f \qquad \text{ou} \qquad \delta f = \pm f.$$

De $f' = \varepsilon f$ on tire $\delta f = \varepsilon f\delta$, ce qui entraîne d'après [4 *a*, chapitre III] que

$$\delta f = \lambda f, \qquad \lambda \in \mathrm{C}^* \qquad \text{et} \qquad f\delta^{-1} = \frac{\varepsilon}{\lambda} f.$$

Appliquant β à $f\delta^{-1} = \frac{\varepsilon}{\lambda} f$, il vient :

$$\delta f = \frac{\varepsilon \mathrm{N}(\delta)}{\lambda} f, \quad \text{d'où} \quad \lambda^2 = \varepsilon\mathrm{N}(\delta) \quad \text{et} \quad \delta f = \pm f.$$

Remarque. — Si $(\mathcal{S}, \psi)$ et $(\mathcal{S}', \psi')$ définissent le même spineur, *nécessairement les s. t. i. m. définis par* $y_1 y_2 \ldots y_r$ *et* $y_1' \ldots y_r'$ *sont identiques.*

Changement de représentation.

Une représentation spinorielle ρ' remplaçant la représentation ρ, alors il existe un isomorphisme θ des espaces des représentations tel que :

$$\text{(5)} \qquad \forall w \in \mathrm{C}(\mathrm{Q}'), \qquad \rho'(w) = \theta \circ \rho(w) \circ \theta^{-1}$$

θ peut être considéré comme élément de $\mathrm{GL}(2^r, \mathrm{C})$. $\mathcal{S}$ étant défini comme précédemment, nous dirons que $\theta(\mathcal{S})$ est un repère spinoriel au-dessus de $\mathcal{R}$pour la représentation ρ. Cette définition est bien intrinsèque car d'après (5) :

$$\theta(\rho(\gamma).\mathcal{S}) = \rho'(\gamma).\theta(\mathcal{S}).$$

Deux spineurs définis par les éléments ψ et ψ' de C^{2^r} et correspondant aux représentations ρ et ρ' se déduisent l'un de l'autre par θ si et seulement si $\psi(\mathcal{S}) = \psi'(\theta(\mathcal{S}))$, c'est-à-dire si leurs composantes dans $\mathcal{S}$ et $\theta(\mathcal{S})$ sont égales.

Revenons à la variété V de dimension $n = 2r$. Un champ local de spineurs au-dessus de U, ouvert de V, sera une application différentiable de U dans C^{2^r}: $x \to \psi_x$, telle que pour tout x fixé, $x \in U$, ψ_x soit un spineur pour l'algèbre de Clifford $C_x(Q')$ au sens donné par la définition 1.

Avec la représentation ρ particulière utilisée, si

$$(\xi_1)_x, \ldots, (\xi_r)_x, (\eta_1)_x, \ldots, (\eta_r)_x \quad \text{et} \quad (x_1)_x, \ldots, (x_r)_x, (y_1)_x, \ldots, (y_r)_x$$

sont définis comme plus haut au-dessus de U, un champ local de spineurs au-dessus de U sera défini par

$$x \to \alpha(x)^{i_1 \ldots i_h}(\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r)_x, \ g_x \in \text{Pin } Q$$

avec les conditions usuelles de différentiabilité.

Avec les notations de Lichnerowicz, et de manière équivalente, un champ local de spineurs sera une application ψ de U dans C^{2^r} telle que

$$\psi(z\rho(\gamma_x)) = \rho(\gamma_x)^{-1}\psi(z)$$

pour tout γ_x dans Pin (Q).

IV. — Spineurs. Repères spinoriels et champs locaux de spineurs $n = 2r + 1$, $r > 0$.

Nous utilisons II, 2°.

Nous appelons spineur tout élément d'un espace vectoriel de dimension 2^r sur lequel opère une représentation irréductible de $C^+(Q)$.

Dans un repère orthonormé si :

$$Q(x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^{2r})^2 - (x^n)^2 \quad k \leqslant 2r - k,$$

on forme une décomposition de Witt :

$$E_c = F \oplus F' \oplus (e_n)$$

où F et F′ sont construits comme pour $n = 2r$. Comme plus haut $\Omega = (\xi_i, \eta_j, e_n)$ et $W = (x_i, y_j, z_n)$ sont deux bases de Witt associées à des bases réelles orthonormées de E_c.

$$\mathcal{S} = (\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r), \qquad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant r,$$

est une base de $C(Q'_1)f \simeq C^+(Q')f$, $f = y_1 \ldots y_r$, espace de spineurs pour la représentation ρ de $C(Q'_1)$, donc espace d'une représentation irréductible de $C^+(Q)$. Si $\mathcal{R} = (e_1, \ldots, e_n)$ est remplacé par $\mathcal{R}'$, base réelle orthonormée et si $\mathcal{R}' = p(\gamma)(\mathcal{R})$, $\gamma \in \text{Spin } Q$, on a alors comme au III :

$$\mathcal{S}' = \xi_{i_1'} \ldots \xi_{i_h'} g' y_1 \ldots y_r) = \gamma(\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r).$$

La définition 1 s'étend *ipso facto* ainsi que les remarques et propositions qui la suivent ; il suffit de remplacer partout $\Omega = (\xi_i, \eta_j)$ par $\Omega = (\xi_i, \eta_j, e_n)$ et faire le changement analogue pour W (on devra toutefois se restreindre à Spin Q puisqu'on ne représente que $C^+(Q)$).

Sur la varité V de dimension $2r + 1$, un champ local de spineurs au-dessus de U ouvert de V, se définira comme plus haut mais en postulant que pour $x \in U$, ψ_x soit un spineur pour l'algèbre de Clifford $C_x(Q_1') \simeq C_x^+(Q')$.

(On remarquera que l'isomorphisme de $C_x(Q_1')$ sur $C_x^+(Q')$ étend l'isomorphisme $(y)_x \to (e_n y)_x$, $y_x \in (F \oplus F')_x$, cet isomorphisme dépend donc différentiablement de x).

V. — Remarques et généralisations diverses.

Si $\Gamma(Q')$, $\Gamma(Q)$ sont les groupes de Clifford-α de $C(Q')$ et $C(Q)$, si l'on définit Pin (Q') comme le sous-groupe de $\Gamma(Q')$ formé par les éléments g tels que $N(g) = \pm 1$, on peut introduire des spineurs attachés à une représentation complexe ρ_1 de ces divers groupes et les repères correspondants.

Avec Pin (Q'), $(\mathcal{R}, g) \sim (\mathcal{R}', g')$ entraîne $(\mathcal{R}, g) \sim (\mathcal{R}', \varepsilon g')$ avec $\varepsilon = -1, i, -i$.

Avec $\Gamma(Q')$, $(\mathcal{R}, g) \sim (\mathcal{R}', g')$ entraîne $(\mathcal{R}, g) \sim (\mathcal{R}', \varepsilon g')$, avec $\varepsilon \in C^*$.

Avec $\Gamma(Q)$, $(\mathcal{R}, g) \sim (\mathcal{R}', g')$ entraîne $(\mathcal{R}, g) \sim (\mathcal{R}', g')$, avec $\varepsilon \in \mathcal{R}^*$.

La proposition 2, s'énonce de la même manière, avec quelques légères modifications :

$\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ définissent le même espace de spineurs si et seulement si :

$$\begin{aligned} f' &= \pm f && && \text{(cas de Pin } Q'\text{)},\\ f' &= \lambda f, && \lambda \in C^* && \text{(cas de } \Gamma(Q')\text{)},\\ f' &= \lambda N(\delta) f, && \lambda \in (R^*)_+ && \text{(cas de } \Gamma(Q)\text{)}. \end{aligned}$$

VI. — Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une structure spinorielle complexe sur une variété pseudo-riemannienne.

DÉFINITIONS. — Q est toujours non dégénérée d'indice quelconque.

Selon Lichnerowicz, nous disons que V admet une *structure spinorielle*, s'il existe sur V un fibré principal $\mathcal{S}(V)$ de groupe structural Pin Q, revêtement d'ordre 2 du fibré principal riemannien $\varepsilon(V)$ de groupe structural O(Q), pour lequel la restriction de la projection aux fibres de $\mathcal{S}(V)$ donne un revêtement d'ordre 2 des fibres de $\varepsilon(V)$ et tel que le diagramme ci-dessous, où les flèches horizontales correspondent aux transformations à droite soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S}(r) \times \text{Pin } Q & \longrightarrow & \mathcal{S}(V) \\
{\scriptstyle \tilde{p} \times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} \\
\varepsilon(V) \times O(Q) & \longrightarrow & \varepsilon(V) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
 & & V
\end{array}$$

Si la variété est orientée, et si Spin (Q) remplace Pin (Q), nous parlerons de *structure spinorielle spéciale.*

Remplaçant Pin Q par Pin Q′ et O(Q) par O(Q′), le filié $\varepsilon(V)$ par son complexifié, nous définirions de manière analogue une *structure spinorielle complexe.*

Enfin, avec $\Gamma(Q')$ et $\Gamma(Q)$ nous aurions de même des structures que nous appellerions *cliffordienne complexe* et *cliffordienne,* respectivement.

Nous supposons $n = 2r$.

PROPOSITION 3. — *S'il existe sur la variété pseudo-riemannienne* V, *un champ global de sous-espaces complexes totalement isotropes maximaux (s. c. t. i. m.), la variété admet une structure spinorielle complexe.*

Nous remarquerons d'abord que Pin Q′ opère sur $C_x(Q')f_x$ effectivement à gauche, $f_x = y_1y_2 \ldots y_r)_x$ définissant localement le champ de s. c. t. i. m., les y_i étant isotropes.

Nous conviendrons d'appeler f_x un champ local de r-vecteurs isotropes.

F'_x est le s. c. t. i. m. du champ issu de x.

Nous envisagerons un recouvrement de la variété V par des ouverts $U(\Omega, y_i)$, domaine commun de définition de repères orthonormés réels ou complexes (dont les $\Omega_x = (\xi_i, \eta_j)_x$ sont les repères de Witt associés) et d'un champ $(y_1, y_2 \ldots y_r)_x$ de vecteurs isotropes définissant f_x et F'_x.

D'après le théorème de Witt, il existe $\sigma_x^{-1} \in O(Q')$ qui applique $(\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_r)_x$ respectivement sur $(y_1, y_2, \ldots y_r)_x$. σ_x^{-1} n'est pas unique, mais si σ_x^{-1} possède la même propriété $\sigma'^{-1}_x = \theta_x^{-1}\sigma_x^{-1}$, où σ_x^{-1} conserve F'_x point par point.

Soit g_x^{-1}, élément de Pin Q′, tel que $p(g_x^{-1}) = \sigma_x^{-1}$, si g'^{-1}_x correspond de même à σ'^{-1}_x, $(g'^{-1}_x) \in$ Pin Q′, nous établissons que :

$$g'_x f_x = \lambda g_x f_x \qquad (\text{avec } \lambda^2 = \pm 1) \tag{6}$$

En effet, posant $g'_x = g_x \delta_1(x)$, il vient : $\delta_1 f \delta_1^{-1} = f$, qui donne $\delta_1 f = f\delta_1 = \lambda f$, d'après [*4*, a, chapitre III], et en appliquant β, le calcul déjà fait dans la démonstration de la proposition 2, montre que $\lambda^2 = \pm 1$.

LEMME. — *Soient f_x et f_x^* deux champs locaux de r-vecteurs isotropes au-dessus d'un ouvert contenant x et définissant le même champ local de s. c. t. i. m., alors il est loisible de supposer que $f_x = \pm f'_x$.*

En effet soit $f'_x = k(x) f(x)$, $k(x)$ est le déterminant, non nul, de la matrice $A(x)$ qui applique $(y_1, y_2 \dots y_r)_x$ respectivement sur $(y'_1, y'_2 \dots y'_r)_x$, avec $f'_x = (y'_1 y'_2 \dots y'_r)_x$.

Soit $U(\Omega, y_i)$ et $U'(\Omega, y'_i)$ les domaines de définition de $\Omega_x = (\xi_i, \eta_j)_x$ et respectivement des $(y_i)_x$ et $(y'_i)_x$.

Appelons $B(x)$ la matrice $r \times 2r$ définie par les coordonnées des $(y_i)_x$ relativement aux $(\xi_i)_x$ et $(\eta_i)_x$. $B'(x)$ est la matrice analogue obtenue avec les $(y'_i)_x$.

$$B'(x) = B(x)A(x)$$

A, B, B' sont de rang r, prenant les transposées :

$${}^tB'(x)B'(x) = {}^tA(x)({}^tB(x)B(x))A_x$$

$$\mathrm{Det}\,({}^tB'_xB'_x) = \mathrm{Det}\,({}^tB_xB_x)\,\mathrm{Det}\,({}^tA_xA_x)$$

$$b'(x) = b(x)a(x), \qquad \text{avec} \qquad a(x) = k^2(x)$$

Définissant

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{b'(x)}} \quad , \quad \varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{b(x)}}$$

où on a choisi une détermination des racines, il vient :

$$\varphi'(x) = \pm \varphi(x).$$

Nous remarquons enfin que les déterminants $b(x)$ et $b'(x)$ sont invariants quand on remplace $\Omega_x = (\xi_i, \eta_j)_x$ par $\Omega'_x = (\xi_{i'}, \eta_{j'})_x$. B est en effet remplacée par BC où C est une matrice orthogonale de sorte que

$${}^t(BC)(BC) = {}^tB(C{}^tC)B = {}^tBB$$

puisque ${}^tCC = I$.

Ainsi nous pouvons dès maintenant supposer que $f'(x) = \pm f(x)$.

Choisissons donc, sur un ouvert $U(\Omega, y_i)$, appartenant au recouvrement de V déjà défini, un champ différentiable d'éléments $g(x) \in \mathrm{Pin}\, Q'$, tels que $p(g_x) = \sigma_x$, selon les notations déjà utilisées dans le paragraphe VI, et considérons les repères :

$$\Sigma_x = \{ \xi_{i_1} \dots \xi_{i_h} gf \}_x \text{ de } C(Q')f_x.$$

Dans un ouvert U′ analogue nous aurons les repères :

$$\Sigma'_x = \{ \xi_{i'_1} \dots \xi_{i_h} g'f' \}_x.$$

Avec les notations du diagramme 4, les éléments γ, g, g', δ étant toutefois dans Pin Q′, on trouve, en procédant comme dans la démonstration de la proposition 2 que :

$$\Sigma'_x = \lambda \gamma_x \Sigma_x, \qquad \text{avec } \lambda^2 = \pm 1,$$

en tout point $x \in U \cap U'$.

Mais Pin Q′ opérant effectivement sur $C(Q')f_x$ et les repères Σ_x et Σ'_x dépendant différentiablement de x, le coefficient $\lambda\gamma_x$ est déterminé sans ambiguïté et dépend lui-même différentiablement de x. On peut donc poser :

$$\Sigma'_x = \gamma_1(x)\Sigma_x$$

avec $p(\gamma_1(x)) = \sigma_x$ et $\Omega'_x = \sigma_x.\Omega_x$, $x \to \gamma_1(x)$ étant différentiable.

Ces considérations montrent que $\bigcup_{x \in V} C(Q')f_x$ est un espace fibré, de fibre-type C^{2^r}, de groupe structural Pin Q′. On peut classiquement lui associer un espace fibré principal qui sera spinoriel puisque $p\gamma_1(x) = \sigma(x)$, avec

$$\Omega'_x = \sigma_x \cdot \Omega_x.$$

Proposition 4 (réciproque de la proposition 3). — *Si la variété pseudo-riemannienne* V *admet une structure spinorielle complexe, il existe sur* V *un champ global de s. c. t. i. m. et à un scalaire λ près ($\lambda^2 = 1$), un champ global de r-vecteurs isotropes.*

En effet, il existe alors des champs locaux de repères spinoriels complexes $(\mathcal{R}_x, g_x)$, $g_x \in \mathrm{Pin}\, Q'$, $\mathcal{R}_x \in O(Q')$, au-dessus d'un domaine ouvert $\mathcal{U}$ muni des repères $\mathcal{R}_x$ définissant les repères de Witt $(\xi_i, \eta_j)_x$.

Il est possible de construire d'après la proposition 1 étendue à Pin Q′, un champ local $x \to (y_1, y_2 \ldots y_r)_x$ de r-vecteurs isotropes, $y_i = p(g_x).(\eta_i)_x$, de manière que les repères spinoriels complexes s'identifient à :

$$\{\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} g y_1 \ldots y_r\}_x$$

Dans un autre domaine $\mathcal{U}'$, on aura de même les repères :

$$\{\xi_{i'_1} \ldots \xi_{i'_h} g' y'_1 \ldots y'_r\}_x$$

et si x appartient éventuellement à l'intersection de ces domaines, ces repères définissent en x le même espace de spineurs, donc d'après la proposition 2, étendue à Pin Q' :

$$(y'_1 \ldots y'_r)_x = \lambda(y_1 \ldots y_r)_x, \qquad \text{avec} \qquad \lambda^2 = 1.$$

Ainsi les $(y'_1 \ldots y'_r)_x$ et les $(y_1 \ldots y_r)_x$ définissent au-dessus des domaines U et U' le même champ de s. c. t. i. m.

Le cas où $n = 2r + 1$. On se restreint à $\gamma_x \in \mathrm{Spin}\ Q'$ et à des variétés orientables.

La proposition 3 est encore valable en remplaçant $C_x(Q')f_x$ par $C_x(Q'_1)f_x$; avec les notations du IV, on écrit :

$$T_x^C = F_x \oplus F'_x \oplus (z_x),$$

où F'_x et F_x sont totalement isotropes, $z_x \in T_x^C$.

Tout le reste est analogue.

Remarque. — Il est facile et immédiat d'établir que si la variété V admet un champ global de s. c. t. i. m. elle admet aussi une structure cliffordienne complexe et réciproquement. Il suffit de remplacer Pin Q' par $\Gamma(Q')$ dans la démonstration et de noter que $\lambda \in C^*$.

VII. — Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une structure spinorielle sur une variété riemannienne.

Nous supposons Q définie positive (resp. Q définie négative et V orientable) et d'abord $n = 2r$.

D'après l'étude faite au chapitre premier :

$$G_0(Q) = \mathrm{Pin}\, Q \,(\text{et resp } G_0(Q) = \mathrm{Spin}\, Q).$$

PROPOSITION 5. — *S'il existe sur la variété riemannienne* V *(resp. riemannienne orientée), un champ global de r-vecteurs isotropes la variété admet une structure spinorielle (resp. spinorielle spéciale).*

La démonstration se conduit comme celle de la proposition 3.

Il est loisible de prendre $g_x \in G_0(Q')$, c'est ce que nous ferons donc.

La formule (6) est remplacée par $g'_x f_x = \pm\, g_x f_x$ car on peut supposer que $\delta_1 \in G_0(Q')$ et $N(\delta_1) = 1$, de sorte que $\lambda^2 = 1$.

Σ_x sera défini à partir de $\Omega_x = (\xi_i, \eta_j)_x$, repère de Witt associé à un repère réel orthonormé et f_x comme plus haut. On trouvera, étant donné qu'avec les notations de la proposition 2, $N(\delta) = 1$ que :

$$\Sigma'_x = \gamma_1(x)\Sigma_x$$

avec $\gamma_1(x) \in \text{Pin } Q$ (resp $\gamma_1(x) \in \text{Spin } Q$).

PROPOSITION 6 (réciproque de la proposition 5). — *Si la variété riemannienne* V *(resp. riemannienne orientée) admet une structure spinorielle (resp. spinorielle spéciale), il existe sur* V *un champ global de r-vecteurs isotropes.*

La démonstration est identique à celle de la proposition 4.

Les résultats précédents s'adaptent immédiatement au cas où $n = 2r + 1$, mais on se restreint à Spin Q et à V orientable dans les 2 cas.

Remarques diverses.

1° La proposition 6 s'étend à une variété pseudo-riemannienne quelconque, mais légèrement modifiée.

Si une variété pseudo-riemannienne V *admet une structure spinorielle, il existe sur* V, *à* ε *près* ($\varepsilon = \pm 1$) *un champ de r-vecteurs isotropes.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.

2° On sait qu'une variété riemannienne connexe donc paracompacte, admet une structure spinorielle spéciale si et seulement si sa seconde classe de Stiefel-Whitney est nulle.

Ainsi :

PROPOSITION 7. — *L'existence sur une variété riemannienne connexe orientable d'un champ global de r-vecteurs isotropes équivaut à la nullité de sa seconde classe de Stiefel-Whitney.*

En particulier si G est un groupe de Lie connexe il peut se munir d'une structure riemannienne spéciale, et on peut définir sur G, par translations à gauche, un champ global de r-vecteurs isotropes. Donc :

Tout groupe de Lie connexe admet une structure spinorielle spéciale (et même spinorielle) et sa seconde classe de Stiefel-Whitney est nulle.

VIII. — Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une structure spinorielle dans le cas général.

Q est de signature quelconque. Nous prenons d'abord $n = 2r$.

PROPOSITION 8 (*). — *Pour qu'il existe sur la variété pseudo-riemannienne* V *une structure spinorielle, il faut et il suffit que l'on puisse définir un recouvrement* $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *de* V, *par des ouverts, domaines de définition de repères orthonormés réels* $\mathfrak{R}_\alpha$, *et au-dessus de chaque* U_α, *un champ local de r-vecteurs isotropes* $x \to f_\alpha(x)$, *tels que si* α, $\beta \in \mathrm{A}$, $x \in \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$, $\mathfrak{R}_\beta = \sigma_x \cdot \mathfrak{R}_\alpha$,

$$p(\gamma_x) = \sigma_x, \qquad \gamma_x \in \operatorname{Pin} \mathrm{Q},$$

alors

$$f_\beta(x) = \mathrm{N}(\gamma_\alpha) f_\alpha(x).$$

La condition est suffisante.

Notons qu'il existe alors sur V un champ de s. c. t. i. m. défini par $x \to f_\alpha(x)$ au-dessus de chaque U_α.

En utilisant les notations de la démonstration de la proposition 3, il suffit de remarquer qu'il est loisible de supposer que $g^{-1}(x) \in \mathrm{G}_0(\mathrm{Q}')$ et que la formule (6) est valable avec $\lambda^2 = 1$. De même

$$\Sigma'_x = \lambda \gamma_x \Sigma_x \qquad \text{avec} \qquad \lambda^2 = 1,$$

car $\mathrm{N}(\delta) = \mathrm{N}(\gamma) = 1$. Le reste est analogue.

La condition est suffisante.

C'est la démonstration de la proposition 4.

Il existe au-dessus de U_α des repères spinoriels $(\mathfrak{R}_x, g_x)$, $g_x \in \operatorname{Pin} \mathrm{Q}$, qu'on peut considérer comme des repères spinoriels complexes, or il est alors loisible de supposer que l'on choisit $(\mathfrak{R}_x, g_x)$ avec $g_x \in \mathrm{G}_0(\mathrm{Q}')$, ce qui assure que $\lambda = \mathrm{N}(\delta) = \mathrm{N}(\gamma)$.

Si $n = 2r + 1$, on peut étendre les résultats précédents en se restreignant à Spin Q et à une variété orientable.

(*) S'il est possible de se restreindre au groupe « orthochrone », la proposition 8 s'énonce comme la proposition 5 et sa réciproque 6, c'est immédiat.

CHAPITRE III
CONNEXIONS SPINORIELLES

I. — Dérivée covariante euclidienne dans l'algèbre de Clifford.

Soit V une variété pseudo-riemannienne de dimension n et soit ∇ *une connexion euclidienne.* Nous considérons l'algèbre de Clifford $C_U(Q)$ (U ouvert de V domaine de coordonnées locales). Comme l'idéal $\mathfrak{J}$ (chapitre II, I) est engendré par les éléments de la forme $X \otimes X - Q(X)$, $X \in D^1(U)$, calculons, pour $Y \in D^1(U)$, $Y = Y^\alpha \partial/\partial x^\alpha$ (x^α, coordonnées locales) :

$$\nabla_Y(X \otimes X - Q(X)) = Y^\alpha \nabla_\alpha(X \otimes X - Q(X))$$

or

$$\nabla_\alpha(X \otimes X - Q(X)) = (\nabla_\alpha X) \otimes X + X \otimes \nabla_\alpha X - \nabla_\alpha Q(X).$$

Si g est la forme bilinéaire associée à Q et si C désigne une contraction évidente :

$$\nabla_\alpha C(g \otimes X \otimes X) = \nabla_\alpha Q(X) = g(\nabla_\alpha X, X) + g(X, \nabla_\alpha X) + (\nabla_\alpha g)(X, X).$$

Comme $(\nabla_\alpha g) = 0$ *par hypothèse,* il vient

$$\nabla_\alpha(X \otimes X - Q(X)) = (\nabla_\alpha X) \otimes X + X \otimes \nabla_\alpha X - 2g(\nabla_\alpha X, X)$$

et le deuxième membre appartient à $\mathfrak{J}$ comme on le voit aisément. Ainsi ∇_Y conserve $\mathfrak{J}$.

Réciproquement : Pour que ∇_Y conserve $\mathfrak{J}$, il faut et il suffit que $(\nabla_\alpha g)(X, X)$ soit dans $\mathfrak{J}$ pour tout élément X de $D^1(U)$, ou encore par définition de $C_U(Q)$ que le scalaire $(\nabla_\alpha g)(X, X)$ soit nul dans $C_U(Q)$. Or on démontre [*2*, a] que l'application $a \to a\text{-}1$ de $C^\infty(U)$ dans $C_U(Q)$ est injective, donc $(\nabla_\alpha g)(X, X) = 0$ dans $C^\infty(U)$.

Ainsi pour que la dérivation covariante « passe au quotient » il faut et il suffit qu'elle soit euclidienne.

Dans cette hypothèse ∇_Y est une dérivation de l'algèbre $C_U(Q)$ puisque ∇_Y est une dérivation de l'algèbre tensorielle. Par exemple si (e_α) est une base locale de U:

$$\nabla_X(e_\alpha e_\alpha) = (\nabla_X e_\alpha)e_\alpha + e_\alpha(\nabla_X e_\alpha) = 2g(\nabla_X e_\alpha, e_\alpha).$$

En particulier si le champ e_α est isotrope, on retrouve bien que $\nabla_X e_\alpha$ et e_α sont orthogonaux.

II. — Dérivée de Lie dans l'algèbre de Clifford.

Soit Y un champ de vecteurs sur V qui induit un groupe de transformations locales φ_t. K étant un champ de tenseurs on définit la dérivée de Lie L_Y par :

$$(L_Y K)_x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(K_x - (\tilde{\varphi}_t K)_x)$$

L_Y est une dérivation et un calcul tout à fait analogue au précédent donne :

$$L_Y(X \otimes X - Q(X)) = (L_Y X) \otimes X + X \otimes L_Y X - L_Y(Q(X))$$
$$L_Y(Q(X)) = 2g(L_Y X, X) + L_Y Q.$$

Pour que la dérivée de Lie L_Y « *passe au quotient* » *il faut et il suffit que* $L_Y(Q) = 0$, *donc que* Y *induise un groupe d'isométrie* (*).

III. — Dérivée covariante euclidienne des champs spinoriels.

Une question qui se pose naturellement est maintenant la suivante : peut-on pour les champs de spineurs écrire des formules de dérivation analogues à celles que l'on donne pour les champs de vecteurs ? De manière précise si ψ^a, $a = 1, 2 \ldots 2^r$ ($n = 2r$ ou $2r + 1$) sont les composantes d'un spineur peut-on écrire :

$$\nabla_\alpha \psi^a = \partial_\alpha \psi^a + \Lambda^a_{b\alpha}\psi^b,$$

où les coefficients $\Lambda^a_{b\alpha}$ sont des éléments de $C^\infty(U)$? Prenons donc le champ local (cf. chapitre II, n° III) :

$$\psi = \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_h}\eta_1\eta_2 \ldots \eta_r,\ 1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_h \leqslant r,\ f = \eta_1 \ldots \eta_r\ ;$$
$$\psi = \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_h} f$$

On aurait pour la dérivation euclidienne :

$$\nabla_\beta \psi = (\nabla_\beta \xi_{\alpha_1})\widehat{\xi_{\alpha_1}} \ldots \xi_{\alpha_h}\cdot f + \ldots \xi_{\alpha_1} \ldots \widehat{\xi_{\alpha_h}}(\nabla_\beta \xi_{\alpha_h})\cdot f + \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_h}\cdot \nabla_\beta f$$
$$\nabla_\beta \psi = (\Gamma^\lambda_{\alpha_1\beta}\xi_\lambda + \Gamma^\mu_{\alpha_1\beta}\eta_\mu)\widehat{\xi_{\alpha_1}} \ldots \xi_{\alpha_h}\cdot f + \ldots + \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_h}\cdot \nabla_\beta f$$

or,

$$\nabla_\beta f = \Gamma^\lambda_{r+1,\beta}\xi_\lambda\widehat{\eta_1} \ldots \eta_r + \Gamma^\lambda_{r+2,\beta}\eta_1\xi_\lambda\widehat{\eta_2} \ldots \eta_\Gamma + \ldots$$

(*) On pourrait évidemment envisager d'autres dérivées de Lie en considérant des champs spinoriels (cf. [*6 ter*]).

Il faudrait que le deuxième membre soit dans $C_U(Q').f$, ce qui entraînerait $\nabla_\beta f = 0$, donc en raison de l'indépendance linéaire des termes que

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = 0,\ \lambda = 1, \ldots r,\ \alpha = r+1, \ldots 2r,\ \beta = 1, \ldots n,$$

de sorte que si ω désigne la 1-forme définissant la connexion euclidienne :

$$\omega^\alpha_{\beta^*} = 0 \qquad \alpha = 1 \ldots r$$
$$\beta^* = r+1, \ldots 2r$$

Mais ces conditions ne sont pas intrinsèques car en repères de Witt associés aux repères orthonormés réels il est facile de voir que :

$$\omega^\beta_\alpha + \omega^{\alpha^*}_{\beta^*} = 0, \qquad \omega^{\alpha^*}_\beta + \omega^\beta_{\alpha^*} = 0$$
$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots r, \qquad \alpha^*, \beta^* = r+1, \ldots 2r.$$

La réponse à la question posée est donc négative. Nous établissons ainsi directement un résultat déjà signalé par E. Cartan dans un contexte malheureusement assez touffu [*3*].

IV. — Connexions spinorielles.

Nous utilisons en principe la représentation ρ du chapitre II.

Désignons ici par $(e_\alpha)_x$, $\alpha = 1 \ldots n$, les éléments d'une base orthonormée et posons

$$(\gamma_\alpha)_x = \rho(e_\alpha)_x.$$

Les $(\gamma_\alpha)_x$ engendrent une algèbre de Clifford matricielle isomorphe à $C_x(Q')$ et notée $C'_x(Q')$.

Reprenons l'égalité :

$$(1) \qquad Y = \varphi(\tilde{X}) = \operatorname{ad} X \qquad \text{du chapitre premier, n° III,}$$

où $X \in \mathfrak{L}$ (Spin Q), $Y \in \mathfrak{L}(SO(Q))$, et appliquons-la à l'algèbre de Clifford matricielle, il vient :

$$(2) \qquad X.\gamma_\alpha - \gamma_\alpha \circ X - Y(\gamma_\alpha) = 0 \quad \text{(cf. chapitre premier, n° III).}$$

On peut supposer que ρ est une isométrie entre T^c_x et l'espace complexe E^c_x engendré par les $(\gamma_\alpha)_x$ de sorte que $g(e_\alpha, e_\beta) = g(\gamma_\alpha, \gamma_\beta)$ en tout point $x \in U$.

Nous pourrons identifier les γ_α et les e_α, T^c_x et E^c_x.

$X \in \mathfrak{L}$ (Spin Q) $\subset C_x(Q')$, donc $X = \mu^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ et on peut supposer que les $\mu^{\alpha\beta}$ sont antisymétriques $(\mu^{\alpha\beta} \in R)$, puisque les (γ_α) forment un repère orthonormé.

$$\begin{aligned} \operatorname{ad} X(\gamma_\alpha) &= (\mu^{\sigma\tau}(\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\gamma_\sigma\gamma_\tau) \\ &= 2\mu^{\sigma\tau}g_{\tau\alpha}\gamma_\sigma - 2\mu^{\sigma\tau}g_{\sigma\alpha}\gamma_\tau \\ &= 4\mu_{\sigma\alpha}\gamma^\sigma \end{aligned}$$

Si $Y(\gamma_\alpha) = \omega_\alpha^\lambda\gamma_\lambda$, $\omega_\beta^\alpha \in \mathfrak{L}(SO(Q))$, posant $g_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\alpha = \omega_{\beta\gamma}$ alors $\omega_{\beta\gamma} = -\omega_{\gamma\beta} = 4\mu_{\alpha\beta}$ de sorte que (2) donne :

$$(3) \qquad \| \omega_\gamma^\delta \| = \tilde{\varphi}(\mu^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta) = 4 \| \mu^\delta\gamma \|, \ \mu^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\omega^{\alpha\beta},$$

formule obtenue par Lichnerowicz [7].

On peut traduire (2) matriciellement en posant :

$$X = \| \sigma_b^a \| \ (a, b \text{ et indices latins de 1 à } 2^r)$$

$$\gamma_\alpha = \| \gamma_{\alpha b}^a \| \ (\text{indices grecs de 1 à } n),$$

par :

$$(4) \qquad -\sigma_b^a\gamma_{\alpha c}^{\ b} + \gamma_{\alpha b}^a\sigma_c^b + \omega_\alpha^\lambda\gamma_{\lambda b}^a = 0$$

soit :

$$(5) \qquad -\sigma_b^a\gamma_{\ c}^{\alpha b} + \gamma_{\ b}^{\alpha a}\sigma_c^b - \omega_\lambda^\alpha\gamma_{\ b}^{\lambda a} = 0$$

où les coefficients sont des scalaires complexes. (4) a la forme d'une dérivation covariante sur un élément de $(C(Q')f)_x \otimes (C(Q')f)_x^* \otimes T_x^c$, la 1-forme définissant la connexion étant de coefficients $(\omega_\beta^\alpha, \sigma_b^a)$, sur la variété W d'élément générique local $(x, w_x f_x)$, $w_x \in C_x(Q')$, munie de repères locaux $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ (avec les notations du chapitre II), c'est-à-dire la variété des champs de spineurs pour la représentation ρ de Pin (Q).

Pour définir une connexion, dite spinorielle, attachée à une connexion euclidienne de 1-forme ω, nous considérons localement un chemin différentiable $t \to x(t)$ dans V et en chaque point $x(t)$ un repère orthonormé réel $\mathcal{R}(t)$ de T_x^c et son repère de Witt associé $(\xi_1 \ldots \xi_n, \eta_1 \ldots \eta_x)_{x(t)}$ avec $t \to \mathcal{R}(t)$ différentiable, puis « au-dessus » de $\mathcal{R}(t)$, le repères spinoriel :

$$\mathcal{S}(t) = (\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_h}\delta y_1 \ldots y_r)_{x(t)}, \qquad \delta_{x(t)} \in \text{Pin Q}.$$

τ_t désignant le transport parallèle de $x(t_0)$ à $x(t)$ pour la connexion euclidienne, si

$$\tau_t^{-1}(\mathcal{R}(t)) = \theta(t)(\mathcal{R}(t_0)), \qquad \theta(t) \in SO(Q),$$

nous définirons la connexion spinorielle D attachée à la connexion euclidienne, sur la variété W d'élément générique local $(x, w_x f_x)$ munie de repères $\mathcal{R}(t)$, $\mathcal{S}(t)$ en postulant que le transport parallèle se définit par :

$$\begin{cases} \tau_t^{-1}\mathcal{R}(t) = \theta(t)\mathcal{R}(t_0), & \theta(t) \in \mathrm{SO(Q)}, \\ \tau_t^{-1}\,\mathcal{S}(t) = \gamma(t)\,\mathcal{S}(t_0), & \text{si} \quad \varphi(\gamma(t)) = \theta(t),\ \gamma(t_0) = 1 \end{cases}$$

Il est facile de voir que ce transport est défini indépendamment du repère $\mathcal{S}(t_0)$ choisi. Si le chemin $t \to x(t)$ est tangent en $x(t_0)$ au vecteur $v \in \mathrm{T}_x$, $\theta'(t_0)$ est la valeur de la forme μ pour le vecteur v, car avec un léger abus de notations, nous avons :

$$(\nabla_v \mathcal{R})_{t=t_0} = \omega(v)\cdot\mathcal{R}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}\,(\tau_t^{-1}\mathcal{R}(t) - \mathcal{R}(t_0)).$$

φ définissant un revêtement, la valeur de la forme (ω, σ) de la connexion spinorielle D attachée à ∇ est $(\omega, \tilde{\varphi}^{-1}(\theta'(t_0)))$, soit si $\theta'(t_0)$ est représentée par la matrice $\omega^\alpha_\beta\,(\omega^{\alpha\beta} = -\,\omega^{\alpha\beta})$.

$$\sigma = \frac{1}{4}\,\omega^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta \text{ d'après (3).}$$

En résumé : si la connexion euclidienne ∇ est de 1-forme ω, D est de 1-forme

$$\left(\omega, \frac{1}{4}\,\omega^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta\right).$$

On notera que D est une application de $\mathrm{D}^1(\mathrm{V})$ dans l'ensemble des endomorphismes de $\mathrm{D}^1(\mathrm{W})$.

V. — Le tenseur-spineur fondamental γ.

Nous avons posé $(\gamma_\alpha)_x = (\rho(e_\alpha))_x$ que nous abrégeons en

$$\gamma_\alpha = \rho(e_\alpha).$$

$\mathrm{C}_x(\mathrm{Q}')f_x$ sera noté S_x, $\gamma_\alpha \in \mathrm{S}_x \otimes \mathrm{S}_x^*$.

Si $\gamma_{\alpha b}^{\ a}$ est la matrice de γ_α dans un repère spinoriel, et si nous posons, avec un léger abus de notation : $\rho(e_\alpha) = \gamma_{\alpha b}^{\ a}$, effectuant un changement de base dans T_x^c,

$$e_{\alpha'} = \mathrm{A}^\lambda_{\alpha'} e_\lambda,$$

$$\rho(e_{\alpha'}) = \mathrm{A}^\lambda_{\alpha'}\rho(e_\lambda) = \mathrm{A}^\lambda_{\alpha'}\gamma_{\lambda b}^{\ a},$$

ce qui montre que $\rho(e_\alpha) = \gamma^{\,a}_{\alpha b}$, peut s'identifier à un élément de $T^c_x \otimes S^*_x \otimes S_x$. Les éléments $\gamma^{\,a}_{\alpha b}$, selon Lichnerowicz définissent le « tenseur-spineur fondamental » noté γ.

D est une dérivation de l'algèbre tensorielle ce qui entraîne que (4) exprime que $D(\gamma^{\,a}_{\alpha c}) = 0$, ce que nous traduirons encore par convention, par $D\gamma_\alpha = 0$, ou $D\gamma = 0$. (5) exprime que $D\gamma^\alpha = 0$.

La multiplication $\gamma_\alpha\gamma_\beta$ étant une contraction, comme D commute avec les contractions il vient :

$$D(\gamma_{\alpha_1}\gamma_{\alpha_2}\ \dots\ \gamma_{\alpha_k}) = 0 \qquad \text{et} \qquad D(\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\ \dots\ \gamma^{\alpha_k}) = 0.$$

Notons aussi que si $u, v \in \otimes\ T^c_x \otimes S^*_x \otimes S_x$

$$D_Z uv = (D_Z u)v + uD_Z v, \qquad Z \in D^1(V).$$

VI. — Applications et remarques.

1° (4) exprime que :

$$D\gamma_\alpha = \nabla\gamma_\alpha + \gamma_\alpha X - X\gamma_\alpha = 0 \quad , \quad X \in \mathfrak{L}(\text{Spin}\, Q),$$

Si

$$\nabla\gamma_\alpha + \gamma_\alpha X' - X'\gamma_\alpha = 0 \quad , \quad X' \in C(Q).$$
$$(X - X')\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(X - X').$$

Comme les γ_α engendrent par produit et combinaisons linéaires l'algèbre de Clifford entière, que C(Q) est centrale si n est pair, et $C^+(Q)$ également pour n impair, alors

$$X' = X + \lambda I_{2^r} \begin{cases} \text{si } X' \in C(Q) & n \text{ pair} \\ \text{si } X' \in C^+(Q) & n \text{ impair.} \end{cases}$$

Si $X' \in \mathfrak{L}$ (Spin Q) alors $X' = X$, car $\lambda I \notin \mathfrak{L}$ (Spin Q) (cf. chapitre premier).

Donc parmi les connexions « spinorielles » de 1-forme (ω, σ_1) *où* ω *est la 1-forme d'une connexion euclidienne, la connexion spinorielle attachée à* ∇ *est celle pour laquelle la dérivée covariante de* γ_α *est nulle.*

2° D'après la définition même de D, tout endomorphisme défini par D induit un endomorphisme de $D^1_x(V)$ et de S_x. En appelant $\overline{D}$ la restriction de D à S_x et tenant compte de la propriété de D d'être une dérivation de l'algèbre tensorielle de W, on peut écrire, $Z \in D^1(V)$:

$$D_Z = (\overline{D}_Z \otimes I_n) + (I_{2^r} \otimes \nabla_Z),$$

formule qui pourrait d'ailleurs être prise pour définition, à vrai dire un peu artificielle de la connexion D.

3° Considérons localement (cf. IV) des repères

$$\mathcal{S}_x = (\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_h} \delta f)_x \quad , \quad \delta_x \in \mathrm{Pin}\, \mathrm{Q} \quad , \quad f = (y_1 \ldots y_r)_x,$$

et cherchons la dérivée covariante spinorielle de $(uf)_x \in \mathrm{X}_x$, $u \in \mathrm{C}_x(\mathrm{Q})$, (noté uf par abus). Les (ξ_α) se déduisent des (e_α) par combinaisons linéaires à coefficients constants donc si

$\rho(\xi_\alpha) = \widehat{\xi}_\alpha$, les $\widehat{\xi}_\alpha$, $\widehat{\xi}^\alpha$ sont à dérivée covariante spinorielle nulle.

On observera aussi que si A est un opérateur linéaire de l'espace des spineurs et si s appartient à cet espace, $\mathrm{A}(s)$ étant une contraction,

$$\overline{\mathrm{D}}_\mathrm{Z}\mathrm{A}(s) = (\overline{\mathrm{D}}_\mathrm{Z}\cdot \mathrm{A})(s) + \mathrm{A}(\overline{\mathrm{D}}_\mathrm{Z}(s)). \tag{6}$$

Il vient alors :

$$\mathrm{D}_\mathrm{Z}(\xi_\alpha f) = \overline{\mathrm{D}}_\mathrm{Z}(\xi_\alpha f) = \overline{\mathrm{D}}_\mathrm{Z}(\widehat{\xi}_\alpha(f)) = (\overline{\mathrm{D}}_\mathrm{Z}\widehat{\xi}_\alpha)(f) + \widehat{\xi}_\alpha(\overline{\mathrm{D}}_\mathrm{Z} f).$$

Mais d'après (4) :

$$\widehat{\nabla_\mathrm{Z}\xi_\alpha} = \overline{\mathrm{D}}_\mathrm{Z}\widehat{\xi}_\alpha, \text{ de sorte que } \mathrm{D}_\mathrm{Z}(\xi_\alpha f) = (\nabla_\mathrm{Z}\xi_\alpha)f + \xi_\alpha(\mathrm{D}_\mathrm{Z} f).$$

Si u_x se déduit des $(e_\alpha)_x$ par combinaisons linéaires à coefficients constants de produits de certains des $(e_\alpha)_x$ ou plus généralement si $\mathrm{D}_\mathrm{Z}(\rho(u)) = 0$, on a de la même manière :

$$\mathrm{D}_\mathrm{Z}(uf) = (\nabla_\mathrm{Z} u)f + u(\mathrm{D}_\mathrm{Z} f). \tag{7}$$

On observera bien qu'ici f est considéré comme un spineur.

VII. — Influence d'un changement de représentation de l'algèbre de Clifford.

Prenons une autre représentation ρ' telle que

$$\rho' = \theta \circ \rho(w) \circ \theta^{-1} \quad , \quad \theta \in \mathrm{GL}(2^r, \mathrm{C})$$

(θ dépend différentiablement de $x \in \mathrm{V}$), alors on aura des γ'_α tels que :

$$\gamma'_\alpha = \theta \circ \gamma_\alpha \circ \theta^{-1}.$$

X sera remplacé par $\theta \circ X \circ \theta^{-1}$ et le premier membre de (4) par son « conjugué » relativement à θ. On aura donc si D′ est la nouvelle connexion spinorielle

$$D'(\gamma'_\alpha) = 0 \Leftrightarrow D(\gamma_\alpha) = 0.$$

Ainsi tous les résultats que l'on peut déduire de la nullité de la dérivée covariante du « tenseur-spineur fondamental » seront formellement les mêmes.

Il est évident que seuls les résultats qui seront invariants pour un changement de représentation auront une signification intrinsèque, mais on pourra utiliser la représentation particulière ρ pour obtenir des intermédiaires de calcul intéressants. Le 3° du VI en donne des exemples, nous en donnons un autre plus instructif ci-dessous.

VIII. — La forme bilinéaire fondamentale.

Bornons-nous à $n = 2r$ $(r > 1)$, le lecteur pourra étudier lui-même le cas où $n = 2r + 1$.

Considérons l'algèbre de Clifford matricielle engendrée par les γ_α. β est l'anti-automorphisme principal, f est formé à l'aide des $\rho(\eta_\alpha)$, c'est donc ici un « tenseur-spineur ». Après un calcul facile [*4*, a], on montre que si $(u, v) \in (\Lambda F) \times (\Lambda F)$ (F algèbre extérieure engendrée par les $\gamma_\alpha = \rho(\xi_\alpha)$, seuls),

$$\beta(uf)vf = B(u, v)f,$$

où B est une forme bilinéaire sur $\Lambda F \times \Lambda F$. B est la forme bilinéaire fondamentale, on établit [*4*, a] que :

$$B(\rho(\gamma).u, \rho(\gamma).v) = N(\gamma)B(u, v),$$

pour tout élément γ de Γ (ou de G), en particulier B est invariante pour la représentation spinorielle de G_0^+, identique pour $r > 1$ à la composante connexe de Spin Q.

Chevalley établit dans [*4*, a] que B est non dégénérée, et il est immédiat que

$$B(v, u) = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} B(u, v).$$

Nous nous proposons de retrouver par une voie nouvelle la propriété bien connue (dans des cas particuliers) que DB = 0.

LEMME. — $D\beta = 0$.

En effet si w_1, w_2 sont dans E^c_x :

$$\begin{aligned} D(w_1 w_2) &= D\beta(w_1 w_2) = (D\beta)(w_1 w_2) + \beta(D(w_1 w_2)), \text{ d'après (6)}, \\ &= (D\beta)(w_1 w_2) + \beta((Dw_1)w_2 + w_1(Dw_2)) \\ &= (D\beta)(w_1 w_2) + D(w_1 w_2), \end{aligned}$$

ce qui entraîne $D\beta(w_1 w_2) = 0$ et de proche en proche par linéarité $D\beta(w) = 0$, pour tout $w \in C_V(Q)$.

Comme $Df = 0$, il vient puisque D commute avec les contractions :

$$\begin{aligned} D[B(u, v)f] &= (DB)(u, v)f + DB(Du, v)f + DB(u, Dv)f \\ &= D(\beta(uf)vf) = \beta((Du)f)vf + \beta(uf)(Dv)f = B(Du, v)f + B(u, Dv)f \end{aligned}$$

donc $DB = 0$ (qui équivaut d'ailleurs à $Df = 0$ pour une connexion spinorielle D, *a priori* quelconque).

Posant $\bar{\beta} = \beta \circ \alpha$, on peut construire à l'aide de $\bar{\beta}$ une deuxième forme bilinéaire $\bar{B}$, invariante dans les mêmes conditions que B et on établit [*4*, a] que les seuls invariants bilinéaires de la représentation de la composante connexe de Spin Q sont les combinaisons linéaires de B et $\bar{B}$.

On s'assurera aisément que les propriétés sont bien intrinsèques et ne dépendent pas de la représentation ρ choisie.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] ATIYAH, BOTT et SHAPIRO, Clifford modules, *Topology*. Volume **3**. Suppl. 1, 1964, p. 3-38.

[*2*] N. BOURBAKI, a) *Algèbre*. Chapitre 9. Formes sesquilinéaires et quadratiques. Hermann, Paris, 1959.

b) *Algèbre*. Modules et anneaux semi-simples. Hermann, Paris, 1959.

[*3*] E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*. Hermann, Paris, 1938.

[*4*] C. CHEVALLEY, a) *The algebraic theory of spinors*. Columbia University Press, New York, 1954.

b) *Theory of Lie groups*, Princeton, University Press 1946.

[*5*] Y. CHOQUET-BRUHAT. *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Dunod, Paris, 1968.

[*6*] J. DIEUDONNÉ, *La géométrie des groupes classiques*, Springer, Berlin, 1963.

[*6 bis*] KAROUBI, *Annales Scientifiques de l'E. N. S.*, Gauthier-Villars, Paris, 1968, t. **1**.

[*6 ter*] Y. KOSMANN, *C. R. Acad. Sciences Paris*, 1967-1968.

[*7*] A. LICHNEROWICZ, a) *Annales de l'I. H. P.*, 1963.

b) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. **92**, 1964, p. 11 à 100.

c) Cours du Collège de France ronéotypé (non publié).

[*8*] MILNOR, *Spin structures on manifolds*, L'Enseignement mathématique, Genève, 1962.

[*9*] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press.

Manuscrit reçu le 23 avril 1969.