ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ADNAN HAMOUI

Deux nouvelles classes de solutions non-statiques à symétrie sphérique des équations d'Einstein-Maxwell

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, nº 2 (1969), p. 195-227
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_2_195_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. X, n° 2, 1969, p. 195-227. *Physique théorique.*

Deux nouvelles classes de solutions non-statiques à symétrie sphérique des équations d'Einstein-Maxwell

par

Adnan HAMOUI
Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.
Institut Henri Poincaré, Paris.

SUMMARY. — Two classes of exact, nonstatic spherically symmetric solutions of the Einstein-Maxwell equations are obtained, following a method initiated by Tolman, by applying certain auxiliary relations.

The first class corresponds to pure uncharged matter with an electric field. The Tolman nonstatic solution and the Reissner-Nordström solution are shown to be particuliar members of this class.

The second class describes pure charged matter with the proper charge density numerically equal, in the relativistic units, to the proper mass density (homogeneous matter). Two members of this class are given explicitly as examples. This latter class is studied from the kinematical point of vue and it is shown that the general process of contraction to a singularity is of the same type as in the Oppenheimer and Snyder model. It is also shown that only the first class can oscillate, and only under certain well defined conditions. The second class is explicitly matched with the Reissner-Nordström solution. The contribution of the self-energy to the gravitational mass of a ball, composed of the matter described by the second class, is calculated.

1. — INTRODUCTION

Suivant une méthode initialement élaborée par Tolman [*1*], et appliquée en particulier par Wyman [*2*], Vaidya [*3*] et Bonnor [*4*], nous recherchons des solutions à symétrie sphérique exactes et non-statiques des équations d'Einstein-Maxwell pour un schéma matière pure chargée pour lequel une solution générale n'existe pas dans la littérature. Nous nous imposerons le minimum de restrictions simplificatrices possibles permettant des solutions physiquement admissibles.

Principalement, nous imposerons deux restrictions :

La première (§ 5) limite le schéma à celui de matière pure non-chargée-champ électromagnétique.

La seconde (§ 7) conduit à une classe de solutions non-statiques (§ 9) correspondant à un schéma matière pure chargée (schéma homogène) où la densité de matière propre et celle de charge propre sont égales en valeur absolue — en unités relativistes.

L'existence de telles solutions essentiellement non-statiques affaiblit le rôle joué par cette égalité dans l'équilibre d'une sphère chargée — étudiée par Das [5] et Bonnor [6] — en éliminant la possibilité, envisagée par Bonnor, d'arrêter l'effondrement gravitationnel une fois que celui-ci a été déclenché.

Cette recherche est partiellement motivée par l'intérêt actuel que présentent les sources intenses quasi-stellaires et les modèles relativistes correspondant au phénomène de l'effondrement gravitationnel. L'importance des solutions non-statiques dans la compréhension de certains aspects des étapes primaires de l'évolution stellaire a été soulignée par Klein dès 1947 [7].

D'autre part, une solution exacte et physiquement admissible, quoique particulière, aide davantage à une compréhension approfondie des relations entre les champs électromagnétiques et l'espace-temps — c'est-à-dire les champs gravitationnels.

Une telle solution permet de calculer (§ 13) la contribution de la « self-énergie » à la masse gravitationnelle.

Dans la suite nous présenterons à titre d'exemple (§ 8) des solutions appartenant à la classe de solutions du paragraphe 7, et nous raccorderons cette classe complètement à la solution de Reissner-Nordström (§ 11). Une étude cinématique détaillée de cette classe est effectuée au paragraphe 10, où on précise aussi les types de singularités qui se présentent.

Au paragraphe 12, on considère la possibilité d'oscillations d'une sphère dont la solution intérieure est décrite soit par celle du paragraphe 5 soit par celle du paragraphe 7.

2. — FORMULATION DES ÉQUATIONS DU CHAMP (EINSTEIN-MAXWELL)

Dans un système de coordonnées en co-mouvement (r, θ, φ, t) la métrique la plus générale possédant la symétrie sphérique se met sous la forme (voir Appendice I):

$$ds^2 = -e^{\alpha}dr^2 - R^2 d\Sigma^2 + e^{\gamma}dt^2, \quad d\Sigma^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{2.1}$$

α, R et γ étant des fonctions de r et t.

Le vecteur-vitesse matériel unitaire $u^{\lambda}a$ dans ce système comme composantes contravariantes [1]:

$$u^{\lambda} \equiv \delta^{\lambda}_4 e^{-\gamma/2} \tag{2.2}$$

Le tenseur d'impulsion-énergie d'un schéma matière pure-champ électromagnétique s'exprime ainsi

$$T^{\lambda}_{\nu} = \mu u^{\lambda} u_{\nu} + \tau^{\lambda}_{\nu}, \tag{2.3}$$

où μ est la densité de matière propre, et τ^{λ}_{ν} est le tenseur de Maxwell défini, à partir d'un champ électromagnétique $F_{\lambda\nu}$, par la relation bien connue:

$$4\pi\tau^{\lambda}_{\nu} \overset{\text{déf}}{\equiv} \frac{1}{4} F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\delta^{\lambda}_{\nu} - F^{\lambda\sigma}F_{\nu\sigma}. \tag{2.4}$$

Les équations du champ sont constituées d'une part par les équations d'Einstein (en unités relativistes):

$$S^{\lambda}_{\nu} \overset{\text{déf}}{\equiv} R^{\lambda}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\nu}R = -8\pi T^{\lambda}_{\nu}, \tag{2.5}$$

et d'autre part par les équations de Maxwell [2]:

$$F^{\lambda\nu}{}_{;\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{\lambda\nu})_{,\lambda} = -4\pi J^{\nu}, \tag{2.6}$$

et

$$F_{[\lambda\mu,\nu]} = 0, \tag{2.7}$$

où J^{ν} est le vecteur-courant électrique et

$$g = |g_{\mu\nu}| = -R^4 e^{\alpha+\gamma}\sin^2\theta.$$

---

(1) Les indices grecs prennent les valeurs : 1, 2, 3, 4.

(2) Le symbole (;) désigne l'opération de dérivation covariante.

Pour un courant de convection (c'est-à-dire, lorsque la conductivité est infinie), seul cas considéré dans la suite, le vecteur J^ν est défini par l'équation de transfert de Lorentz :

$$J^\nu = \rho u^\nu, \tag{2.8}$$

ρ étant la densité de charge électrique propre.

On suppose qu'il existe dans le domaine envisagé, un potentiel-vecteur global, c'est-à-dire un champ de vecteurs V_λ tel que :

$$F_{\lambda\nu} = \partial_\lambda V_\nu - \partial_\nu V_\lambda \tag{2.9}$$

C'est le cas d'un domaine simplement connexe où les relations (2.7) et (2.9) sont globalement équivalentes [*8*, p. 45].

Si l'on considère le potentiel V_λ à symétrie sphérique, c'est-à-dire tel que :

$$V_1 \equiv V_1(r, t) \quad , \quad V_2 = V_3 = 0 \quad , \quad V_4 \equiv V_4(r, t), \tag{2.10}$$

$F_{\lambda\nu}$ le sera aussi et alors la seule composante de $F_{\lambda\nu}$ non-nulle identiquement est :

$$F_{14} \equiv F_{14}(r, t). \tag{2.11}$$

Notons qu'en général, imposer que $F_{\lambda\nu}$ soit à symétrie sphérique n'entraîne pas que le champ de vecteur V_λ le soit, car ces vecteurs ne sont définis qu'à un gradient additif près, et dans ce cas les composantes non nulles de $F_{\mu\nu}$ sont les suivantes :

$$F_{14} \equiv F_{14}(r, t) \quad , \quad F_{23} = \chi(r, t) \sin\theta ;$$

où $\chi(r, t)$ est une fonction arbitraire de r et t. Les équations (2.7) entraînent que $\chi(r, t)$ est une constante. Si on impose l'uniformité de F_{23} autour de l'origine, cette constante est nécessairement nulle. Du point de vue physique cela revient à affirmer la non-existence de pôles magnétiques isolés.

3. — CONSÉQUENCES DES ÉQUATIONS DU CHAMP

Les équations (2.2) et (2.8) entraînent

$$J^\lambda = \rho e^{-\gamma/2} \delta_4^\lambda. \tag{3.1}$$

Cette relation, compte tenu de l'équation (2.6), donne :

$$(3.2) \qquad F^{\lambda\nu}{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial(\sqrt{-g}F^{\lambda\nu})}{\sqrt{-g}\partial x^\nu} = 4\pi\rho e^{-\gamma/2}\delta_4^\lambda ;$$

pour $\lambda = 1$ on a, après une intégration :

$$(3.3) \qquad F^{14} = A(r)e^{-\frac{\alpha+\gamma}{2}}R^{-2},$$

$A \equiv A(r) \neq 0$ étant une fonction arbitraire de r;
pour $\lambda = 4$, compte tenu de la relation précédente on obtient :

$$(3.4) \qquad 4\pi\rho = -A'e^{-\alpha/2}R^{-2} \quad , \quad \text{où} \quad A' \equiv \frac{dA}{dr}.$$

Les identités de conservation :

$$T^{\lambda\nu}{}_{;\nu} = 0$$

conduisent, compte tenu des équations (1.3) et (2.4), aux relations suivantes :

$$(3.5) \qquad \mu u^\lambda{}_{;\nu}u^\nu = -\rho F^{\lambda\nu}u_\nu,$$

et

$$(3.6) \qquad (\mu u^\lambda)_{;\lambda} = 0.$$

On déduit de l'équation (3.5), pour $\lambda = 1$ et compte tenu de (3.3) (*) :

$$(3.7) \qquad \mu R^2\gamma' = -2\rho A e^{\alpha/2}$$

Par ailleurs l'équation (3.6) donne, après une intégration :

$$(3.8) \qquad 4\pi\mu K = -A'e^{-\alpha/2}R^{-2},$$

$K(r)$ étant une fonction arbitraire de r.
Remarquons que de (3.4) et (3.8) il résulte :

$$(3.9) \qquad \rho/\mu = K(r);$$

et

$$(3.10) \qquad \rho/\mu = -\frac{R^2\gamma'}{2Ae^{\alpha/2}}$$

en raison de la relation (3.7).

(*) $(\ )' \equiv \frac{\partial}{\partial r}(\ )$, $(\dot{\ }) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\ )$.

4. — RECHERCHE DES SOLUTIONS EXACTES

Les relations (2.3), (2.4) et (3.3) permettent d'écrire les composantes de T^{μ}_{ν}, non identiquement nulles, comme suit :

$$(4.1)\qquad \begin{cases} T^1_1 = \tau^1_1 = \dfrac{A^2}{8\pi R^4} = \tau^4_4, \\ T^2_2 = T^3_3 = \tau^2_2 = -\dfrac{A^2}{8\pi R^4}, \\ T^4_4 = \mu + \dfrac{A^2}{8\pi R^4}, \\ T^1_4 = 0 = T^4_1. \end{cases}$$

Maintenant les équations du champ (2.5) s'écrivent explicitement :

$$(4.2)\qquad \left\{\frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{\gamma}\dot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2\right\} e^{-\gamma} - \left\{\frac{\gamma' R'}{R} + \left(\frac{R'}{R}\right)^2\right\} e^{-\alpha} + \frac{1}{R^2} = 8\pi T^1_1 = \frac{A^2}{R^4},$$

$$(4.3)\qquad \left\{\frac{\ddot{\alpha}}{2} + \frac{\dot{\alpha}}{4}(\dot{\alpha} - \dot{\gamma}) + \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}}{2R}(\dot{\alpha} - \dot{\gamma})\right\} e^{-\gamma}$$
$$- \left\{\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'}{4}(\gamma' - \alpha') + \frac{R''}{R} + \frac{R'}{2R}(\gamma' - \alpha')\right\} e^{-\alpha} = 8\pi T^2_2 = -\frac{A^2}{R^4},$$

$$(4.4)\qquad \left\{\frac{\dot{\alpha}\dot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2\right\} e^{-\gamma} - \left\{\frac{2R''}{R} - \frac{\alpha' R'}{R} + \left(\frac{R'}{R}\right)^2\right\} e^{-\alpha} + \frac{1}{R^2}$$
$$= 8\pi T^4_4 = 8\pi\mu + \frac{A^2}{R^4},$$

$$(4.5)\qquad 2e^{-\alpha}\left(\frac{\dot{R}'}{R} - \frac{\gamma'\dot{R} + \dot{\alpha}R'}{2R}\right) = 8\pi T^1_4 = -\,8\pi T^4_1 = 0.$$

L'équation (4.5) s'écrit encore sous la forme suivante :

$$(4.5\,a)\qquad 2\dot{R}' = \gamma'\dot{R} + \dot{\alpha}R'.$$

Elle s'intègre immédiatement dans les deux cas suivants :

$$\gamma' = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{\alpha} = 0.$$

5. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU CHAMP DANS LE CAS OU $\gamma' = 0$, $R' \neq 0$, $\dot{R} \neq 0$

Dans le cas où $\gamma' = 0$, c'est-à-dire $\gamma \equiv \gamma(t)$, on peut effectuer un changement d'échelle du temps tel que (voir Appendice I) :

$$\gamma \equiv 0 \tag{5.1}$$

et ainsi l'équation (4.5 *a*) donne, après une intégration :

$$e^{\alpha} = \frac{R'^2}{f+1}, \tag{5.2}$$

$f \equiv f(r)$ étant une fonction arbitraire de r astreinte seulement à satisfaire l'inégalité : $f \geqslant -1$.

Nous constatons que $\gamma' = 0$ entraîne encore, d'après l'équation (3.7) que

$$\rho = 0 \tag{5.3}$$

et par suite, compte tenu des équations (3.9) et (3.8), on a :

$$A' = 0 \Rightarrow A = \text{const.} \tag{5.4}$$

Il s'agit donc d'un schéma matière pure non chargée-champ électromagnétique.

L'équation (4.2), compte tenu de (5.1) et (5.2), conduit à l'intégrale première (quand $\dot{R} \neq 0$) :

$$\dot{R}^2 = f + \frac{F}{R} - \frac{A^2}{R^2}, \tag{5.5}$$

$F \equiv F(r)$ étant une fonction arbitraire de r.

L'équation (4.4), compte tenu de (5.2) et (5.5), donne :

$$8\pi\mu = \frac{F'}{R^2R'}. \tag{5.6}$$

On remarque que l'équation (4.3) est identiquement satisfaite.

Ainsi une solution des équations d'Einstein-Maxwell sera complètement connue une fois que l'on aura déterminé $R \equiv R(r, t)$ à partir de l'équation :

$$\int \frac{R\,dR}{\sqrt{fR^2 + FR - A^2}} = \pm\,(t - \tau(r)), \tag{5.7}$$

$\tau(r)$ étant une fonction arbitraire de r.

Cette relation représente la solution générale de l'équation aux dérivées partielles (5.5).

Notons finalement deux cas particuliers intéressants :

1) Le cas $A = 0$ mène à la solution de Tolman [*9*] qui décrit un schéma matière pure à symétrie sphérique.

Cette solution s'écrit explicitement sous la forme [*10*, p. 387] :

$$\begin{cases} \pm (t - \tau(r)) = \dfrac{1}{f}\sqrt{f\mathrm{R}^2 + \mathrm{FR}} - \dfrac{\mathrm{F}}{f^{3/2}} \operatorname{Arsh} \sqrt{\dfrac{f\mathrm{R}}{\mathrm{F}}}, & f > 0, \\ \pm (t - \tau(r)) = \dfrac{1}{f}\sqrt{f\mathrm{R}^2 + \mathrm{FR}} + \dfrac{\mathrm{F}}{(-f)^{3/2}} \arcsin \sqrt{\dfrac{-f\mathrm{R}}{\mathrm{F}}}, & f < 0, \\ \mathrm{R} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2/3} \mathrm{F}^{1/3}(t - \tau(r))^{2/3}, & f = 0. \end{cases}$$

2) Le cas $\mathrm{F}' = 0$ donne, d'après (5.6) :

$$\mu = 0.$$

Il s'agit alors de la solution de Reissner-Nordström dans des coordonnées en chute libre dont la forme, dans des « curvature coordinates » $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{t})$ [*11*, p. 270] est [*12*, p. 185] :

$$ds^2 = -g^{-1}d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\Sigma^2 + g d\bar{t}^2, \tag{5.8}$$

où

$$g \equiv 1 - \frac{\mathrm{F}}{\bar{r}} + \frac{\mathrm{A}^2}{\bar{r}^2}.$$

6. — ÉTUDE DES CAS OÙ $\dot{\alpha} = 0$ ET $\mathrm{R}' = 0$ OU $\dot{\mathrm{R}} = 0$

On distingue les trois cas suivants :

1) $\mathrm{R} = \text{const.} \neq 0$; 2) $\mathrm{R}' = 0$, $\dot{\mathrm{R}} \neq 0$; 3) $\mathrm{R}' \neq 0$, $\dot{\mathrm{R}} = 0$.

Ici nous traiterons brièvement ces trois cas et dans les sections suivantes nous insisterons davantage sur le cas où $\dot{\alpha} = 0$, $\mathrm{R}' \neq 0$ et $\dot{\mathrm{R}} \neq 0$, cas qui fait l'objet principal de ce travail :

1) *Le cas où* $\dot{\alpha} = 0$ *et* $\mathrm{R} = \text{const.} \neq 0$:

Les équations (4.2) et (4.4) se réduisent respectivement aux relations suivantes :

$$\frac{1}{\mathrm{R}^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{R}^4}, \quad \frac{1}{\mathrm{R}^2} = 8\pi\mu + \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{R}^4}.$$

Il en résulte :

$$\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad A^2 = R^2 = \text{const.} \neq 0.$$

Par conséquent les équations (3.3) et (3.4) conduisent respectivement à :

$$F^{14} = \frac{e^{-\frac{\alpha+\gamma}{2}}}{A} \neq 0 \quad , \quad \rho = 0.$$

Maintenant, par un changement de l'échelle de r, on peut écrire : $\alpha = 0$; et l'équation du champ (4.3) se réduit alors à :

$$2\gamma'' + \gamma'^2 = \frac{4}{A^2},$$

équation qui sert à déterminer $\gamma \equiv \gamma(r, t)$.

Ainsi, il existe une solution dépendant du temps qui décrit un champ électromagnétique pur.

On note, cependant, que cette solution est distincte de celle de Reissner-Nordström.

Toutefois, l'aire d'une sphère de rayon-coordonnée $r = r_0 = \text{const.}$ calculée à partir de la métrique :

$$ds^2 = -\,dr^2 - A^2 d\Sigma^2 + e^\gamma dt^2,$$

est : $4\pi A^2$, quantité indépendante de r_0 ; et la métrique n'a pas évidemment un comportement asymptotique euclidien. On peut donc conclure que la solution envisagée ne saurait avoir de signification physique ([3]).

2) *Le cas où* $\dot{\alpha} = 0$, $R' = 0$ *et* $\dot{R} \neq 0$.

L'équation (4.5) donne : $\gamma' = 0$.

Par un changement de l'échelle de r et de celle de t, compte tenu du fait que $\alpha \equiv \alpha(r)$ et $\gamma \equiv \gamma(t)$, on peut écrire :

$$\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma = 0.$$

La métrique (2.1) se met donc sous la forme suivante :

$$ds^2 = -\,dr^2 - R^2(t) d\Sigma^2 + dt^2. \tag{6.1}$$

([3]) Cette situation est analogue à celle rencontrée par Bonnor [*13*], au cours de sa démonstration de la validité générale du théorème de Birkhoff pour un champ gravitationnel pur avec une constante cosmologique positive.

Maintenant les équations du champ (4.2) et (4.3) se réduisent respectivement aux formes suivantes :

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{A^2}{R^4}, \tag{6.2}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{A^2}{R^4}. \tag{6.3}$$

Or, R est une fonction de t seulement, tandis que A est une fonction de r.

Donc, compte tenu de l'une ou de l'autre des deux équations précédentes, A est nécessairement une constante (non-nulle sinon $\dot{R}^2 = -1$).

L'équation (6.3) donne, après une intégration :

$$\dot{R}^2 = A^2/R^2 + B \tag{6.4}$$

B étant une constante d'intégration.

En éliminant $\dot{R}^2$ et $\ddot{R}$ de l'équation (6.2) à l'aide de (6.3) et (6.4) on trouve :

$$R = \frac{2A^2}{1+B} \quad (1 + B \neq 0 \quad \text{sinon} \quad A = 0).$$

Les quantités A et B étant constantes, R l'est nécessairement et par conséquent l'hypothèse $\dot{R} \neq 0$ n'est pas satisfaite, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune solution satisfaisant les relations : $\dot{\alpha} = 0$, $R' = 0$ et $\dot{R} \neq 0$.

3) *Le cas où* $\dot{\alpha} = 0$, $R' \neq 0$ *et* $\dot{R} = 0$:

L'équation (4.2) entraîne que γ' soit une fonction de r seulement, et par un changement de l'échelle du temps t on peut écrire :

$$\gamma \equiv \gamma(r).$$

Il en résulte que la métrique est statique.

Des solutions de ce type avec $\rho/\mu = \pm 1$ ont été étudiées par Papapetrou [*14*], Majumdar [*15*], Das [*5*] et Bonnor [*4*].

7. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU CHAMP DANS LE CAS OU $\dot{\alpha} = 0$, $R' \neq 0$, $\dot{R} \neq 0$, $\gamma' \neq 0$

Puisque $\alpha \equiv \alpha(r)$, on peut donc effectuer un changement de l'échelle de r, et ceci sans restreindre encore la généralité du problème (voir Appendice I), tel que :

$$\alpha = 0 \tag{7.1}$$

L'équation (4.5 a) donne, après une intégration :

$$e^{\gamma} = \frac{\dot{R}^2}{\varphi - 1}, \tag{7.2}$$

$\varphi \equiv \varphi(t)$ étant une fonction de t, astreinte seulement à satisfaire l'inégalité :

$$\varphi(t) > 1. \tag{7.3}$$

En introduisant (7.1) et (7.2) dans l'équation (4.2), on obtient, après une intégration :

$$R'^2 = \varphi - \frac{\Phi}{R} + \frac{A^2}{R^2}, \tag{7.4}$$

$\Phi \equiv \Phi(r)$ étant une fonction arbitraire de r.

D'autre part l'équation (4.3) donne, en tenant compte de (7.1) et de (7.2) :

$$\frac{A^2}{R^4} = -\frac{\dot{\varphi}}{2R\dot{R}} + \frac{\dot{R}''}{\dot{R}} + \frac{R''}{R} + \frac{R'\dot{R}'}{R\dot{R}}.$$

Cette relation s'écrit, compte tenu de (7.4), sous la forme :

$$\left(-\frac{A^2}{2R^2}\right)^{\cdot} = -\frac{\dot{\varphi}}{2} + (RR'')^{\cdot} + \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\Phi}{2R} + \frac{A^2}{2R^2}\right)^{\cdot}$$

d'où, en intégrant on obtient :

$$RR'' = \frac{\Phi}{2R} - \frac{A^2}{R^2} + B,$$

$B = B(r)$ étant une fonction arbitraire de r.

Or, après une dérivation de (7.4) par rapport à r, on a :

$$2R'R'' = \left(-\frac{\Phi}{R} + \frac{A^2}{R^2}\right)'.$$

Par conséquent, de ces deux dernières équations il résulte la relation suivante :

$$2BRR' = -\Phi'R + 2AA'. \tag{7.5}$$

Nos hypothèses de départ imposent que $B \neq 0$. En effet, $B = 0$ mène, d'après (7.5) :

— soit à $A' = 0$ d'où, compte tenu de (3.4) et de (3.7), $\rho = 0$ et $\gamma' = 0$;
— soit à $R = 2AA'/\Phi' =$ fonction de r seulement, c'est-à-dire $\dot{R} = 0$.

Ces deux cas ont déjà été considérés aux paragraphes 5 et 6 respectivement.

En éliminant R' entre le système de deux équations aux dérivées partielles (7.4) et (7.5), on trouve :

$$(7.6) \quad (\Phi'^2 - 4\varphi B^2)R^2 - 4(AA'\Phi' - B^2\Phi)R + 4A^2(A'^2 - B^2) = 0.$$

Cette conséquence algébrique du système [*16*, p. 6] conduit à distinguer deux cas suivant qu'elle est ou non identiquement satisfaite (cela par rapport à R).

1° Le cas où (7.6) n'est pas identiquement satisfaite conduit à une solution indépendante de t, c'est-à-dire à $\dot{R} = 0$, ce qui est exclu dans cette section.

En effet : soit que $\Phi' - 4\varphi B^2 = 0$, l'équation (7.6) donne $R =$ fonction de r seulement, c'est-à-dire $\dot{R} = 0$;

soit que $\Phi' - 4\varphi B^2 \neq 0$ alors (7.6) donne :

$$(7.7) \quad R = \frac{2(AA'\Phi' - B^2\Phi) \mp \sqrt{\Delta}}{\Phi'^2 - 4\varphi B^2}$$

où

$$\Delta = 4B^2[4A^2(A'^2 - B^2)\varphi + (B^2\Phi^2 + A^2\Phi'^2 - 2AA'\Phi\Phi')].$$

Lorsque la solution (7.7) existe ($\Delta \geqslant 0$) on peut l'utiliser pour éliminer R et R' de (7.4) ou de (7.5) ; on obtient ainsi une relation entre les fonctions arbitraires A, B, Φ, leurs dérivées et φ. Cette relation est une condition nécessaire pour que (7.7) soit solution du système (7.4) et (7.5) ; elle se présente sous la forme d'une équation du septième degré en $\varphi(t)$.

Or, étant donné que φ est une fonction de t, tandis que les coefficients de cette équation sont fonction de r seulement, ceci implique que : soit φ est une constante, soit ces coefficients sont tous identiquement nuls.

Dans le premier cas ($\varphi =$ const.) l'équation (7.7) donne directement $\dot{R} = 0$.

Dans le deuxième cas ($\varphi \neq$ const.) on peut montrer, par des considérations limitées aux coefficients de φ^6 et φ^7 (et en excluant le cas $A' = 0$ qui mène à $\gamma' = 0$), que l'on a nécessairement $\dot{R} = 0$.

2° Dans le cas où (7.6) est identiquement satisfaite on a les trois équations suivantes :

$$(7.8) \quad \Phi'^2 - 4\varphi B^2 = 0, \qquad AA'\Phi' - B^2\Phi = 0 \qquad \text{et} \qquad A^2(A'^2 - B^2) = 0.$$

La première entraîne que $\varphi(t) = \dfrac{\Phi'^2}{4B^2}$ est une constante que l'on écrira sous la forme $C^2 + 1$ pour satisfaire simplement la condition (7.3). Ainsi on a :

$$\varphi(t) = C^2 + 1, \tag{7.9}$$

et

$$\Phi'^2 = 4(C^2 + 1)B^2. \tag{7.10}$$

Maintenant la troisième équation (7.8) donne :

$$B = \varepsilon_1 A' \quad , \quad \varepsilon_1 = \pm 1. \tag{7.11}$$

Cette relation et (7.10) entraînent après une intégration :

$$\Phi = 2\varepsilon_2(C^2 + 1)^{1/2}A + d \quad , \quad \varepsilon_2 = \pm 1,$$

d est une constante d'intégration qui doit être nulle pour que la deuxième équation (7.8) soit satisfaite. On a donc :

$$\Phi = 2\varepsilon_2(C^2 + 1)^{1/2}A. \tag{7.12}$$

Finalement il reste : une fonction arbitraire $A(r)$ et une constante quelconque C. La métrique prend alors la forme suivante :

$$ds^2 = - dr^2 - R^2 d\Sigma^2 + \frac{\dot{R}^2}{C^2} dt^2, \tag{7.13}$$

où $R \equiv R(r, t)$ est une solution de

$$RR' = - \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{C^2 + 1}R + \varepsilon_1 A, \tag{7.14}$$

relation déduite de (7.5) en tenant compte de (7.11) et (7.12).

Par ailleurs, compte tenu de (3.4) et (3.3), on a :

$$4\pi\rho = - A'R^{-2} \quad , \quad F^{14} = \frac{CA}{R^2\dot{R}}; \tag{7.15}$$

et de (3.7) et (7.15) :

$$4\pi\mu = - \varepsilon_1 A'R^{-2}, \tag{7.16}$$

ce qui impose que :

$$\varepsilon_1 A' < 0, \tag{7.17}$$

μ étant nécessairement positive.

Ainsi, en tenant compte de (7.15) et (7.16), on a :

$$\rho/\mu = \varepsilon_1 \tag{7.18}$$

Il apparaît donc que les restrictions mathématiques imposées dans cette section, à savoir, $\dot{\alpha} = 0$, $R' \neq 0$, $\dot{R} \neq 0$ et $\gamma' \neq 0$, mènent à une classe de solutions correspondant à un schéma matière pure chargée d'une manière homogène [*8*, p. 101).

Tout élément de cette classe correspond à une solution particulière de l'équation (7.14).

La solution générale de (7.14) se met sous la forme :

$$\chi(R, r) = \tau(t), \tag{7.19}$$

où $\tau(t)$ est une fonction arbitraire de t, et $\chi(R, r)$ est la solution générale de l'équation différentielle :

$$R\frac{dR}{dr} + \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{C^2 + 1}R - \varepsilon_1 A = 0. \tag{7.20}$$

C'est une forme particulière de l'équation d'Abel [*17*, p. 26] [*18*, p. 236], dont une solution finie est possible lorsque $A \equiv A(r)$ a des formes spéciales. La réduction de (7.20) à la forme canonique de l'équation d'Abel de première espèce s'effectue facilement (voir Appendice II).

8. — EXEMPLES : DEUX SOLUTIONS PARTICULIÈRES APPARTENANT A CELLES DE LA CLASSE DU § 7

Deux solutions particulières de l'équation (7.14) et les solutions des équations du champ qui leur correspondent vont être présentées à titre d'exemple :

1° Si l'on pose :

$$A = -r \quad , \quad \varepsilon_1 = +1 \quad , \quad \varepsilon_2 = +1 \quad \text{et} \quad C = \sqrt{3},$$

l'inégalité (7.17) est satisfaite ; l'équation (7.20) s'écrit alors :

$$RdR + (2R + r)dr = 0,$$

et a pour intégrale :

$$\chi(r, R) \equiv (r + R)e^{r/r+R} = \text{const.}$$

L'équation (7.14) a donc pour solution :

$$\tau(t) = (r + R)e^{r/(r+R)},$$

$\tau(t)$ étant une fonction arbitraire de t.

Ainsi la métrique (7.13) se met sous la forme :

$$ds^2 = - dr^2 - R^2 d\Sigma^2 + \frac{(r + R)^2}{3R^2} e^{-\frac{2r}{r+R}} \dot{\tau}^2 dt^2,$$

où $\dot{\tau}$ est supposé non nul dans le domaine considéré afin que la métrique n'y soit pas singulière.

Par un changement de l'échelle du temps :

$$T = \frac{\tau(t)}{\sqrt{3}}$$

on obtient :

$$ds^2 = - dr^2 - R^2 d\Sigma^2 + \frac{(r + R)^2}{R^2} e^{-\frac{2r}{r+R}} dT^2$$

où R est donné implicitement par la relation :

$$\sqrt{3}T = (r + R)e^{r/(r+R)}.$$

Finalement (7.15) et (7.16) donnent dans ce cas :

$$4\pi\rho = 1/R^2 = 4\pi\mu.$$

2° Si l'on pose :

$$A = \frac{1}{2a(r + b)},$$

où a et b sont deux constantes, alors pour satisfaire l'inégalité (7.17) on pose aussi $\varepsilon_1 = +1$ et $a > 0$.

Il en résulte que l'équation (7.20) s'écrit sous la forme suivante :

$$R\frac{dR}{dr} + cR - \frac{1}{2a(r + b)} = 0, \qquad \text{avec} \qquad c = \varepsilon_2\sqrt{C^2 + 1},$$

et a pour intégrale :

$$\chi(r, R) \equiv \frac{e^{a[R + c(r+b)]^2}}{2(r + b)} - c\sqrt{a}\ \text{erg}\ \sqrt{a}[R + c(r + b)] = \text{const.},$$

où erg... est l'intégrale de Dawson définie par [*19*] :

$$\text{erg}\ \xi \overset{\text{déf}}{\equiv} \int e^{\xi^2} d\xi = \xi + \frac{\xi^3}{1!3} + \frac{\xi^5}{2!5} + \ldots + \frac{\xi^{2n-1}}{n!(2n - 1)} + \ldots$$

L'équation (7.14) a donc pour solution :

$$\tau(t) = \frac{e^{a[\mathrm{R}+c(r+b)]^2}}{2(r+b)} - c\sqrt{a}\ \mathrm{erg}\ \sqrt{a}[\mathrm{R} + c(r+b)]$$

$\tau(t)$ étant une fonction arbitraire de t.

Il en résulte que la métrique (7.13) se met sous la forme :

$$ds^2 = -\,dr^2 - \mathrm{R}^2 d\Sigma^2 + \frac{(r+b)^2}{a^2\mathrm{R}^2}\, e^{-2a[\mathrm{R}+c(r+b)]^2}\, \frac{\dot{\tau}^2}{\mathrm{C}^2}\, dt^2,$$

où $\dot{\tau}$ est supposé non nul dans le domaine considéré afin que la métrique n'y soit pas singulière.

Par un changement de l'échelle du temps :

$$\mathrm{T} = \frac{\tau(t)}{\mathrm{C}}$$

on obtient :

$$ds^2 = -\,dr^2 - \mathrm{R}^2 d\Sigma^2 + \frac{(r+b)^2}{a^2\mathrm{R}^2}\, e^{-2a[\mathrm{R}+c(r+b)]^2} d\mathrm{T}^2,$$

où R est donné implicitement par la relation :

$$\mathrm{CT} = \frac{e^{a[\mathrm{R}+c(r+b)]^2}}{2(r+b)} - c\sqrt{a}\ \mathrm{erg}\ \sqrt{a}[\mathrm{R} + c(r+b)],$$

avec

$$c = \varepsilon_2\sqrt{\mathrm{C}^2 + 1}.$$

Finalement (7.15) et (7.16) donnent dans ce cas :

$$4\pi\rho = \frac{1}{2a(r+b)^2\mathrm{R}^2} = 4\pi\mu.$$

9. — LE CARACTÈRE ESSENTIELLEMENT NON-STATIQUE DE LA CLASSE DES SOLUTIONS (7.13)

Nous allons montrer que les solutions (7.13) sont non-statiques dans le sens qu'elles n'admettent aucun groupe de mouvement le long des lignes d'univers orientées dans le temps.

En effet, si une métrique de la forme (2.1), avec $\mathrm{R}(r, t) \neq$ const., est statique, alors elle doit nécessairement satisfaire les relations suivantes [20]:

$$e^{\gamma} S_1^4 = \frac{2R'\dot{R}}{R} \frac{d\Psi}{dR}, \tag{9.1}$$

$$e^{\alpha+\gamma}(S_1^1 - S_4^4) = \frac{2}{R}[e^{\gamma}R'^2 + e^{\alpha}\dot{R}^2] \frac{d\Psi}{dR}; \tag{9.2}$$

où ψ est une fonction arbitraire de R ou une constante, et où S_μ^ν est le tenseur d'Einstein (2.5).

Par conséquent, si la métrique (7.13) est statique, on doit avoir, compte tenu de (9.1):

$$\frac{d\psi}{dR} = 0, \qquad \text{car} \qquad S_1^4 = 0 \qquad \text{et} \qquad R' \neq 0 \neq \dot{R};$$

et en raison de cette relation, (9.2) conduit à:

$$S_1^1 - S_4^4 = 0.$$

Or, compte tenu de (2.5), (3.1) et (7.16) on obtient:

$$S_1^1 - S_4^4 = -8\pi(T_1^1 - T_4^4) = 8\pi\mu = -\varepsilon_1 A'/R^2$$

Ainsi pour que la métrique (7.13) soit statique, il faut donc avoir $A' = 0$, ce qui mène d'après (3.4) et (3.7) à $\gamma' = 0$. Ceci étant exclu dans l'obtention de la métrique (7.13), celle-ci est donc essentiellement non-statique.

10. — ÉTUDE CINÉMATIQUE. TYPES DE SINGULARITÉS

Le comportement cinématique de la congruence des lignes de courant dont u^α est le 4-vecteur vitesse unitaire, peut être décrit localement à l'aide [21]:

— du tenseur de rotation:

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv u_{[\mu;\nu]} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu,$$

ou du vecteur vitesse angulaire:

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta u_{\gamma;\delta},$$

— du scalaire de dilatation $\Theta \equiv u^\lambda{}_{;\lambda}$,

— et du tenseur de distorsion

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv u_{(\mu;\nu)} h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\beta} - \frac{\Theta}{3} h_{\alpha\beta},$$

$h_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$ étant l'opérateur de projection sur l'hyperplan orthogonal à u_α, et $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ étant le tenseur élément de volume du ds^2.

Avec ces définitions, on a d'une part :

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\Theta}{3} h_{\alpha\beta} - u_{\alpha;\lambda} u^\lambda u_\beta.$$

En outre on a la relation bien connue

$$2u_{\lambda;[\alpha\beta]} \equiv u_{\lambda;\alpha\beta} - u_{\lambda;\beta\alpha} = \mathrm{R}^{\nu}_{\lambda\alpha\beta} u_\nu,$$

$\mathrm{R}^{\nu}_{\lambda\alpha\beta}$ étant le tenseur de Rieman-Christoffel de l'espace-temps V^4 et l'on a d'autre part :

$$- \mathrm{R}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 2(\omega^2 - \sigma^2) + \frac{\Theta^2}{3} + \Theta_{,\lambda} u^\lambda + (u^\lambda{}_{;\nu} u^\nu)_{;\lambda},$$

où

$$\omega^2 \equiv \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \qquad \text{et} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}$$

En introduisant les vecteurs locaux champ électrique $\vec{\mathrm{E}}(\vec{u})$ et champ magnétique $\vec{\mathrm{H}}(\vec{u})$, définis par les relations :

$$\mathrm{E}_\alpha \equiv \mathrm{F}_{\alpha\beta} u^\beta \quad , \quad \mathrm{H}_\alpha = + \overset{*}{\mathrm{F}}_{\alpha\beta} u^\beta \equiv \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\beta \mathrm{F}^{\gamma\delta} ;$$

et en tenant compte de (2.5), on obtient [*22*] :

$$(10.1) \quad \Theta_{,\alpha} u^\alpha + \frac{\Theta^2}{3} = - 2(\sigma^2 - \omega^2) - \mathrm{H}^2 - (4\pi\mu + \mathrm{E}^2)(1 - \mathrm{K}^2) - \mathrm{K}_{,i} \mathrm{E}^i + 2\mathrm{K}\mathrm{H}^i \omega_i,$$

avec

$$\mathrm{K} \equiv \frac{\rho}{\mu}, \qquad \mathrm{E}^2 \equiv \mathrm{E}^\alpha \mathrm{E}_\alpha \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}^2 \equiv \mathrm{H}^\alpha \mathrm{H}_\alpha.$$

Maintenant la symétrie sphérique impose que $\omega_\alpha = 0$, et en tenant compte de (2.2) et (2.11), on a $\mathrm{H}_\alpha = 0$.

Alors dans le cas particulier où $\mathrm{K} = \pm 1$ (c'est le cas de la classe des solutions de § 7) l'équation (7.1) prend la forme :

$$(10.2) \qquad \Theta_{,\alpha} u^\alpha + \frac{\Theta^2}{3} = - 2\sigma^2$$

Par conséquent, lorsque $\Theta \not\equiv 0$, on a :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Theta}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2\sigma^2}{\Theta^2} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Nous allons voir que $\Theta \to \pm \infty$ le long des lignes de courant du schéma considéré dans un temps propre fini.

En effet, si à un instant donné $\Theta > 0$ alors $\frac{1}{\Theta}$ décroît avec s (le temps propre) et puisque sa dérivée est toujours non-nulle, alors $\frac{1}{\Theta} \to 0$ (c'est-à-dire $\Theta \to +\infty$) dans un temps propre fini.

Si à l'instant initial $\Theta < 0$ on obtient la même chose pour s croissant. $\Theta(P)$ la dilatation au point P de la congruence des lignes de courant décrit le changement relatif du volume défini par ces lignes au voisinage de P [*23*, p. 195]. Alors $\Theta(P)$ devient infini lorsque les particules se croisent au point P.

Or ces lignes sont prises comme lignes-coordonnées temporelles pour la métrique (2.1).

Il en résulte que l'obtention d'une valeur infinie de $\Theta(P)$ dans un temps propre fini est nécessairement une indication de l'existence d'une singularité dans cette métrique au point P.

Dans le cas d'un schéma à symétrie sphérique on peut déterminer directement s'il s'agit d'une singularité physique au sens de Papapetrou et Hamoui [*24*] : c'est lorsque le croisement des lignes de courant s'effectue au centre de symétrie ($R = 0$).

Par contre dans le cas où le croisement s'effectue sur une certaine hypersurface — l'analogue de la surface caustique en optique géométrique — nécessairement orientée dans le temps, il s'agit alors d'une singularité fictive (éliminable par une transformation de coordonnées).

En effet, pour la métrique (2.1) la dilatation de la congruence des lignes de courant s'écrit :

$$\Theta \equiv u^{\alpha}{}_{;\alpha} = e^{-\gamma/2}\left(\frac{\dot{\alpha}}{2} + \frac{2\dot{R}}{R}\right). \tag{10.3}$$

Pour les solutions considérées dans les paragraphes 5 et 7, les dilatations (10.3) correspondantes se mettent respectivement sous les formes suivantes :

$$\Theta = \frac{\dot{R}'}{R'} + \frac{2\dot{R}}{R}, \tag{10.3 a}$$

$$\Theta = \frac{2C}{R}. \tag{10.3 b}$$

Le premier Θ devient infini lorsque, par exemple :

$$\mathrm{R}' \to 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{R} \text{ et } \dot{\mathrm{R}}' \not\to 0,$$

ou

$$\mathrm{R} \to 0 \quad \text{avec} \quad \dot{\mathrm{R}} \not\to 0.$$

Dans le premier cas ($\mathrm{R}' \to 0$), les solutions correspondantes présentent une singularité fictive.

L'élimination d'une telle singularité de la solution de Tolman (voir § 5) a été effectuée dans un travail récent par Papapetrou et Hamoui [*24*].

Dans le second cas ($\mathrm{R} \to 0$), il s'agit d'une singularité physique du type de celle d'Oppenheimer et Snyder (effondrement à un volume nul dans un temps propre fini) [*25*].

On voit, compte tenu de (10.3*b*), que les solutions du paragraphe 7 présentent uniquement une singularité de ce dernier type.

11. — RACCORDEMENT. SOLUTIONS COMPLÈTES (INTÉRIEURES ET EXTÉRIEURES)

Soit $r = r_0$ le rayon coordonné d'une sphère constituée d'un nuage de charges ponctuelles dont la solution intérieure est celle décrite au paragraphe 7. Si cette sphère est placée dans le vide, la solution extérieure est nécessairement celle de Reissner-Nordström [*26*], qui s'écrit dans des « curvature coordinates » ($\bar{r}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{t}$) sous la forme :

$$ds^2_{\text{ext}} = -g^{-1}d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\Sigma}^2 + g d\bar{t}^2, \tag{11.1}$$

avec

$$g \equiv 1 - \frac{2m}{\bar{r}} + \frac{e^2}{\bar{r}^2},$$

où m et e sont respectivement la masse gravitationnelle et la charge de la sphère.

Nous allons démontrer directement que la métrique (7.13) se raccorde — au sens de Lichnerowicz [*8*, p. 5] [*27*] — avec (11.1) sur $r = r_0$ avec m et e convenablement choisis.

Effectuons une transformation de la forme :

$$\bar{r} = h(r, t) \quad , \quad \bar{\theta} = \theta \quad , \quad \bar{\varphi} = \varphi \quad , \quad \bar{t} = k(r, t) \tag{11.2}$$

telle que :

$$\frac{\partial(\bar{r}, \bar{t})}{\partial(r, t)} \equiv h'\dot{k} - k'\dot{h} \neq 0.$$

Dans le système de coordonnées (r, θ, φ, t) le ds^2 (11.1) s'écrit :

$$(11.3) \quad ds^2 = -(g^{-1}h'^2 - gk'^2)dr^2 - h^2 d\Sigma^2 - 2(g^{-1}h'\dot{h} - gk'\dot{k})drdt + (-g^{-1}\dot{h}^2 + g\dot{k}^2)dt^2.$$

Il nous faut donc déterminer h et k tels que les tenseurs métriques de (7.13) et de (11.3), ainsi que leurs dérivées premières, soient identiques pour $r = r_0$.

La continuité des potentiels $g_{\alpha\beta}$, à la traversée de l'hypersurface $r = r_0$ sera assurée, si les équations suivantes sont satisfaites (pour $r = r_0$) :

$$(11.4\,a) \qquad g^{-1}h'^2 - gk'^2 = 1,$$

$$(11.4\,b) \qquad h^2(r_0, t) = R^2(r_0, t),$$

$$(11.4\,c) \qquad g^{-1}h'\dot{h} - gk'\dot{k} = 0,$$

$$(11.4\,d) \qquad -g^{-1}\dot{h}^2 + g\dot{k}^2 = \frac{\dot{R}^2}{C^2}.$$

Ceci entraîne évidemment la continuité, à travers l'hypersurface $r = r_0$, des dérivées de $g_{\alpha\beta}$ par rapport à t. Ainsi, pour assurer la continuité des dérivées premières de $g_{\alpha\beta}$, on a seulement quatre autres équations à satisfaire (pour $r = r_0$) :

$$(11.5\,a) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(g^{-1}h'^2 - gk'^2) = 0,$$

$$(11.5\,b) \qquad h(r_0, t)h'(r_0, t) = R(r_0, t)R'(r_0, t),$$

$$(11.5\,c) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(g^{-1}h'\dot{h} - gk'\dot{k}) = 0,$$

$$(11.5\,d) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(-g^{-1}\dot{h}^2 + g\dot{k}^2) = \frac{2\dot{R}\dot{R}'}{C^2}.$$

D'après (11.4 *b*) et (11.5 *b*), il vient :

$$(11.6\,a) \qquad h(r_0, t) = R(r_0, t) \Rightarrow \dot{h}(r_0, t) = \dot{R}(r_0, t),$$

$$(11.6\,b) \qquad h'(r_0, t) = R'(r_0, t) \Rightarrow \dot{h}'(r_0, t) = \dot{R}'(r_0, t).$$

En substituant dans (11.4 *a*) et (11.4 *c*) à h' et $\dot{h}$ leurs valeurs issues de (11.6), nous obtenons :

$$(11.7\,a) \qquad k'(r_0, t) = \pm g^{-1}(R'^2 - g)^{1/2},$$

$$(11.7\,b) \qquad \dot{k}(r_0, t) = \pm g^{-1}R'\dot{R}(R'^2 - g)^{-1/2}.$$

Alors (11.4 *d*) donne, compte tenu de (11.6) et de (11.7 *b*):

$$(11.8) \qquad R'^2 = C^2 + g \qquad \text{pour} \qquad r = r_0.$$

En conséquence les relations (11.7) s'écrivent :

$$(11.9\,a) \quad k'(r_0, t) = \pm \frac{C}{g} \Rightarrow \dot{k}(r_0, t) = \mp \frac{C\dot{g}}{g^2} = \dot{k}'(r_0, t),$$

$$(11.9\,b) \quad \dot{k}(r_0, t) = \pm \frac{R'\dot{R}}{Cg}.$$

Or l'équation (7.4), compte tenu de (7.9) et (7.12) s'écrit :

$$(11.10) \qquad R'^2 = C^2 + 1 - 2\varepsilon_2(C^2+1)^{1/2}\frac{A}{R} + \frac{A^2}{R^2},$$

pour r et t quelconques.

Ainsi, en identifiant (11.8) avec (11.10), équations considérées sur l'hypersurface $r = r_0$, on obtient :

$$(11.11\,a) \qquad m = \varepsilon_2\sqrt{C^2+1}A(r_0),$$

avec

$$\varepsilon_2 A(r_0) > 0,$$

et

$$(11.11\,b) \qquad e^2 = A^2(r_0).$$

Les équations (11.5 *a*), (11.5 *c*) et (11.5 *d*) s'écrivent respectivement sous les formes :

$$2g^{-1}R'h'' - 2gk'k'' - g'k'^2 - g^{-2}g'R'^2 = 0,$$

$$g^{-1}\dot{R}h'' - g\dot{k}k'' - gk'\dot{k}' + g^{-1}R'\dot{R}' - g^{-2}g'R'\dot{R} - g'k'\dot{k} = 0,$$

$$-2g^{-1}\dot{R}\ddot{R} + g^{-2}g'\dot{R}^2 + 2g\dot{k}\ddot{k}' + g'\dot{k}^2 = \frac{2R'\dot{R}'}{C^2},$$

compte tenu de (11.6).

En éliminant de ces équations : k', $\dot{k}$ et $\dot{k}'$ à l'aide de (11.4), on constate que la troisième est identiquement satisfaite (pour tout t) et que les deux autres se mettent respectivement, pour $r = r_0$, sous les formes suivantes :

$$h'' - \frac{Cg}{R'}k'' = \frac{g'}{R'}\left(\frac{C^2}{g} + \frac{1}{2}\right),$$

$$h'' - \frac{gR'}{C}k'' = \frac{g'}{R'}\left(\frac{C^2}{g} + \frac{3}{2}\right).$$

Il vient alors :

$$h''(r_0, t) = \left(\frac{g'}{2R'}\right)_{r=r_0}, \tag{11.12}$$

$$k''(r_0, t) = -\left(\frac{Cg'}{g^2}\right)_{r=r_0}. \tag{11.13}$$

La transformation (11.2) a la forme suivante :

$$\bar{r} = h(r, t) = h(r_0, t) + h'(r_0, t)[r - r_0] + \frac{h''(r_0, t)}{2}[r - r_0]^2 + \Phi(r, t)[r - r_0]^3,$$

$$\bar{t} = k(r, t) = k(r_0, t) + k'(r_0, t)[r - r_0] + \frac{k''(r_0, t)}{2}[r - r_0]^2 + \Psi(r, t)[r - r_0]^3,$$

$\Phi(r, t)$ et $\Psi(r, t)$ étant deux fonctions arbitraires de r et t seulement supposées être suffisamment régulières au voisinage de l'hypersurface $r = r_0$.

Les calculs précédents nous fournissent les éléments nécessaires à l'écriture explicite de la transformation précitée, on a donc :

$$\left\{\begin{aligned} \bar{r} &= h(r, t) = R(r_0, t) + R'(r_0, t)[r - r_0] + \left(\frac{g'}{4R'}\right)_{r=r_0}[r - r_0]^2 \\ &\qquad + \Phi(r, t)[r - r_0]^3, \\ \bar{t} &= k(r, t) = \int^t \left(\frac{R'\dot{R}}{Cg}\right)_{r=r_0} dt + \left(\frac{C}{g}\right)_{r=r_0}[r - r_0] \\ &\qquad - \left(\frac{Cg'}{2g^2}\right)_{r=r_0}[r - r_0]^2 + \Psi(r, t)[r - r_0]^3. \end{aligned}\right. \tag{11.14}$$

On peut donner, à partir de (11.14), les équations paramétriques de l'hypersurface $r = r_0$ dans les coordonnées de Reissner-Nordström (11.1) :

$$\bar{r} = R(r_0, t),$$

$$\bar{t} = \int^t \left(\frac{R'\dot{R}}{Cg}\right)_{r=r_0} dt$$

ou, compte tenu de (7.14) :

$$\left\{\begin{aligned} \bar{r} &= R(r_0, t) \overset{\text{déf}}{\equiv} R_0 \\ \bar{t} &= \varepsilon_1 \int^{R_0} \frac{-\varepsilon_2\sqrt{C^2 + 1} + A_0/R_0}{Cg_0} dR_0. \end{aligned}\right. \tag{11.15}$$

L'indice $_0$ indique que la quantité correspondante est évaluée à $r = r_0$.

En intégrant la seconde équation et en remplaçant R_0 par $\bar{r}$ on obtient l'équation de l'hypersurface $r = r_0$ dans les coordonnées de Reissner-Nordström, soit :

$$(11.16)\quad -\varepsilon_1 \bar{t} = \varepsilon_2 \frac{\sqrt{C^2+1}}{C}\bar{r} + \frac{A(2C^2+1)}{2C}\log(\bar{r}^2 - 2\varepsilon_2 A\sqrt{C^2+1}\,\bar{r} + A^2)$$
$$+\varepsilon_2 A\sqrt{C^2+1}\log\frac{\bar{r}-\varepsilon_2 A\sqrt{C^2+1}-AC}{\bar{r}-\varepsilon_2 A\sqrt{C^2+1}+AC} + \text{constante.}$$

La constante d'intégration est liée au choix de l'origine de la coordonnée temporelle $\bar{t}$, celle-ci restant arbitraire dans les coordonnées de Reissner-Nordström.

L'équation (11.16) est, comme on peut le vérifier directement, l'intégrale de l'équation du mouvement radial d'une particule d'épreuve chargée [8, p. 68], placée à $r = r_0$ dans le champ de Reissner-Nordström (11.1), où m et e sont donnés par (11.11) :

$$(11.17)\qquad \bar{u}_{\alpha;\beta}\bar{u}^\beta = -\,L\bar{F}_{\alpha\beta}\bar{u}^\beta,$$

L étant le rapport constant de la charge à la masse de la particule d'épreuve qui est égal à ρ/μ.

Dans notre cas $\rho/\mu = +\,\varepsilon_1$, d'après (7.18), et l'équation (11.17) se met donc sous la forme :

$$\bar{u}^\alpha{}_{;\beta}\bar{u}^\beta \equiv \frac{d^2\bar{x}^\alpha}{ds^2} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{d\bar{x}^\beta}{ds}\frac{d\bar{x}^\gamma}{ds} = -\,\varepsilon_1\bar{F}^\alpha_\beta\frac{d\bar{x}^\beta}{ds},$$

où $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ sont les symboles de Christoffel calculés à partir de la métrique de Reissner-Nordström (11.1).

Avant de conclure cette section, il nous semble nécessaire de faire les deux remarques suivantes :

1° Conformément aux axiomes de Lichnerowicz [8, p. 15], les composantes $F_{\alpha\beta}$ du champ électromagnétique, dans les coordonnées admissibles, doivent être continues et de classe C^2 par morceaux. Il nous faut donc vérifier que dans le système de coordonnées introduit (r, θ, φ, t), les composantes $F_{\alpha\beta}$ sont continues à travers l'hypersurface $r = r_0$.

D'une part on a, compte tenu de (3.3) et (7.13) :

$$F_{14\,\text{int}}(r_0, t) = -\left(\frac{A\dot{R}}{CR^2}\right)_{r=r_0},$$

et les autres composantes de $F_{\alpha\beta}$ sont identiquement nulles.

D'autre part, on a, compte tenu de (11.1) et (11.2):

$$\mathrm{F}_{14\,\mathrm{ext}}(r_0, t) = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial r} \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial t} \overline{\mathrm{F}}_{\alpha\beta} = (h'\dot{k} - \dot{h}k')\left(-\frac{e}{h^2}\right);$$

qui, à l'aide des relations (11.6), (11.9) et (11.8) s'écrit:

$$\mathrm{F}_{14\,\mathrm{ext}}(r_0, t) = -\left(\frac{\mathrm{A}\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{CR}^2}\right)_{r=r_0}.$$

Les autres composantes de $\mathrm{F}_{\alpha\beta\,\mathrm{ext}}$ sont identiquement nulles.

D'où:

$$[\mathrm{F}_{\alpha\beta}]_{r=r_0} = 0.$$

Notons que la demande:

$$[\mathrm{F}_{\alpha\beta}]_{r=r_0} = 0$$

revient, d'après la relation (3.2) avec $\lambda = 4$, à imposer que ρ soit fini (sur $r = r_0$): sinon $\dfrac{\partial \mathrm{F}^{14}}{\partial r}$, et par conséquent ρ, sont des distributions de Dirac.

2° Il est évident que le raccordement effectué dans cette section n'est valable que dans le domaine où la métrique de Reissner-Nordstrom (11.1) est non-singulière.

Or, il est bien connu [*28*] [*29*] que cette métrique possède, dans le cas où $m^2 \geqslant e^2$, une ou deux singularités du type de celle de Schwarzschild, c'est-à-dire deux singularités fictives: éliminables par une transformation des coordonnées. Ainsi dans le domaine, où la métrique de Reissner-Nordström est singulière, il nous faut effectuer le raccordement avec une forme non singulière de cette métrique.

On peut, par exemple, raccorder avec la métrique obtenue au paragraphe 5 en considérant $\mathrm{F}(r) = $ constant $= 2m$ et $\mathrm{A}(r) = $ constant $= e$; à savoir:

$$ds^2 = -\frac{\mathrm{R}'^2}{f+1} dr^2 - \mathrm{R}^2 d\Sigma^2 + dt^2$$

où $\mathrm{R} \equiv \mathrm{R}(r, t)$ est donné par l'équation (5.7). Cette métrique ne présente aucune singularité fictive.

Pour la classe des solutions du paragraphe 7, la métrique (11.1) présente deux singularités fictives car, compte tenu de (11.11):

$$m^2 = (\mathrm{C}^2 + 1)e^2 > e^2.$$

Notons que la contraction à un point d'une distribution chargée satisfaisant la condition $m^2 < e^2$ a été étudiée par Arnowitt *et al.* [*30*].

12. — OSCILLATIONS

Nous allons considérer la possibilité d'oscillation d'une sphère de rayon coordonné $r = r_0$ dont les solutions intérieures sont décrites respectivement dans les paragraphes 5 et 7.

1° *Cas où la sphère est constituée d'un nuage de particules non-chargées dans un champ électromagnétique* (solution intérieure décrite dans § 5).

Dans ce cas le temps propre ds d'un observateur co-mouvant avec la surface de la 2-sphère, coïncide avec le temps coordonné dt. Alors « la vitesse » est représentée par $\dot{R}$, donnée par la relation (5.5) avec $r = r_0$.
Or, une solution de cette relation n'existe que si :

$$f_0 R_0^2 + F_0 R_0 - A^2 \geqslant 0 \tag{12.1}$$

où

$$R_0 \overset{\text{déf}}{\equiv} R(r_0, t) > 0, \qquad f_0 \overset{\text{déf}}{\equiv} f(r_0) \qquad \text{et} \qquad F_0 \overset{\text{déf}}{\equiv} F(r_0).$$

Par ailleurs, le raccordement de la solution du paragraphe 5 avec celle de Reissner-Nordström impose, après un calcul direct analogue à celui du paragraphe 11, que :

$$F_0 = 2m > 0 \qquad \text{et} \qquad A^2 = e^2, \tag{12.2}$$

m et e étant la masse et la charge de la sphère considérée.
Ainsi on distingue les trois possibilités suivantes :
a) Si $f_0 > 0$, $\Delta \overset{\text{déf}}{\equiv} m^2 + e^2 f_0 > 0$; et alors, pour satisfaire la condition (12.1) et compte tenu de (12.2), il faut que R_0 soit supérieur à l'unique racine positive de (12.1) :

$$R_0 > R_0^+ \overset{\text{déf}}{\equiv} \frac{-m + \sqrt{\Delta}}{f_0} = \text{const.}$$

Il en résulte que si la sphère est initialement en expansion ($\dot{R} > 0$), elle le sera indéfiniment.
Par contre, si elle est initialement en contraction ($\dot{R} < 0$), elle le sera jusqu'à l'instant $t = t_1$ donné par la relation

$$R(r_0, t_1) = R_0^+ ;$$

après cet instant t_1 commence une expansion illimitée. « Le rayon » de la 2-sphère est toujours supérieur à R_0^+.

b) Si $f_0 = 0$, on doit avoir, pour satisfaire la condition (12.1):

$$R_0 > \frac{A^2}{F_0} = \frac{e^2}{2m},$$

« le rayon » minimum de la sphère.

Dans ce cas la sphère se comporte de la même façon que dans le cas précédent.

c) Dans le cas où : $0 > f_0 > -1$ (la borne inférieure de f_0 est imposée à cause de (5.2)), la condition (12.1) n'est satisfaite que si $\Delta \equiv m^2 + e^2 f_0 > 0$; c'est-à-dire si

$$f_0 > -\frac{m^2}{e^2}.$$

Il est donc nécessaire que :

$$\frac{-m-\sqrt{\Delta}}{f_0} > R_0 > \frac{-m+\sqrt{\Delta}}{f_0},$$

$\dfrac{-m \mp \sqrt{\Delta}}{f_0}$ étant les deux racines de (12.1), positives à cause de (12.2).

Ainsi finalement, la 2-sphère oscille, « son rayon » étant borné par $\dfrac{-m \mp \sqrt{\Delta}}{f_0}$, seulement dans le cas où :

$$f_0 > -\frac{m^2}{e^2} \qquad (\text{et} \qquad f_0 > -1).$$

2° *Cas où la sphère est constituée d'un nuage de particules chargées* dont la solution intérieure est celle décrite dans le paragraphe 7.

Ici, le temps propre ds d'un observateur en co-mouvement avec la surface de la sphère est lié au temps coordonné dt par la relation :

$$ds^2 = \frac{\dot{R}_0^2}{C^2} dt^2,$$

obtenue à partir de (7.13) en posant : $r = r_0$, $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, R_0 est « le rayon » de la sphère.

Par ailleurs, la formule générale :

$$\frac{dR(r, t)}{ds} = R' \frac{dr}{ds} + \dot{R} \frac{dt}{ds},$$

pour $r = r_0$ conduit à :

$$\frac{dR_0}{ds} = \dot{R}_0 \frac{dt}{ds}.$$

Par conséquent, on a :

$$\frac{dR_0}{ds} = \pm C. \tag{12.3}$$

Il en résulte que cette sphère sera nécessairement en contraction ou expansion illimitée ($C = \text{const.} \neq 0$) suivant le signe, initialement adopté, de « la vitesse » de la surface de la sphère :

$$\frac{dR_0}{ds}.$$

On note finalement que (12.3) donne après une intégration :

$$R_0 = \pm Cs + D,$$

D étant une constante arbitraire.

Il s'ensuit que R_0 tend vers zéro dans un temps propre fini :

$$s = \mp \frac{D}{C}.$$

Autrement dit, une singularité du type de celle d'Oppenheimer et Snyder se développe dans un temps propre fini, comme cela a été démontré par une autre méthode au paragraphe 10.

13. — LA CONTRIBUTION DE LA SELF-ÉNERGIE DU SCHÉMA DU § 7 A LA MASSE GRAVITATIONNELLE

La masse propre M d'une distribution à l'intérieur d'une sphère de rayon coordonné r est donnée par l'intégrale :

$$M(r, t) = \int_v \mu(r, t) dv\,; \tag{13.1}$$

$\mu \equiv \mu(r, t)$ est la densité de matière propre, et dv est l'élément du 3-volume propre de la métrique (2.1) :

$$dv = \sqrt{-\,{}^3g}\,d^3x = R^2 e^{\alpha/2} \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Notons que cette définition est significative seulement lorsque l'intégrale est indépendante de t. Ceci est assuré dans notre cas grâce à l'équation (3.6).

En effet, cette équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu u^4\sqrt{-g}) = 0, \tag{13.2}$$

compte tenu de (2.2).

D'autre part, (13.1) s'écrit :

$$\mathrm{M}(r, t) = \int_v \mu dv = \int_v \mu\sqrt{-{}^3g}d^3x = \int_v (\mu u^4\sqrt{-g})d^3x,$$

d'où, en raison de (13.2), on a :

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} = 0.$$

Par contre, la charge totale définie par l'intégrale :

$$\int \rho dv, \tag{13.3}$$

est dans tous les cas indépendante de t à cause de l'équation :

$$(\rho u^\lambda)_{;\lambda} = 0,$$

obtenue à partir des équations de Maxwell (2.6), compte tenu de (2.8).

Ainsi, compte tenu de (7.1) et (7.16), la masse propre totale de la distribution, décrite dans le paragraphe 7 et constituant une sphère de rayon coordonné $r = r_0$, est donnée par la relation :

$$\mathrm{M}_0 \overset{\text{déf}}{\equiv} \mathrm{M}(r_0) = \int_0^{r_0} -\frac{\varepsilon_1 \mathrm{A}'}{4\pi \mathrm{R}^2} 4\pi \mathrm{R}^2 dr = -\varepsilon_1[\mathrm{A}(r_0) - \mathrm{A}(0)].$$

Or, étant pris à l'origine ($r = 0$), le centre de la sphère doit satisfaire la relation :

$$\mathrm{R}(0, t) = 0;$$

d'où, compte tenu de l'équation (7.14), on doit avoir :

$$\mathrm{A}(0) = 0.$$

Par conséquent on a :

$$\mathrm{M}_0 = -\varepsilon_1 \mathrm{A}_0 \text{ } (^4), \tag{13.4}$$

(4) De même, on obtient pour la charge totale de la sphère calculée à partir de l'intégrale (13.3) la quantité : $-\mathrm{A}_0$. Ceci vérifie notre résultat précédent (11.11 b) ; à savoir que la charge totale e de la sphère doit satisfaire la relation : $e^2 = \mathrm{A}_0^2$.

où

$$A_0 \overset{\text{déf}}{=} A(r_0).$$

Par ailleurs, la masse gravitationnelle totale (m_0) de la sphère représentée par la constante m, qui apparaît dans la solution de Reissner-Nordström, est donnée par la relation (11.11 *a*); à savoir :

$$(13.5) \qquad m_0 = \varepsilon_2 A_0 \sqrt{C^2 + 1}, \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_2 A_0 > 0.$$

Pour alléger le calcul qui suit, nous posons :

$$\varepsilon_1 = -1,$$

ce qui équivaut, d'après (7.18), à supposer que la charge est négative. Par conséquent on a :

$$A_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 = +1,$$

compte tenu des relations (13.4) et (13.5), qui s'écrivent alors comme suit :

$$M_0 = A_0 \quad , \quad m_0 = \sqrt{C^2 + 1} A_0.$$

Maintenant, la self-énergie du schéma, ou le défaut de masse — comme elle est appelée par Zel'dovich [*31*] est donnée par la relation :

$$(13.6) \qquad \Delta m \overset{\text{déf}}{=} M_0 - m_0 = -(\sqrt{C^2 + 1} - 1)A_0 < 0.$$

Notons avec Podurets [*32*] que le type de mouvement d'un modèle stellaire dépend essentiellement de la quantité (conservée) Δm. Dans la solution intérieure de Schwarzschild on a : $\Delta m > 0$, tandis que dans la solution statique de Bonnor [*4*] — solution décrivant un schéma matière pure chargée avec $\mu \doteq \pm \rho$ — on a : $\Delta m = 0$; ce qui suggère que la contribution à la masse gravitationnelle vient du champ électrique.

Dans notre cas, on a d'après (13.6): $\Delta m < 0$; ici, la contribution à la masse gravitationnelle vient donc non seulement de l'énergie électrique mais aussi de l'énergie cinétique du schéma considéré.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. le Professeur A. Papapetrou, Directeur de Recherche au C. N. R. S., pour les observations très fructueuses qu'il a bien voulu me faire tout au long de l'élaboration de ce travail.

APPENDICE I

Il est bien connu [20] qu'une métrique à symétrie sphérique peut en général se mettre sous la forme :

$$ds^2 = -\alpha dr^2 - \beta d\Sigma^2 + 2\delta dr dt + \gamma dt^2 \quad , \quad d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

α, β, γ et δ étant des fonctions de r et t de classe (C^1, C^3 p. m.). Cette métrique n'est déterminée qu'à la transformation suivante près :

$$\bar{r} = h(r, t) \quad , \quad \bar{\theta} = \theta \quad , \quad \bar{\varphi} = \varphi \quad , \quad \bar{t} = k(r, t)$$

Cette forme s'obtient lorsque l'on demande que les isométries caractérisant la symétrie sphérique soient valables globalement ; c'est ce cas seulement qui correspond à un champ à symétrie sphérique du point de vue physique. Soulignons avec Petrov [33] que cette réduction n'est possible que sous l'hypothèse que les $g_{\alpha\beta}$ soient de classe C^1 et que la transformation soit au moins de la même classe.

Maintenant si l'on se donne un champ continu de vecteurs u^α tels que :

$$u^\lambda u_\lambda = 1 \quad , \quad u^2 = u^3 = 0$$

(c'est-à-dire u^α unitaire et à symétrie sphérique) on peut, en utilisant la transformation précédente, faire :

$$\bar{\delta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{u}^1 = 0$$

Ces conditions sont équivalentes aux deux équations :

$$\begin{aligned} &\alpha \dot{h}\dot{k} + \delta(h'\dot{k} + \dot{h}k') - \gamma h'k' = 0 \\ &u^1 h' + u^4 \dot{h} = 0 \end{aligned}$$

La seconde équation est soluble si l'équation :

$$\frac{dr}{u^1} = \frac{dt}{u^4}$$

a une solution et la condition pour cela est que u^1 et u^4 soient continus (théorème de Lipschitz). Ceci étant assuré, la seconde équation a une solution continue, et par conséquent la première équation a aussi une solution. Notons finalement que la métrique :

$$ds^2 = -\bar{\alpha} d\bar{r}^2 - \bar{\beta} d\bar{\Sigma}^2 + \bar{\gamma} d\bar{t}^2$$

et la condition :

$$\bar{u}^1 = 0$$

sont invariantes par rapport à tout changement de $\bar{r}$ et $\bar{t}$ de la forme :

$$\bar{\bar{r}} = \bar{h}(\bar{r}) \qquad \text{et} \qquad \bar{\bar{t}} = \bar{k}(\bar{t})$$

c'est-à-dire changement d'échelle de $\bar{r}$ et de $\bar{t}$ respectivement.

APPENDICE II

L'équation différentielle totale du premier ordre :

$$R\frac{dR}{dr} = pR + q,$$

p étant constant et $q \equiv q(r)$ quelconque, se met sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = y^3 + \frac{p}{3q^3}\left(q' + \frac{2p^2}{9}\right)e^{-p^2\int\frac{dr}{q}}$$

où

$$x \equiv x(r) = -\int qe^{\frac{2p^2}{3}\int\frac{dr}{q}}dr,$$

et $y \equiv y(x)$ définie par la relation :

$$R = \frac{1}{ye^{\frac{p^2}{3}\int\frac{dr}{q}} - \frac{p}{3q}}.$$

C'est la forme canonique de l'équation d'Abel de première espèce [17]. Le cas considéré dans le texte correspond à :

$$p = -\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{C^2+1}, \qquad q = \varepsilon_1 A.$$

RÉFÉRENCES

[1] R. C. Tolman, *Phys. Rev.*, **55**, 1939, 364.
[2] M. Wyman, *Phys. Rev.*, **75**, 1949, 1930.
[3] P. C. Vaidya, *Phys. Rev.*, **83**, 1951, 10.
[4] W. B. Bonnor, *Zeit. für Phys.*, **160**, 1960, 59.
[5] A. Das, *Proc. Roy. Soc.*, **A267**, 1962, 1.
[6] W. B. Bonnor, *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.*, **129**, 1965, 443.
[7] O. Klein, *Arkiv. Mat. Astron. Fysik*, **A34**, 1947, 19.
[8] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.* Masson Éd., Paris, 1955.
[9] R. C. Tolman, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U. S. A., **20**, 1934*a*, 169.
[10] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie du champ*, Éditions de la Paix, Moscou.
[11] J. L. Synge, *Relativity : The general Theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960.
[12] A. S. Eddington, *The mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, 1954.
[13] W. B. Bonnor, Article dans : *Recent Developments in General Relativity*, p. 167, Pergamon Press, 1962.
[14] A. Papapetrou, *Proc. Roy. Irish Acad.*, **51**, 1947, 191.
[15] S. D. Majumdar, *Phys. Rev.*, **72**, 1947, 390.

[16] M. JANET, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. *Mém. Sci. Math.*, fascicule XXI, 1927.
[17] E. KAMKE, *Differentialgleichunger Löoungsmethoden und Lösungen*, vol. I, Leipzig, 1944.
[18] ABEL, *Œuvres II*, S.
[19] G. PETIAU, Cours professé à l'Institut Henri Poincaré, 1967.
[20] J. EIESLAND, *Trans. American Math. Soc.*, **27**, 1925, 213.
[21] J. EHLERS, Article dans : *Recent Developments in General Relativity*, p. 210, Pergamon Press, 1962.
[22] U. K. DE et A. K. RAYCHAUDHURI, *Proc. Roy. Soc.*, **A303**, 1968, 97.
[23] J. L. SYNGE et A. SCHILD, *Tensor Calculus*, University of Toronto Press, 1956.
[24] A. PAPAPETROU et A. HAMOUI, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **4**, 1967, 343.
[25] J. R. OPPENHEIMER et H. SNYDER, *Phys. Rev.*, **56**, 1939, 455.
[26] B. HOFFMANN, *Quart. J. Math. Cxford Ser.*, **3**, 1932*b*, 226.
[27] L. BEL et A. HAMOUI, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **7**, 1967, 229.
[28] J. C. GRAVES et D. R. BRILL, *Phys. Rev.*, **120**, 1966, 1507.
[29] B. CARTER, *Phys. Letters*, **21**, 1966, 423.
[30] R. ARNOWITT, S. DESER et C. W. MISNER, *Phys. Rev. Letters*, **4**, 1960, 375.
[31] Ya. B. ZEL'DOVICH, *Soviet Physics Uspekhi*, **6**, 1964, 475.
[32] M. A. PODURETS, *Soviet Astronomy, A. J.*, **8**, 1964, 19.
[33] A. Z. PETROV, *Soviet Physics, J. E. T. P.*, **17**, 1963, 1026.

Cette étude constitue une partie de la thèse de Doctorat ès-Sciences de M. Adnan Hamoui, enregistrée au C. N. R. S. sous le numéro A.O.2862, dont la soutenance est prévue en avril 1969 devant la Faculté des Sciences de Paris.

Manuscrit reçu le 21 décembre 1968.