

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

B. VIGNON

Une méthode de résolution approchée de l'équation de Boltzmann relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, n° 1 (1969), p. 31-66

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_1_31_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Une méthode de résolution approchée de l'équation de Boltzmann relativiste

par

B. VIGNON

Faculté des Sciences de Dijon.

RÉSUMÉ. — Ce travail est consacré à l'étude d'un fluide relativiste au moyen d'une méthode simple de résolution approchée de l'équation de Boltzmann relativiste ⁽¹⁾.

L'équation de Boltzmann linéarisée nous permet de retrouver les expressions du courant de chaleur et du tenseur des pressions moyennant une hypothèse simple sur les gradients des termes intervenant dans une approximation de la fonction de distribution. En ne négligeant plus les termes quadratiques au second membre de l'équation de Boltzmann, nous obtenons ensuite les expressions de termes complémentaires exprimant la dépendance entre le courant de chaleur et le tenseur des pressions.

SUMMARY. — This paper concerns the study of a relativistic fluid by a simple method of approximate resolution of the relativistic Boltzmann equation.

The linearised Boltzmann equation allows us to get the expressions of the heat flow and of the pressure tensor using a simple hypothesis on the gradients of the terms involved in an approximation of the distribution fonction. Without neglecting the quadratic terms in the second member of the Boltzmann equation any longer, we get the expressions of the complementary terms stating the dependance between the heat flow and the pressure tensor.

⁽¹⁾ Cf. [1] où le principe de la méthode que nous utilisons est exposé sous forme condensée.

I. — LE FLUIDE RELATIVISTE

Nous considérons un gaz soumis au seul champ de gravitation, formé de particules de même masse au repos m , dont les coordonnées d'espace-temps sont x^α , les composantes d'impulsion relativiste p^α , l'espace des états est un espace fibré φ , dont la base est V_4 , munie de la métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ de signature $+- - -$, dont la fibre au point x^α est l'hyperboloïde

$$P : g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = m^2 c^2, \quad p^0 > 0,$$

et dont le groupe structural est le Groupe de Lorentz orthochrone. P est muni de la forme élément de volume invariante (Chernikov [2])

$$dP = \frac{\sqrt{-g}}{p_0} dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3.$$

Soit $f = f(x^\alpha, p^\alpha)$ la fonction de distribution. Le moment d'ordre q de f est le tenseur.

$$t^{\alpha_1 \dots \alpha_q}(x^\alpha) = \int_P f p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_q} dP.$$

Le tenseur d'impulsion-énergie du gaz est le tenseur

$$T^{\alpha\beta} = ct^{\alpha\beta}.$$

Soit $\sigma = \sigma(x^\alpha, p^\alpha)$ une quantité scalaire attachée à chaque particule. Le flux de σ est le vecteur

$$\Phi^\alpha(\sigma) = \int_P f \sigma p^\alpha dP.$$

En particulier, avec $\sigma = 1$, $\Phi^\alpha(1) = t^\alpha$ est le flux numérique de particules; c'est le premier moment de f . Nous définissons le vecteur-vitesse (unitaire) u^α du fluide en posant $t^\alpha = nu^\alpha$, avec $n > 0$, $u^\alpha u_\alpha = 1$. L'adjectif « propre » employé dans la suite qualifie des grandeurs, vecteurs, etc., que mesurerait un observateur prenant \vec{u} comme direction de temps, dans l'espace-temps de la relativité restreinte tangent à φ au point x^α ; un repère au point x^α est dit propre si son premier vecteur (temporel) est \vec{u} .

La densité propre de σ est

$$d(\sigma) = \Phi^\alpha(\sigma) u_\alpha.$$

Avec $\sigma = 1$, nous obtenons la densité numérique propre de particules :

$$d(1) = \Phi^\alpha(1)u_\alpha = t^\alpha u_\alpha = n.$$

La moyenne propre de σ est

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{n} d(\sigma).$$

Nous appellerons courant propre de σ la composante d'espace $C^\alpha(\sigma)$ relative à la direction de temps \vec{u} de $\Phi^\alpha(\sigma)$:

$$C^\alpha(\sigma) = \gamma^{\alpha\beta} \Phi_\beta(\sigma) \quad (\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta).$$

L'énergie relativiste propre d'une particule est

$$E_p = mc^2 \Gamma = cp^\rho u_\rho$$

où

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Son énergie cinétique relativiste propre est

$$T_p = mc^2(\Gamma - 1) = cp^\rho u_\rho - mc^2$$

(ou $T_p = \frac{1}{2} mV^2$, avec $V^\alpha = \frac{p^\alpha}{mc} - u^\alpha$, $V^2 = -V^\alpha u_\alpha$).

Posant $T^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = \rho$, on a :

$$\Phi^\alpha(E_p) = \int_P f p^\alpha (cp^\beta u_\beta) dP = T^{\alpha\beta} u_\beta,$$

$$\Phi^\alpha(T_p) = \int_P f p^\alpha (cp^\beta u_\beta - mc^2) dP = T^{\alpha\beta} u_\beta - nmc^2 u^\alpha$$

$$C^\alpha(E_p) = C^\alpha(T_p) = \gamma^{\alpha\beta} T_{\beta\lambda} u^\lambda,$$

$$d(E_p) = \Phi^\alpha(E_p) u_\alpha = \rho,$$

$$d(T_p) = \Phi^\alpha(T_p) u_\alpha = \rho - nmc^2,$$

$$\bar{E}_p = \frac{\rho}{n}, \quad \bar{T}_p = \frac{\rho}{n} - mc^2.$$

ρ est donc la densité propre d'énergie relativiste propre. La moyenne

propre \bar{T}_p d'énergie cinétique relativiste propre, égale à $\frac{\rho}{n} - mc^2$ est aussi appelée énergie interne et notée ε .

Si nous définissons le courant de chaleur à partir du courant propre d'énergie cinétique relativiste propre par

$$q^\alpha = cC^\alpha(T_p).$$

Nous retrouvons, en décomposant $T^{\alpha\beta}$ en ses composantes spatiotemporelles la décomposition classique

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + \pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{c}(q^\alpha u^\beta + q^\beta u^\alpha),$$

où

$$\pi^{\alpha\beta} u_\beta = 0.$$

Remarque. — Lorsque le tenseur des pressions $\pi^{\alpha\beta}$ est de la forme

$$\pi^{\alpha\beta} = -P\gamma^{\alpha\beta} = -P(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta),$$

il est possible de calculer le vecteur propre temporel v^α de $T^{\alpha\beta}$ et la valeur propre r correspondante :

Posons

$$v^\alpha = \lambda(u^\alpha + w^\alpha); \quad (w^\alpha u_\alpha = 0)$$

on doit avoir

$$T^{\alpha\beta}(u_\alpha + w_\alpha) = r(u_\alpha + w_\alpha),$$

soit

$$\left[(\rho + P)u^\alpha u^\beta - P g^{\alpha\beta} + \frac{1}{c}(q^\alpha u^\beta + q^\beta u^\alpha) \right] [u_\alpha + w_\alpha] = r(u_\beta + w_\beta)$$

ou

$$(1) \quad \left(\rho + \frac{1}{c} q^\alpha w_\alpha \right) u^\beta + \frac{1}{c} q^\beta - P w^\beta = r(u^\beta + w^\beta).$$

Par multiplication contractée de (1) par u_β d'une part, par q_β d'autre part, il vient, en posant $q^\beta q_\beta = -q^2 \leq 0$,

$$(2) \quad \rho + \frac{1}{c} q^\alpha w_\alpha = r,$$

$$(3) \quad -\frac{1}{c^2} q^2 - P w^\beta q_\beta = r q^\beta w_\beta.$$

L'élimination de $q^\alpha w_\alpha$ entre les relations (2) et (3) nous donne

$$q^2 = c^2(\rho - r)(r + P),$$

ou

$$(4) \quad c^2 r^2 - c^2(\rho - P)r + q^2 - c^2 \rho P = 0.$$

L'équation (4) aura des racines réelles si et seulement si on a

$$c^2(\rho + P)^2 \geq 4q^2.$$

Dans ce cas,

$$(5) \quad r = \frac{1}{2} \left[\rho - P + \sqrt{(\rho + P)^2 - 4 \frac{q^2}{c^2}} \right]$$

en ne conservant que la plus grande des racines.

En égalant les composantes spatiales relativement à \vec{u} des deux membres de (1), on obtient

$$w^\beta = \frac{1}{c(r + P)} q^\beta,$$

d'où l'expression de v^α :

$$(6) \quad v^\alpha = \lambda \left(u^\alpha + \frac{q^\alpha}{c(r + P)} \right).$$

Des relations (5) et (6), on peut déduire la valeur positive de λ telle que v^α soit unitaire. Si on néglige les termes en q^2 , on a les résultats approchés suivants :

$$r = \rho, \quad v^\alpha = u^\alpha + \frac{q^\alpha}{c(\rho + P)} \quad (v^\alpha v_\alpha = 1)$$

Si on néglige les termes en Pq , on a

$$v^\alpha = u^\alpha + \frac{q}{c\rho},$$

soit

$$\tilde{v}_\alpha = \frac{1}{\rho} T^{\alpha\beta} u_\beta.$$

Le vecteur \vec{v} apparaît ainsi en première approximation comme vecteur tangent aux trajectoires de l'énergie relativiste propre.

II. — RÉOLUTION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN RELATIVISTE

A. — Fonction de distribution de Maxwell.

Nous désignons par \vec{p} et \vec{q} les impulsions de deux molécules avant un choc, par \vec{p}' et \vec{q}' leurs impulsions après le choc. Nous ne considérons que des chocs élastiques, pour lesquels on a

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{p}' + \vec{q}'.$$

Dans ce cas, on peut poser

$$\vec{p}' = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) + s\vec{e}$$

$$\vec{q}' = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) - s\vec{e}$$

avec

$$s = \sqrt{\frac{pq - m^2c^2}{2}}$$

où pq désigne, comme dans toute la suite, le scalaire $p^\alpha q_\alpha$, et où \vec{e} est un vecteur unitaire ($e^\alpha e_\alpha = -1$) du 3-plan orthogonal au point x^α à $\vec{p} + \vec{q}$.

L'équation de Boltzmann peut s'écrire sous la forme

$$p^\alpha \partial_\alpha f - \sum_{i=1,2,3} \Gamma_\alpha^i p^\alpha p^\beta \frac{\partial f}{\partial p^i} = \int_Q \int_S [f(p')f(q') - f(p)f(q)] \varphi(pq, \theta) d\vec{e} dQ$$

où la surface S de la sphère est décrite par l'extrémité du vecteur \vec{e} , θ est l'angle des vecteurs $\vec{p} - \vec{q}$ et $\vec{p}' - \vec{q}'$ dans le 3-plan orthogonal à $\vec{p} + \vec{q}$, Q est l'hyperboloïde des impulsions \vec{q} , φ est une fonction dont l'expression dépend de la section de choc.

Comme Chernikov [2] l'a montré, on a $\nabla_\alpha(nu^\alpha) = 0$, $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ et on a encore le théorème H :

Le flux d'entropie étant défini par

$$S^\alpha = \Phi^\alpha \left(\text{Log} \frac{f}{\lambda} \right) = \int_P f p^\alpha \text{Log} \frac{f}{\lambda} dP,$$

où λ est une constante de même dimension que f , on a $\nabla_\alpha S^\alpha \leq 0$.

Remarque. — Chernikov prend la définition précédente du flux d'entropie, mais avec $\lambda = 1$. Puisque

$$\int_{\mathbf{P}} f p^\alpha \operatorname{Log} \frac{f}{\mu} d\mathbf{P} = \int_{\mathbf{P}} f p^\alpha \operatorname{Log} \frac{f}{\lambda} d\mathbf{P} - \operatorname{Log} \frac{\lambda}{\mu} \cdot n u^\alpha,$$

et que $\nabla_\alpha(nu^\alpha) = 0$, le théorème H est valable avec une constante λ quelconque.

Le fluide est dit sans processus dissipatifs, ou fluide parfait, si $\nabla_\alpha S^\alpha = 0$. Dans ce cas, la solution continue (par rapport à \vec{p}) de l'équation de Boltzmann est de la forme

$$(7) \quad f = f(x^\alpha, p^\alpha) = \frac{a}{4\pi} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma}$$

où $a, \alpha > 0$, $\vec{u}(u^\alpha u_\alpha = \pm 1)$ sont des fonctions des x^α . Pour que l'intégrale définissant le premier moment de f soit convergente, il faut et il suffit que le vecteur \vec{u} soit orienté dans le temps : $u^\alpha u_\alpha = +1$. Les intégrales définissant les moments de f sont alors toutes convergentes. La fonction (7) est appelée fonction de distribution de Maxwell. L'expression générale de ses moments a été donnée par Pichon [3]; les deux premiers sont

$$(8) \quad t^\alpha = am^3 c^3 \alpha H_2 u^\alpha$$

$$(9) \quad t^{\alpha\beta} = am^4 c^4 (\alpha^2 H_3 u^\alpha u^\beta = H_2 g^{\alpha\beta}),$$

$$H_n = H_n(\alpha) = \frac{1}{(2n-1)(2n-3) \dots} \int_0^\infty e^{-\alpha \operatorname{ch} \varphi} \operatorname{sh}^{2n} \varphi d\varphi$$

(Nous avons posé ici $H_n(\alpha) = \frac{K_n(\alpha)}{\alpha^n}$ où $K_n(\alpha)$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'indice n).

Les fonctions H_n vérifient la relation

$$(10) \quad \alpha^2 H_{n+1} = H_{n-1} + 2n H_n.$$

De la relation (8), on conclut que

— le vecteur \vec{u} intervenant dans la fonction de Maxwell est le vecteur vitesse du fluide,

— on a

$$n = am^3 c^3 \alpha H_2.$$

La relation (9) montre que le tenseur d'impulsion-énergie est de la forme

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + \mathbf{P})u^\alpha u^\beta - \mathbf{P}g^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \mathbf{P}\gamma^{\alpha\beta},$$

avec

$$\begin{aligned} P &= am^4c^5H_2 \\ \rho &= am^4c^5(\alpha^2H_3 - H_2). \end{aligned}$$

Posant $T = \frac{mc^2}{k\alpha}$, les expressions de n et P montrent qu'on a

$$(11) \quad P = nkT.$$

D'autre part, la densité propre d'entropie

$$S = \frac{1}{n} S^\alpha u_\alpha = \frac{1}{n} u_\alpha \int_P f p^\alpha \text{Log} \frac{f}{\lambda} dP$$

étant ici égale à

$$(12) \quad S = - \text{Log} \frac{a}{\lambda} + \frac{\alpha^2 H_3}{H_2},$$

il est aisé de vérifier qu'on a la relation

$$(13) \quad kTdS = d\varepsilon + Pd \frac{1}{n}$$

où ε est l'énergie interne. Les relations (11) et (12) permettent doublement d'interpréter $T = T(x^\alpha)$ comme la température du fluide.

Remarque. — La relation (11) définissant la température T , on aurait pu prendre (13) comme définition de S , et en déduire sa valeur (12).

Le volume thermodynamique.

L'enthalpie du fluide est

$$i = \varepsilon + \frac{P}{n};$$

son indice est

$$F = 1 + i.$$

Si on pose $V = \frac{1}{n}$ et si on définit le volume thermodynamique τ par $\tau = FV$, on peut, dans le cas d'un fluide parfait, exprimer τ sous la forme $\tau = \tau(P, S)$; on a alors les relations

$$\frac{\partial \tau}{\partial S} > 0 \quad , \quad \frac{\partial \tau}{\partial P} < 0.$$

Démonstration. — Des expressions précédentes de n , P , S , on déduit facilement que

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{H_2}{H_3} \frac{H_3^2 - H_2 H_4}{H_2 H_3 + \alpha^2 (H_3^2 - H_2 H_4)}$$

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial P} = - \frac{1}{P} \frac{H_2^2 H_4 + \alpha^2 H_3 (H_3^2 - H_2 H_4)}{H_3 [H_2 H_3 + \alpha^2 (H_3^2 - H_2 H_4)]}$$

or Synge [6] a montré que les fonctions

$$G = G(\alpha) = \frac{\alpha H_3}{H_2} \quad \text{et} \quad G^2 - \frac{2G}{\alpha}$$

sont décroissantes. Grâce à la relation

$$H'_n = -\alpha H_{n+1}$$

ceci se traduit par les relations

$$H_2 H_3 + \alpha^2 (H_3^2 - H_2 H_4) < 0$$

$$H_2^2 H_4 + \alpha^2 H_3 (H_3^2 - H_2 H_4) < 0$$

(qui ont d'ailleurs pour conséquence que $H_3^2 - H_2 H_4$ est négatif).

On en déduit les inégalités énoncées.

Remarque. — Il semble que l'on ait également la relation $\frac{\partial^2 \tau}{\partial P^2} < 0$; nous n'avons pu démontrer cette inégalité que pour α suffisamment petit, ou suffisamment grand.

B. — Fonction de distribution pour un fluide avec processus dissipatifs.

1. — APPROXIMATION DU TROISIÈME ORDRE

Chernikov [4] utilise une approximation de la fonction de distribution de la forme

$$(14) \quad f = e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} (a + a^\lambda K_\lambda + a^{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} + b^\lambda G_\lambda),$$

où K_λ , $K_{\lambda\mu}$, G_λ sont des polynomes par rapport aux impulsions p^α , orthogonaux par rapport au poids $e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma}$ sur l'hyperboloïde P , en négligeant,

dans le second membre de l'équation de Boltzmann, les termes quadratiques par rapport à a^λ , $a^{\lambda\mu}$, b^λ . Il définit le vecteur vitesse du fluide comme vecteur propre temporel du tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$ et impose au vecteur \vec{u} intervenant dans la fonction (1) d'être ce vecteur vitesse. Il obtient le tenseur des pressions

$$\pi^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}(P + c\lambda\nabla_\rho u^\rho) + c\mu\gamma^{\alpha\sigma}\gamma^{\beta\rho}(\nabla_\sigma v_\rho + \nabla_\rho u_\sigma),$$

où $3\lambda + 2\mu = 0$, mais le courant de chaleur n'apparaît pas dans l'expression du tenseur d'impulsion-énergie.

Nous utilisons une méthode toute différente de la sienne, encore basée sur l'utilisation de polynômes orthogonaux. Après avoir pris des polynômes de Chernikov [4], puis de Marle [5], nous avons utilisé une nouvelle famille de polynômes, fournissant plus rapidement des résultats analogues. Ces polynômes sont obtenus en orthogonalisant sur l'hyperboloïde P, par rapport à un poids de la forme

$$e^{-\frac{\alpha}{mc}p^\sigma u_\sigma} (u^\sigma u_\sigma = +1)$$

la suite 1, ε^α , $\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta$, ..., où

$$\varepsilon^\alpha = \frac{1}{mc} \gamma^{\alpha\beta} p_\beta = \frac{1}{mc} (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) p_\beta$$

les premiers de ces polynômes sont

$$\begin{aligned} \psi &= 1 \\ \psi^\alpha &= \varepsilon^\alpha \\ \psi^{\alpha\beta} &= H_1(\alpha)\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta + H_2(\alpha)\gamma^{\alpha\beta} \\ \psi^{\alpha\beta\rho} &= H_2(\alpha)\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta\varepsilon^\rho + H_3(\alpha)(\varepsilon^\alpha\gamma^{\beta\rho} + \varepsilon^\beta\gamma^{\alpha\rho} + \varepsilon^\rho\gamma^{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Malheureusement, les polynômes suivants ont des expressions plus compliquées; on a par exemple

$$\begin{aligned} \psi^{\alpha\beta\rho\mu} &= (14H_1H_3 - 6H_2^2)\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta\varepsilon^\rho\varepsilon^\mu + (11H_1H_4 - 3H_2H_3)\mathbf{S}\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta\gamma^{\rho\mu} \\ &\quad + (22H_2H_4 - 14H_3^2)\int\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\rho\mu} \end{aligned}$$

où le signe \mathbf{S} indique que le terme qu'il précède est symétrisé par permutation des indices.

Nous prenons une approximation de la fonction de distribution sous la forme

$$(15) \quad f = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} (a + a^\alpha \psi_\alpha + b^{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta} + c^{\alpha\beta\gamma} \psi_{\alpha\beta\gamma})$$

où $b^{\alpha\beta}$, $c^{\alpha\beta\gamma}$ sont des tenseurs symétriques et $u^\sigma u_\sigma = +1$. Puisque

$$\psi^{\alpha_1 \dots \alpha_n} u_{\alpha_1} = 0,$$

on peut imposer $a^\alpha u_\alpha = 0$, $b^{\alpha\beta} u_\alpha = 0$, $c^{\alpha\beta\gamma} u_\alpha = 0$. α , \vec{u} , a , a^α , $b^{\alpha\beta}$, $c^{\alpha\beta\gamma}$ sont des fonctions des x^α seulement; on a au total 24 fonctions scalaires inconnues.

Les premiers moments de la fonction

$$\overset{\circ}{f} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma}$$

sont

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{i} &= H_1 m^2 c^2 \\ \overset{\circ}{i}^\alpha &= m^3 c^3 \alpha H_2 \\ \overset{\circ}{i}^{\alpha\beta} &= m^4 c^4 (\alpha^2 H_3 u^\alpha u^\beta - H_2 g^{\alpha\beta}) \\ \overset{\circ}{i}^{\alpha\beta\gamma} &= m^5 c^5 (\alpha^3 H_4 u^\alpha u^\beta u^\gamma - \alpha H_3 \mathbf{S} v^\alpha g^{\beta\gamma}) \\ \overset{\circ}{i}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= m^6 c^6 (\alpha^4 H_5 u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta - \alpha^2 H_4 \mathbf{S} u^\alpha u^\beta g^{\gamma\delta} + H_3 \mathbf{S} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\delta}) \\ \overset{\circ}{i}^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} &= m^7 c^7 (\alpha^5 H_6 u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta u^\epsilon - \alpha^3 H_5 \mathbf{S} u^\alpha u^\beta u^\gamma u^{\delta\epsilon} + \alpha H_4 \mathbf{S} u^\alpha g^{\beta\gamma} g^{\delta\epsilon}). \end{aligned}$$

Le moment d'ordre 1 de la fonction f donnée par (15) est

$$\begin{aligned} t_\alpha &= \int_P f p_\alpha dP = a \overset{\circ}{t}_\alpha + a^\lambda \frac{1}{mc} \overset{\circ}{t}_{\alpha\lambda} + b^{\lambda\mu} \left(\frac{1}{m^2 c^2} H_1 \overset{\circ}{t}_{\alpha\lambda\mu} + H_2 \overset{\circ}{t}_{\alpha\lambda\mu} \right) \\ &\quad + c^{\lambda\mu\nu} \left[\frac{1}{m^3 c^3} H_2 \overset{\circ}{t}_{\alpha\lambda\mu\nu} + \frac{1}{m^4 c^4} H_3 (\overset{\circ}{t}_{\alpha\lambda} g_{\mu\nu} + \overset{\circ}{t}_{\alpha\mu} g_{\lambda\nu} + \overset{\circ}{t}_{\alpha\nu} g_{\lambda\mu}) \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant $b^\rho = b$,

$$(16) \quad t_\alpha = m^3 c^3 \{ \alpha [a H_2 + b(H_2^2 - H_1 H_3)] u_\alpha - H_2 a_\alpha \}$$

Puisque nous imposons que \vec{u} soit le vecteur vitesse du fluide, t_α doit être colinéaire à u_α , et nous avons

$$(17) \quad a_\alpha = 0$$

et $t_\alpha = nu_\alpha$, où

$$(18) \quad n = m^3 c^3 \alpha [aH_2 + b(H_2^2 - H_1H_3)].$$

Compte tenu de (17), le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$ du fluide est donné par

$$\begin{aligned} \frac{T_{\alpha\beta}}{c} = t_{\alpha\beta} = \int_P f p_\alpha p_\beta dP = a \overset{\circ}{t}_{\alpha\beta} + b^{\lambda\mu} \left(\frac{1}{m^2 c^2} H_1 \overset{\circ}{t}_{\alpha\beta\lambda\mu} + H_2 \overset{\circ}{t}_{\alpha\beta\mathcal{G}\lambda\mu} \right) \\ + c^{\lambda\mu\nu} \left[\frac{1}{m^3 c^3} H_2 \overset{\circ}{t}_{\alpha\beta\gamma\mu\nu} + \frac{1}{mc} H_3 (\overset{\circ}{t}_{\alpha\beta\lambda\mathcal{G}\mu\nu} + \overset{\circ}{t}_{\alpha\beta\mu\mathcal{G}\lambda\nu} + \overset{\circ}{t}_{\alpha\beta\nu\mathcal{G}\lambda\mu}) \right] \end{aligned}$$

ou en posant $c^{\alpha\beta}{}_\beta = c^\alpha$,

$$(19) \quad \frac{T_{\alpha\beta}}{c} = m^4 c^4 \left\{ (a\alpha^2 H_3 - b\alpha^2 H_1 H_4) u_\alpha u_\beta + [-aH + b(H_1 H_3 - H_2^2)] g_{\alpha\beta} \right. \\ \left. + 2H_1 H_3 b_{\alpha\beta} + 3\alpha(H_2 H_4 - H_3^2) (c_\beta u_\alpha + c_\alpha u_\beta) \right\}.$$

On en déduit que

$$(20) \quad \frac{\rho}{c} = \frac{1}{c} T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = m^4 c^4 [a(\alpha^2 H_3 - H_2) + b(H_1 H_3 - H_2^2 - \alpha^2 H_1 H_4)]$$

$$(21) \quad \frac{\pi_{\alpha\beta}}{c} = \frac{1}{c} \gamma_{\alpha\lambda} \gamma_{\beta\mu} T^{\lambda\mu} = m^4 c^4 \left\{ [-aH_2 + b(H_1 H_3 - H_2^2)] \gamma_{\alpha\beta} + 2H_1 H_3 b_{\alpha\beta} \right\}$$

$$(22) \quad \frac{P}{c} = -\frac{1}{3} \frac{\pi^\alpha{}_\alpha}{c} = m^4 c^4 \left[aH_2 - b(H_1 H_3 - H_2^2) - \frac{2}{3} bH_1 H_3 \right].$$

Avec la solution de Maxwell, on avait

$$(23) \quad P = nkT,$$

en posant $T = \frac{mc^2}{k\alpha}$. Nous imposons ici à T défini par $T = \frac{mc^2}{k\alpha}$ d'être une approximation de la température en écrivant encore la relation (10). Compte tenu des expressions (18) et (22) de n et P , on en déduit que $b = 0$. On a alors les relations suivantes :

$$(24) \quad n = am^3 c^3 \alpha H_2$$

$$(25) \quad T_{\alpha\beta} = m^4 c^5 [a\alpha^2 H_3 u_\alpha u_\beta - a H_2 g_{\alpha\beta} + 2H_1 H_3 b_{\alpha\beta} + 3\alpha(H_2 H_4 - H_3^2)(c_\beta u_\alpha + c_\alpha u_\beta)],$$

$$(26) \quad \rho = am^4 c^5 (\alpha^2 H_3 - H_2)$$

$$(27) \quad \pi_{\alpha\beta} = m^4 c^5 (-a H_2 \gamma_{\alpha\beta} + 2H_1 H_3 b_{\alpha\beta})$$

$$(28) \quad P = am^4 c^5 H_2.$$

La partie non-hydrostatique du tenseur des pressions est

$$(29) \quad \pi^{\alpha\beta} + P\gamma^{\alpha\beta} = 2m^4 c^5 H_1 H_3 b_{\alpha\beta}.$$

Le courant de chaleur est

$$q^\alpha = c(T^{\alpha\beta} u_\beta - \rho u^\alpha),$$

soit

$$(30) \quad q^\alpha = 3\alpha m^4 c^6 (H_2 H_4 - H_3^2) c^\alpha.$$

Il nous faut maintenant reporter la fonction

$$f = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} (a + b^{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta} + c^{\alpha\beta\gamma} \psi_{\alpha\beta\gamma}) (b^\alpha_\alpha = 0)$$

dans l'équation de Boltzmann qui s'écrit, dans un système de coordonnées normales

$$T(f) = I(f)$$

avec

$$T(f) = p^\alpha \partial_\alpha f$$

$$I(f) = \int_Q \int_S [f(\vec{p}') f(\vec{q}') - f(\vec{p}) f(\vec{q})] \varphi(pq, \theta) d\vec{e} dQ.$$

f peut aussi s'écrire sous la forme

$$f = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} \left[a + \frac{3}{mc} H_3 c^\alpha p_\alpha + \frac{1}{m^2 c^2} H_1 b^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \frac{1}{m^3 c^3} H_2 c^{\alpha\beta\gamma} p_\alpha p_\beta p_\gamma \right].$$

En négligeant les termes quadratiques par rapport à $b^{\alpha\beta}$ et $c^{\alpha\beta\gamma}$ (ce qui revient à utiliser l'équation de Boltzmann linéarisée), on a

$$f(\vec{p}') f(\vec{q}') - f(\vec{p}) f(\vec{q}) = \frac{a}{16\pi^2} e^{-\alpha(p^\sigma + q^\sigma) u_\sigma} \left[\frac{1}{m^2 c^2} H_1 b^{\alpha\beta} (p'_\alpha p'_\beta + q'_\alpha q'_\beta - p_\alpha p_\beta - q_\alpha q_\beta) + \frac{1}{m^3 c^3} H_2 c^{\alpha\beta\gamma} (p'_\alpha p'_\beta p'_\gamma + q'_\alpha q'_\beta q'_\gamma - p_\alpha p_\beta p_\gamma - q_\alpha q_\beta q_\gamma) \right],$$

c'est-à-dire, en utilisant les relations

$$\vec{p}' = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) + s\vec{e}$$

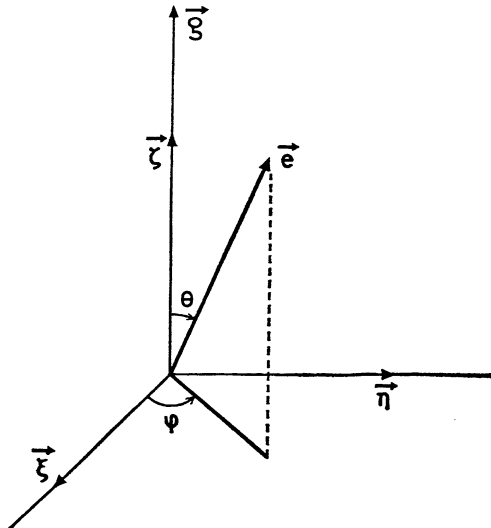
$$\vec{q}' = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) - s\vec{e},$$

$$\begin{aligned} & f(\vec{p}')f(\vec{q}') - f(\vec{p})f(\vec{q}) \\ &= \frac{\alpha}{16\pi^2} e^{-\frac{\alpha}{mc}(p^\sigma + q^\sigma)u_\sigma} \left[\frac{1}{m^2 c^2} H_1 b^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2} q_\alpha q_\beta + p_\alpha q_\beta + 2s^2 e_\alpha e_\beta \right) \right. \\ &+ \frac{1}{m^3 c^3} H_2 c^{\alpha\beta\gamma} \left(-\frac{3}{4} p_\alpha p_\beta p_\gamma - \frac{3}{4} q_\alpha q_\beta q_\gamma + \frac{3}{4} p_\alpha q_\beta q_\gamma + \frac{3}{4} p_\alpha p_\beta q_\gamma + 3s^2 e_\alpha e_\beta p_\gamma \right. \\ &\left. \left. + 3s^2 e_\alpha e_\beta q_\gamma \right) \right]. \end{aligned}$$

Il nous faut multiplier cette expression par $\varphi(pq, \theta)$ et intégrer sur la sphère S (de rayon 1 dans le 3-plan orthogonal à $\vec{p} + \vec{q}$). Dans cette intégration apparaissent les intégrales

$$(31) \quad A(pq) = \int_S \varphi(pq, \theta) d\vec{e}$$

$$(32) \quad \mathcal{B}_{\alpha\beta}(pq) = \int_S \varphi(pq, \theta) e_\alpha e_\beta d\vec{e}$$



dont l'expression dépend de la fonction φ . Pour trouver la forme de $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$, nous nous plaçons dans le repère orthonormé formé par les 4 vecteurs

$$v^\alpha = \frac{\vec{p} + \vec{q}}{|\vec{p} + \vec{q}|}, \quad \xi^\alpha, \eta^\alpha, \zeta^\alpha = \frac{\vec{g}^\alpha}{g},$$

où $g^\alpha = p^\alpha - q^\alpha$, $g = \sqrt{-g^\alpha g_\alpha}$; ξ^α et η^α sont unitaires ($\xi^\alpha \xi_\alpha = \eta^\alpha \eta_\alpha = -1$) orthogonaux à v^α et ζ^α .

Dans ce repère, \vec{e} a pour composantes

$$\begin{aligned} e^0 &= 0 \\ e^1 &= \sin \theta \cos \varphi \\ e^2 &= \sin \theta \sin \varphi \\ e^3 &= \cos \theta \end{aligned}$$

et on a

$$d\vec{e} = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

On a évidemment $\mathfrak{B}^{00} = 0$, $\mathfrak{B}^{0i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), $\mathfrak{B}^{ij} = 0$ pour $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3$) et

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{11} &= \mathfrak{B}^{22} = \int_S \varphi(pq, \theta) \sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi \\ &= \pi \int_0^\pi \varphi(pq, \theta) \sin^3 \theta d\theta \\ \mathfrak{B}^{33} &= \int_S \varphi(pq, \theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \varphi(pq, \theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

on en déduit que $\mathfrak{B}^{\alpha\beta}$ est de la forme

$$(33) \quad \mathfrak{B}^{\alpha\beta} = B(pq)(g^{\alpha\beta} - v^\alpha v^\beta) + C(pq)g^\alpha g^\beta$$

où

$$\begin{aligned} B(pq) &= -\mathfrak{B}^{11} \\ C(pq) &= \frac{1}{g^2} (\mathfrak{B}^{33} - \mathfrak{B}^{11}). \end{aligned}$$

Le second membre de l'équation de Boltzmann s'écrit alors

$$(34) \quad I(f) = \frac{a}{16\pi^2} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \left\{ A(pq) \left[\frac{1}{m^2 c^2} H_1 b^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2} q_\alpha q_\beta + p_\alpha q_\beta \right) + \frac{1}{m^3 c^3} H_2 c^{\alpha\beta\gamma} \left(-\frac{3}{4} p_\alpha p_\beta p_\gamma - \frac{3}{4} q_\alpha q_\beta q_\gamma + \frac{3}{4} p_\alpha q_\beta q_\gamma + \frac{3}{4} p_\alpha p_\beta q_\gamma \right) \right] + [B(pq)(g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta) + C(pq)g_{\alpha\beta}] \left[\frac{1}{m^2 c^2} 2s^2 H_1 b^{\alpha\beta} + \frac{1}{m^3 c^3} 3s^2 H_2 c^{\alpha\beta\gamma} (p_\gamma + q_\gamma) \right] \right\} dQ.$$

Puisque

$$(p^\alpha + q^\alpha)(p_\alpha + q_\alpha) = 2(m^2 c^2 + pq),$$

$$(p^\alpha - q^\alpha)(p_\alpha - q_\alpha) = 2(m^2 c^2 - pq),$$

$|\vec{p} + \vec{q}|$ et g ne dépendent que de pq ; il en est de même de s . Dans l'expression (34) de $I(f)$ n'apparaissent donc que des intégrales des types suivants :

$$J(\vec{p}) = \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \psi(pq) dQ,$$

$$J_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\vec{p}) = \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \psi(pq) q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_n} dQ \quad (n = 1, 2, 3)$$

En remplaçant f par son expression (15) dans l'équation de Boltzmann, on a une identité par rapport à $\vec{p} = mc(\lambda \vec{u} + \vec{\varepsilon})$, où $\lambda = \frac{1}{mc} p^\sigma u_\sigma$. Le principe de la méthode que nous utilisons consiste à identifier les premiers termes des développements des deux membres de cette équation selon les puissances de $\vec{\varepsilon}$. Nous négligerons, dans un premier temps, les termes d'ordre supérieur à 3 en $\vec{\varepsilon}$.

Puisque $p^\alpha p_\alpha = m^2 c^2$ et que $\vec{p} = mc(\lambda \vec{u} + \vec{\varepsilon})$, on a, en posant $\varepsilon^2 = -\varepsilon^\alpha \varepsilon_\alpha$,

$$\lambda^2 = 1 + \varepsilon^2$$

et

$$\lambda = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 0(\varepsilon^4).$$

On a d'autre part

$$pq = mc \left[u^\alpha q_\alpha + \varepsilon^\alpha q_\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2} u^\alpha q_\alpha + 0(\varepsilon^4) \right]$$

et

$$\frac{\partial(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha} = mc[q_\alpha - u^\sigma q_\sigma \varepsilon_\alpha + 0(\varepsilon^3)],$$

$$\frac{\partial^2(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha \partial\varepsilon^\beta} = -mcu^\sigma q_\sigma g_{\alpha\beta} + 0(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial^3(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha \partial\varepsilon^\beta \partial\varepsilon^\gamma} = 0(\varepsilon),$$

$$\left(\frac{\partial(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} = mcq_\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial^2(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha \partial\varepsilon^\beta} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} = -mcu^\sigma q_\sigma g_{\alpha\beta},$$

$$\left(\frac{\partial^3(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha \partial\varepsilon^\beta \partial\varepsilon^\gamma} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} = 0.$$

Nous utiliserons également les expressions suivantes :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^\alpha} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} = \left(\frac{d\psi}{d(pq)} \frac{\partial(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} mcq_\alpha \psi'_0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon^\alpha \partial\varepsilon^\beta} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} &= \left(\frac{d\psi}{d(pq)} \frac{\partial^2(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha \partial\varepsilon^\beta} + \frac{d^2\psi}{d(pq)^2} \frac{\partial(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha} \frac{\partial(pq)}{\partial\varepsilon^\beta} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} \\ &= -mcu^\sigma q_\sigma g_{\alpha\beta} \psi'_0 + m^2 c^2 q_\alpha q_\beta \psi''_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial\varepsilon^\alpha \partial\varepsilon^\beta \partial\varepsilon^\gamma} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} \\ &= \left(\frac{d\psi}{d(pq)} \frac{\partial^3(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha \partial\varepsilon^\beta \partial\varepsilon^\gamma} + \frac{d^2\psi}{d(pq)^2} \mathfrak{S} \frac{\partial^2(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha \partial\varepsilon^\beta} \frac{\partial(pq)}{\partial\varepsilon^\gamma} + \frac{d^3\psi}{d(pq)^3} \frac{\partial(pq)}{\partial\varepsilon^\alpha} \frac{\partial(pq)}{\partial\varepsilon^\beta} \frac{\partial(pq)}{\partial\varepsilon^\gamma} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} \\ &= -m^2 c^2 u^\sigma q_\sigma (g_{\alpha\beta} q_\gamma + g_{\alpha\gamma} q_\beta + g_{\beta\gamma} q_\alpha) \psi''_0 - m^3 c^3 q_\alpha q_\beta q_\gamma \psi'''_0, \end{aligned}$$

$$\text{où nous avons posé } \psi_0^{(n)} = \left(\frac{d^n \psi}{d(pq)^n} \right)_{\vec{\varepsilon}=0}.$$

On a alors pour l'intégrale $J(\vec{p})$ le développement suivant :

$$\begin{aligned}
 J(\vec{p}) &= J(m\vec{c}u) \\
 &+ \varepsilon^\alpha \left(\frac{\partial J}{\partial \varepsilon^\alpha} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} + \frac{1}{2} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \left(\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^\alpha \partial \varepsilon^\beta} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} + \frac{1}{3!} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\gamma \left(\frac{\partial^3 J}{\partial \varepsilon^\alpha \partial \varepsilon^\beta \partial \varepsilon^\gamma} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} + \dots \\
 &= \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \psi_0 dQ + mc \varepsilon^\alpha \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \psi'_0 q_\alpha dQ \\
 &+ \frac{1}{2} m^2 c^2 \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \psi''_0 q_\alpha q_\beta dQ + \frac{1}{3!} m^2 c^2 \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\gamma u^\rho \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \\
 &\quad (g_{\alpha\beta} q_\gamma + g_{\alpha\gamma} q_\beta + g_{\beta\gamma} q_\alpha) dQ + \frac{1}{3!} m^3 c^3 \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\gamma \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} q_\alpha q_\beta q_\gamma dQ,
 \end{aligned}$$

et des relations analogues pour les intégrales $J_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$.

Dans le second membre de l'équation de Boltzmann, nous avons alors des intégrales de la forme

$$K = \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \Phi dQ, \quad K_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \Phi q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_n} dQ,$$

où les Φ sont des fonctions de $(pq)_{\vec{\varepsilon}=0} = mc u^\alpha q_\alpha$. Un calcul simple montre que les intégrales $K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ ont des expressions de la forme

$$\begin{aligned}
 K_\alpha &= \rho_1 u_\alpha, \quad K_{\alpha\beta} = \rho_2 u_\alpha u_\beta + \rho_3 g_{\alpha\beta}, \quad K_{\alpha\beta\gamma} = \rho_4 u_\alpha u_\beta u_\gamma + \rho_5 \mathbf{S} u_\alpha g_{\beta\gamma}, \\
 (35) \quad K_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \rho_6 u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta + \rho_7 \mathbf{S} u_\alpha u_\beta g_{\gamma\delta} + \rho_8 \mathbf{S} g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta}, \\
 K_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} &= \rho_9 u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta u_\varepsilon + \rho_{10} \mathbf{S} u_\alpha u_\beta u_\gamma g_{\delta\varepsilon} + \rho_{11} \mathbf{S} u_\alpha g_{\beta\gamma} g_{\delta\varepsilon}
 \end{aligned}$$

où $\rho_i = \rho_i(x^\alpha)$ et que le second membre s'écrit alors

$$(36) \quad I(f) = a e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} \left[A c^\alpha \varepsilon_\alpha + B b^{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + C c^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma + D \left(\mathbf{S} \gamma^{\alpha\beta} c^\gamma \right) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma + \dots \right],$$

où A, B, C sont des fonctions des x^α .

Développons maintenant à l'ordre 3 par rapport à $\vec{\varepsilon}$ le premier membre

$$T(f) = p^\alpha \partial_\alpha f.$$

Nous nous placerons pour cela dans l'hypothèse des faibles gradients, consistant à négliger, d'une part les dérivés des tenseurs $b^{\alpha\beta}$, $c^{\alpha\beta\gamma}$ utilisés

dans f , d'autre part, les produits de ces tenseurs par les dérivés de α , \vec{u} , a . On vérifie immédiatement que, avec cette hypothèse, il suffit de prendre

$$T(f) = p^\alpha \partial_\alpha \left[\frac{a}{4\pi} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} \right]$$

soit

$$T(f) = \frac{a}{4\pi} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} T',$$

où

$$T' = p^\alpha \partial_\alpha \text{Log } a - \frac{1}{mc} p^\alpha p^\beta \nabla_\alpha (\alpha u_\beta).$$

$\vec{\varepsilon}$ étant orthogonal à \vec{u} , nous identifions dans $T(f)$ et $I(f)$ (divisés par $ae^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma}$) les termes indépendants de $\vec{\varepsilon}$, les composantes spatiales (relativement à \vec{u}) des coefficients de $\vec{\varepsilon}$, puis les composantes spatiales des coefficients symétrisés de $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$ et de $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma$. Grâce aux deux relations initiales $a_\alpha = 0$, $\alpha = \frac{mc^2}{kT}$ (où nous considérons T comme la température), nous aurons alors autant d'équations que d'inconnues.

Remplaçons dans T' , \vec{p} par son développement :

$$T' = mc \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \right) u^\alpha + \varepsilon^\alpha \right] \text{Log } a \\ - mc \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \right) u^\alpha + \varepsilon^\alpha \right] \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \right) u^\beta + \varepsilon^\beta \right] \nabla_\alpha (\alpha u_\beta).$$

Le terme constant est :

$$mc(u^\alpha \partial_\alpha \text{Log } a - u^\alpha \partial_\alpha \alpha)$$

Le terme en $\vec{\varepsilon}$ est

$$mc[\varepsilon^\alpha \partial_\alpha \text{Log } a - (\varepsilon^\alpha u^\beta + \varepsilon^\beta u^\alpha) \nabla_\alpha (\alpha u_\beta)],$$

ou

$$mc \{ \varepsilon^\alpha \partial_\alpha \text{Log } a - \varepsilon^\alpha u^\beta [\nabla_\alpha (\alpha u_\beta) + \nabla_\beta (\alpha u_\alpha)] \}.$$

Le coefficient de ε^α est donc

$$mc[\partial_\alpha \text{Log } a - (\partial_\alpha \alpha + \alpha u^\beta \nabla_\beta u_\alpha + u_\alpha u^\beta \partial_\beta \alpha)].$$

La composante d'espace de ce coefficient est

$$mc(\gamma_\alpha^\beta \partial_\beta \text{Log } a - \tau_\alpha),$$

en posant

$$\tau_\alpha = \gamma_\alpha^\beta (\partial_\beta \alpha + \alpha u^\sigma \nabla_\sigma u_\beta)$$

Le terme d'ordre 2 est

$$mc \left[\frac{\varepsilon^2}{2} u^\alpha \partial_\alpha \text{Log } a - (\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta + \varepsilon^2 u^\alpha u^\beta) \nabla_\alpha (\alpha u_\beta) \right].$$

Le coefficient symétrisé de $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta$ est donc

$$\frac{1}{2} mc g_{\alpha\beta} u^\sigma \partial_\sigma \text{Log } a - \frac{1}{2} mc [\nabla_\alpha (\alpha u_\beta) + \nabla_\beta (\alpha u_\alpha) - mc u^\sigma \partial_\sigma \alpha].$$

La composante d'espace de ce coefficient est

$$\frac{1}{2} mc \gamma_{\alpha\beta} u^\sigma \partial_\sigma \text{Log } a - mc \gamma_{\alpha\beta} u^\sigma \partial_\sigma \alpha - \frac{1}{2} mc \alpha \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\mu (\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho).$$

Le terme d'ordre 3 est

$$- \frac{1}{2} mc (\varepsilon^\alpha \varepsilon^2 u^\beta + \varepsilon^\beta \varepsilon^2 u^\alpha) \nabla_\alpha (\alpha u_\beta)$$

ou

$$- \frac{1}{2} mc \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\mu g_{\beta\mu} u^\beta [\nabla_\alpha (\alpha u_\beta) + \nabla_\beta (\alpha u_\alpha)];$$

la composante d'espace du coefficient symétrisé de $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\gamma$ est donc

$$- \frac{1}{6} mc \mathbf{S} \gamma_{\alpha\beta} \tau_\gamma.$$

L'identification des deux membres de l'équation de Boltzmann, limitée aux termes d'ordre 3, nous fournit alors, compte tenu de l'expression (36) du second membre :

$$(37) \quad u^\alpha \partial_\alpha \text{Log } a - u^\alpha \partial_\alpha \alpha = 0$$

$$(38) \quad \frac{1}{4\pi} mc (\gamma_\alpha^\beta \partial_\beta \text{Log } a - \tau_\alpha) = A c_\alpha$$

$$(39) \quad \frac{1}{4\pi} \left[\frac{mc}{2} \gamma_{\alpha\beta} u^\sigma \partial_\sigma \text{Log } a - mc \gamma_{\alpha\beta} u^\sigma \partial_\sigma \alpha - \frac{1}{2} mc \alpha \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\mu (\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho) \right] = B b_{\alpha\beta}$$

$$(40) \quad - \frac{1}{24\pi} mc \mathbf{S} \gamma_{\alpha\beta} \tau_\gamma = C c_{\alpha\beta\gamma} + D \mathbf{S} \gamma_{\alpha\beta} c_\gamma$$

les relations (17) (23) (37) (38) (39) nous fournissent 24 relations scalaires permettant de déterminer les 24 fonctions inconnues intervenant dans l'expression (15) de la fonction de distribution.

En contractant α et β dans la relation (40), on obtient

$$-\frac{5}{6} m c \tau_{\alpha} = 4\pi(C + 5D)c_{\alpha}$$

et, avec l'expression (30) du courant de chaleur q_{α} :

$$q_{\alpha} = -\frac{5}{2(C + 5D)} \alpha m^6 c^8 (H_2 H_4 - H_3^2) \tau_{\alpha}.$$

En remplaçant α par $\frac{mc^2}{kT}$, on a

$$\tau_{\alpha} = -\frac{mc^2}{kT^2} \gamma_{\alpha}^{\beta} (\partial_{\beta} T - T u^{\sigma} \nabla_{\sigma} u_{\beta});$$

q_{α} est donc de la forme

$$(41) \quad q_{\alpha} = \chi \gamma_{\alpha}^{\beta} (\partial_{\beta} T - T u^{\sigma} \nabla_{\sigma} u_{\beta}),$$

où χ peut être interprété comme le coefficient de conductivité du gaz.

Remarques :

1. — Dans l'hypothèse des faibles gradients, la relation $\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$ s'écrit

$$\nabla_{\alpha} [a(\alpha^2 H_3 u^{\alpha} u^{\beta} - H_2 g^{\alpha\beta})] = 0;$$

par multiplication par γ_{β}^{β} , compte tenu de la relation

$$H'_n = -\alpha H_{n+1}$$

on en tire

$$(42) \quad \alpha H_3 \tau_{\alpha} = H_2 \gamma_{\alpha}^{\beta} \partial_{\beta} \text{Log } a;$$

En comparant les relations (38) et (42), on retrouve la forme (41) du courant de chaleur.

2. — On vérifie facilement que la relation (41) peut aussi s'écrire

$$(43) \quad q^{\alpha} = \chi \gamma^{\alpha\beta} \nabla_{\sigma} (T \gamma_{\beta}^{\sigma}).$$

En théorie classique à trois dimensions, le courant de chaleur est

$$q_i = \chi \partial_i T$$

ou

$$q^i = \chi \delta^{ij} \partial_k (T \delta_j^k),$$

expression qu'il est intéressant de comparer avec (43). D'autre part, la forme (43) du courant de chaleur nous conduit à appeler tenseur de température le tenseur

$$\theta_\beta^\sigma = T \gamma_\beta^\sigma.$$

Dans le cas d'un fluide sans processus dissipatifs, la relation $\mathbf{P} = nkT$ s'écrit aussi

$$\pi^{\alpha\beta} = nk\theta^{\alpha\beta}$$

On peut se demander si $\theta^{\alpha\beta}$ ne constitue pas une première approximation d'un tenseur de température plus élaboré.

3. — Notons également l'expression suivante du courant de chaleur :

$$q_\alpha = \chi u^\rho [\nabla_\alpha (T u_\rho) - \nabla_\rho (T u_\alpha)].$$

Contractons, dans la relation (39), α et β ; nous obtenons

$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{3}{2} mc (u^\sigma \partial_\sigma \text{Log } a - 2u^\sigma \partial_\sigma \alpha) - mc \alpha \nabla_\rho u^\rho \right] = 0$$

et

$$(44) \quad Bb_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \alpha mc \left[\frac{1}{3} \gamma_{\alpha\beta} \nabla_\rho u^\rho - \frac{1}{2} \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\mu (\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho) \right].$$

Grâce à la relation (29), on en déduit l'expression du tenseur des pressions

$$(45) \quad \pi_{\alpha\beta} = (-P + c\lambda \nabla_\rho u^\rho) \gamma_{\alpha\beta} + c\mu \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\sigma (\nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho)$$

où

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

et

$$(46) \quad \lambda = \frac{2\alpha m^5 c^5 H_1 H_3}{12\pi B}.$$

2. — CAS OÙ LA SECTION DE CHOC EST CONSTANTE

Nous utiliserons ici, comme dans une remarque précédente et pour rendre les calculs plus simples, l'équation de conservation $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$,

bien que les relations scalaires qu'elle fournit ne fassent pas partie de notre système de 24 équations.

Dans le cas où la section de choc est constante, on a (Chernikov [2])

$$\varphi(pq, \theta) = \frac{\sigma}{4\pi} \langle p, q \rangle$$

où

$$\langle p, q \rangle = \sqrt{(pq)^2 - m^4 c^4}$$

et où σ est la section de choc globale.

On peut alors calculer les intégrales (31) et (32), soit

$$A(pq) = \frac{\sigma}{4\pi} \langle p, q \rangle \int_S \vec{d\vec{e}} = \sigma \langle p, q \rangle$$

et

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta}(pq) = \int_S \varphi(pq, \theta) e_\alpha e_\beta \vec{d\vec{e}}$$

on a

$$\mathcal{B}^{33} = \mathcal{B}^{11} = \frac{\sigma}{4} \langle p, q \rangle \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -\frac{\sigma}{3} \langle p, q \rangle$$

et

$$\mathcal{B}^{\alpha\beta} = -\frac{\sigma}{3} \langle p, q \rangle (g^{\alpha\beta} - v^\alpha v^\beta).$$

Nous calculerons dans un premier temps le coefficient de conductivité χ ; $b^{\alpha\beta}$ n'intervenant pas dans l'expression du courant de chaleur, nous pouvons prendre $b^{\alpha\beta} = 0$ et la relation (34) s'écrit

$$(47) \quad I(f) = \frac{a\sigma}{16\pi^2} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} \frac{1}{m^3 c^3} H_2 \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q^\sigma u_\sigma} \langle p, q \rangle c^{\alpha\beta\gamma} \left[\left(-\frac{3}{4} p_\alpha p_\beta p_\gamma - \frac{3}{4} q_\alpha q_\beta q_\gamma + \frac{3}{4} p_\alpha q_\beta q_\gamma \right) + \frac{3}{4} p_\alpha p_\beta q_\gamma \right] - (g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta) s^2 (p_\gamma + q_\gamma) dQ.$$

Rappelons que nous avons posé

$$v_\alpha = \frac{p_\alpha + q_\alpha}{|\vec{p} + \vec{q}|},$$

$$2s^2 = pq - m^2 c^2 \quad (s > 0),$$

et que

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = 2(pq + m^2 c^2).$$

Nous allons chercher le terme en $\vec{\varepsilon}$ dans le développement de \mathfrak{J} , en posant

$$I(f) = \frac{a\sigma}{16\pi^2} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} \frac{1}{m^3 c^3} H_2 \mathfrak{J}.$$

Si nous prenons un repère orthonormé propre, nous avons $q^\sigma u_\sigma = q_0 = q^0$. Dans la relation (47) apparaissent donc des intégrales des types

$$\begin{aligned} I &= \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \langle p, q \rangle dQ, & I_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \langle p, q \rangle q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_n} dQ, \\ J &= \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \langle p, q \rangle 2s^2 dQ, & J_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \langle p, q \rangle 2s^2 q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_n} dQ, \\ K &= \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \langle p, q \rangle \frac{2s^2}{|\vec{p} + \vec{q}|^2} dQ, & K_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \langle p, q \rangle \frac{2s^2}{|\vec{p} + \vec{q}|^2} q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_n} dQ, \end{aligned}$$

et on peut écrire

$$(48) \quad \mathfrak{J} = c^{\alpha\beta\gamma} \left(-\frac{3}{4} I p_\alpha p_\beta p_\gamma + \frac{3}{4} p_\alpha p_\beta I_\gamma + \frac{3}{4} p_\alpha I_{\beta\gamma} - \frac{3}{4} I_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} J g_{\alpha\beta} p_\gamma \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} J_\gamma + \frac{1}{2} K p_\alpha p_\beta p_\gamma + \frac{3}{2} p_\alpha p_\beta K_\gamma + \frac{3}{2} p_\alpha K_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} K_{\alpha\beta\gamma} \right).$$

Négligeant ε^2 , on peut écrire

$$p_\alpha = mc(u_\alpha + \varepsilon_\alpha)$$

et, compte tenu de la relation

$$\left(\frac{\partial \psi(pq)}{\partial \varepsilon^\alpha} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} = mc q_\alpha \left(\frac{d\psi(pq)}{d(pq)} \right)_{\vec{\varepsilon}=0},$$

on a

$$I = I(\varepsilon) = \overset{\circ}{I} + mc \varepsilon^\alpha \overset{\circ}{I}'_\alpha, \quad I_\alpha = \overset{\circ}{I}_\alpha + mc \varepsilon^\beta \overset{\circ}{I}'_{\alpha\beta}, \dots$$

où par exemple

$$\overset{\circ}{I}'_\alpha = \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \left(\frac{d \langle p, q \rangle}{d(pq)} \right)_{\vec{\varepsilon}=0} dQ$$

L'expression (48) devient alors

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{J} = c^{\alpha\beta\gamma} & \left[-\frac{3}{4} m^3 c^3 (u_\alpha + \varepsilon_\alpha)(u_\beta + \varepsilon_\beta)(u_\gamma + \varepsilon_\gamma)(\overset{\circ}{\mathbf{I}} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{I}}_\rho) \right. \\
 & + \frac{3}{4} m^2 c^2 (u_\alpha + \varepsilon_\alpha)(u_\beta + \varepsilon_\beta)(\overset{\circ}{\mathbf{I}}_\gamma + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\gamma\rho}) + \frac{3}{4} mc(u_\alpha + \varepsilon_\alpha)(\overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\beta\gamma} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\beta\gamma\rho}) \\
 & - \frac{3}{4} (\overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\alpha\beta\gamma} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\alpha\beta\gamma\rho}) - \frac{1}{2} mcg_{\alpha\beta}(u_\gamma + \varepsilon_\gamma)(\overset{\circ}{\mathbf{J}} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{J}}_\rho) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(\overset{\circ}{\mathbf{J}}_\gamma + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{J}}_{\gamma\rho}) \\
 & + \frac{1}{2} m^3 c^3 (u_\alpha + \varepsilon_\alpha)(u_\beta + \varepsilon_\beta)(u_\gamma + \varepsilon_\gamma)(\overset{\circ}{\mathbf{K}} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{K}}_\rho) \\
 & + \frac{3}{2} m^2 c^2 (u_\alpha + \varepsilon_\alpha)(u_\beta + \varepsilon_\beta)(\overset{\circ}{\mathbf{K}}_\gamma + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\gamma\rho}) + \frac{3}{2} mc(u_\alpha + \varepsilon_\alpha)(\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\beta\gamma} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\beta\gamma\rho}) \\
 & \left. + \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\alpha\beta\gamma} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\alpha\beta\gamma\rho}) \right].
 \end{aligned}$$

Compte tenu de $c^{\alpha\beta\gamma}u_\alpha = 0$, le terme d'ordre 1 dans \mathfrak{J} est

$$mcc^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{3}{4} \varepsilon_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\beta\gamma} - \frac{3}{4} \varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\alpha\beta\gamma\rho} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \varepsilon_\gamma \overset{\circ}{\mathbf{J}} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{J}}_{\gamma\rho} + \frac{3}{2} \varepsilon_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\alpha\beta\gamma\rho} \right).$$

Le coefficient de ε^ρ dans \mathfrak{J} est donc

$$\mathfrak{J}_\rho = mc \left(\frac{3}{4} c^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\alpha\beta} - \frac{3}{4} c^{\alpha\beta\gamma} \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\alpha\beta\gamma\rho} - \frac{1}{2} c_\rho \overset{\circ}{\mathbf{J}} - \frac{1}{2} c^\gamma \overset{\circ}{\mathbf{J}}_{\gamma\rho} + \frac{3}{2} c^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} c^{\alpha\beta\gamma} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\alpha\beta\gamma\rho} \right).$$

D'autre part, en utilisant les relations (35), on peut écrire

$$(49a) \quad \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{\alpha\beta} = (\overset{\circ}{\mathbf{I}}_{00} + \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{11})u_\alpha u_\beta - \overset{\circ}{\mathbf{I}}_{11}g_{\alpha\beta}$$

$$(49b) \quad \overset{\circ}{\mathbf{J}}'_{\alpha\beta\gamma\rho} = (\overset{\circ}{\mathbf{I}}_{0000} - 6\overset{\circ}{\mathbf{I}}_{0011} - \overset{\circ}{\mathbf{I}}'_{11111})u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\rho \\ - \left(\overset{\circ}{\mathbf{I}}'_{0011} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{\mathbf{I}}'_{11111} \right) \mathbf{S}u_\alpha u_\beta g_{\gamma\rho} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{\mathbf{I}}'_{11111} \mathbf{S}g_{\alpha\beta} g_{\gamma\rho}$$

$$(49c) \quad \overset{\circ}{\mathbf{J}}'_{\gamma\rho} = (\overset{\circ}{\mathbf{J}}_{00} + \overset{\circ}{\mathbf{J}}_{11})u_\gamma u_\rho - \overset{\circ}{\mathbf{J}}'_{11}g_{\gamma\rho}$$

$$(49d) \quad \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\alpha\beta} = (\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{00} + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{11})u_\alpha u_\beta - \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{11}g_{\alpha\beta}$$

$$(49e) \quad \overset{\circ}{\mathbf{K}}'_{\alpha\beta\gamma\rho} = (\overset{\circ}{\mathbf{K}}'_{0000} - 6\overset{\circ}{\mathbf{K}}'_{0011} - 3\overset{\circ}{\mathbf{K}}'_{11111})u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\rho \\ - \left(\overset{\circ}{\mathbf{K}}'_{0011} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{\mathbf{K}}'_{11111} \right) \mathbf{S}u_\alpha u_\beta g_{\gamma\rho} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{\mathbf{K}}'_{11111} \mathbf{S}g_{\alpha\beta} g_{\gamma\rho}$$

et on a

$$(50) \quad \mathfrak{J}_\rho = m c c_\rho \left(-\frac{3}{4} \overset{\circ}{I}_{111} - \frac{3}{4} \overset{\circ}{I}'_{11111} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{J} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{J}'_{11} - \frac{3}{2} \overset{\circ}{K}_{11} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{K}'_{11111} \right).$$

Avant de poursuivre, il est intéressant de faire les remarques suivantes :

On a, dans le repère orthonormé propre choisi,

$$dQ = \frac{1}{q_0} dq^1 dq^2 dq^3 ;$$

$\psi(q_0)$ étant une fonction quelconque, considérons l'intégrale

$$A = \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \psi(q_0) (q_1)^2 dQ ;$$

on peut écrire

$$A = \frac{1}{3} \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \psi(q_0) [(q_1)^2 + (q_2)^2 + (q_3)^2] dQ ;$$

or

$$q^\alpha q_\alpha = q_0^2 - (q_1)^2 - (q_2)^2 - (q_3)^2 = m^2 c^2,$$

donc

$$A = \frac{1}{3} \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \psi(q_0) (q_0^2 - m^2 c^2) dQ,$$

où la fonction à intégrer ne dépend plus que de q_0 .

De même, considérons l'intégrale

$$B = \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \psi(q_0) (q_1)^4 dQ ;$$

En passant en coordonnées sphériques

$$q^1 = m c \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$q^2 = m c \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$q^3 = m c \rho \cos \theta,$$

on a

$$B = m^7 c^7 \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \frac{\psi(q_0)}{q_0} \rho^6 \sin^5 \theta \cos^4 \varphi d\rho d\theta d\varphi \quad (q_0 = m c \sqrt{1 + \rho^2})$$

soit

$$B = \frac{4\pi}{5} m^7 c^7 \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \frac{\psi(q_0)}{q_0} \rho^6 d\rho,$$

ce que l'on peut écrire

$$(51) \quad B = \frac{1}{5} \int_Q e^{-\frac{\alpha}{cm} q_0} \psi(q_0) (q_0^2 - m^2 c^2)^2 dQ,$$

où la fonction à intégrer ne dépend encore que de q_0 .

Pour $\vec{\varepsilon} = 0$, on a

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= mc \sqrt{q_0^2 - m^2 c^2} \\ 2s^2 &= mc(q_0 - mc) \\ |\vec{p} + \vec{q}|^2 &= 2mc(q_0 + mc) \\ \frac{d}{d(pq)} \langle p, q \rangle &= \frac{q_0}{\sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}} \\ \frac{d}{d(pq)} [2s^2 \langle p, q \rangle] &= \frac{mc(q_0 - mc)(2q_0 + mc)}{\sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}} \\ \frac{d}{p(dq)} \left[2s^2 \langle p, q \rangle \frac{1}{|\vec{p} + \vec{q}|^2} \right] &= \frac{(q_0 - mc)(q_0 + 2mc)}{2(q_0 + mc) \sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}}. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression de I, J, K, ..., la relation (50) devient

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_\rho &= m c c_\rho \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \left[-\frac{1}{4} mc \sqrt{q_0^2 - m^2 c^2} (q_0^2 - m^2 c^2) \right. \\ &\quad - \frac{3}{20} \frac{q_0}{\sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}} (q_0^2 - m^2 c^2)^2 - \frac{1}{2} m^2 c^2 (q_0 - mc) \sqrt{q_0^2 - m^2 c^2} \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{mc(q_0 - mc)(2q_0 + mc)}{\sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}} (q_0^2 - m^2 c^2) - \frac{1}{2} \frac{mc(q_0 - mc) \sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}}{2(q_0 + mc)} \\ &\quad \left. + \frac{1}{10} \frac{(q_0 - mc)(q_0 + 2mc)}{2(q_0 + mc) \sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}} (q_0^2 - m^2 c^2) \right] dQ \end{aligned}$$

ou, après être passé en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_\rho &= 4\pi m^4 c^4 c_\rho \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0}}{q_0 \sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}} \left[-\frac{1}{4} mc (q_0^2 - m^2 c^2)^2 - \frac{3}{20} q_0 (q_0^2 - m^2 c^2)^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} m^2 c^2 (q_0 - mc) (q_0^2 - m^2 c^2) + \frac{1}{6} mc (q_0 - mc) (2q_0 + mc) (q_0^2 - m^2 c^2) \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} mc (q_0 - mc)^2 (q_0^2 - m^2 c^2) + \frac{1}{20} (q_0 - mc)^3 (q_0 + 2mc) (q_0 + mc) \right] \rho^2 d\rho \end{aligned}$$

En prenant $x = \frac{q_0}{mc}$ comme variable d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_\rho &= 4\pi m^7 c^7 c_\rho \int_1^\infty e^{-\alpha x} \left[-\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{15} x^3 + \frac{3}{5} x^2 + \frac{1}{6} x - \frac{13}{30} \right] dx \\ &= -\frac{16\pi}{4\alpha^5} m^7 c^7 c_\rho e^{-\alpha} (4\alpha^2 + 13\alpha + 20). \end{aligned}$$

On en déduit, dans l'identification des deux membres, que

$$(\gamma_\alpha^\beta \partial_\beta \text{Log } a - \tau_\alpha) = -\frac{4\sigma}{5\alpha^5} m^3 c^3 H_2 e^{-\alpha} (4\alpha^2 + 13\alpha + 20) c_\alpha,$$

ou, compte tenu de la relation

$$H_2 \gamma_\alpha^\beta \partial_\beta \text{Log } a = \alpha H_3 \tau_\alpha$$

obtenue à partir de $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ dans l'hypothèse des faibles gradients et des relations

$$q_\alpha = 3\alpha m^4 c^6 (H_2 H_4 - H_3^2) c_\alpha,$$

$$\tau_\alpha = -\frac{mc^2}{kT^2} \gamma_\alpha^\beta (\partial_\beta T - T u^\sigma \nabla_\sigma u_\beta),$$

que

$$q_\alpha = \chi \gamma_\alpha^\beta (\partial_\beta T - T u^\sigma \nabla_\sigma u_\beta),$$

où

$$\chi = \frac{15\alpha^6 m^2 c^5 (H_2 H_4 - H_3^2) (\alpha H_3 - H_2) e^\alpha}{4\sigma (4\alpha^2 + 13\alpha + 20) k T^2 H_2^2}.$$

Calculons la limite de χ lorsque c tend vers l'infini : on a $\alpha = \frac{mc^2}{kT}$; d'autre part, pour α tendant vers l'infini, on a

$$H_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha^n} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha} \left(1 + \frac{4n^2 - 1}{8\alpha} + \dots \right).$$

On en déduit facilement que la limite non relativiste de χ est

$$\chi_0 = \frac{75k}{32\sigma} \sqrt{\frac{\pi k T}{2m}}$$

Calculons maintenant les coefficients de viscosité λ et μ ; nous pouvons prendre ici $e^{\alpha\beta\gamma} = 0$ et la relation (34) s'écrit

$$(52) \quad I(f) = \frac{a\sigma}{16\pi^2} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} \frac{1}{m^2 c^2} H_1 J',$$

où

$$J' = b^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} p_\alpha p_\beta I - \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} + p_\alpha I_\beta + \frac{1}{3} p_\alpha p_\beta K + \frac{1}{3} K_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} p_\alpha K_\beta \right).$$

Négligeons l'écriture des termes en ε^3 ; compte tenu de la relation

$$\left(\frac{\partial^2 \psi(pq)}{\partial \varepsilon^\alpha \partial \varepsilon^\beta} \right)_{\varepsilon=0} = m^2 c^2 q_\alpha q_\beta \left(\frac{d^2 \psi(pq)}{d(pq)^2} \right)_{\varepsilon=0} - mcq^\rho u_\rho g_{\alpha\beta} \left(\frac{d\psi(pq)}{d(pq)} \right)_{\varepsilon=0},$$

l'intégrale I, par exemple, s'écrit

$$I = \overset{\circ}{I} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{I}'_\rho + \frac{1}{2} \varepsilon^\rho \varepsilon^\mu (m^2 c^2 \overset{\circ}{I}''_{\rho\mu} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{I}'_0).$$

On a, d'autre part,

$$p_\alpha = mc \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) u_\alpha + \varepsilon_\alpha \right],$$

et J' s'écrit

$$\begin{aligned} J' = b^{\alpha\beta} \left\{ -\frac{1}{2} m^2 c^2 \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) u_\alpha + \varepsilon_\alpha \right] \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) u_\beta + \varepsilon_\beta \right] \right. & \left[\overset{\circ}{I} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{I}'_\rho \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^\rho \varepsilon^\mu (m^2 c^2 \overset{\circ}{I}''_{\rho\mu} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{I}'_0) \right] \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[\overset{\circ}{I}_{\alpha\beta} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{I}'_{\alpha\beta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^\rho \varepsilon^\mu (m^2 c^2 \overset{\circ}{I}''_{\alpha\beta\rho\mu} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{I}'_{0\alpha\beta}) \right] \right. \\ & \left. + mc \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) u_\alpha + \varepsilon_\alpha \right] \left[\overset{\circ}{I}_\beta + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{I}'_{\beta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^\rho \varepsilon^\mu (m^2 c^2 \overset{\circ}{I}''_{\beta\rho\mu} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{I}'_{0\beta}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} m^2 c^2 \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) u_\alpha + \varepsilon_\alpha \right] \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) u_\beta + \varepsilon_\beta \right] \right. \\ & \left. \left[\overset{\circ}{K} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{K}'_\rho + \frac{1}{2} \varepsilon^\rho \varepsilon^\mu (m^2 c^2 \overset{\circ}{K}''_{\rho\mu} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{K}'_0) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \left[\overset{\circ}{K}_{\alpha\beta} + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{K}'_{\alpha\beta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^\rho \varepsilon^\mu (m^2 c^2 \overset{\circ}{K}''_{\alpha\beta\rho\mu} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{K}'_{0\alpha\beta}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} mc \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) u_\alpha + \varepsilon_\alpha \right] \left[\overset{\circ}{K}_\beta + mc\varepsilon^\rho \overset{\circ}{K}'_{\beta\rho} + \frac{1}{2} \varepsilon^\rho \varepsilon^\mu (m^2 c^2 \overset{\circ}{K}''_{\beta\rho\mu} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{K}'_{0\beta}) \right] \right\} \end{aligned}$$

Puisque $b^{2\beta}u_\beta = 0$, le terme d'ordre 2 en $\vec{\varepsilon}$ est

$$b^{\alpha\beta} \left[-\frac{1}{2} m^2 c^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \overset{\circ}{\mathbb{I}} - \frac{1}{4} \varepsilon^\rho \varepsilon^\mu (m^2 c^2 \overset{\circ}{\mathbb{I}}''_{\alpha\beta\rho\mu} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{\mathbb{I}}'_{0\alpha\beta}) + m^2 c^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbb{I}}'_{\beta\rho} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} m^2 c^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \overset{\circ}{\mathbb{K}} + \frac{1}{6} \varepsilon^\rho \varepsilon^\mu (m^2 c^2 \overset{\circ}{\mathbb{K}}''_{\alpha\beta\rho\mu} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{\mathbb{K}}'_{0\alpha\beta}) + \frac{2}{3} m^2 c^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon^\rho \overset{\circ}{\mathbb{K}}'_{\beta\rho} \right].$$

Le coefficient de $\varepsilon^\rho \varepsilon^\mu$ dans \mathfrak{J}' est donc

$$\mathfrak{J}'_{\rho\mu} = -\frac{1}{2} m^2 c^2 b_{\rho\mu} \overset{\circ}{\mathbb{I}} - \frac{1}{4} (m^2 c^2 \overset{\circ}{\mathbb{I}}''_{\alpha\beta\rho\mu} b^{\alpha\beta} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{\mathbb{I}}'_{\alpha\beta} b^{\alpha\beta}) + m^2 c^2 \overset{\circ}{\mathbb{I}}'_{\beta\rho} b_\mu^\beta \\ + \frac{1}{3} m^2 c^2 b_{\rho\mu} \overset{\circ}{\mathbb{K}} + \frac{1}{6} (m^2 c^2 \overset{\circ}{\mathbb{K}}''_{\alpha\beta\rho\mu} b^{\alpha\beta} - mcg_{\rho\mu} \overset{\circ}{\mathbb{K}}'_{0\alpha\beta} b^{\alpha\beta}) + \frac{2}{3} m^2 c^2 \overset{\circ}{\mathbb{K}}'_{\beta\rho} b_\mu^\beta.$$

En écrivant pour les intégrales $\overset{\circ}{\mathbb{K}}''_{\alpha\beta\rho\mu}$ et $\overset{\circ}{\mathbb{K}}'_{0\alpha\beta}$ des relations analogues aux relations (49) et en tenant compte de $b_\rho^\rho = 0$, on a alors

$$(53) \quad \mathfrak{J}'_{\rho\mu} = m^2 c^2 b_{\rho\mu} \left(-\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbb{I}} - \frac{1}{6} \overset{\circ}{\mathbb{I}}''_{11111} - \overset{\circ}{\mathbb{I}}'_{11} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{\mathbb{K}} + \frac{1}{9} \overset{\circ}{\mathbb{K}}''_{11111} - \frac{2}{3} \overset{\circ}{\mathbb{K}}'_{11} \right).$$

Pour $\vec{\varepsilon} = 0$, on a

$$\frac{d^2}{d(pq)^2} \langle p, q \rangle = \frac{-mc}{(q_0^2 - m^2 c^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{d^2}{d(pq)^2} \left[2s^2 \langle p, q \rangle \frac{1}{|\vec{p} + \vec{q}|^2} \right] = \frac{3mc}{2(q_0 + mc)^2 \sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}}$$

et la relation (52) s'écrit, grâce à (51),

$$\mathfrak{J}'_{\rho\mu} = m^2 c^2 b_{\rho\mu} \int_Q e^{-\frac{\alpha}{mc} q_0} \frac{1}{\sqrt{q_0^2 - m^2 c^2}} \\ \left[-\frac{1}{2} mc(q_0^2 - m^2 c^2) + \frac{1}{30} mc(q_0^2 - m^2 c^2) - \frac{1}{3} q_0(q_0^2 - m^2 c^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{6} mc(q_0 - mc)^2 + \frac{1}{30} mc(q_0 - mc)^2 - \frac{1}{9} (q_0 - mc)^2 (q_0 + 2mc) \right] dQ,$$

ou, après être passé en coordonnées polaires, puis avoir pris $x = \frac{q_0}{mc}$ comme variable d'intégration :

$$\mathfrak{J}'_{\rho\mu} = \frac{16}{45} b_{\rho\mu} \pi m^6 c^6 \int_1^\infty e^{-\alpha x} (-5x^3 - 3x^2 + 3x + 5) dx \\ = -\frac{32}{15} \pi m^6 c^6 b_{\rho\mu} \frac{3\alpha^2 + 6\alpha + 5}{\alpha^4} e^{-\alpha}.$$

Le coefficient de $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\mu$ dans le second membre de l'équation de Boltzmann est donc $Bb_{\rho\mu}$, où

$$B = -\frac{2a\sigma}{15\pi\alpha^4} m^4 c^4 H_1 e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} (3\alpha^2 + 6\alpha + 5) e^{-\alpha}.$$

On en déduit la valeur de λ et celle de μ grâce à la relation (46). La limite non relativiste de λ est

$$\lambda_0 = -\frac{5}{12\sigma} \sqrt{\frac{\pi mkT}{2}}.$$

3. — CAS OÙ LES TERMES QUADRATIQUES NE SONT PAS NÉGLIGÉS

Nous ne faisons ici aucune hypothèse sur la section de choc. Si l'on ne néglige plus, dans $f(\vec{p}')f(\vec{q}') - f(\vec{p})f(\vec{q})$, les termes quadratiques par rapport à b et c , on vérifie que le coefficient d'espace de ε^α dans le second membre de l'équation de Boltzmann est de la forme

$$I^\alpha = e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} (Ac^\alpha + Bb_\alpha^\rho c_\rho + Cc_{\alpha\beta\gamma} b^{\beta\gamma}) \quad (c^\alpha = c^{\alpha\rho}{}_\rho).$$

L'identification des coefficients d'espace de ε^α dans les deux membres nous fournit alors la relation

$$(54) \quad \gamma_\alpha^\beta \partial_\beta \text{Log } a - \tau_\alpha = Ac^\alpha + Bb_\alpha^\rho c_\rho + Cc_{\alpha\beta\gamma} b^{\beta\gamma}.$$

Nous pouvons, en première approximation, remplacer dans les termes quadratiques du second membre de la relation (54) $b_{\alpha\beta}$ et $c_{\alpha\beta\gamma}$ par leurs évaluations déjà obtenues en fonction de

$$q^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} (\partial_\beta T - T u^\sigma \nabla_\sigma u_\beta)$$

et de

$$\pi_{\alpha\beta} + P\gamma_{\alpha\beta} = c\lambda \nabla_\rho u^\rho \cdot \gamma_{\alpha\beta} + c\mu \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\sigma (\nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho).$$

En tenant compte de la colinéarité de $\gamma_\alpha^\beta \partial_\beta \text{Log } a$ et de τ_α déduite de $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ dans l'hypothèse des faibles gradients (relation (42)), ainsi que de la colinéarité de c^α et de q^α , on en déduit que le courant de chaleur a une expression de la forme

$$(55) \quad q^\alpha = [(\chi + c\lambda' \nabla_\rho u^\rho) \gamma^{\alpha\beta} + c\mu' \gamma^{\alpha\rho} \gamma^{\beta\mu} (\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho)] [\partial_\beta T - T u^\sigma \nabla_\sigma u_\beta],$$

où

$$3\lambda' + 2\mu' = 0.$$

L'identification des coefficients d'espace symétrisés de $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta$ dans les deux membres nous fournit une relation de la forme

$$(56) \quad \gamma_{\alpha\beta}(u^\sigma \partial_\sigma \text{Log } a - u^\sigma \partial_\sigma \alpha) - \alpha \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\mu (\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho) \\ = A c_\alpha c_\beta + B b_{\alpha\beta} + C c_{\alpha\beta\gamma} c^\gamma + D c_{\alpha\lambda\mu} c_\beta^{\lambda\mu} + E b_{\alpha\rho} b_\beta^\rho.$$

En contractant α et β dans les deux membres de la relation (56), et en remplaçant, dans les termes quadratiques du second membre, $c_{\alpha\beta\gamma}$ et $b_{\alpha\beta}$ par leurs premières évaluations, on obtient une relation de la forme suivante :

$$(57) \quad \pi_{\alpha\beta} + P\gamma_{\alpha\beta} = c\lambda\gamma_{\alpha\beta}\nabla_\rho u^\rho + c\mu\gamma_\alpha^\rho\gamma_\beta^\sigma(\nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho) \\ + A\left(\gamma_\alpha^\rho\gamma_\beta^\sigma - \frac{1}{3}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\rho\sigma}\right)(\partial_\rho T - Tu^\theta\nabla_\theta u_\rho)(\partial_\sigma T - Tu^\eta\nabla_\eta u_\sigma) \\ + B\left[\left(\gamma_\alpha^\rho\gamma_\beta^\sigma\gamma^{\theta\eta} - \frac{1}{3}\gamma^{\rho\theta}\gamma^{\sigma\eta}\gamma_{\alpha\beta}\right)(\nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho)(\nabla_\theta u_\eta + \nabla_\eta u_\theta) \right. \\ \left. - 2\nabla_\theta u^\theta \cdot \left(\gamma_\alpha^\rho\gamma_\beta^\sigma - \frac{1}{3}\gamma^{\rho\sigma}\delta_{\alpha\beta}\right)(\nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho)\right]$$

(il est bien évident que, dans les relations ci-dessus, la lettre A, par exemple, représente un coefficient non calculé, différant d'une égalité à l'autre).

Dans le cas où la section de choc est connue, il est possible de trouver les expressions des coefficients figurant dans les relations (55) et (57). Nous effectuons actuellement ce calcul dans le cas où la section de choc est constante.

4. — APPROXIMATIONS SUIVANTES

Nous considérons par exemple l'approximation d'ordre 5 :

$$(58) \quad f = e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} (a + a^\alpha \psi_\alpha + b^{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta} + c^{\alpha\beta\gamma} \psi_{\alpha\beta\gamma} + d^{\alpha\beta\gamma\lambda} \psi_{\alpha\beta\gamma\lambda} + e^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu} \psi_{\alpha\beta\gamma\lambda\mu})$$

où les coefficients des polynomes $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ peuvent encore être pris orthogonaux à \vec{u} .

Le flux numérique de particules est le premier moment

$$i^\alpha = \int_{\mathbf{P}} f p^\alpha d\mathbf{P}$$

de f . Pour exprimer que \vec{u} est le vecteur-vitesse du fluide, il nous suffit d'écrire que la composante d'espace de t^α relativement à \vec{u} est nulle, c'est-à-dire que

$$(59) \quad \int_{\mathbf{P}} f \varepsilon^\alpha d\mathbf{P} = 0.$$

Puisque $\psi^\alpha = \varepsilon^\alpha$ et que les polynomes $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ sont orthogonaux par rapport au poids $e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma}$, la condition (59) se traduit, comme dans l'approximation d'ordre 3 (et comme dans toute approximation d'ordre fini) par la relation

$$(60) \quad a^\alpha = 0.$$

Le tenseur des pressions étant la composante d'espace du tenseur d'impulsion-énergie peut s'écrire

$$\pi_{\alpha\beta} = c \int_{\mathbf{P}} f \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta d\mathbf{P}.$$

Compte tenu de l'expression des polynomes

$$\begin{aligned} \psi &= 1 \\ \psi_{\alpha\beta} &= H_1 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + H_2 \gamma_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\pi_{\alpha\beta} = \frac{c}{H_1} \int_{\mathbf{P}} f \psi_{\alpha\beta} d\mathbf{P} - c \frac{H_2}{H_1} \gamma_{\alpha\beta} \int_{\mathbf{P}} f \psi d\mathbf{P}.$$

Grâce à l'orthogonalité des polynomes $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, on voit immédiatement que $\pi_{\alpha\beta}$ et \mathbf{P} ont encore les expressions (21) et (22) de l'approximation d'ordre 3 (mis à part le fait que b n'est plus nul).

Par contre, l'expression de la densité numérique propre n n'est plus la même; il est facile de voir que la nouvelle expression de n est une combinaison linéaire (dont les coefficients sont des fonctions de α) de a , b , d (nous continuons à utiliser la convention d'écriture suivante : dans un tenseur symétrique, la suppression de deux indices indique une contraction des indices supprimés : $d^{\alpha\beta} = d^{\alpha\beta\rho}_\rho$, $d = d^\rho_\rho$, etc.) et que la condition $\mathbf{P} = nkT$ se traduit par une proportionnalité (à coefficient dépendant de α) entre b et d .

Le courant de chaleur est une combinaison linéaire de c^α et de e^α .

Si on utilise l'équation de Boltzmann linéarisée, c'est-à-dire si, dans le second membre, on néglige les termes ne contenant pas a , on peut vérifier

que le développement du second membre selon les puissances tensorielles de $\vec{\varepsilon}$ est de la forme

$$\begin{aligned} I(f) = & ae^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma} [Ab + \varepsilon^\alpha (Bc_\alpha + De_\alpha) + \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta (Eb_{\alpha\beta} + Fb\gamma_{\alpha\beta} + Gd_{\alpha\beta}) \\ & + \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\gamma (Hc_{\alpha\beta\gamma} + ISc_{\alpha\gamma\beta\gamma} + Je_{\alpha\beta\gamma} + KSe_{\alpha\gamma\beta\gamma}) \\ & + \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\lambda \varepsilon^\mu (LSb\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} + MSb_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} + NSd_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} + Pd_{\alpha\beta\lambda\mu}) \\ & + \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\lambda \varepsilon^\mu \varepsilon^\nu (QSc_{\alpha\beta\gamma}\gamma_{\mu\nu} + RSc_{\alpha\gamma\beta\lambda}\gamma_{\mu\nu} + Se_{\alpha\beta\lambda\mu\nu} + TSe_{\alpha\beta\lambda\gamma}\gamma_{\mu\nu} + USE_{\alpha\gamma\beta\lambda}\gamma_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

On vérifie d'autre part que, dans l'hypothèse des faibles gradients, les composantes d'espace des coefficients symétrisés $K_{\alpha\beta\lambda\mu}$ et $K_{\alpha\beta\lambda\mu\nu}$ de $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\lambda \varepsilon^\mu \varepsilon^\nu$ au premier membre (divisé par $\frac{a}{4\pi} e^{-\frac{\alpha}{mc} p^\sigma u_\sigma}$) sont

$$K_{\alpha\beta\lambda\mu} = -\frac{1}{24} u^\sigma \partial_\sigma \text{Log } a S\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu},$$

$$K_{\alpha\beta\lambda\mu\nu} = \frac{1}{120 mc} S\tau_{\alpha\gamma}\beta\lambda\gamma_{\mu\nu}.$$

L'identification des 5 premières puissances tensorielles de $\vec{\varepsilon}$ nous fournit donc les relations

$$(61) \quad \frac{mc}{4\pi} (u^\alpha \partial_\alpha \text{Log } a - u^\alpha \partial_\alpha) = Ab,$$

$$(62) \quad \frac{mc}{4\pi} (\gamma_\alpha^\beta \partial_\beta \text{Log } a - \tau_\alpha) = Bc_\alpha + De_\alpha,$$

$$(63) \quad \frac{mc}{4\pi} \gamma_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} u^\sigma \partial_\sigma \text{Log } a - u^\sigma \partial_\sigma \alpha \right) - \frac{1}{2} mc \alpha \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\mu (\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho) \\ = Eb_{\alpha\beta} + Fb\gamma_{\alpha\beta} + Gd_{\alpha\beta},$$

$$(64) \quad -\frac{1}{6} \frac{mc}{4\pi} S\gamma_{\alpha\beta}\tau_\lambda = Hc_{\alpha\beta\lambda} + ISc_{\alpha\gamma}\beta\lambda + Je_{\alpha\beta\lambda} + KSe_{\alpha\gamma}\beta\gamma,$$

$$(65) \quad \frac{1}{24} \frac{mc}{4\pi} u^\sigma \partial_\sigma \text{Log } a S\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} \\ = LSb\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} + MSb_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} + NSd_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} + Pd_{\alpha\beta\lambda\mu}$$

$$(66) \quad \frac{1}{120} \frac{mc}{4\pi} f\tau_{\alpha\gamma}\beta\lambda\gamma_{\mu\nu} = QSc_{\alpha\beta\lambda}\gamma_{\mu\nu} + RSc_{\alpha\gamma}\beta\lambda\gamma_{\mu\nu} + Se_{\alpha\beta\lambda\mu\nu} \\ + TSe_{\alpha\beta\lambda\gamma}\gamma_{\mu\nu} + USE_{\alpha\gamma}\beta\lambda\gamma_{\mu\nu},$$

Contractons, dans la relation (64), β et λ , dans la relation (66) β et λ , μ et ν ; nous obtenons

$$-\frac{5}{6} \frac{mc}{4\pi} \tau_\alpha = (H + 5I)c_\alpha + (J + 5K)e_\alpha$$

$$-\frac{7}{24} \frac{mc}{4\pi} \tau_\alpha = (3Q + 30R)c_\alpha + (S + 3T + 30U)e_\alpha.$$

On en déduit que q_α , combinaison linéaire de c_α et e_α , est de la même forme que dans l'approximation d'ordre 3 :

$$q^\alpha = \chi \gamma^{\alpha\beta} (\partial_\beta T - T u^\sigma \nabla_\sigma u_\beta)$$

où nous avons encore posé $\alpha = \frac{mc^2}{kT}$.

Les relations (63) et (65) permettent de même de vérifier que le tenseur des pressions a encore la forme donnée par la relation (45).

Signalons, à titre de conclusion que la méthode que nous avons utilisée ici pour résoudre de façon approchée l'équation de Boltzmann relativiste s'applique également au cas où le fluide est chargé et placé dans un champ électromagnétique, au cas d'un mélange de plusieurs fluides, etc., et que nos travaux actuels sont orientés dans ce sens.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. VIGNON, Sur une méthode nouvelle de résolution approchée de l'équation de Boltzmann relativiste, *C. R. Acad. Sc.*, t. **266**, p. 594.
- [2] N. A. CHERNIKOV, *Acta Phys. Pol.*, t. **23**, 1963, p. 629.
- [3] G. PICHON, Calcul et utilisation des moments de la fonction de distribution d'un fluide parfait, *C. R. Acad. Sc.*, t. **264**, p. 544.
- [4] N. A. CHERNIKOV, *Acta Phys. Pol.*, t. **27**, 1964, p. 465.
- [5] C. MARLE, Sur une nouvelle famille de polynomes généralisant, dans l'espace temps de la relativité restreinte, les polynomes de Hermite-Grad, *C. R. Acad. Sc.*, t. **263**, p. 485.
- [6] J. L. SYNGE, *The relativistic gas*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1957.

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1968).

TABLE DES MATIÈRES

I. — LE FLUIDE RELATIVISTE	32
II. — RÉOLUTION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN RELATIVISTE . .	36
A. — Fonction de distribution de Maxwell	36
B. — Fonction de distribution pour un fluide avec processus dissipatifs. . .	39
1. — Approximation du troisième ordre	39
2. — Cas où la section de choc est constante.	52
3. — Cas où les termes quadratiques ne sont pas négligés	61
4. — Approximations suivantes	62
